

บทที่ 1

บทนำ

1. ความเป็นมาของการวิจัย

ทอพอโลยี (topology) (มาจากภาษากรีก: *topos* ซึ่งแปลว่า สถานที่ และ *logos* คือ การเรียน) เป็นสาขาหลักที่สำคัญอีกสาขาหนึ่งทางคณิตศาสตร์ ที่ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติทางรูปร่างที่ไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การดึง ยืด หด บีบ โดยไม่มีการฉีก การเจาะ หรือ การเชื่อมติดใหม่ ซึ่งเรียกสมบัติเหล่านี้ว่าความไม่แปรผันทางทอพอโลยี ทอพอโลยีมีอยู่เกือบทุกแขนงของคณิตศาสตร์ และนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาเศรษฐศาสตร์ ดาราศาสตร์ เคมี และฟิสิกส์ และได้มีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง เมื่อปี ค.ศ. 2002 **Á. Császár** [4] ได้นิยามและนำเสนอเกี่ยวกับปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไป ซึ่งกล่าวว่า ถ้า X เป็นเซตใดๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง และ g เป็นคลาสของเซตย่อยของ X จะเรียก g ว่า ทอพอโลยีวงนัยทั่วไป บน X ถ้า $G_i \in g$ สำหรับ $i \in I \neq \emptyset$ แล้ว $\bigcup_{i \in I} G_i \in g$ เรียก (X, g) ว่าปริภูมิเชิงทอพอโลยีวงนัยทั่วไป สมาชิกของ g เรียกว่าเซต g – **open** และส่วนเติมเต็มของเซต g – **open** เรียกว่าเซต g – **closed** ต่อมาในปี ค.ศ. 2010 C. Boonpok [7] ได้ให้นิยามของปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป ให้ X เป็นเซตใดๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง และ g_X^1 และ g_X^2 เป็นทอพอโลยีวงนัยทั่วไป บน X จะเรียก (X, g_X^1, g_X^2) ว่าปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป (bigenalized topological space) และศึกษาเซตของ $g_X^1 g_X^2$ – **open** และ $g_X^1 g_X^2$ – **closed** ในปี ค.ศ. 2012 S. Sompong และ B. Rodjanadid [8] ได้นิยามเซตหนาแน่นในปริภูมิสองโครงสร้างเล็กสุด และศึกษาสมบัติต่างๆของเซตนี้ และใน ค.ศ. 2013 S. Sompong และ S. Muangchan [9, 10] ได้นิยามเซตขอบและเซตภายนอกในปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และศึกษาสมบัติพื้นฐานของเซตทั้งสองนี้ และสำหรับการเรียนการสอนในด้านการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ การเข้าใจถึงบทนิยาม และทฤษฎีบท และสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง ซึ่งงานวิจัยทางด้านทอพอโลยี จะทำให้กระบวนการพิสูจน์ และกระบวนการคิดมีความถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์ สมเหตุสมผล มีหลักการพิสูจน์แบบใหม่ๆ และเกิดความหลากหลายในการพิสูจน์ เพื่อเพิ่มพูนความรู้ให้แก่นักศึกษาให้เข้าใจได้อย่างถูกต้อง

ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาเกี่ยวกับเซตหนาแน่นในปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป เพื่อเป็นการพัฒนาทักษะการพิสูจน์และการคิดที่สมเหตุสมผล ที่จะเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการพัฒนาด้านการเรียนการสอนและงานวิจัยด้านการพิสูจน์แก่นักศึกษาและผู้สนใจต่อไป

2. ความมุ่งหมายของการวิจัย

- 2.1 เพื่อสร้างนิยาม และทฤษฎีบทเกี่ยวกับเซตหนาแน่นในปริภูมิเชิงโบทอพอโลยีวงนัยทั่วไป
- 2.2 เพื่อส่งเสริมและเพิ่มพูนความรู้ในการเรียนการสอนทางด้านการพิสูจน์

3. ขอบเขตของงานวิจัย

งานวิจัยนี้จะศึกษาเกี่ยวกับเซตหนาแน่นในปริภูมิเชิงโบทอพอโลยีวงนัยทั่วไป โดยเป็นการนิยามและหาทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องของเซตหนาแน่นในปริภูมิเชิงโบทอพอโลยีวงนัยทั่วไป

4. ผลสำเร็จของงานวิจัย

- 4.1 เป็นการพัฒนาทักษะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อรองรับกับงานวิจัยทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์อื่นๆ
- 4.2 ได้งานวิจัยตีพิมพ์ระดับชาติ/นานาชาติ 1 เรื่อง
- 4.3 ได้รูปแบบขั้นตอนในการพัฒนาทักษะการพิสูจน์สำหรับการวิจัย การเรียนการสอนด้านการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์
- 4.4 เป็นทฤษฎีบทพื้นฐานสำหรับศาสตร์ที่เกี่ยวข้องนำไปใช้ต่อไป

หน่วยงานที่จะนำไปใช้ประโยชน์

ทุกสถาบันการศึกษาทั้งที่กำลังปฏิรูปการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลางและที่มีการสอนโดยเน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง

บทที่ 2

การทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาเกี่ยวกับเซตหนาแน่นในปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป โดยเป็นการนิยาม และหาทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องของเซตหนาแน่นในปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป ดังต่อไปนี้

2.1 ปริภูมิโทพอโลยีวงนัยทั่วไปและปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป

ให้ X เป็นเซตใดๆที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $\mathcal{g}_X$ เป็นคลาสของเซตย่อยของ X จะเรียก $\mathcal{g}_X$ ว่าโทพอโลยีวงนัยทั่วไป (generalized topology, GT) บน X ก็ต่อเมื่อ $\emptyset \in \mathcal{g}_X$ และ ถ้า $G_i \in \mathcal{g}_X$ สำหรับ $i \in I \neq \emptyset$ แล้ว $G = \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{g}_X$ เรียก $(X, \mathcal{g}_X)$ ว่าปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป (generalized topological space, GTS) บน X และเรียกสมาชิกของ $\mathcal{g}_X$ ว่าเซต $\mathcal{g}_X$ - *open* และส่วนเติมเต็ม (complement) ของเซต $\mathcal{g}_X$ - *open* เรียกว่าเซต $\mathcal{g}_X$ - *closed* $\mathcal{g}_X$ - *closer* ของเซต A และ $\mathcal{g}_X$ - *interior* ของเซต A

บทนิยาม 2.1.1 [4] ให้ $(X, \mathcal{g}_X)$ เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้ว $\mathcal{g}_X$ - *closer* ของเซต A และ $\mathcal{g}_X$ - *interior* ของเซต A นิยามโดย

$$\mathcal{g}Cl(A) = \bigcap \{F \mid A \subseteq F, X \setminus F \in \mathcal{g}_X\}$$

$$\mathcal{g}Int(A) = \bigcup \{U \mid U \subseteq A, U \in \mathcal{g}_X\}$$

ทฤษฎีบท 2.1.2 [4] ให้ $(X, \mathcal{g}_X)$ เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้ว

1. $\mathcal{g}Cl(A) = X \setminus \mathcal{g}Int(X \setminus A)$
2. $\mathcal{g}Int(A) = X \setminus \mathcal{g}Cl(X \setminus A)$

ทฤษฎีบท 2.1.3 [11] ให้ $(X, \mathcal{g}_X)$ เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A, B \subseteq X$ แล้ว

1. $\mathcal{g}Cl(X \setminus A) = X \setminus \mathcal{g}Int(A)$ และ $\mathcal{g}Int(X \setminus A) = X \setminus \mathcal{g}Cl(A)$
2. ถ้า $X \setminus A \in \mathcal{g}_X$ แล้ว $\mathcal{g}Cl(A) = A$ และถ้า $A \in \mathcal{g}_X$ แล้ว $\mathcal{g}Int(A) = A$
3. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $\mathcal{g}Cl(A) \subseteq \mathcal{g}Cl(B)$ และ $\mathcal{g}Int(A) \subseteq \mathcal{g}Int(B)$
4. $A \subseteq \mathcal{g}Cl(A)$ และ $\mathcal{g}Int(A) \subseteq A$
5. $\mathcal{g}Cl(\mathcal{g}Cl(A)) = \mathcal{g}Cl(A)$ และ $\mathcal{g}Int(\mathcal{g}Cl(A)) = \mathcal{g}Int(A)$

บทนิยาม 2.1.4 [7] ให้ X เป็นเซตใดๆที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $\mathcal{g}_X^1, \mathcal{g}_X^2$ เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป $(X, \mathcal{g}_X^1, \mathcal{g}_X^2)$ จะเรียกว่า ปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป (bigeneralized topological space, BGTS)

บทนิยาม 2.1.5 [7] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ จะเรียก A ว่า $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ ถ้า $g^i Cl(g^j Cl(A)) = A$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ ส่วนเติมเต็ม (complement) ของเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ จะเรียกว่าเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$

ตัวอย่าง 2.1.6 [7] ให้ $X = \{a, b, c, d\}$ และ $g_X^1 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ และ $g_X^2 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ แล้ว $\{c, d\}$ เป็น $g_X^1 g_X^2 - \text{closed}$

ทฤษฎีบท 2.1.7 [7] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้ว A เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซต $g_X^i - \text{closed}$ และ $g_X^j - \text{closed}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

ทฤษฎีบท 2.1.8 [7] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A, B \subseteq X$ ถ้า A และ B เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ แล้ว $A \cap B$ เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

หมายเหตุ 2.1.9 [7] ให้ $A, B \subseteq X$ ถ้า A และ B เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ แล้วไม่จำเป็นต้องเสมอไปที่ $A \cup B$ เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1.10 [7] ให้ $X = \{a, b, c, d\}$ และ $g_X^1 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$ และ $g_X^2 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$ แล้ว $\{a\}$ และ $\{b\}$ เป็น $g_X^1 g_X^2 - \text{closed}$ แต่ $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ ไม่เป็น $g_X^1 g_X^2 - \text{closed}$

ทฤษฎีบท 2.1.11 [7] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้ว A เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ ก็ต่อเมื่อ $A = g^i Int(g^j Int(A))$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

ทฤษฎีบท 2.1.12 [7] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A, B \subseteq X$ ถ้า A และ B เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ แล้ว $A \cup B$ เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

หมายเหตุ 2.1.13 [7] ให้ $A, B \subseteq X$ ถ้า A และ B เป็นเซต $g_X^i g_X^j - open$ แล้วไม่จำเป็นเสมอไปที่ $A \cap B$ เป็นเซต $g_X^i g_X^j - open$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1.14 [7] ให้ $X = \{a, b, c, d\}$ และ $g_X^1 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
และ $g_X^2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ แล้ว $\{a, b\}$ และ $\{b, c\}$ เป็น $g_X^1 g_X^2 - open$
แต่ $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ ไม่เป็น $g_X^1 g_X^2 - open$

2.2 เซตขอบในปริภูมิเชิงโบทอพอโลยีวางนัยทั่วไป

บทนิยาม 2.2.1 [9] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโบทอพอโลยีวางนัยทั่วไป $A \subseteq X$ และ $x \in X$ จะเรียก x ว่าเป็นจุดขอบ $(i, j) - g_X$ ของ A ถ้า $x \in g^i Cl(g^j Cl(A)) \cap g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$ จะเขียนแทนเซตของจุดขอบ $(i, j) - g_X$ ของ A ด้วย $gBdr_{ij}(A)$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

ตัวอย่าง 2.2.2 [9] ให้ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ กำหนด $g_X^1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$ และ $g_X^2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ แล้ว $gBdr_{12}(\{3\}) = X$ และ $gBdr_{21}(\{3\}) = \{2, 3, 4\}$
 $gBdr_{12}(\{2\}) = X = gBdr_{21}(\{2\})$

บทตั้ง 2.2.2 [9] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโบทอพอโลยีวางนัยทั่วไป และ A เป็นเซตย่อยของ X แล้วจะได้ $gBdr_{ij}(A) = gBdr_{ij}(X \setminus A)$ เมื่อ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

ทฤษฎีบท 2.2.3 [9] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโบทอพอโลยีวางนัยทั่วไป และ $A, B \subseteq X$ แล้ว สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ จะได้

1. $gBdr_{ij}(A) = g^i Cl(g^j Cl(A)) \setminus g^i Int(g^j Int(A))$
2. $gBdr_{ij}(A) \cap g^i Int(g^j Int(A)) = \emptyset$
3. $gBdr_{ij}(A) \cap g^i Int(g^j Int(X \setminus A)) = \emptyset$
4. $g^i Cl(g^j Cl(A)) = gBdr_{ij}(A) \cup g^i Int(g^j Int(A))$
5. $X = g^i Int(g^j Int(X \setminus A)) \cup gBdr_{ij}(A) \cup g^i Int(g^j Int(A))$ โดยที่ไม่มีส่วนร่วม

ทุกคู่

ทฤษฎีบท 2.2.4 [9] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโบทอพอโลยีวางนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้วสำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ จะได้

1. A เป็น $g_X^i g_X^j - closed$ ก็ต่อเมื่อ $gBdr_{ij}(A) \subseteq A$
2. A เป็น $g_X^i g_X^j - open$ ก็ต่อเมื่อ $gBdr_{ij}(A) \subseteq (X \setminus A)$

ทฤษฎีบท 2.2.5 [9] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงไบโทพอโลยีวางนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้ว $gBdr_{ij}(A) = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ A เป็น $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ และ $g_X^i g_X^j - \text{open}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

2.3 เขตภายนอกในปริภูมิเชิงไบโทพอโลยีวางนัยทั่วไป

บทนิยาม 2.3.1 [10] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงไบโทพอโลยีวางนัยทั่วไป ที่มี $A \subseteq X$ และ $x \in X$ จะเรียก x ว่าเป็นจุดภายนอก $(i, j) - g_X$ ของ A ถ้า $x \in g^i Int(g^j Int(X \setminus A))$ จะเขียนแทนเซตของจุดภายนอก $(i, j) - g_X$ ของ A ด้วย $gExt_{ij}(A)$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ จากบทนิยามจะได้ $gExt_{ij}(A) = X \setminus g^i Cl(g^j Cl(A))$

ตัวอย่าง 2.3.2 [10] ให้ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ กำหนด $g_X^1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ และ $g_X^2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ แล้ว $gExt_{12}(\{2\}) = \{1\}$ และ $gExt_{21}(\{2\}) = \emptyset$

บทตั้ง 2.3.3 [10] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงไบโทพอโลยีวางนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้วสำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ จะได้

1. $gExt_{ij}(A) \cap A = \emptyset$
2. $gExt_{ij}(X) = \emptyset$

ทฤษฎีบท 2.3.4 [10] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงไบโทพอโลยีวางนัยทั่วไป และ $A, B \subseteq X$ ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $gExt_{ij}(B) \subseteq gExt_{ij}(A)$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

ทฤษฎีบท 2.3.5 [10] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงไบโทพอโลยีวางนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้วสำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ จะได้ A เป็น $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ ก็ต่อเมื่อ $gExt_{ij}(A) = X \setminus A$

ทฤษฎีบท 2.3.6 [10] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงไบโทพอโลยีวางนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ ถ้า A เป็น $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ แล้ว $gExt_{ij}(X \setminus gExt_{ij}(A)) = gExt_{ij}(A)$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

ตัวอย่าง 2.3.7 [10] ให้ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ กำหนด $g_X^1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ และ $g_X^2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ แล้ว $gExt_{12}(\{2\}) = \{1\}$, $gExt_{12}(\{3\}) = \emptyset$ และ $gExt_{12}(\{2\} \cap \{3\}) = \{1, 2, 3\}$ ดังนั้น $gExt_{12}(\{2\} \cap \{3\}) \neq gExt_{12}(\{2\}) \cup gExt_{12}(\{3\})$

ทฤษฎีบท 2.3.8 [10] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงไบโทพอโลยีวางนัยทั่วไป และ $A, B \subseteq X$ แล้วสำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ จะได้

ถ้า A และ B เป็น $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ แล้ว $gExt_{ij}(A) \cup gExt_{ij}(B) = gExt_{ij}(A \cap B)$

ทฤษฎีบท 2.3.9 [10] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงไบโทพอโลยีวางนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$

แล้วสำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ จะได้ A เป็น $g_X^i g_X^j - \text{open}$ ก็ต่อเมื่อ $gExt_{ij}(X \setminus A) = A$

บทแทรก 2.3.10 [10] ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงไบโทพอโลยีวางนัยทั่วไป และ $A, B \subseteq X$

แล้วสำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

ถ้า A และ B เป็น $g_X^i g_X^j - \text{open}$ แล้ว $gExt_{ij}(X \setminus (A \cup B)) = A \cup B$

ตัวอย่าง 2.3.11 [10] ให้ $X = \{1, 2, 3\}$

กำหนด $g_X^1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ และ $g_X^2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$

แล้วจะได้ $gExt_{12}(\{1\}) = \{2, 3\}$, $gExt_{12}(\{2\}) = \{1, 3\}$ และ $gExt_{12}(\{1\} \cup \{2\}) = \emptyset$

ดังนั้น $gExt_{12}(\{1\} \cup \{2\}) \neq gExt_{12}(\{1\}) \cap gExt_{12}(\{2\})$

บทที่ 3

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

ในบทนี้จะนำเสนอผลงานวิจัยเกี่ยวกับบทนิยามของเซตหนาแน่นในปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และสมบัติต่างๆที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของเซตนี้

3.1 ผลการวิจัย

ผลการวิจัยนี้จะได้นำเสนอบทนิยาม ทฤษฎีบทและสมบัติต่างๆของเซตหนาแน่นในปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป พร้อมทั้งตัวอย่างประกอบที่ช่วยให้เข้าใจเกี่ยวกับโครงสร้างมากขึ้น

บทนิยาม 3.1.1 ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$

จะเรียก A ว่าเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X ถ้า $X = g^i Cl(g^j Cl(A))$

สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้ $X = \{1, 2, 3\}$

กำหนด $g_X^1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ และ $g_X^2 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$

แล้วจะได้ $g^1 Cl(g^2 Cl(\{1, 3\})) = X$ และ $g^2 Cl(g^1 Cl(\{1, 3\})) = X$

$g^1 Cl(g^2 Cl(\{2, 3\})) = \{2, 3\}$ และ $g^2 Cl(g^1 Cl(\{2, 3\})) = \{2, 3\}$

ดังนั้น $\{1, 3\}$ เป็นเซตหนาแน่น $(1, 2) - g_X$ ใน X และ $(2, 1) - g_X$ ใน X

แต่ $\{2, 3\}$ ไม่เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

ทฤษฎีบท 3.1.3 ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้วจะได้

A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X ก็ต่อเมื่อ $gExt_{ij}(A) = \emptyset$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

พิสูจน์ สมมติ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$

$(\Rightarrow)$ สมมติ A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

แล้วจะได้ $gExt_{ij}(A) = X \setminus g^i Cl(g^j Cl(A)) = \emptyset$

$(\Leftarrow)$ สมมติ $gExt_{ij}(A) = \emptyset$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

จะได้ $X \setminus g^i Cl(g^j Cl(A)) = \emptyset$ และ $g^i Cl(g^j Cl(A)) = X$

ดังนั้น A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

#

ทฤษฎีบท 3.1.4 ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีว่างนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$
 ถ้า A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X แล้วสำหรับทุก $\emptyset \neq F \subseteq X$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$
 สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ ซึ่ง $A \subseteq F$ จะได้ $F = X$
 พิสูจน์ สมมติ A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X แล้วสำหรับ $\emptyset \neq F \subseteq X$
 ที่เป็น $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ ซึ่ง $A \subseteq F$
 เนื่องจาก A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X จะได้ $g^i Cl(g^j Cl(A)) = X$
 โดยสมมติฐานที่ F ที่เป็น $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ ซึ่ง $A \subseteq F$
 ดังนั้น $X = g^i Cl(g^j Cl(A)) \subseteq g^i Cl(g^j Cl(F)) = F$
 นั่นคือ $F = X$ #

หมายเหตุ โดยทฤษฎีบทที่ 3.1.4 จะได้ ถ้า A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X แล้วมีเพียง X
 เท่านั้น ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ ที่ซึ่งบรรจุ A

ข้อสังเกต 3.1.5 ทฤษฎีบทที่ 3.1.4 ไม่เป็นจริง ถ้า F ไม่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.6 ให้ $X = \{1, 2, 3\}$ กำหนด $g_X^1 = \{\emptyset, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$
 และ $g_X^2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ แล้วจะได้ $g^1 Cl(g^2 Cl(\{1, 2\})) = X$
 ดังนั้น $\{1, 2\}$ เป็นเซตหนาแน่น $(1, 2) - g_X$ ใน X
 แต่ $\{1, 2\}$ ไม่เป็นเซต $g_X^1 g_X^2 - \text{closed}$ ใน X

ทฤษฎีบท 3.1.7 ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีว่างนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$
 ถ้า สำหรับ $\emptyset \neq F \subseteq X$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ ซึ่ง $A \subseteq F$ แล้วจะได้ $F = X$ ก็ต่อเมื่อ
 $G \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\emptyset \neq G \subseteq X$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$
 พิสูจน์ ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีว่างนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$
 $(\Rightarrow)$ สมมติ ถ้าสำหรับ $\emptyset \neq F \subseteq X$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ ซึ่ง $A \subseteq F$ แล้วจะได้ $F = X$
 สมมติ $G \cap A = \emptyset$ สำหรับบาง $\emptyset \neq G \subseteq X$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ
 $i \neq j$ ดังนั้น $A \subseteq X \setminus G$
 เนื่องจาก G เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ และ $X \setminus G$ เป็น $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ ดังนั้นโดยสมมติฐานจะได้
 $X \setminus G = X$ นั่นคือ $G = \emptyset$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $G \neq \emptyset$
 เพราะฉะนั้นจะได้ $G \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\emptyset \neq G \subseteq X$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ สำหรับ
 $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

($\Leftarrow$) สมมติ $G \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\emptyset \neq G \subseteq X$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ และ $\emptyset \neq F \subseteq X$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{closed}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ ที่ซึ่ง $A \subseteq F$

สมมติ $F \neq X$ ดังนั้นจะได้ $\emptyset \neq X \setminus F$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$

โดยสมมติฐานจะได้ $(X \setminus F) \cap A \neq \emptyset$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $A \subseteq F$

ดังนั้น $F = X$

#

บทแทรก 3.1.8 ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$

ถ้า A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X แล้ว $G \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\emptyset \neq G \subseteq X$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

พิสูจน์ สมมติ A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X โดยทฤษฎีบทที่ 3.1.4 และ 3.1.7 จะได้

$G \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\emptyset \neq G \subseteq X$ ที่เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$ #

ทฤษฎีบท 3.1.9 ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้ว

$gBdr_{ij}(A) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

พิสูจน์ ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$

($\Rightarrow$) สมมติ $gBdr_{ij}(A) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$

ดังนั้น $g^i Cl(g^j Cl(A)) \cap g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A)) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$

และจะได้ $X \setminus g^i Int(g^j Int(A)) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A)) \subseteq g^i Cl(g^j Cl(A))$

นั่นคือจะได้ $X \setminus g^i Cl(g^j Cl(A)) \subseteq g^i Int(g^j Int(A)) \subseteq g^i Cl(g^j Cl(A))$

ดังนั้น A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

($\Leftarrow$) สมมติ A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

ดังนั้น $gBdr_{ij}(A) = g^i Cl(g^j Cl(A)) \cap g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A)) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$

#

ทฤษฎีบท 3.1.10 ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$ แล้ว

A เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ และ เซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X ก็ต่อเมื่อ $gBdr_{ij}(A) = X \setminus A$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

พิสูจน์ ให้ (X, g_X^1, g_X^2) เป็นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวงนัยทั่วไป และ $A \subseteq X$

($\Rightarrow$) สมมติ A เป็นเซต $g_X^i g_X^j - \text{open}$ และ เซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X

แล้วโดยทฤษฎีบทที่ 2.2.4 และ 3.1.9 จะได้ $g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A)) \subseteq X \setminus A$

ดังนั้น $gBdr_{ij}(A) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A)) = X \setminus A$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

($\Leftarrow$) สมมติ $gBdr_{ij}(A) = X \setminus A$ สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

แล้วโดยทฤษฎีบทที่ 2.2.4 จะได้ A เป็นเซต $g_X^i g_X^j - open$ ใน X

และจะได้ $gBdr_{ij}(A) = X \setminus A = X \setminus g^i Int(g^j Int(A)) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 3.1.9 จะได้ A เป็นเซตหนาแน่น $(i, j) - g_X$ ใน X

สำหรับ $i, j = 1, 2$ และ $i \neq j$

#

ตัวอย่าง 3.1.11 ให้ $X = \{1, 2, 3\}$ กำหนด $g_X^1 = \{\emptyset, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$

และ $g_X^2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ แล้วจะได้ $g^1 Cl(g^2 Cl(\{1, 3\})) = X$

และ $g^1 Int(g^2 Int(\{1, 3\})) = \{1, 3\}$

ดังนั้น $\{1, 3\}$ เป็นเซต $g_X^1 g_X^2 - open$ และ เซตหนาแน่น $(1, 2) - g_X$ ใน X

นั่นคือ จะได้ $gBdr_{12}(\{1, 3\}) = \{2\}$

3.2 สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยจะได้บทนิยาม ทฤษฎีบทของเซตหนาแน่นในปริภูมิเชิงโทพอโลยีวางนัยทั่วไป ความสัมพันธ์ระหว่างเซตเปิด เซตปิด เซตขอบและเซตภายนอกกับ เซตหนาแน่นในปริภูมิเชิงโทพอโลยีวางนัยทั่วไป พร้อมทั้งตัวอย่างที่ทำให้เข้าใจได้เพิ่มเติมยิ่งขึ้น ซึ่งผลการวิจัยนี้สามารถขยายไปสู่ปริภูมิอื่นๆได้ เช่นปริภูมิเชิงโทพอโลยีวางนัยทั่วไปและโครงสร้างเล็กสุด

เอกสารอ้างอิง

1. ขวลิท บุญปก, ทอพอโลยีเบื้องต้น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยมหาสารคาม, 2549
2. สุเทพ จันทร์สมศักดิ์, ทอพอโลยีเบื้องต้น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน, 2522
3. อัสอารีย์ สมาแอ, ทอพอโลยี ทฤษฎีและหลักการทั่วไป : ภาควิชาคณิตศาสตร์และ
วิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
วิทยาเขตปัตตานี, 2552
4. *Á. Császár*, Generalized topology, generalized continuity, Acta Math. Hungar.,
Vol. 96, 2002, 351 - 357.
5. C. Boonpok, Biminimal structure spaces , International Mathematical Forum,
Vol. 15, 2010, no. 5, 703 - 707.
6. C. Boonpok, M-continuous function on biminimal structure spaces , Far East J. of
Math. Sci. (in prees), 2010.
7. C. Boonpok, Weakly Open Functions on Bigeneralized Topological Spaces, Int.
Journal of Math. Analysis, Vol. 4, 2010, no. 18, 891-897.
8. S. Sompong, and B. Rodjanadid, Dense Set in Biminimal Structure Spaces, Int.
Journal of Math. Analysis, Vol. 6, 2012, no. 6, 279-283.
9. S. Sompong, and S. Muangchan, Boundary Set on Bigeneralized Topological
Spaces, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, 2013, no. 2, 85-89.
10. S. Sompong, and S. Muangchan, Exterior Set on Bigeneralized Topological
Spaces, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, 2013, no. 15, 719 -723.
11. W. K. Min, Almost Continuity on Generalized Topological Spaces, Acta Math.
Hungar., Vol. 125, 2009, 121 - 125.

ผลงานตีพิมพ์

Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, 2013, no. 21, 999 - 1003
 HIKARI Ltd, www.m-hikari.com

Dense Sets on Bigeneralized Topological Spaces

Supunnee Sompong

Department of Mathematics and Statistics
 Faculty of Science and Technology
 Sakon Nakhon Rajabhat University
 Sakon Nakhon 47000, Thailand
 s_sanpinij@yahoo.com

Copyright © 2013 Supunnee Sompong. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract

The purpose of this paper is to introduce the concept and some fundamental properties of dense sets on bigeneralized topological spaces.

Keywords: bigeneralized topological spaces, dense sets

1 Introduction

In 2010, the notion of bigeneralized topological spaces and the concepts of weakly functions were introduced by C. Boonpok [1]. He also investigated some of their characterizations. In 2012, S. Sompong and B. Rodjanadid [2], introduced a definition of dense sets in biminimal structure spaces and study some fundamental of their properties. In 2013, S. Sompong and S. Muangchan [3, 4], introduced the definition of boundary and exterior set on bigeneralized topological spaces and the concepts of basic properties.

In this paper, we introduce the concept of dense sets on bigeneralized topological spaces and study some properties.

2 Preliminaries

Let X be a nonempty set and g be a collection of subsets of X . Then g is called a *generalized topology* (briefly *GT*) on X if $\emptyset \in g$ and if $G_i \in g$ for $i \in I \neq \emptyset$ then $G = \bigcup_{i \in I} G_i \in g$.

By (X, g) , we denote a nonempty set X with a generalized topology g on X and it is called a *generalized topological space* (briefly GTS) on X . The elements of G are called *g-open* sets and the complements are called *g-closed* sets.

Proposition 2.1. [5] Let (X, g) be a generalized topological space. For subsets A and B of X , the following properties holds;

1. $Cl(X \setminus A) = X \setminus Int(A)$ and $Int(X \setminus A) = X \setminus Cl(A)$;
2. If $X \setminus A \in g$, then $Cl(A) = A$ and if $A \in g$, then $Int(A) = A$;
3. If $A \subseteq B$, then $Cl(A) \subseteq Cl(B)$ and $Int(A) \subseteq Int(B)$;
4. $A \subseteq Cl(A)$ and $Int(A) \subseteq A$;
5. $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$ and $Int(Int(A)) = Int(A)$.

Definition 2.2. [1] Let X be a nonempty set and g_X^1, g_X^2 be generalized topologies on X . A triple (X, g_X^1, g_X^2) is called a *bigeneralized topological space* (briefly BGTS).

Definition 2.3. [1] A subset A of a bigeneralized topological space (X, g_X^1, g_X^2) is called $g_X^i g_X^j$ -closed if $A = g^i Cl(g^j Cl(A))$, where $i, j=1$ or 2 and $i \neq j$. The complement of $g_X^i g_X^j$ -closed set is called $g_X^i g_X^j$ -open.

Proposition 2.4. [1] Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological space. If A and B are $g_X^i g_X^j$ -closed, then $A \cap B$ is $g_X^i g_X^j$ -closed.

Proposition 2.5. [1] Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological space. Then A is $g_X^i g_X^j$ -open subset of (X, g_X^1, g_X^2) if and only if $A = g^i Int(g^j Int(A))$.

Proposition 2.6. [1] Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological space. If A and B are $g_X^i g_X^j$ -open, then $A \cup B$ is $g_X^i g_X^j$ -open.

Definition 2.7. [4] Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological space, A be a subset of X and $x \in X$. We called x is $g_X^i g_X^j$ -exterior point of A if $x \in g^i Int(g^j Int(X \setminus A))$. We denote the set of all $g_X^i g_X^j$ -exterior point of A by $gExt_{ij}(A)$ where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

From definition we have $gExt_{ij}(A) = X \setminus g^i Cl(g^j Cl(A))$.

Definition 2.8. [3] Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological space, A be a subset of X and $x \in X$. We called x is (i, j) - g_X -boundary point of A if $x \in g^i Cl(g^j Cl(A)) \cap g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$. We denote the set of all (i, j) - g_X -boundary point of A by $gBdr_{ij}(A)$ where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

From definition we have $gBdr_{ij}(A) = g^i Cl(g^j Cl(A)) \cap g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$.

Theorem 2.9. [3] Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological space and A be a subset of X . Then for any $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$, we have;

1. A is $g_X^i g_X^j$ -closed if and only if $gBdr_{ij}(A) \subseteq A$.
2. A is $g_X^i g_X^j$ -open if and only if $gBdr_{ij}(A) \subseteq (X \setminus A)$.

3 Dense Sets on Bigeneralized Topological Spaces

In this section, we introduce the concept of dense sets on bigeneralized topological spaces and study some fundamental of their properties.

Definition 3.1. Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological spaces, A be a subset of X . A is called $g_X^i g_X^j$ -dense set in X if $X = g^i Cl(g^j Cl(A))$, where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

Example 3.2. Let $X = \{1, 2, 3\}$. Define g -structures g_X^1 and g_X^2 on X as follows: $g_X^1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ and $g_X^2 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$. Then $g^1 Cl(g^2 Cl(\{1, 3\})) = X$ and $g^2 Cl(g^1 Cl(\{1, 3\})) = X$.

$g^1 Cl(g^2 Cl(\{2, 3\})) = \{2, 3\}$ and $g^2 Cl(g^1 Cl(\{2, 3\})) = \{2, 3\}$.

Hence $\{1, 3\}$ is $g_X^1 g_X^2$ -dense and $g_X^2 g_X^1$ -dense set in X .

But $\{2, 3\}$ is not $g_X^i g_X^j$ -dense set in X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

Theorem 3.3. Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological space and A be a subset of X . A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X if and only if $gExt_{ij}(A) = \emptyset$, where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

Proof. Let A be a subset of X .

($\Rightarrow$) Suppose that A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X . Then we have

$gExt_{ij}(A) = X \setminus g^i Cl(g^j Cl(A)) = \emptyset$, where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

($\Leftarrow$) Assume that $gExt_{ij}(A) = \emptyset$. Thus $X \setminus g^i Cl(g^j Cl(A)) = \emptyset$,

it follows that $g^i Cl(g^j Cl(A)) = X$. Therefore A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$. □

Theorem 3.4. Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological spaces and A be a subset of X . If A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X then for any non-empty $g_X^i g_X^j$ -closed subset F of X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$ such that $A \subseteq F$, we have $F = X$.

Proof. Suppose that A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X and F is $g_X^i g_X^j$ -closed subset of X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$ such that $A \subseteq F$. Since A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X , $X = g^i Cl(g^j Cl(A))$. By assumption, F is $g_X^i g_X^j$ -closed and $A \subseteq F$, it follows that, $X = g^i Cl(g^j Cl(A)) \subseteq g^i Cl(g^j Cl(F)) = F$. Hence $F = X$. □

Note: By Theorem 3.4 if A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X . Then only X is $g_X^i g_X^j$ -closed set in X such that containing A .

Remark 3.5. The Theorem 3.4 is not true if F is not $g_X^i g_X^j$ -closed. We can be seen from the following example.

Example 3.6. Let $X = \{1, 2, 3\}$. Define g -structures g_X^1 and g_X^2 on X as follows: $g_X^1 = \{\emptyset, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ and $g_X^2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$. Thus $g^1 Cl(g^2 Cl(\{1, 2\})) = X$, and we have $\{1, 2\}$ is $g_X^1 g_X^2$ -dense set in X . But $\{1, 2\}$ is not $g_X^1 g_X^2$ -closed set in X .

Theorem 3.7. Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological spaces and A be a subset of X . If for any non-empty $g_X^i g_X^j$ -closed subset F of X such that $A \subseteq F$, then $F = X$ if and only if $G \cap A \neq \emptyset$ for any non-empty $g_X^i g_X^j$ -open subset G of X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

Proof. Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological spaces and $A \subseteq X$.
 $(\Rightarrow)$ Assume that if for any non-empty $g_X^i g_X^j$ -closed subset F of X such that $A \subseteq F$, then $F = X$. Suppose that $G \cap A = \emptyset$ for some a non-empty $g_X^i g_X^j$ -open subset G of X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$. Thus $A \subseteq X \setminus G$. Since G is $g_X^i g_X^j$ -open, $X \setminus G$ is $g_X^i g_X^j$ -closed. By assumption, we have $X \setminus G = X$. Therefore $G = \emptyset$, this is contradiction. Hence $G \cap A \neq \emptyset$ for any non-empty $g_X^i g_X^j$ -open subset G of X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

$(\Leftarrow)$ Assume that $G \cap A \neq \emptyset$ for any non-empty $g_X^i g_X^j$ -open subset G of X and F is a non-empty $g_X^i g_X^j$ -closed subset of X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$ such that $A \subseteq F$. Suppose that $F \neq X$. Thus $X \setminus F$ is a non-empty $g_X^i g_X^j$ -open subset of X . By assumption, we have $(X \setminus F) \cap A \neq \emptyset$. This is contradiction with $A \subseteq F$. Therefore $F = X$. □

Corollary 3.8. Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological spaces and A be a subset of X . If A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X . Then $G \cap A \neq \emptyset$ for any non-empty $g_X^i g_X^j$ -open subset G of X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

Proof. Let A be $g_X^i g_X^j$ -dense set in X . By Theorem 3.4 and 3.7, we have $G \cap A \neq \emptyset$ for any non-empty $g_X^i g_X^j$ -open subset G of X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$. □

Theorem 3.9. Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological spaces and A be a subset of X . Then $gBdr_{ij}(A) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$ if and only if A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

Proof. Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological spaces and $A \subseteq X$.
 $(\Rightarrow)$ Assume that $gBdr_{ij}(A) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$.
 Thus $g^i Cl(g^j Cl(A)) \cap g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A)) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$.
 It follows that, $X \setminus (g^i Int(g^j Int(A))) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A)) \subseteq g^i Cl(g^j Cl(A))$.
 Then we have, $X \setminus (g^i Cl(g^j Cl(A))) \subseteq g^i Int(g^j Int(A)) \subseteq g^i Cl(g^j Cl(A))$.
 Hence A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

$(\Leftarrow)$ Assume that A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X . Thus we have,
 $gBdr_{ij}(A) = g^i Cl(g^j Cl(A)) \cap g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A)) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$. □

Theorem 3.10. Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological spaces and A be a subset of X . Then A is $g_X^i g_X^j$ -open and $g_X^i g_X^j$ -dense set in X if and only if $gBdr_{ij}(A) = X \setminus A$, where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

Proof. Let (X, g_X^1, g_X^2) be a bigeneralized topological spaces and $A \subseteq X$.

($\Rightarrow$) Assume that A is $g_X^i g_X^j$ -open and $g_X^i g_X^j$ -dense set in X .

Then by Theorem 2.9 and Theorem 3.9, we have $g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A)) \subseteq (X \setminus A)$.

Hence $gBdr_{ij}(A) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A)) = (X \setminus A)$, where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$.

($\Leftarrow$) Assume that $gBdr_{ij}(A) = X \setminus A$.

Then by Theorem 2.9 we have, A is $g_X^i g_X^j$ -open set in X .

And also $gBdr_{ij}(A) = X \setminus A = X \setminus (g^i Int(g^j Int(A))) = g^i Cl(g^j Cl(X \setminus A))$.

Thus by Theorem 3.9 we have, A is $g_X^i g_X^j$ -dense set in X , where $i, j = 1, 2$ and $i \neq j$. □

Example 3.11. Let $X = \{1, 2, 3\}$. Define g -structures g_X^1 and g_X^2 on X as follows: $g_X^1 = \{\emptyset, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ and $g_X^2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$. Thus $g^1 Cl(g^2 Cl(\{1, 3\})) = X$, and $g^1 Int(g^2 Int(\{1, 3\})) = \{1, 3\}$.

Hence we have $\{1, 3\}$ is $g_X^1 g_X^2$ -open and $g_X^1 g_X^2$ -dense set in X .

Then We also have $gBdr_{12}(\{1, 3\}) = \{2\}$.

Acknowledgement. The author would like to thank Sakon Nakhon Rajabhat University and National Research Council of Thailand (NRCT) for financial support.

References

- [1] C. Boonpok, *Weakly Open Functions on Bigeneralized Topological Spaces*, Int. Journal of Math. Analysis, **4** (18) (2010), 891–897.
- [2] S. Sompong and B. Rodjanadid, *Dense Set in Biminimal Structure Spaces*, Int. Journal of Math. Analysis, **6** (6) (2012), 279–283.
- [3] S. Sompong and S. Muangchan, *Boundary Set on Bigeneralized Topological Spaces*, Int. Journal of Math. Analysis, **7** (2) (2013), 85–89.
- [4] S. Sompong and S. Muangchan, *Exterior Set on Bigeneralized Topological Spaces*, Int. Journal of Math. Analysis, **7** (15) (2013), 719–723.
- [5] W.K. Min, *Almost Continuity on Generalized Topological Spaces*, Acta Math. Hungar., **125** (2009), 121–125.

Received: January, 2013

ประวัติและผลงานนักวิจัย

ชื่อ สุพรรณิ สมพงษ์

การศึกษา วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยมอันดับ 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะ
วิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น (ทุน พสวท.) (2545)
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (ทุน พสวท.) (2547)
ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ (หลักสูตรนานาชาติ)
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล (ทุน พสวท.) (2551)

ตำแหน่ง อาจารย์

สถานที่ทำงาน สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร

บทความ

1. สอาด ม่วงจันทร์ และ สุพรรณิ แสนพินิจ บทความทางวิชาการเรื่อง ตำแหน่งแห่งชัยชนะ นิตยสาร
คณิตศาสตร์ My Maths ปีที่ 5 ฉบับที่ 12 เล่มที่ 60 เดือนมกราคม 2553
2. สุพรรณิ แสนพินิจ และ สอาด ม่วงจันทร์ บทความทางวิชาการเรื่อง เผยความลับมายากลไฟชีเน่
นิตยสารคณิตศาสตร์ My Maths ปีที่ 6 ฉบับที่ 2 เล่มที่ 62, 1 เมษายน – 16 พฤษภาคม 2553

ผลงานวิจัย

1. S. Sanpinij, S. Muangchan and S. Seebut, A Student-Centered Learning in the Course of
Mathematical Proof Using T5 Teaching Method", Far East Journal of Mathematical
Education, Vol. 5 (2), 2010, pp 127-140.
2. S. Sompong, and S. Muangchan, Boundary Set in Biminimal Structure Spaces, Int.
Journal of Math. Analysis, Vol. 5, 2011, no. 7, 297-301.
3. S. Sompong, Exterior Set in Biminimal Structure Spaces, Int. Journal of Math. Analysis,
Vol. 5, 2011, no. 22, 1087 -1091.
4. S. Sompong, and S. Muangchan, The Relation of Boundary and Exterior Sets in
Biminimal Structure Spaces, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 6, 2012, no. 6, 285-289.
5. S. Sompong, S. Muangchan, and B. Rodjanadid, Neighborhood and Accumulation Points
in Biminimal Structure Spaces, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 6, 2012, no. 6, 273-
277.
6. S. Sompong, and B. Rodjanadid, Dense Sets in Biminimal Structure Spaces, Int. Journal
of Math. Analysis, Vol. 6, 2012, no. 6, 279-283.

7. S. Sompong, Some Serial Rings and Modules, *Int. Journal of Algebra*, Vol. 6, 2012, no. 2, 81-84.
8. S. Sompong, and S. Muangchan, Boundary Set on Bigeneralized Topological Spaces, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 7, 2013, no. 2, 85-89.
9. S. Sompong, and S. Muangchan, Exterior Set on Bigeneralized Topological Spaces, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 7, 2013, no. 15, 719 -723.