

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา เรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้เรียนโดยใช้กลวิธีการวาดภาพ โดยผู้วิจัยได้ทำการสอนด้วยตนเอง เก็บรวบรวมข้อมูลจากการตรวจแบบฝึกหัด การเขียนบันทึกการเรียนรู้ของนักเรียน แบบบันทึกหลังการสอน จากแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งหมด 9 แผน ซึ่งมุ่งเน้นให้นักเรียนใช้การวาดภาพ เพื่อเชื่อมโยงไปสู่การแก้โจทย์ปัญหา และทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเรื่องพื้นที่ผิว และปริมาตร ซึ่งผู้วิจัยขอนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล โดยแบ่งออกเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเรื่อง พื้นที่ผิว และปริมาตร

ตอนที่ 2 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

ตอนที่ 1 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเรื่อง พื้นที่ผิว และปริมาตร

เมื่อผู้วิจัยได้ดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ทั้ง 9 แผน เรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนทดสอบการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเรื่อง พื้นที่ผิว และปริมาตร ซึ่งมีจำนวน 5 ข้อ รวม 20 คะแนน ผลจากการทำแบบทดสอบปรากฏดังตาราง 3 ดังนี้



ตาราง 3 . แสดงจำนวน และร้อยละของนักเรียนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

คะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)	คิดเป็นร้อยละ
ร้อยละ 80 ขึ้นไป	3	13.64
ร้อยละ 70 – 79 ของคะแนนทั้งหมด	3	13.64
ร้อยละ 60 – 69 ของคะแนนทั้งหมด	2	9.09
ร้อยละ 50 – 59 ของคะแนนทั้งหมด	9	40.91
ต่ำกว่าร้อยละ 50 ของคะแนนทั้งหมด	5	22.72
รวม	22	100.00

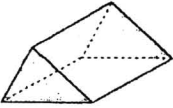
จากตาราง 3 พบว่า นักเรียนที่มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50 ของคะแนนทั้งหมด มีจำนวน 17 คน คิดเป็นร้อยละ 77.28 ของนักเรียนทั้งหมด และนักเรียนที่ได้คะแนนร้อยละ 50 – 59 ของคะแนนทั้งหมด ซึ่งมีจำนวน 9 คน พบว่า นักเรียนได้คะแนนในส่วนของการวาดรูป และเขียนแนวคิดจากโจทย์ปัญหา แต่ไม่สามารถทำในส่วนของการคำนวณได้

ตอนที่ 2 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนระหว่างจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติ และสามมิติ

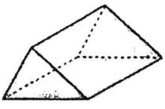
ในแผนการจัดการเรียนรู้มีเป้าหมายเพื่อให้ นักเรียนบอกความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสามมิติ และสองมิติ และจำแนกชนิดของรูปเรขาคณิตสามมิติ ซึ่งผู้วิจัยได้ให้นักเรียนช่วยกันจัดกลุ่มของรูปทรงเรขาคณิตสามมิติที่แจกให้ ประกอบด้วย ปริซึมฐานสามเหลี่ยม ปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า ปริซึมฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ทรงกระบอก ทรงกรวย พีระมิด และทรงกลม พบว่านักเรียนส่วนใหญ่สามารถแบ่งกลุ่มของรูปทรงเรขาคณิต 3 มิติได้ โดยนักเรียนได้จำแนกรูปตามฐาน และ ตามด้านข้าง โดยกลุ่มที่แบ่งตามฐาน จำแนกจากฐานเป็นรูปเรขาคณิตที่มีฐานเหมือนกัน 2 ฐาน มี 1 ฐาน และ ไม่มีฐาน และกลุ่มที่จำแนกตามด้านข้างสามารถจำแนกได้ว่า มีด้านข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสามเหลี่ยม และไม่เป็นรูปเหลี่ยม จากนั้นผู้วิจัยได้ให้รูปเรขาคณิต และให้นักเรียนบอกความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติ หรือสามมิติ ซึ่งนักเรียน

ส่วนใหญ่บอกได้ถูกต้องว่า รูปเรขาคณิตที่กำหนดให้ ประกอบด้วยรูปสองมิติ หรือสามมิติชนิดใด และสามารถบอกชื่อรูปเรขาคณิตสามมิตินั้นได้อย่างถูกต้อง ดังตัวอย่างในรูปที่ 14

รูปเรขาคณิต	ชนิดของรูปเรขาคณิต	
	สองมิติ	สามมิติ
	รูปสามเหลี่ยม 2 รูป รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 3 รูป	ปริซึมฐานสามเหลี่ยม

รูปที่ 14 แสดงการบอกความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติ และสามมิติ และชนิดของรูปสามมิติ

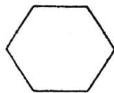
แต่ยังมีนักเรียนบางส่วนที่ยังไม่เข้าใจเกี่ยวกับการเรียกชื่อรูปสามมิติ และชนิดของรูปเรขาคณิต ดังรูปที่ 15 และ รูปที่ 16

รูปเรขาคณิต	ชนิดของรูปเรขาคณิต	
	สองมิติ	สามมิติ
	รูปสามเหลี่ยม 2 รูป รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 3 รูป	ปริซึมฐานสามเหลี่ยม เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ด้านเท่า

รูปที่ 15 แสดงความเข้าใจผิดเกี่ยวกับชนิดของรูปเรขาคณิตสามมิติ

จากรูปที่ 15 นักเรียนบอกว่ารูปที่กำหนดให้ประกอบด้วยรูปสองมิติ คือ รูปสามเหลี่ยม 2 รูป และ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 3 รูป และชนิดของรูปสามมิติ คือ ปริซึมมีฐานเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ด้านเท่า ผู้วิจัยได้อธิบายให้นักเรียนเพิ่มเติมว่า รูปที่กำหนดมาให้ ถ้าฐานเหมือนกันสองฐาน

เราจะเรียกว่าปริซึม และเราจะเรียกชื่อปริซึมตามฐานนั้น ดังนั้น รูปที่กำหนดให้นี้ เราจะเรียกว่า ปริซึมฐานสามเหลี่ยม เนื่องจากมีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากัน

รูปเรขาคณิต	ชนิดของรูปเรขาคณิต	
	สองมิติ	สามมิติ
	รูปหกเหลี่ยม 1 รูป	ปริซึมฐานหกเหลี่ยม

รูปที่ 16 แสดงความเข้าใจผิดในการบอกชนิดของรูปเรขาคณิตที่เป็นสองมิติ

จากรูปที่ 16 มีนักเรียนบางคนบอกว่ารูปนี้เป็นรูปสามมิติ คือ ปริซึมฐานหกเหลี่ยม ผู้วิจัย ได้อธิบายให้นักเรียนเข้าใจว่า รูปสามมิติจะมีความกว้าง ความยาว และความสูง แต่รูปสองมิติ จะมีเพียง ความกว้างและความยาว ดังนั้นรูปนี้จึงเป็นเพียงรูปสองมิติเท่านั้น

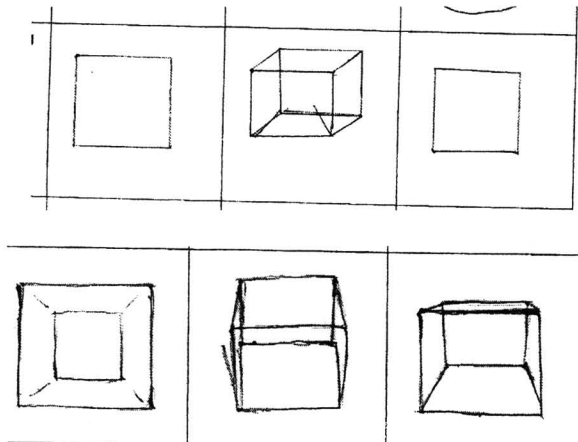
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง การวาดรูปสามมิติจากของจริง

ผู้วิจัยมีเป้าหมายให้นักเรียนฝึกวาดรูปจากมุมมองที่นักเรียนมองเห็นจากรูปสามมิติของจริง ที่ผู้วิจัยนำมาให้นักเรียนดู โดยผู้วิจัยได้นำรูปทรงกระบอกที่มีลักษณะใส มาให้นักเรียนสังเกต พร้อมทั้งวาดรูป ซึ่งรูปที่นักเรียนวาดนั้น ได้จากการมองในมุมต่าง ๆ คือ มองจากด้านบนโดยแนวสายตาตั้งฉากกับพื้น มองในระดับสายตา และมองจากด้านข้าง ซึ่งพบว่า นักเรียนทุกกลุ่ม สามารถวาดรูปทรงกระบอกได้ ดังรูปที่ 17

รูปที่ได้จากการมอง		
ด้านบนโดยแนวสายตา ตั้งฉากกับพื้น	มองในระดับปกติ	มองจากด้านข้าง
		

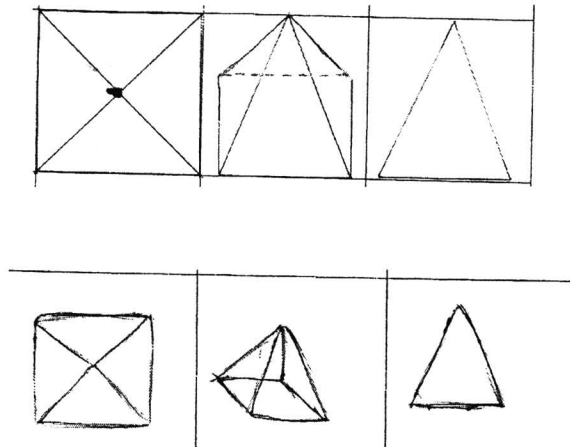
รูปที่ 17 แสดงการวาดรูปทรงกระบอกจากของจริง

จากการสังเกตแนวคิดในการวาดรูปของนักเรียน พบว่า เมื่อนักเรียนมองทรงกระบอกจากด้านบน โดยแนวสายตาตั้งฉากกับพื้น นักเรียนสามารถวาดเป็นรูปวงกลมได้ เมื่อนั่งมองในระดับสายตา นักเรียนสามารถวาดมาเป็นรูปทรงกระบอกได้ แต่เมื่อมองจากด้านข้าง นักเรียนเห็นเป็นรูปสี่เหลี่ยมฐานโค้ง จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการวาดฐานของทรงกระบอกควรเป็นวงกลม หรือวงรี ซึ่งนักเรียนได้อภิปรายว่า เนื่องจากมองเห็นฐานของทรงกระบอกที่เป็นรูปวงกลม แต่เมื่อวาดออกมาเป็นรูปวงกลมแล้ว ดูไม่สวยงาม ซึ่งนักเรียนบางคนแย้งว่าบางครั้งก็มองเห็นเป็นรูปวงรี แต่หลังจากพูดคุยกันถึงเหตุผลและความเหมาะสมแล้ว นักเรียนก็ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับการวาดรูปทรงกระบอก ควรวาดฐานเป็นรูปวงรี เนื่องจากวาดออกมาแล้วดูสมจริงที่สุด เพราะสามารถบอกได้ตรงกันว่า รูปที่วาดออกมานั้นเป็นรูปทรงกระบอก ซึ่งไม่ว่าจะมองจากมุมไหนก็สามารถบอกชนิดของรูปสามมิติได้ตรงกัน จากการมองเห็นซึ่งเป็นรูปวงกลม แต่ถ้ารูปที่วาดฐานเป็นรูปวงกลมนั้น มีเพื่อน ๆ บางคนไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นรูปทรงกระบอก จากนั้นผู้วิจัยได้ให้นักเรียนดูและวาดรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยม พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม กรวย และทรงกลม พบว่า ในการวาดรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยม พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม นักเรียนมีการพูดคุยกันเกี่ยวกับการวาดฐานของปริซึม และพีระมิด โดยนักเรียนวาดฐานของปริซึมและพีระมิด 2 แบบ คือ วาดฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กับเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูปที่ 18 และ 19



รูปที่ 18 แสดงการวาดรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ซึ่งจากการอภิปรายของนักเรียนจากการวาดฐานทั้ง 2 แบบ นักเรียนจึงได้ข้อสรุปว่า การวาดรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า ควรวาดฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จึงจะทำให้เข้าใจตรงกันว่าเป็นปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า

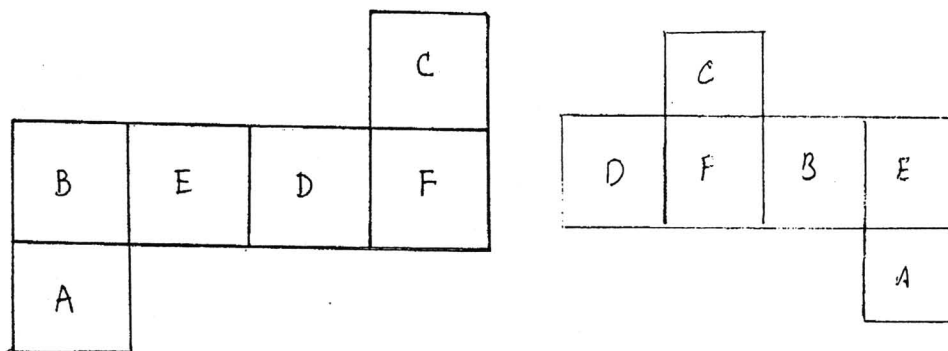


รูปที่ 19 แสดงการวาดรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในทำนองเดียวกับการวาดรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า นักเรียนแต่ละกลุ่มวาดฐาน ซึ่งมีทั้งฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และสี่เหลี่ยมด้านขนาน จากการอภิปรายของนักเรียน สรุปได้ว่า ในการวาดรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า นั้น สามารถวาดฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือสี่เหลี่ยมด้านขนานก็ได้ เนื่องจากเพื่อน ๆ ในห้องสามารถบอกได้ตรงกันว่า รูปที่วาดออกมานั้นเป็นรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า แต่การวาดฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะมีความสวยงามมากกว่า

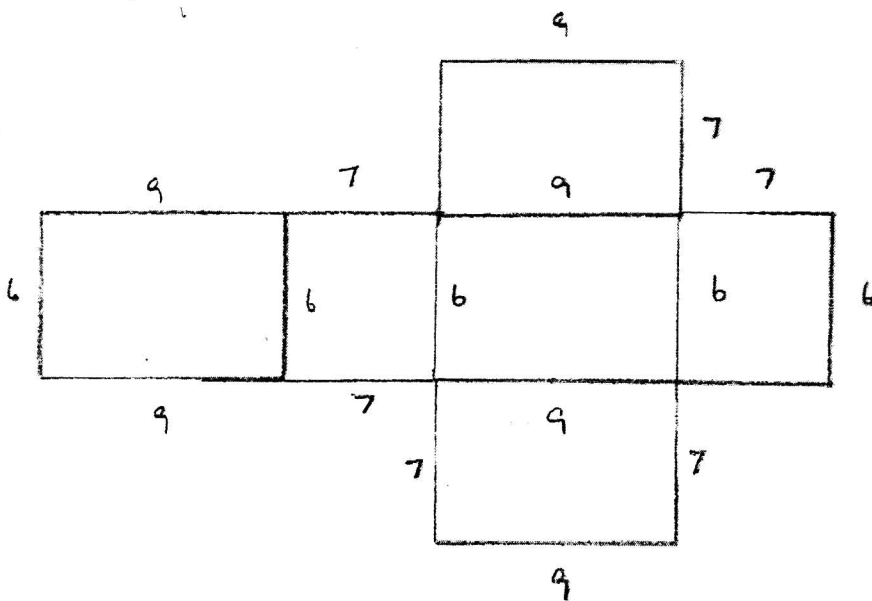
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง การวาดรูปคลี่ของรูปทรงสามมิติจากของจริง

สำหรับแผนการจัดการเรียนรู้นี้ ใช้เวลาทั้งหมด 2 คาบ ผู้วิจัยมีเป้าหมายเพื่อให้ นักเรียนวาดรูปคลี่ของรูปทรงสามมิติจากของจริง และบอกความยาวที่กำกับในแต่ละด้านของรูปทรงสามมิติที่คลี่ได้ โดยในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 นี้ ใช้ความรู้จากการวาดรูปสามมิติจากของจริงจากแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ซึ่งในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ผู้วิจัยได้นำกล่องทรงปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า มาให้นักเรียนวาดรูปสามมิติ จากนั้นผู้วิจัยเขียนตัวอักษรกำกับในแต่ละด้านของกล่อง แล้วให้นักเรียนจินตนาการว่ากล่องทรงปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แกะออกมาแล้ว จะมีลักษณะอย่างไร จากนั้นให้นักเรียนวาดรูปที่จินตนาการจากการแกะกล่องทรงปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า นั้น พร้อมทั้งระบุตัวอักษรกำกับในแต่ละด้าน พบว่า มีนักเรียนบางส่วนสามารถวาดรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปคลี่ของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าพร้อมทั้งระบุตัวอักษรกำกับในแต่ละด้านได้ถูกต้อง แต่นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถวาดรูปคลี่ได้ วาดได้เพียงรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่านั้น ผู้วิจัยจึงนำกล่องทรงปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีตัวอักษรกำกับในแต่ละด้านมาให้นักเรียนช่วยกันแกะ โดยมีข้อแม้ว่า กล่องที่นักเรียนแกะออกมานั้นต้องแผ่ออกมาเป็นแผ่นเดียว หลังจากที่ได้แกะกล่องแล้วพบว่านักเรียนสามารถวาดรูปคลี่ได้ แต่ยังมีบางส่วนที่ยังเขียนตัวอักษรสลับกันในแต่ละด้าน ผู้วิจัยได้แก้ปัญหานี้ โดยให้นักเรียนคลี่รูปออกมาทีละด้าน แล้วนำมาเปรียบเทียบกับรูปคลี่ที่นักเรียนได้วาดออกมาก่อนหน้าแล้ว พบว่าทำให้นักเรียนสามารถเขียนตัวอักษรกำกับในแต่ละด้านได้ถูกต้อง จากนั้น ผู้วิจัยได้ให้กลุ่มนักเรียนที่วาดรูปคลี่ที่แตกต่างกันออกมานำเสนอ ซึ่งลักษณะของรูปคลี่ที่ได้แตกต่างกัน ดังรูปที่ 20



รูปที่ 20 แสดงการวาดรูปคลี่พร้อมทั้งระบุตัวอักษรกำกับในแต่ละด้านของรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แตกต่างกัน

เมื่อนักเรียนวาดรูปคลี่ของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า พร้อมทั้งระบุตัวอักษรกำกับในแต่ละด้านได้แล้ว ผู้วิจัยและนักเรียนได้ร่วมกันอภิปรายถึงความสัมพันธ์ของรูปทรงสามมิติ และรูปคลี่ ซึ่งนักเรียนบอกได้ว่า รูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่คลี่ออกมานั้น ประกอบไปด้วยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจำนวน 6 รูป จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนช่วยกันประกอบกล่องที่นักเรียนคลี่ให้กลับไปเป็นกล่องทรงปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามเดิม ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดความยาวแต่ละด้านของกล่อง ดังนี้ กว้าง 6 เซนติเมตร ยาว 9 เซนติเมตร สูง 7 เซนติเมตร จากนั้นให้นักเรียนนำไปเปรียบเทียบกับรูปคลี่ที่นักเรียนได้วาดมาแล้ว พร้อมกับให้นักเรียนเขียนตัวเลขกำกับกับความยาวในแต่ละด้านของรูปคลี่ ซึ่งมีนักเรียนบางส่วนสามารถที่สามารถทำได้ ดังรูปที่ 21

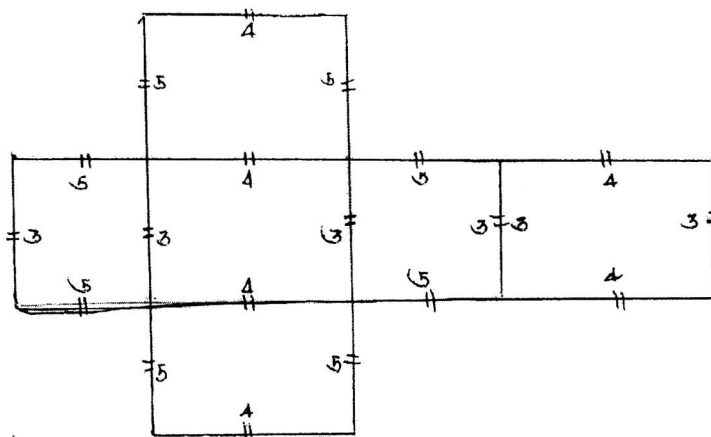
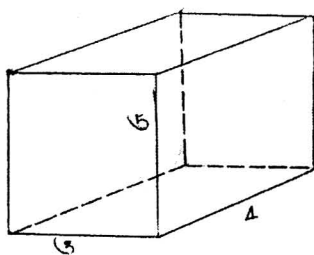


รูปที่ 21 แสดงการวาดรูปคลี่พร้อมทั้งระบุความยาวกำกับในแต่ละด้าน

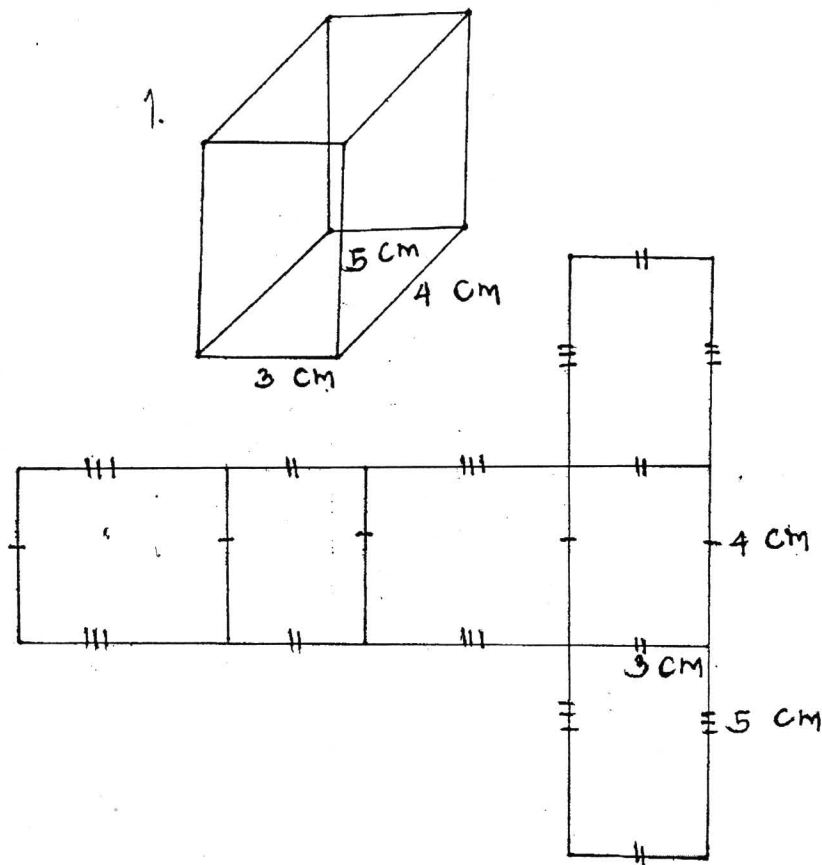
แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่ยังแยกไม่ออกว่าด้านไหนควรจะได้ตัวเลขอะไร ผู้วิจัยจึงนำกล่องทรงปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวกำกับแต่ละด้าน มาคลี่ให้นักเรียนดูทีละด้าน ๆ แล้วใส่ตัวเลขที่กำกับในแต่ละด้านลงไป นักเรียนจึงสามารถทำได้ จากนั้นผู้วิจัยได้ให้นักเรียนได้ฝึกวาดรูปคลี่ของรูปทรงสามมิติชนิดอื่นๆ โดยนักเรียนส่วนใหญ่สามารถทำได้ด้วยตนเอง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง การวาดรูปทรงสามมิติ และรูปคลี่จากข้อมูลที่กำหนด

เป้าหมายของแผนการจัดการเรียนรู้คือ ให้อาจารย์วาดรูปทรงสามมิติ และรูปคลี่จากข้อมูลที่กำหนด กำหนดมาให้ พร้อมทั้งระบุความยาวกำกับในแต่ละด้านให้ถูกต้อง ผู้วิจัยเริ่มโดยกำหนดข้อความ “ปริซึมฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ 5 เซนติเมตร สูง 8 เซนติเมตร” จากนั้นนักเรียน วาดรูปสามมิติและรูปคลี่จากข้อมูลที่กำหนด โดยที่ยังไม่ต้องคำนวณหาคำตอบ พบว่า นักเรียน ส่วนใหญ่สามารถวาดรูปสามมิติได้ถูกต้อง แต่ปัญหาที่พบคือ ตัวเลขที่ใส่กำกับด้านยังไม่ถูกต้อง ซึ่งเป็นนักเรียนเพียงส่วนน้อยเท่านั้น ผู้วิจัยจึงนำกล่องรูปทรงปริซึมฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สามารถ คลี่ได้ มาเขียนความยาวกำกับในแต่ละด้าน แล้วให้นักเรียนคลี่ แล้วจึงเขียนความยาวกำกับแต่ละ ด้านลงไป พบว่านักเรียนสามารถทำได้ แต่ในการวาดรูป นักเรียนมักจะกังวลว่า รูปที่ตัวเองวาด ออกมาไม่สวย จึงทำกรแก้ไขบ่อยๆ ทำให้เสียเวลาในการวาดรูปมากขึ้น ผู้วิจัยจึงบอกนักเรียนว่า รูปที่วาดออกมาเพียงวาดได้สมจริง และเขียนความยาวกำกับได้ถูกต้องเหมาะสม ก็เพียงพอแล้ว จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนลองทำแบบฝึกหัด ซึ่งก็พบว่านักเรียนสามารถวาดรูปได้หลากหลาย เช่น ผู้วิจัยได้กำหนดให้อาจารย์ “ปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง 3 เซนติเมตร ยาว 4 เซนติเมตร สูง 5 เซนติเมตร” นักเรียนได้อาจารย์สามมิติและรูปคลี่ได้ถูกต้อง และหลากหลาย ดังรูปที่ 22 และ รูปที่ 23

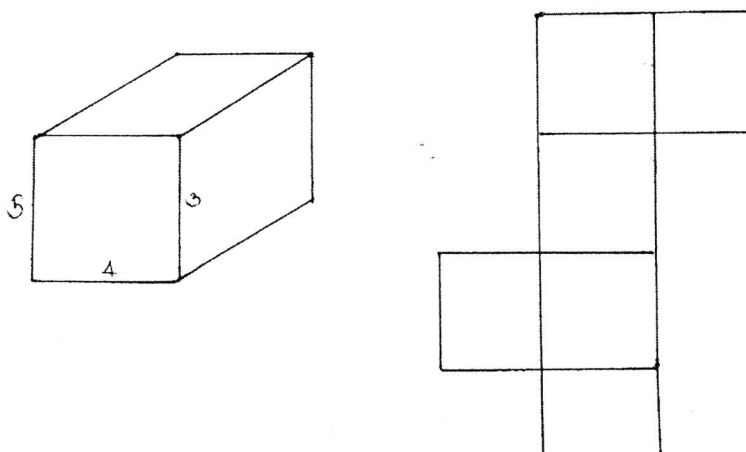


รูปที่ 22 แสดงการวาดรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปคลี่ของนักเรียนคนที่ 1



รูปที่ 23 แสดงการวาดรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปคลี่ของนักเรียนคนที่ 2

จากรูปที่ 22 และ รูปที่ 23 พบว่า นักเรียนสามารถวาดรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ กำหนดความยาวได้ถูกต้อง โดยทั้งสองคนนี้สามารถวาดรูปทรงสามมิติได้อย่างถูกต้อง แต่วาดรูปคลี่ในลักษณะที่ต่างกัน ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายถึงเหตุผลในการวาดรูปคลี่ออกมาได้แตกต่างกัน ซึ่งนักเรียนได้ร่วมอภิปรายว่า นักเรียนเรียนรู้ว่า รูปคลี่ของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าสามารถวาดได้หลายแบบ แต่สิ่งที่สำคัญที่สุดคือ ต้องใส่ความกำกับแต่ละด้านให้ถูกต้อง แต่ในข้อนี้ ก็มีนักเรียนบางคนที่ไม่สามารถเขียนความยาวกำกับด้านนั้นได้ถูกต้อง ดังรูปที่ 24



รูปที่ 24 แสดงการวาดรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปคลี่ของนักเรียนที่ยังวาดไม่ถูกต้อง

จากรูปที่ 24 พบว่า นักเรียนเขียนความยาวกำกับด้านที่กำหนดให้ไม่ถูกต้อง เนื่องจากนักเรียนเขียนตัวเลขที่เป็นด้านกว้างของปริซึม คือ 3 เซนติเมตรในส่วนที่เป็นด้านยาวของรูป ผู้วิจัยจึงได้อธิบายสิ่งที่ถูกต้องให้นักเรียน พบว่า นักเรียนสามารถแก้ไขได้ถูกต้อง

สำหรับรูปคลี่ที่นักเรียนวาดออกมานั้น จะเห็นว่ายังไม่ถูกต้อง และไม่เขียนความยาวกำกับด้าน จากการสอบถามนักเรียนให้เหตุผลว่า นักเรียนไม่สามารถจินตนาการได้ว่า ด้านที่คลี่ออกมาในแต่ละด้านนั้นด้านไหนเป็นด้านไหน นักเรียนยังต้องอาศัยกล่องปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แกะได้ มาช่วยในการเขียนความยาวกำกับในแต่ละด้าน

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง การหาพื้นที่ผิวของปริซึม และทรงกระบอก

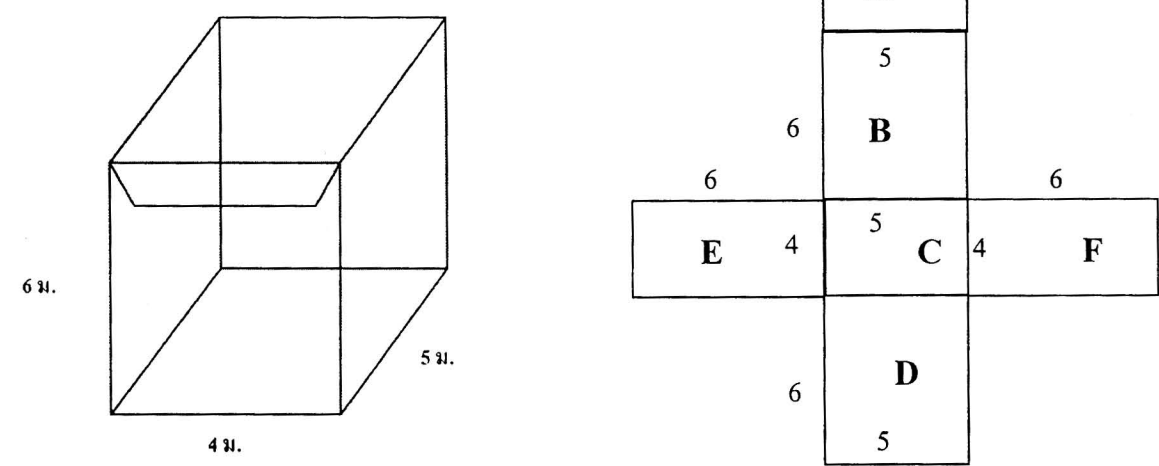
สำหรับแผนการจัดการเรียนรู้นี้ใช้เวลาทั้งหมด 2 คาบ มีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนใช้การวาดรูปสามมิติ การวาดรูปคลี่ จากข้อความที่กำหนดมาจากการเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 มาใช้ในการหาพื้นที่ผิวของปริซึม และทรงกระบอก ซึ่งผู้วิจัยไม่ได้บอกนักเรียนถึงสูตรที่ใช้ในการคำนวณหาพื้นที่ผิวของปริซึม และทรงกระบอก แต่ผู้วิจัยและนักเรียนได้ร่วมกันอภิปรายถึงความสัมพันธ์ของรูปคลี่ รูปสามมิติ และพื้นที่ผิว โดยนักเรียนได้เรียนรู้ว่า การหาพื้นที่ผิวของปริซึมและทรงกระบอก ก็คือการหาพื้นที่ของรูปคลี่นั่นเอง ในการทำโจทย์ปัญหานี้ผู้วิจัยได้กำหนดให้นักเรียนทำทั้งหมด 4 ส่วน คือ เมื่อมีโจทย์ปัญหามาให้ ในส่วนที่ 1 นักเรียนต้องวาดรูปสามมิติและรูปคลี่ ส่วนที่ 2 แสดงแนวคิดในการหาคำตอบ ส่วนที่ 3 แสดงวิธีทำ และ

ส่วนที่ 4 · ตรวจคำตอบ เมื่อผู้วิจัยได้ให้นักเรียนลองทำโจทย์พบว่า ในส่วนของการวาดรูปจากข้อความที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนใหญ่สามารถวาดได้ถูกต้อง แต่ในส่วนของการคำนวณหาพื้นที่ของรูป พบว่า มีนักเรียนไม่รู้สูตรในการหาพื้นที่ของรูป ทำให้ต้องใช้เวลาในการอธิบายสูตรในการหาพื้นที่

เนื่องจากนักเรียนยังไม่คุ้นเคยกับวิธีการแก้โจทย์ปัญหาที่ผู้วิจัยนำมาใช้ที่ต้องมีการวาดรูป การเขียนแนวคิด แสดงวิธีทำ และตรวจคำตอบ ผู้วิจัยจึงทำตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนดูเป็นตัวอย่างรูปแบบในการแก้โจทย์ปัญหา ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนหาพื้นที่ผิวของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า กำหนดความกว้าง 4 เมตร ยาว 5 เมตร สูง 6 เมตร

วาดรูปสามมิติ และรูปคลี่



แนวคิดในการหาคำตอบ หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม A , B , C , D , E และ F แล้วนำมารวมกัน หรือ หาพื้นที่ของ $(A + C) + (B + D) + (E + F)$

วิธีทำ

รูป A และ C มีขนาดเท่ากัน

$$\begin{aligned} \text{จะได้พื้นที่} &= 2 \times \text{กว้าง} \times \text{ยาว} \\ &= 2 \times 4 \times 5 \\ &= 40 \text{ ตารางเมตร} \end{aligned}$$

รูป B และ D มีขนาดเท่ากัน

$$\begin{aligned}\text{จะได้พื้นที่} &= 2 \times \text{กว้าง} \times \text{ยาว} \\ &= 2 \times 5 \times 6 \\ &= 60 \text{ ตารางเมตร}\end{aligned}$$

รูป E และ F มีขนาดเท่ากัน

$$\begin{aligned}\text{จะได้พื้นที่} &= 2 \times \text{กว้าง} \times \text{ยาว} \\ &= 2 \times 4 \times 6 \\ &= 48 \text{ ตารางเมตร}\end{aligned}$$

$$\text{พื้นที่ทั้งหมดเท่ากับ } 48 + 60 + 40 = 148 \text{ ตารางเมตร}$$

ตรวจคำตอบ หาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าแต่ละรูปแล้วนำมาบวกกัน

- รูป A มีพื้นที่ 20 ตารางเซนติเมตร
- รูป B มีพื้นที่ 30 ตารางเซนติเมตร
- รูป C มีพื้นที่ 20 ตารางเซนติเมตร
- รูป D มีพื้นที่ 30 ตารางเซนติเมตร
- รูป E มีพื้นที่ 24 ตารางเซนติเมตร
- รูป F มีพื้นที่ 24 ตารางเซนติเมตร

$$\text{พื้นที่ทั้งหมด คือ } 20 + 30 + 20 + 30 + 24 + 24 = 148 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

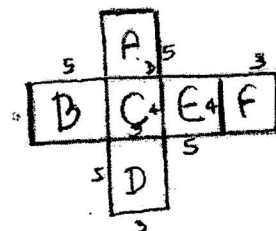
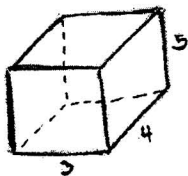
ดังนั้น พื้นที่ผิวของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ 148 ตารางเซนติเมตร

จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนทำโจทย์ปัญหาในแบบฝึกหัด เช่น

“ปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้าง 3 เซนติเมตร ยาว 4 เซนติเมตร สูง 5 เซนติเมตร อยากทราบว่าปริซึมนี้มีพื้นที่ผิวเท่าไร”

ซึ่งนักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ถูกต้อง ดังรูปที่ 25

วาดรูปสามมิติ และรูปคลี่



แนวคิดในการหาคำตอบ

$$\text{หา พ.ท. ของ } A+B+C+D+E+F$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} A=D \text{ พ.ท. ของ } A \text{ และ } D &= 2 \times 3 \times 5 \\ &= 2 \times 3 \times 5 = 30 \\ B=E \text{ พ.ท. ของ } B \text{ และ } E &= 2 \times 3 \times 4 \\ &= 2 \times 4 \times 5 = 40 \\ C=F \text{ พ.ท. ของ } C \text{ และ } F &= 2 \times 3 \times 4 \\ &= 2 \times 3 \times 4 = 24 \\ &= 94 \text{ ตร.ซม.} \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ

$$\begin{aligned} \text{พ.ท. } A &= 3 \times 5 = 15 \\ \text{พ.ท. } B &= 4 \times 5 = 20 \\ \text{พ.ท. } C &= 3 \times 4 = 12 \\ \text{พ.ท. } D &= 3 \times 5 = 15 \\ \text{พ.ท. } E &= 4 \times 5 = 20 \\ \text{พ.ท. } F &= 3 \times 4 = 12 \\ &= 94 \text{ ตร.ซม.} \end{aligned}$$

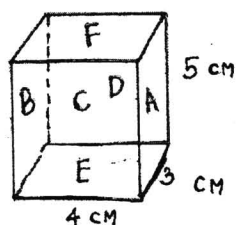
$\therefore$ ปริมาตรของกล่องคือ 94 ตร.ซม.

รูปที่ 25 แสดงการใช้การวาดรูปสามมิติ และรูปคลี่ มาช่วย ในการแก้โจทย์ปัญหา

จากรูปที่ 25 จะเห็นว่านักเรียนสามารถวาดรูปสามมิติ รูปคลี่ และเขียนแสดงแนวคิดได้อย่างถูกต้อง ซึ่งจากการวาดรูปคลี่ของนักเรียน ทำให้นักเรียนทราบว่ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่คลี่ออกมานั้น มีขนาดเท่ากัน 3 คู่ จึงทำให้นักเรียนแสดงวิธีทำโดยการหาพื้นที่ทีละคู่ โดยได้กำหนดตัวอักษรกำกับรูปสี่เหลี่ยมแต่ละรูปไว้ด้วย ซึ่งทำให้นักเรียนสามารถหาพื้นที่ผิวของรูปนี้ได้ถูกต้อง ในส่วนของการตรวจคำตอบ นักเรียนเกิดความสงสัยว่า เมื่อหาคำตอบได้แล้ว ทำไมจึงต้องมาตรวจคำตอบอีก ผู้วิจัยจึงได้อธิบายว่า การที่นักเรียนแสดงวิธีทำแล้วได้คำตอบมาแล้วนั้น คำตอบที่ได้อาจยังไม่ถูกต้อง ดังนั้นเราจึงต้องมีการตรวจสอบคำตอบอีกครั้งหนึ่งเพื่อความถูกต้อง ซึ่งจากรูปจะเห็นว่า การตรวจคำตอบของนักเรียน ทำโดยการหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยม ทั้ง 6 รูป มารวมกัน ซึ่งได้เท่ากับการหาพื้นที่ของ สี่เหลี่ยมทั้ง 3 คู่ แสดงว่าคำตอบที่นักเรียนหามาได้นั้นถูกต้อง นักเรียนจึงสรุปว่า ปริซึมอันนี้มีพื้นที่ผิว 94 ตารางเซนติเมตร

จากโจทย์ข้อเดียวกันนี้พบว่า มีนักเรียนบางส่วนที่ไม่ใช้รูปคลี่ก็สามารถหาคำตอบได้
 ดังรูปที่ 26

วาดรูปสามมิติ และรูปคลี่



แนวคิดในการหาคำตอบ

หาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมทุกตัวแล้วนำมารวมกัน

วิธีทำ

$$\text{พท. [A, B]} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$\text{พท. [C, D]} = 2 \times 4 \times 5 = 40$$

$$\text{พท. [E, F]} = 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$\therefore \text{พื้นที่ผิวรวมทั้งหมด} = 30 + 40 + 24 = 94 \text{ ตร. ซม.}$$

ตรวจคำตอบ

$$\text{พท. A} = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{พท. B} = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{พท. C} = 4 \times 5 = 20$$

$$\text{พท. D} = 4 \times 5 = 20$$

$$\text{พท. E} = 3 \times 4 = 12$$

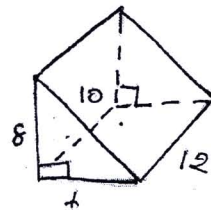
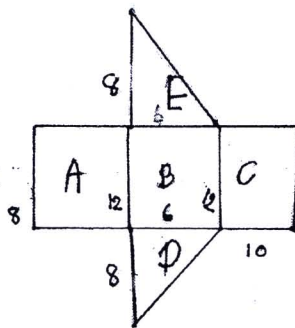
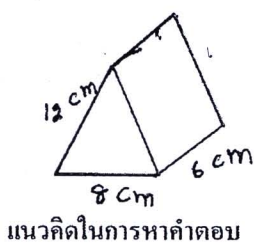
$$\text{พท. F} = 3 \times 4 = 12$$

$$\therefore \text{พื้นที่ A, B, C, D, E, F รวมกันได้} 94 \text{ ตร. ซม.}$$

รูปที่ 26 แสดงการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้การวาดรูปสามมิติ โดยที่ไม่ใช้รูปคลี่

เมื่อตรวจสอบแบบฝึกหัดการแก้โจทย์ปัญหาข้ออื่น ๆ เช่น “ซ็อกโกแลตแท่งหนึ่งเป็นรูปปริซึมฐานสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวของด้านประกอบมุมฉากยาว 8 เซนติเมตร และ 6 เซนติเมตร สูง 12 เซนติเมตร ถ้าต้องการห่อซ็อกโกแลตแท่งนี้ด้วยกระดาษห่อของขวัญ อยากทราบว่า ต้องไปซื้อกระดาษห่อของขวัญมาอย่างน้อยเท่าไร ” พบว่า นักเรียนทุกคนได้ใช้การวาดรูป เข้ามาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาทุกข้อ และบอกถึงแนวคิดที่ใช้ในการหาคำตอบได้ ถึงแม้ว่าในส่วนของการคำนวณและการตรวจคำตอบจะทำได้ไม่ถูกต้อง ดังรูปที่ 27

วาดรูปสามมิติ และรูปคลี่



วิธีทำ
พื้นที่ $A + B + D + E + C$

วิธีทำ

$A = 8 \times 12 = 96$
 $B = 12 \times 10 = 120$
 $D = 8 \times 6 = 48$
 $C = 12 \times 10 = 120$
 $E = 8 \times 6 = 48$

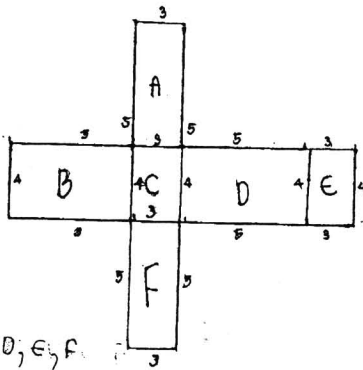
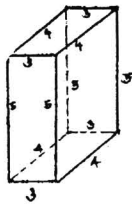


ตรวจคำตอบ

รูปที่ 27 แสดงการใช้การวาดภาพเข้ามาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา

จากการตรวจแบบฝึกหัดการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน พบว่านักเรียนที่ไม่วาดรูป จะไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้เลย แต่ถ้านักเรียนที่วาดรูปได้ จะสามารถบอกแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้ ในส่วนของการแสดงวิธีทำมีนักเรียนบางส่วนที่ไม่สามารถคำนวณหาคำตอบได้ ทั้งนี้เนื่องจากไม่รู้สูตรในการหาพื้นที่ของรูป 2 มิติ ผู้วิจัยจึงได้ทบทวนสูตรการหาพื้นที่ให้ พบว่านักเรียนสามารถแสดงวิธีทำได้ถูกต้อง และสามารถตรวจคำตอบได้ แต่นักเรียนส่วนใหญ่ไม่เขียนสรุปสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา ดังรูปที่ 28

วาดรูปตามมิติ และรูปคลี่



แนวคิดในการหาคำตอบ

พื้นที่ สิ่งสิ่ง ๖ ชิ้น คือ A, B, C, D, E, F
 ๖ สิ่งนี้ จะ ออก กัน

วิธีทำ

$$A \text{ หรือ } F = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$B \text{ หรือ } D = 2 \times 5 \times 4 = 40$$

$$C \text{ หรือ } E = 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$AF + BD + CE = 30 + 40 + 24 = 94 \text{ ตร.ม.}$$

ตรวจคำตอบ

สิ่งที่โจทย์ต้องการ A, B, C, D, E, F ออก กัน จะได้

$$A = 3 \times 5 = 15$$

$$B = 5 \times 4 = 20$$

$$C = 3 \times 4 = 12$$

$$D = 5 \times 4 = 20$$

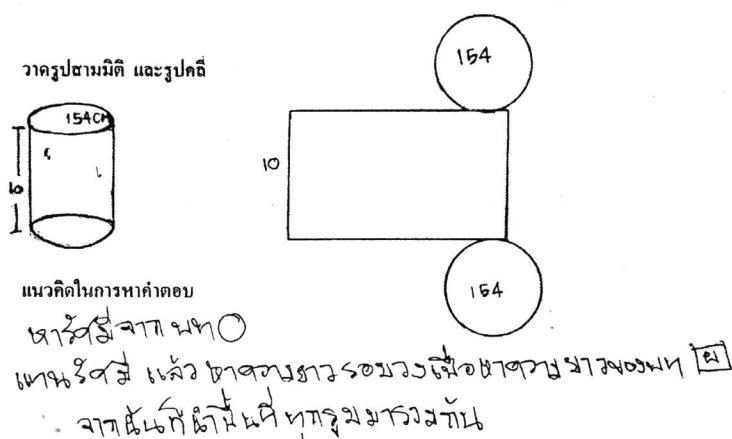
$$E = 3 \times 4 = 12$$

$$F = 3 \times 5 = 15$$

$$15 + 20 + 12 + 20 + 12 + 15 = 94 \text{ ตร.ม.}$$

รูปที่ 28 แสดงการขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาที่ไม่เขียนสรุปสิ่งที่โจทย์ต้องการ

สำหรับการแก้โจทย์ปัญหาในการหาพื้นที่ผิวของทรงกระบอก ผู้วิจัยไม่ได้ยกตัวอย่างให้นักเรียนแต่ก็พบว่านักเรียนสามารถใช้วิธีการในการแสดงการแก้ปัญหาล้าย ๆ กับการหาพื้นที่ผิวของปริซึม ตัวอย่างเช่น “กระป๋องปัดหัวทำรูปทรงกระบอกในหนึ่งมีพื้นที่ฐานข้างละ 154 ตารางเซนติเมตรสูง 10 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมด” สามารถแสดงการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนได้ ดังรูปที่ 29



วิธีทำ

พื้นที่ ฐานกลม $= \pi r^2$

$$154 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$154 \times \frac{7}{22} = r^2$$

$$49 = r^2$$

$$r = 7$$

ความยาวของหน้าผาก

หาความยาวรอบวง

$$\text{คือ } 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 7$$

$$= 44 \text{ CM}$$

ผล. ผิวของกระป๋องนี้คือ $154 + (44 \times 10)$

$$= 748 \text{ CM}^2$$

ตรวจสอบ

หาพื้นที่ ฐานกลม $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 7^2$$

$$= 22 \times 7$$

$$= 154$$

พื้นที่ผิวของกระป๋องนี้คือ 748 CM²

รูปที่ 29 แสดงการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้การวาดภาพ ในการหาพื้นที่ผิวของทรงกระบอก

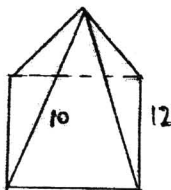
จากรูปที่ 29 นักเรียนเริ่มต้นโดยการวาดรูปทรงกระบอกแทนข้อความจากโจทย์ปัญหา จากนั้นจึงวาดรูปคลี่รูปทรงกระบอก ได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 รูป รูปวงกลม 2 รูป พร้อมทั้งกำกับความยาวที่กำหนดให้ แล้วนักเรียนจึงได้เขียนแนวคิดในการหาคำตอบ โดยนักเรียนได้ดูจากรูปคลี่ที่นักเรียนวาด ซึ่งจากการเข้าใจแนวคิดนี้ ทำให้นักเรียนสามารถแสดงวิธีหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง แต่จะเห็นว่าในการตรวจคำตอบ นักเรียนตรวจคำตอบเพียงการหาพื้นที่ของวงกลมเท่านั้น ซึ่งยังไม่ได้แสดงถึงการหาพื้นที่ผิวทั้งหมด และจากการตรวจแบบฝึกหัดพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 เรื่อง การหาพื้นที่ผิวของพีระมิด

แผนการจัดการเรียนรู้นี้มีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนหาพื้นที่ผิวของพีระมิด โดยใช้การวาดรูปสามมิติ การวาดรูปคลี่ มาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งแนวทางในการสอนจะคล้ายกับการหาพื้นที่ผิวของปริซึม และทรงกระบอก โดยผู้วิจัยแสดงการแก้โจทย์ปัญหาให้นักเรียนดูเป็นตัวอย่าง จากนั้นจึงให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัด จากการเดินดูสำรวจในห้อง พบว่าการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนทุกคนเริ่มต้นด้วยการวาดรูปสามมิติ และรูปคลี่ จากข้อความที่โจทย์กำหนด ซึ่งสามารถแสดงลักษณะการใช้การวาดภาพมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา ดังนี้

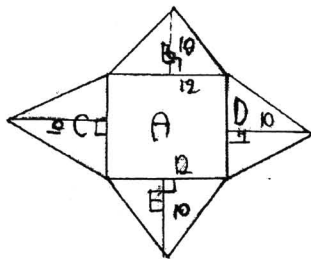
ตัวอย่างโจทย์ปัญหาในแบบฝึกหัดที่ 6 เช่น “พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 12 เซนติเมตร และมีสูงเอียงยาว 10 เซนติเมตร จะมีพื้นที่ผิวเท่ากับเท่าไร ” จากโจทย์ปัญหาข้างต้น นักเรียนแสดงวิธีในการหาคำตอบ ดังรูปที่ 30

วาดรูปสามมิติ และรูปคลี่



แนวคิดในการหาคำตอบ

พ.น. $A+B+C+D+E$



วิธีทำ

พ.น. $\triangle B=C=D=E$ ๓:๑

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 10$$

$$= 240$$

พ.น. A : ด้าน $\times$ ด้าน

$$= 12 \times 12 = 144$$

พ.น. นิว = $240 + 144 = 384$ ตร.ซม.

ตรวจคำตอบ

พ.น. $\triangle B = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$ ตร.ซม.

$C = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$ ตร.ซม.

$D = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$ ตร.ซม.

$E = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$ ตร.ซม.

พ.น. $\square A = 12 \times 12 = 144$ ตร.ซม.

พ.น. นิว = $60 + 60 + 60 + 60 + 144 = 384$ ตร.ซม.

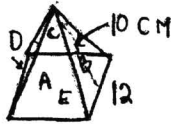
รูปที่ 30 แสดงการหาพื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยใช้รูปสามมิติ และรูปคลี่

จากรูปที่ 30 นักเรียนเริ่มจากการวาดรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสอย่างคร่าวๆ จากนั้นจึงวาดรูปคลี่ แล้วกำหนดตัวอักษรกำกับในแต่ละด้าน รูปคลี่ที่นักเรียนวาดเป็นรูปสี่เหลี่ยม

1 รูป รูปสามเหลี่ยม 4 รูป ในรูปคลี่แต่ละรูปนักเรียนได้เขียนความยาวกำกับในแต่ละด้านไว้ด้วยจากการวาดรูปคลี่ ทำให้นักเรียนมีแนวคิดในการหาคำตอบ นั่นคือ นำพื้นที่ทุกรูปมารวมกัน เมื่อมาถึงขั้นตอนในการแสดงวิธีทำ จากการวาดรูปคลี่และการเขียนความยาวกำกับในแต่ละด้าน แม้ว่านักเรียนจะวาดรูปสามเหลี่ยมไม่เท่ากัน ซึ่งจะเห็นว่า นักเรียนวาดสามเหลี่ยมรูป B ไม่เท่ากับรูปอื่นๆ แต่นักเรียนเข้าใจว่า รูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปนั้นเท่ากันทุกประการ นักเรียนจึงได้คำนวณ โดยการหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม 1 รูปแล้วใช้ 4 คูณ จากนั้นจึงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อคำนวณพื้นที่แต่ละรูปได้แล้ว จึงนำมารวมกัน สำหรับขั้นตรวจคำตอบ นักเรียนได้หาพื้นที่ของรูปแต่ละรูป แล้วนำมารวมกัน จากนั้นจึงสรุปคำตอบว่า พื้นที่ผิวของรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับ 384 ตร.ซม.

ในการแก้โจทย์ปัญหานี้ มีนักเรียนบางคนที่ไม่ต้องใช้รูปคลี่เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา แต่ใช้เพียงการวาดรูปสามมิติเท่านั้น ดังรูปที่ 31

วาดรูปสามมิติ และรูปคลี่



แนวคิดในการหาคำตอบ

หาพื้นที่ของสามเหลี่ยมแต่ละเหลี่ยมจึ้นรูปสี่เหลี่ยมแล้วนำมาบวกกัน

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{พท. รูป } \triangle &= 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 10 \right) \\ &= 4 \times 60 \\ &= 240 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{พท. รูป } \square &= 12 \times 12 \\ &= 144 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\text{พท. } \triangle \text{ 4 รูป และ } \square \text{ 1 รูป รวมกันแล้ว } 384 \text{ cm}^2$$

ตรวจสอบคำตอบ

$$\begin{aligned}\text{พท. } \triangle A &= \frac{1}{2} \times 12 \times 10 \\ &= 60 \\ B &= \frac{1}{2} \times 12 \times 10 \\ &= 60 \\ C &= \frac{1}{2} \times 12 \times 10 \\ &= 60 \\ D &= \frac{1}{2} \times 12 \times 10 \\ &= 60\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{พท. } \square E &= 12 \times 12 \\ &= 144\end{aligned}$$

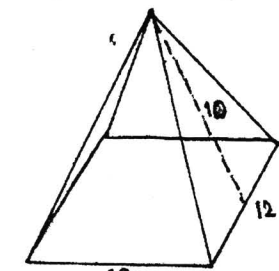
$$\therefore \text{ พท. ผนังสี่เหลี่ยมที่ผิว } 60 + 60 + 60 + 60 + 144 = 384 \text{ cm}^2$$

รูปที่ 31 แสดงการใช้การหาพื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยวาดเฉพาะรูปสามมิติ

จากรูปที่ 31 นักเรียนสามารถวาดรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส และเขียนความยาวกำกับด้าน และอักษรกำกับแต่ละด้านได้อย่างถูกต้อง เขียนแนวคิดในการหาคำตอบ หาคำตอบและตรวจคำตอบได้ถูกต้อง

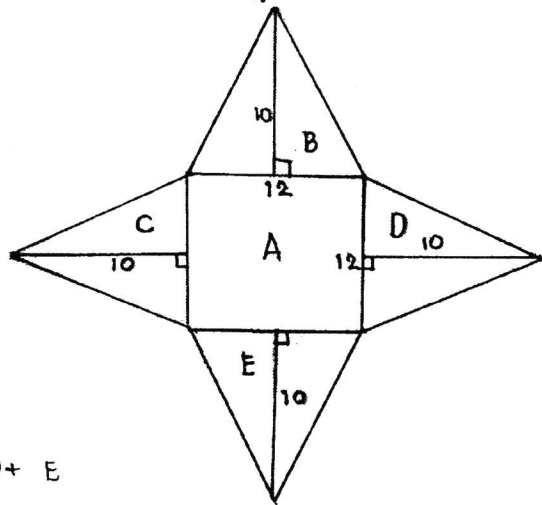
ในการแก้โจทย์ปัญหาข้อนี้ มีนักเรียนบางส่วนที่สามารถวาดรูปสามมิติ และรูปคลี่ได้ถูกต้อง แต่ไม่สามารถแสดงวิธีทำ และตรวจคำตอบ ดังรูปที่ 32

1. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 12 เซนติเมตร และมีสูงเอียงยาว 10 เซนติเมตร จะมีพื้นที่ผิวเท่ากับเท่าไร
วาดรูปสามมิติ และรูปคลี่



แนวคิดในการหาคำตอบ

ทก พ.พ. ข๑๑ $A + B + C + D + E$



รูปที่ 32 แสดงการวาดรูปสามมิติ และรูปคลี่ แนวคิดในการหาคำตอบ ในการแก้โจทย์ปัญหา

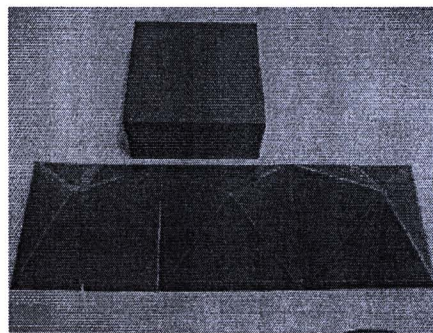
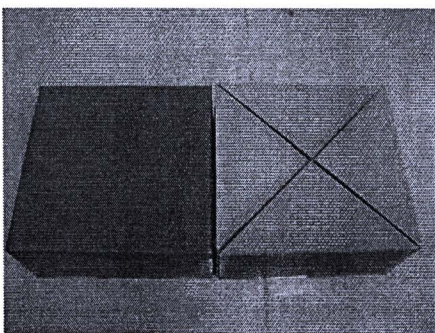
จากรูปที่ 32 นักเรียนสามารถวาดรูป และเขียนแนวคิดในการหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง แต่ นักเรียนไม่สามารถแสดงวิธีทำต่อได้ จากการสอบถาม ก็พบว่า นักเรียนไม่ทราบสูตรที่ใช้ในการหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส และสามเหลี่ยม แม้ว่าผู้วิจัยจะบอกสูตรในการหาพื้นที่แล้ว แต่นักเรียนทำได้เพียงการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่านั้น ไม่สามารถหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมได้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 เรื่อง การหาปริมาตรของปริซึม และพีระมิด

แผนการจัดการเรียนรู้นี้มีเป้าหมายเพื่อให้ นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิด และปริมาตรของปริซึม และสามารถหาปริมาตรของพีระมิดและปริซึม โดยใช้การวาดรูปมาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาได้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการสอนจำนวน 2 คาบ โดยเริ่มสอนการหาปริมาตรของปริซึม จากการนำกระดาษ A4 1 รีม แล้วให้นักเรียนวาดรูปทรงที่เห็นจากการซ้อนทับของกระดาษ แล้วจึงให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายว่าในการหาปริมาตรของกระดาษ 1 รีมนี้ น่าจะหา

ได้จากวิธีใด พร้อมกันนั้นได้ให้นักเรียนอภิปรายว่า กระดาษรีมนี้อัตลักษณ์เป็นรูปทรงสามมิติชนิดใด ซึ่งนักเรียนได้ร่วมกันอภิปราย และได้ข้อสรุปว่า กระดาษรีมนี้อัตลักษณ์เป็นปริซึมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก เนื่องจากมีฐาน 2 ฐานที่มีขนาดเท่ากัน และด้านข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และในการหาปริมาตรของปริซึมนี้ หาได้จากการหาพื้นที่ของกระดาษ 1 แผ่น แล้วคูณด้วยความสูงของกระดาษที่ซ้อนทับกันนั้น จึงทำให้นักเรียนสรุปได้ว่า การหาปริมาตรของปริซึม จะหาได้จากพื้นที่ของส่วนที่เป็นฐานทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก คูณกับความสูงของปริซึมนั้น จากนั้นผู้วิจัยจึงได้ยกตัวอย่างปริซึมชนิดอื่น ๆ แล้วถามนักเรียนว่า จะหาปริมาตรของรูปทรงเหล่านี้ได้อย่างไร นักเรียนก็สามารถเชื่อมโยงได้ว่า ถ้าหากฐานเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ก็จะใช้ ด้าน $\times$ ด้าน $\times$ ความสูง หรือถ้าฐานเป็นสามเหลี่ยม ก็ใช้ $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ ความสูงของปริซึม

ในคาบที่ 2 ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมโดยใช้สื่อที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริซึมและพีระมิด โดยผู้วิจัยนำกล่องกระดาษทรงปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าจำนวน 2 กล่อง ซึ่งอีกกล่องหนึ่งสามารถแยกออกมาเป็นรูปทรงพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดของฐานและความสูงเท่ากัน จำนวน 3 รูป ดังรูปที่ 33



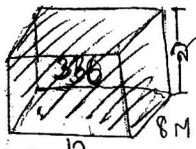
รูปที่ 33 สื่อที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริซึมและพีระมิด ที่มีฐานและความสูงเท่ากัน

จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนสังเกต และอภิปรายถึงสิ่งที่นักเรียนเห็น พบว่า กล่องรูปทรงปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 กล่อง เมื่อแยกออกมาแล้ว ได้ พีระมิด จำนวน 3 อันที่มีฐานและความสูงเท่ากับปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า จากนั้นผู้วิจัยจึงถามนักเรียนต่อว่า ถ้าหากปริมาตรของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า เป็น A ลูกบาศก์หน่วย นักเรียนคิดว่าปริมาตรของกล่องทรงพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า นั้น จะเป็นอย่างไร ซึ่งนักเรียนสามารถบอกได้ว่าปริมาตรของพีระมิดเป็น $\frac{1}{3} A$

ลูกบาศก์หน่วย หรือ ปริมาตรของปริซึมเป็น 3 เท่าของปริมาตรของพีระมิด ที่มีความสูง และฐานเดียวกัน

เมื่อให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 7 ตัวอย่างเช่น “ขุดบ่อปลาแห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 8 เมตร ยาว 12 เมตร ถ้าต้องการขุดดินขึ้นมาให้ได้ปริมาตรดิน 336 ลูกบาศก์เมตร จะต้องขุดบ่อปลาให้ลึกกี่เมตร ” พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ ซึ่งนักเรียนได้แสดง การแก้โจทย์ปัญหา ดังรูปที่ 34 ดังนี้

วาดรูปสามมิติ



แนวคิดในการหาคำตอบ

แทนตัวเลขในสูตร ปริมาตร = พท.ฐ $\times$ ส เพื่อหา ความสูง (ลึก)

วิธีทำ

$$\text{ปริมาตร} = \text{พท.ฐ} \times \text{ส}$$

$$= ก \times ย \times \text{ส}$$

$$336 = 8 \times 12 \times \text{ส}$$

$$\frac{336}{96} = \text{ส}$$

$$\text{ส} = 3.5 \text{ ม.}$$

ตรวจคำตอบ

$$\text{ปริมาตร} = \text{พท.ฐ} \times \text{ส}$$

$$= ก \times ย \times \text{ส}$$

$$336 = 8 \times 12 \times 3.5$$

$$336 = 336$$

∴ จะต้องขุดบ่อปลาให้ลึก 3.5 เมตร

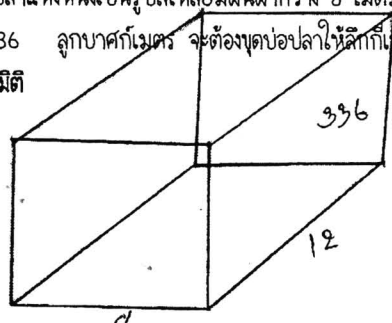
รูปที่ 34 แสดงการแก้โจทย์ปัญหาในการหาปริมาตรของปริซึมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

จากรูปที่ 34 นักเรียนเริ่มต้นโดยการวาดรูปคร่าว ๆ แทนข้อความจากโจทย์ปัญหา เป็นรูปปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า พร้อมทั้งกำหนดความยาว ความกว้าง และแรงงาในส่วนที่เป็น ปริมาตรตามที่โจทย์กำหนด นักเรียนมีแนวคิดในการหาคำตอบว่า ต้องแทนตัวเลขในสูตรการหา ปริมาตรของปริซึม และต้องหาส่วนที่เป็นความสูง และในการแสดงวิธีทำ นักเรียนก็สามารถแทน ค่าตัวเลขในสูตรได้อย่างถูกต้อง หาคำตอบได้ และตรวจสอบคำตอบได้อย่างถูกต้อง ซึ่งนักเรียนใช้ วิธีตรวจคำตอบโดยการแทนค่าความสูงที่หาได้ลงในสูตร ซึ่งได้คำตอบเท่ากับปริมาตรที่กำหนดให้

จากโจทย์ข้อเดียวกันนี้ มีนักเรียนบางคนสามารถวาดรูปสามมิติ และมีแนวคิดในการ หาคำตอบ แต่ไม่สามารถแสดงวิธีทำในการแก้โจทย์ปัญหาได้ ดังรูปที่ 35 ที่แสดงให้เห็นว่า นักเรียนไม่สามารถระบุความยาวแต่ละด้านในสูตรได้

2. ปูบ่อปลาหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 8 เมตร ยาว 12 เมตร ถ้าต้องการปูดินขึ้นมาให้ได้ปริมาตร ดิน 336 ลูกบาศก์เมตร จะต้องปูบ่อปลาให้ลึกกี่เมตร

วาดรูปสามมิติ



แนวคิดในการหาคำตอบ

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตร} &= \text{พหุคูณ} \times \text{สูง} \\ &= 8 \times 12 \times \text{สูง} \\ &= ? \end{aligned}$$

รูปที่ 35 แสดงการแก้ปัญหาในการหาปริมาตรของปริซึมทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งนักเรียน แก้ปัญหายังไม่สมบูรณ์

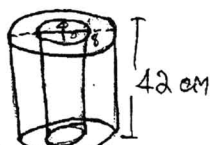
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 เรื่อง การหาปริมาตรของทรงกระบอก และ กรวย

แผนการจัดการเรียนรู้นี้มีเป้าหมายเพื่อให้ให้นักเรียนบอกความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของ ทรงกระบอกและปริมาตรของกรวย สามารถใช้การวาดรูปมาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาการหา ปริมาตรของทรงกระบอกและกรวย ผู้วิจัยเริ่มต้นโดยให้นักเรียนทำกิจกรรมในการหาปริมาตร ของทรงกระบอก ซึ่งผู้วิจัยได้เปลี่ยนจากกระดาษ A4 มาใช้กระดาษรูปวงกลมโดยให้ซ้อนทับกัน หลาย ๆ แผ่น แล้วให้นักเรียนวาดรูปว่ารูปที่ได้มีลักษณะเป็นรูปทรงสามมิติชนิดใด ซึ่งนักเรียน

สามารถวาดได้ว่าเป็นรูปทรงกระบอก จากนั้นก็เชื่อมโยงไปสู่การหาปริมาตรของทรงกระบอก ซึ่งนักเรียนสามารถอธิบายได้ว่า มีลักษณะคล้ายกับการหาปริมาตรของกระดาษ A4 ที่เป็นรีม นักเรียนจึงสามารถเชื่อมโยงได้ว่า การหาปริมาตรของทรงกระบอกน่าจะหาได้จาก การนำพื้นที่ของวงกลม 1 แผ่น คูณด้วยจำนวนแผ่นกระดาษวงกลมที่ซ้อนทับกันจนเกิดความสูงขึ้น ดังนั้น เมื่อฐานเป็นรูปวงกลม สูตรในการหาพื้นที่วงกลมคือ πr^2 ดังนั้น การหาปริมาตรของทรงกระบอก จะได้เป็น πr^2 คูณกับความสูงของทรงกระบอก

สำหรับการหาปริมาตรของกรวย ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำกิจกรรมโดยให้อุปกรณ์ คือ ทรงกระบอกและกรวยที่มีฐานและความสูงเท่ากัน จากนั้นให้นักเรียนใช้กรวยในการตักทราย เพื่อใส่ลงในทรงกระบอก แล้วถามนักเรียนว่า ต้องตักทรายกี่ครั้งจึงทำให้ทรงกระบอกเต็ม ซึ่งนักเรียนได้ทำกิจกรรม และได้ข้อสรุปว่า ใช้กรวยตักทราย 3 ครั้ง จึงทำให้เต็มทรงกระบอกพอดี ดังนั้น เมื่อเขียนความสัมพันธ์ จะได้ว่า ปริมาตรของทรายที่อยู่ในทรงกระบอก เท่ากับ 3 เท่าของปริมาตรของทรายที่อยู่ในกรวย ดังนั้น ในการหาปริมาตรของกรวย จึงได้เท่ากับ ปริมาตรของทรงกระบอกหารด้วย 3 ซึ่งนักเรียนสามารถแทนค่าเป็นสูตรสำหรับการหาปริมาตรของกรวยได้ว่า $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 8 เป็นการแก้โจทย์ปัญหาของทรงกระบอก และกรวย ตัวอย่างเช่น “ท่อระบายน้ำรูปทรงกระบอกท่อนหนึ่งยาว 42 เซนติเมตร วัดเส้นผ่านศูนย์กลางภายในและภายนอกได้ 4 เซนติเมตร และ 8 เซนติเมตร ตามลำดับ จงหาปริมาตรของวัสดุที่ใช้ทำท่อระบายน้ำท่อนนี้” นักเรียนได้แสดงการแก้โจทย์ปัญหา ดังรูปที่ 36

วาดรูปสามมิติ



แนวคิดในการหาคำตอบ

หา ปริมาตรของ ทรงกระบอกภายใน และ ถังนอก แล้วนำค่าลบกัน

วิธีทำ	ทรงกระบอกภายใน	ทรงกระบอก ถังนอก
	ปริมาตรของทรงกระบอก $\approx \pi r^2 h$	
	$\approx \frac{22}{7} \times 2 \times 2 \times 42$	$\approx \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 42$
	$\approx 22 \times 24$	$\approx 22 \times 96$
	$\approx 528 \text{ cm}^3$	$\approx 2112 \text{ cm}^3$

ผลลัพธ์ที่ได้ทำเพื่อหาความต่างเป็น $2112 - 528 = 1584 \text{ cm}^3$

ตรวจคำตอบ

ภายใน

$$\pi r^2 h$$

$$\approx \frac{22}{7} \times 2 \times 2 \times 42$$

$$\approx 22 \times 24$$

$$\approx 528$$

ถังนอก

$$\approx \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 42$$

$$\approx 22 \times 96$$

$$\approx 2112 \text{ cm}^3$$

ผลลัพธ์ที่ได้ทำเพื่อหาความต่างเป็น $2112 - 528 = 1584 \text{ cm}^3$

รูปที่ 36 แสดงการใช้การวาดรูปมาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาในการหาปริมาตรของทรงกระบอก

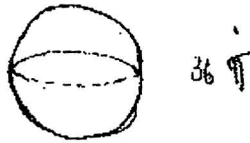
จากรูปที่ 36 นักเรียนเริ่มต้นวาดรูปทรงกระบอก พร้อมทั้งระบุความยาวกำกับในแต่ละด้านตามที่โจทย์กำหนดมา โดยนักเรียนทราบว่า จากเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 และ 8 เซนติเมตร ทำให้ได้ว่า รัศมีของทรงกระบอก คือ 2 และ 4 เซนติเมตร และนักเรียนมีแนวคิดในการหาคำตอบอย่างชัดเจนว่าจะต้องหาปริมาตรปริมาตรของทรงกระบอกภายในและภายนอก จากนั้นจึงนำมาลบกัน นักเรียนสามารถแสดงวิธีทำได้อย่างถูกต้อง แต่การตรวจคำตอบของนักเรียนยังหาปริมาตรซึ่งเหมือนกับวิธีทำที่แสดงไว้ จากนั้นเขียนสรุปคำตอบที่โจทย์ต้องการ นั่นคือ ปริมาตรของวัสดุที่ใช้ทำท่อระบายน้ำนี้คือ 1,584 ลูกบาศก์เซนติเมตร

เมื่อผู้วิจัยได้เดินสำรวจดูการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน พบว่า นักเรียนใช้การวาดรูปมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาทุกครั้ง ซึ่งในการวาดรูปนี้ นักเรียนจะวาดรูปอย่างคร่าวๆ ไม่ได้เน้นความถูกต้องตามขนาดที่ควรจะเป็น และเขียนความยาวกำกับในแต่ละด้าน ตามที่โจทย์กำหนด นักเรียนเห็นแนวทางในการหาคำตอบและแสดงวิธีทำได้ แต่ยังมีนักเรียนบางส่วนที่วาดได้แต่เพียงรูปสามมิติ และเขียนแนวทางในการหาคำตอบเท่านั้น แต่ไม่สามารถแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบได้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 เรื่อง การหาปริมาตรของทรงกลม

แผนการจัดการเรียนรู้นี้ ผู้วิจัยมีเป้าหมายให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาในการหาปริมาตรของทรงกลม ซึ่งผู้วิจัยเริ่มโดยการให้นักเรียนทำกิจกรรมเพื่อหาปริมาตรของทรงกลม โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างครึ่งทรงกลมกับทรงกระบอก ซึ่งรัศมีของทรงกระบอกเท่ากับรัศมีของครึ่งทรงกลม และความสูงของทรงกระบอกเป็นสองเท่าของรัศมีของครึ่งทรงกลม จากนั้นให้นักเรียนใช้ครึ่งทรงกลมในการตัดทราย เพื่อเทลงในทรงกระบอก แล้วถามนักเรียนว่าต้องตัดทรายกี่ครั้งจึงจะทำให้ทรงกระบอกเต็ม ซึ่งนักเรียนได้ทำกิจกรรม และได้ข้อสรุปว่า ใช้ครึ่งทรงกลมตัดทราย 3 ครั้ง จึงจะทำให้เต็มทรงกระบอกพอดี ดังนั้นเมื่อเขียนความสัมพันธ์จะได้ว่า ปริมาตรของทรายที่อยู่ในทรงกระบอก เท่ากับ 3 เท่าของปริมาตรของทรายที่อยู่ในครึ่งทรงกลม ดังนั้น ในการหาปริมาตรของทรงกลม จะได้ว่าปริมาตรของทรงกระบอก $= \frac{3}{2}$ ปริมาตรของทรงกลม ซึ่งนักเรียนสามารถแทนค่าเป็นสูตรสำหรับการหาปริมาตรของทรงกลมได้ว่า $\frac{4}{3} \pi r^3$ และเมื่อให้นักเรียนทำโจทย์ปัญหา ตัวอย่างเช่น “ ลูกโลกจำลองลูกหนึ่งมีปริมาตร 36π ลูกบาศก์นิ้ว จงหาเส้นผ่านศูนย์กลางของลูกโลกจำลองลูกนี้ ” นักเรียนได้แสดงการแก้โจทย์ปัญหา ดังรูปที่ 37 ดังนี้

วาดรูปสามมิติ



แนวคิดในการหาคำตอบ

จาก โจทย์ แล้ว คุณเดาว่า

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} \pi r^3 &= 36 \pi \\ r^3 &= \frac{36 \pi}{\frac{4}{3} \pi} = \frac{3}{4} \\ r^3 &= 27 \\ r &= 3\end{aligned}$$

$$\text{เส้นผ่านศูนย์กลาง} = 3 \times 2 = 6 \text{ นิ้ว}$$

ตรวจสอบ

$$\begin{aligned}\text{ปริมาตรของลูกโลก} &= \frac{4}{3} \pi \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= 36 \pi\end{aligned}$$

ดังนั้นเส้นผ่านศูนย์กลางของลูกโลกหาคำตอบคือ 6 นิ้ว

รูปที่ 37 แสดงการแก้โจทย์ปัญหาในการหาปริมาตรของทรงกลม

จากรูปที่ 37 พบว่า นักเรียนใช้การวาดรูปอย่างคร่าว ๆ มีการเขียนความยาวกำกับตามที่โจทย์กำหนด การทำโจทย์ปัญหาในการหาปริมาตรของทรงกลมนี้นักเรียนวาดรูปได้ถูกต้อง มีแนวทางในการหาคำตอบที่ชัดเจน คือ หาครึ่งหนึ่งของทรงกลมแล้วคูณด้วยสอง ดังจะเห็นได้จากที่

นักเรียนแสดงวิธีทำ จากนั้นนักเรียนก็ทำการตรวจคำตอบอีกครั้งหนึ่งว่า คำตอบที่หามาได้ในตอนแรกถูกต้องหรือไม่ โดยนักเรียนได้แทนค่ารัศมีที่หามาได้คือ 6 นิ้ว ในสูตรการหาปริมาตรของทรงกลม เมื่อได้คำตอบว่าปริมาตรของทรงกลมคือ 36π แสดงว่าคำตอบที่นักเรียนหามาได้นั้นถูกต้อง เมื่อนักเรียนตรวจคำตอบเสร็จแล้วและมั่นใจว่าคำตอบที่หามาได้ถูกต้องแล้วนักเรียนจึงสรุปในตอนท้ายอีกครั้งหนึ่งว่า เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมนี้อคือ 6 นิ้ว สำหรับการแก้ไขข้อปัญหาเรื่องปริมาตรของทรงกลมข้ออื่นๆ นั้น ยังมีนักเรียนบางส่วนที่วาดได้เฉพาะรูปสามมิติ และแนวคิดในการหาคำตอบเท่านั้น แต่ไม่สามารถคำนวณหาคำตอบ เนื่องจากว่ายังไม่เข้าใจเกี่ยวกับเลขยกกำลัง และยังขาดความสามารถทางด้านการคูณ