

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยเรื่อง การใช้กลวิธีการวาดภาพเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา เรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นกรอบและแนวทางในการศึกษา ดังนี้

1. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.1 ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.2 ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.3 กระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
3. ความหมายและประเภทของกลวิธีในการแก้ปัญห
 - 3.1 ความสำคัญของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหา
 - 3.2 การส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
4. แนวคิดการใช้กลวิธีการวาดภาพในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์
 - 4.1 การวาดภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติ
 - 4.2 ความรู้สึกเชิงปริภูมิ
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้เน้นการจัดการศึกษาโดยกำหนดสาระที่เป็นองค์ความรู้ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ประกอบไปด้วย 6 สาระ ดังนี้

- | | |
|-----------|------------------------------------|
| สาระที่ 1 | จำนวนและการดำเนินการ |
| สาระที่ 2 | การวัด |
| สาระที่ 3 | เรขาคณิต |
| สาระที่ 4 | พีชคณิต |
| สาระที่ 5 | การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น |
| สาระที่ 6 | ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์ |

สำหรับสาระที่ 3 เรขาคณิต ในช่วงชั้นที่ 3 (ม.1 – ม.3) ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ไว้ดังนี้

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติ และสามมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนิกภาพ ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิตในการแก้ปัญหาได้

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งอยู่ในช่วงชั้นที่ 3 ได้เรียนเนื้อหาเรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ซึ่งอยู่ในมาตรฐาน ค 3.1 มีมาตรฐานการเรียนรู้ดังนี้

1. อธิบายลักษณะและสมบัติของปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้
2. สร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่าย โดยไม่เน้นการพิสูจน์ได้
3. วิเคราะห์ลักษณะของรูปเรขาคณิตจากภาพสองมิติได้

ประกอบกับในสาระที่ 6 ซึ่งเกี่ยวกับทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ไว้ดังนี้

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2 : มีความสามารถในการให้เหตุผล

มาตรฐาน ค 6.3 : มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

มาตรฐาน ค 6.4 : มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

มาตรฐาน ค 6.5 : มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ในมาตรฐาน ค 6.1 ได้เน้นให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ ทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม อีกทั้งในมาตรฐาน ค 6.4 ได้เน้นให้นักเรียนได้เชื่อมโยงความรู้เนื้อหาต่างๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ

ดังนั้น นักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนเรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตร จะต้องมีการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างเนื้อหาเรื่อง รูปคลี่ รูปสองมิติ และสามมิติ เพื่อที่จะได้นำความรู้ ทักษะกระบวนการมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษา ได้กล่าวถึงความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

Adam Ellis & Beeson (1977) ได้กล่าวถึงความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ โจทย์ที่เกี่ยวกับภาษา (Word Problem) โจทย์ที่เกี่ยวกับเรื่องราว (Story Problem) หรือโจทย์ที่เกี่ยวกับการสนทนา (Verbal Problem) เป็นปัญหาที่อาจใช้ถ้อยคำ ข้อความ หรือตัวเลข ในการบรรยายถึงลักษณะของปัญหา

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537) ได้กล่าวถึงความหมายโดยสรุปของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณ หรือจำนวน หรือคำให้อธิบายเหตุผล ซึ่งต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการหาคำตอบ

เจษฎ์สุดา จันทร์เยี่ยม (2542) ได้สรุปความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ใด ๆ ที่เป็นปัญหา ซึ่งลักษณะของปัญหามอบด้วยข้อความ หรือข้อความประกอบกับจำนวน การหาคำตอบนั้น ผู้แก้ปัญหามต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ของผู้แก้ปัญห และวิธีการที่เหมาะสมเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของโจทย์ปัญหา

กรรณิการ์ เพ่งพิศ (2545) ได้กล่าวถึงโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ สถานการณ์ที่ประกอบไปด้วยข้อความ และตัวเลขที่ต้องการคำตอบ โดยที่ผู้แก้ปัญหามต้องตัดสินใจเลือกใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหานั้น โดยอาศัยความรู้ในการอ่าน โจทย์ และความสามารถในการคิดคำนวณมาประกอบกัน จึงจะสามารถแก้โจทย์ปัญหามได้ถูกต้อง

พรทิพา โสภณทัต (2552) ได้สรุปความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง โจทย์ที่เป็นข้อความ หรือ ข้อความกับตัวเลข แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งการได้มาซึ่งคำตอบต้องใช้ความรู้ และประสบการณ์ โดยอาศัยกระบวนการแก้ โจทย์ปัญหามาแก้ปัญหาม

จากความหมายที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ สถานการณ์ต่างๆ ที่อาจเป็นถ้อยคำ ข้อความ หรือตัวเลข ที่ต้องอาศัยความรู้และความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์และวิธีการที่เหมาะสมมาใช้ในการแก้ปัญหาม จึงจะสามารถแก้ปัญหามได้อย่างถูกต้อง

ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ สามารถแบ่งได้หลายประเภทขึ้นอยู่กับหลักเกณฑ์ที่ใช้ในการแบ่ง ซึ่งสามารถแบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

Polya (1957) ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ตามจุดประสงค์ ออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. ปัญหาให้ค้นหา (Problem to find) เป็นปัญหาที่ให้ค้นหาสิ่งที่ต้องการ ซึ่งอาจเป็นปัญหา

ในเชิงทฤษฎี หรือเชิงปฏิบัติ อาจเป็นรูปธรรม หรือนามธรรม ซึ่งลักษณะสำคัญของปัญหาแบบนี้ แบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือ สิ่งที่ต้องการหา สิ่งที่กำหนดมาให้ และเงื่อนไขการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหากับข้อมูลที่กำหนดให้มา ซึ่งในการแบ่งปัญหนี้ออกเป็น 3 ส่วนนี้ จะช่วยให้ผู้แก้ปัญหามีความเข้าใจ และสามารถกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหาได้ดีขึ้น

2. ปัญหาให้พิสูจน์ (Problem to prove) เป็นปัญหาที่ต้องการให้แสดงว่ามีความสมเหตุสมผลของข้อความที่โจทย์กำหนดมาให้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ ซึ่งลักษณะสำคัญของปัญหานี้ แบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ สมมติฐาน หรือสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ และสิ่งที่ต้องพิสูจน์หรือผลสรุป โดยการแยกลักษณะของปัญหาจะช่วยให้ผู้แก้ปัญหามีความเข้าใจปัญหา และสามารถกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหาได้อย่างรวดเร็ว

Baroody(1987) ได้แบ่งโจทย์คณิตศาสตร์ตามลักษณะโครงสร้างของปัญหนี้ออกเป็น 2 ประเภท สรุปได้ดังนี้คือ

1. โจทย์ปัญหาธรรมดา เป็นโจทย์ปัญหาที่พบได้ทั่วไปตามหนังสือเรียน โจทย์ปัญหาลักษณะนี้เป็นโจทย์ที่ให้ข้อมูลที่จำเป็นสำหรับการแก้โจทย์ปัญหามาให้ทั้งหมด มุ่งเน้นที่การฝึกทักษะใดทักษะหนึ่ง ทำให้สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้โดยง่าย

2. โจทย์ปัญหาไม่ธรรมดา เป็นโจทย์ปัญหาที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมากกว่าโจทย์ปัญหาธรรมดา ข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ นั้น มีทั้งข้อมูลที่จำเป็นกับข้อมูลที่ไมจำเป็น ซึ่งวิธีที่ใช้ในการหาคำตอบมีหลายวิธี และคำตอบที่ได้ อาจมีมากกว่า 1 คำตอบ และผู้แก้ปัญหามองต้องใช้ความรู้และความสามารถหลายอย่างจึงจะสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้

Kutz (1991 อ้างใน สิริพร ทิพย์คง ,2544 หน้า 26 - 28) ได้แบ่งการแก้ปัญหนี้ออกเป็นประเภทใหญ่ ๆ 2 ประเภท คือ

1. การแก้ปัญหที่พบเห็นทั่วไปหรือ โจทย์ปัญหา (routine or word problem solving) เป็นปัญหาที่พบเห็นกันโดยทั่วไป หรือปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย (routine problem) เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อน ผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยกับโครงสร้าง ลักษณะของปัญหา และวิธีการแก้ปัญห เช่น แอปเปิ้ลราคาผลละ 12 บาท ถ้าต้องการซื้อแอปเปิ้ล 8 ผล จะต้องจ่ายเงินเท่าไร

2. การแก้ปัญหที่ไม่เคยพบเห็นมาก่อน (non – routine problem solving) เป็นปัญหาที่ไม่เคยพบเห็นมาก่อน หรือปัญหาที่นักเรียนไม่คุ้นเคย (non – routine problem) เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน ผู้แก้ปัญหามองจะต้องประมวลความรู้ ความคิดรวบยอด และหลักการต่างๆ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

2.1 ปัญหากระบวนการ (process problem) เป็นปัญหาที่ต้องใช้กระบวนการคิดอย่างมีลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหา

2.2 ปัญหาในรูปปริศนา (puzzle problem) เป็นปัญหาที่ท้าทาย และให้ความ สนุกสนาน

กระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ในการแก้ปัญหาดัง ๆ ต้องใช้ความคิดซึ่งอาศัยกระบวนการทางสมอง ประสบการณ์
ความรู้ที่ได้ศึกษามา ความพยายาม และการหยั่งรู้ เพื่อจะตัดสินใจว่าจะใช้วิธีการใดในการแก้ปัญหานั้น ซึ่ง สิริพร ทิพย์คง (2544) ได้เสนอองค์ประกอบที่ช่วยในการแก้ปัญหามีดังนี้

1. ประสบการณ์ เช่น สิ่งแวดล้อมรอบ ๆ ตัว พื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์
วิธีการแก้ปัญหาคู่ที่เคย ลักษณะของโจทย์ปัญหาที่คุ้นเคย อายุ
2. จิตพิสัย เช่น ความสนใจ ความตั้งใจ ความอดทน ความกระตือรือร้น
ความกลัว แต่นักเรียนก็รู้สึกรู้ว่าจำเป็นต้องทำ ความพยายาม
3. สติปัญญา เช่น ความสามารถทางด้านการอ่าน ความสามารถในการให้เหตุผล
ความจำ ความสามารถในการคิดคำนวณ ความสามารถในการวิเคราะห์ ความสามารถในการมอง
ภาพ 3 มิติ

Polya (1957) ได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เป็นที่นาเชื่อถือ และยอมรับกันโดยทั่วไป
ซึ่งกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของโพลยา มีทั้งหมด 4 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the problem) ในขั้นตอนนี้ต้อง
เข้าใจว่าโจทย์ถามอะไร โจทย์กำหนดอะไรมาให้ และเพียงพอสำหรับการแก้ปัญหานั้นหรือไม่
สามารถสรุปปัญหาออกมาเป็นภาษาของตนเองได้ ถ้ายังไม่ชัดเจนในโจทย์ อาจใช้การวาดรูป และ
แยกแยะสถานการณ์ หรือเงื่อนไขในโจทย์ออกเป็นส่วน ๆ ซึ่งจะช่วยให้เข้าใจโจทย์ปัญหาได้
มากขึ้น

ขั้นที่ 2 การวางแผนแก้ปัญหา (Devising a plan) ผู้เรียนมองเห็นความสำคัญของ
ข้อมูลต่างๆ ในโจทย์ปัญหาอย่างชัดเจนมากขึ้น เป็นขั้นที่ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์
ถามกับข้อมูล หรือสิ่งที่โจทย์กำหนด ถ้าหากไม่สามารถหาความสัมพันธ์ได้ ก็ควรอาศัยหลักการ
ของการวางแผนการแก้ปัญหาดังนี้

- โจทย์ปัญหาลักษณะนี้เคยพบมาก่อนหรือไม่ มีลักษณะคล้ายคลึงกับโจทย์
ปัญหาที่เคยทำมาแล้วอย่างไร
- เคยพบโจทย์ปัญหาลักษณะนี้เมื่อไร และใช้วิธีการใดในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
- ถ้าอ่านโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ครั้งแรกไม่เข้าใจ ควรอ่านโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
แล้ววิเคราะห์ความแตกต่างของปัญหานี้กับปัญหาที่เคยทำมาก่อน

ขั้นที่ 3 การดำเนินการตามแผน (Carrying out the plan) ขั้นตอนนี้เป็นการลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ เพื่อให้ได้คำตอบของปัญหาด้วยการรู้จักเลือกวิธีการคิดคำนวณสมบัติ กฎ หรือสูตรที่เหมาะสมมาใช้

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบผล (Looking back) สำหรับขั้นตอนนี้เป็นการตรวจสอบเพื่อให้แน่ใจว่าผลลัพธ์ที่ได้ถูกต้องสมบูรณ์ โดยการพิจารณาและตรวจสอบว่าผลลัพธ์ถูกต้อง และมีเหตุผลที่น่าเชื่อถือหรือไม่ ตลอดจนกระบวนการในการแก้ปัญหา ซึ่งอาจจะใช้วิธีการอีกวิธีหนึ่งตรวจสอบเพื่อดูว่า ผลลัพธ์ที่ได้ตรงกันหรือไม่ หรืออาจใช้การประมาณค่าของคำตอบอย่างคร่าว ๆ

ความหมายและประเภทของกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ความหมายของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่าน ได้ให้ความหมายของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Heddens & Sreer (1992 อ้างใน เจษฎ์สุตา จันทร์เอี่ยม, 2542 , หน้า 20) ได้กล่าวถึงกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้โดยสรุปได้ว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง เทคนิคหรือวิธีการที่นักเรียน หรือผู้แก้โจทย์ปัญหา นำมาใช้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และเป็นสิ่งที่ช่วยในการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนด้วย

Kennedy & Tipps (1994) ได้ให้ความหมายโดยสรุปของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นวิธีการเฉพาะในการใช้หาคำตอบ โดยเลือกให้เหมาะสมกับกับสภาพของปัญหาแต่ละปัญหา

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537) กล่าวว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง เทคนิคหรือวิธีการเฉพาะที่เหมาะสมกับการแก้ปัญหแต่ละปัญหาและเป็นเครื่องช่วยนำทางในการแก้ปัญหา

เจษฎ์สุตา จันทร์เอี่ยม (2542) สรุปความหมายของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง วิธีการเฉพาะที่เหมาะสมกับสภาพปัญหาแต่ละปัญหา ซึ่งเป็นเครื่องมือที่ช่วยชี้แนะ นำทางในการแก้โจทย์ปัญหา โดยที่ผู้แก้ปัญหาคต้องเลือกใช้ให้เหมาะสมกับลักษณะของโจทย์ปัญหา

จากความหมายที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง เทคนิควิธีการเฉพาะที่นำมาเป็นเครื่องช่วยในการหาคำตอบ ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาโดยต้องมีการเลือกใช้ให้เหมาะสมกับแต่ละปัญหา

ประเภทของกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นักวิชาการและนักการศึกษาหลายท่านได้ศึกษาและเสนอกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้มากมาย ดังนี้

Kennedy & Tipps (1997) ได้เสนอกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ 11 กลวิธี ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. การปฏิบัติเพื่อออกจากปัญหา (Act it out) เป็นกลวิธีที่ใช้การสร้างสถานการณ์ให้นักเรียนได้เรียนรู้จากการปฏิบัติ
2. การค้นหาแบบรูป (Look for and use a pattern) เป็นการหาคำตอบจากการวิเคราะห์แบบรูปที่โจทย์ให้มา
3. การใช้แบบจำลอง (Make a model) เป็นการนำอุปกรณ์ หรือเครื่องมืออื่น ๆ มาช่วยในการหาคำตอบ
4. การวาดภาพ หรือแผนภาพ (Draw a picture or diagram) เป็นการนำการวาดภาพ หรือแผนภาพ มาแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการ เพื่อเป็นแนวทางในการหาคำตอบ
5. การเดาและการตรวจสอบ (Guess and check) เป็นการนำการเดามาแก้ปัญห และตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการเดาจนกว่าจะได้คำตอบที่ถูกต้อง
6. การชี้แจงรายการที่เป็นไปได้ (Account for all possibilities) เป็นการเขียนรายการที่เป็นไปได้ทั้งหมดตามที่โจทย์กำหนด แล้วหาคำตอบจากรายการที่เขียนนั้น
7. การทำปัญหาให้ง่ายขึ้น หรือทำให้เป็นปัญหาย่อย (Solve a simpler problem or break into parts) เป็นการเปลี่ยนตัวเลขเดิมให้น้อยลง แล้วทำการแก้โจทย์ปัญหา จนรู้แนวทางในการแก้โจทย์ปัญหานั้นๆ จึงนำวิธีการแก้โจทย์ปัญหานั้นไปใช้กับตัวเลขที่โจทย์ต้องการ
8. การมองปัญหาย้อนกลับ (Work backward) เป็นการนำวิธีที่ใช้ในข้อมูลชุดสุดท้ายมาช่วยในการหาคำตอบ แล้วทำการย้อนกลับไปที่ละขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหา จนสามารถแก้โจทย์ปัญหาออกมาได้
9. การเขียนประโยคทางคณิตศาสตร์ (Write a mathematical sentence) เป็นการเขียนแสดงแทนโจทย์ปัญหา หรือข้อความที่โจทย์กำหนดมาให้ ในรูปประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เช่น ถ้านาตาดา มีแอปเปิ้ล 4 ชิ้น ส้ม 5 ชิ้น อยากทราบว่า นาตาดาจะมีผลไม้รวมกันทั้งหมดกี่ชิ้น สามารถเขียนประโยคทางคณิตศาสตร์ ได้ $4 + 5 = ?$
10. การสร้างตาราง หรือกราฟ (Make a table and/or a graph) เป็นวิธีการรวบรวมข้อมูลที่กระจัดกระจายกันมาทำให้เป็นระบบที่สามารถเข้าใจได้ง่าย มองเห็นข้อมูลได้อย่างชัดเจน ทำให้สามารถมองเห็นวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาได้ดียิ่งขึ้น

11. การเปลี่ยนจุดมุ่งหมาย (Change your point of view) เป็นการวิธีที่แปลกออกไปจากแบบเดิมที่เคยใช้ในการแก้ปัญห อาจจะเป็นการเปลี่ยนแนวคิด หรือการเปลี่ยนมุมมองที่ใช้ เป็นต้น

Musser & Burger (1997) ได้เสนอกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ 6 กลวิธี ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. กลวิธีการเดาและตรวจสอบ (Guess and Test) เป็นกลวิธีที่ใช้การเดาในการหาคำตอบ และหาตรวจสอบ
2. กลวิธีการใช้ตัวแปร (Use a Variable) เป็นการกำหนดตัวอักษรแทนจำนวน ซึ่งตัวอักษรที่แทนจำนวนนั้น เรียกว่า ตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่า การใช้กลวิธีการใช้ตัวแปรนี้ เป็นวิธีหนึ่งที่นิยมใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาทางพีชคณิต
3. กลวิธีการวาดภาพ (Draw a Picture) เป็นการช่วยให้เกิดความเข้าใจในโจทย์ปัญหา มักใช้กับโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับวัตถุ ซึ่งจะทำให้มองเห็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้ดียิ่งขึ้น
4. กลวิธีการค้นหาแบบรูป (Look for a Pattern) เป็นกลวิธีหนึ่งที่ใช้สำหรับการมองความสัมพันธ์ของโจทย์ปัญหา แล้วหาวิธีในการหาคำตอบจากความสัมพันธ์นั้น
5. กลวิธีการทำรายการ (Make a list) มักใช้ร่วมกับกลวิธีการค้นหาแบบรูปในการแก้ปัญห
6. กลวิธีแก้ปัญหาย่อย (Solve a Simpler Problem) เป็นกลวิธีที่แก้ปัญหาละเอียดส่วน จนได้คำตอบจากโจทย์ปัญหาทั้งหมด

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537) ได้เสนอกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ 10 กลวิธี ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. กลวิธีการเดาและตรวจสอบ หมายถึง การหาคำตอบโดยพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่างๆ ที่โจทย์กำหนด ถ้าไม่ถูกต้องก็ทำการคาดเดาคำตอบใหม่โดยอาศัยเหตุผลจากการเดาครั้งที่ผ่านมา
2. กลวิธีการเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง หมายถึง การเขียนภาพ แผนภาพ หรือสร้างแบบจำลอง เพื่อมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลของโจทย์ปัญหา จะทำให้สามารถเข้าใจโจทย์มากยิ่งขึ้น
3. กลวิธีสร้างตาราง หมายถึง แจกแจงกรณีต่างๆ ที่เป็นไปได้ในรูปแบบของตาราง ทำให้เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลอย่างชัดเจน ซึ่งนำไปสู่การหาคำตอบที่โจทย์ปัญหาต้องการ



4. กลวิธีการใช้ตัวแปร หมายถึง การกำหนดตัวที่ไม่ทราบค่า โดยเขียนความสัมพันธ์ของข้อมูลตามที่โจทย์กำหนด แล้วหาค่าของตัวแปรจากความสัมพันธ์นั้น
 5. กลวิธีค้นหาแบบรูป หมายถึง การหาคำตอบโดยพิจารณาข้อมูลของโจทย์ปัญหาว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร
 6. กลวิธีแบ่งเป็นกรณี หมายถึง การหาคำตอบของโจทย์ปัญหา ที่สามารถแบ่งเป็นกรณีได้มากกว่า 1 กรณี แล้วแก้โจทย์ปัญหาหาคำตอบทีละกรณี แล้วพิจารณาคำตอบทุกกรณีร่วมกันก็จะได้คำตอบที่โจทย์ต้องการ
 7. กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรง หมายถึง การหาคำตอบโดยใช้ข้อมูลและเงื่อนไขต่างๆที่โจทย์กำหนดมาให้เป็นเหตุผลในการหาคำตอบที่โจทย์ต้องการ ซึ่งมักใช้ร่วมกับกลวิธีอื่นๆในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
 8. กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางอ้อม เป็นการใช้การพิสูจน์เพื่อแสดงให้เห็นว่าคำตอบที่โจทย์กำหนดให้เป็นจริง โดยหาเหตุผลมาแสดงว่าคำตอบเดียวกันแต่มีทิศทางตรงข้ามกันไม่เป็นจริง ส่วนมากจะใช้ในการพิสูจน์
 9. กลวิธีการทำย้อนกลับ หมายถึง การหาคำตอบโดยการพิจารณาข้อมูลหรือผลลัพธ์สุดท้ายแล้วมองย้อนกลับปัญหาอย่างเป็นขั้นตอนในการหาคำตอบ
 10. กลวิธีการสร้างปัญหาขึ้นใหม่ สามารถแยกได้ 3 ลักษณะ คือ
 - 10.1 กลวิธีแก้ปัญหาง่ายกว่า เป็นการสร้างโจทย์ปัญหาง่ายกว่าแต่มีโครงสร้างเดิม แล้วนำวิธีการแก้ปัญหานั้นมาสร้างใหม่มาใช้แก้ปัญหาคเดิม
 - 10.2 กลวิธีนึกถึงปัญหาที่สัมพันธ์กัน เป็นการนึกถึงลักษณะของโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกันแล้วนำวิธีการแก้ปัญหานั้นมาใช้หาคำตอบโจทย์ปัญหาที่พบ
 - 10.3 กลวิธีกำหนดเป้าหมายรอง เป็นการหาคำตอบจากส่วนย่อยๆหรือทำการแบ่งปัญหาวออกเป็นตอนๆแล้วหาคำตอบทีละตอนเพื่อนำไปสู่คำตอบที่โจทย์ต้องการ
- จากที่ได้กล่าวมาเกี่ยวกับกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหานั้น สรุปได้ว่า การแก้โจทย์ปัญหานั้นต้องอาศัยกลวิธีการแก้โจทย์ปัญหาที่แตกต่างกันออกไป ซึ่งถ้าหากเลือกใช้กลวิธีที่เหมาะสมกับโจทย์ปัญหานั้นๆ จะทำให้การแก้โจทย์ปัญหานั้นสามารถหาคำตอบได้ ซึ่งในการวิจัยนี้ได้เลือกเฉพาะกลวิธีที่เกี่ยวกับการวาดภาพ เนื่องจากเนื้อหาในเรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตร ต้องอาศัยการวาดภาพของรูปเรขาคณิตเข้ามาช่วยในการให้เห็นความสัมพันธ์ต่างๆ ของข้อมูลที่กำหนดให้ในโจทย์ปัญหาได้ดียิ่งขึ้น

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ	
ห้องสมุดงานวิจัย	
วันที่.....	21 S.A. 2554
เลขทะเบียน.....	242741
เลขเรียกหนังสือ.....	

ความสำคัญของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ครูผู้สอนและนักเรียนควรให้ความสำคัญและความสนใจศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับกลวิธีต่างๆ ที่จะนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งนักการศึกษาหลายได้กล่าวถึงความสำคัญของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

Heddens & Sreer (1992 อ้างใน เจษฎ์สุตา จันทร์เอี่ยม, 2542 , หน้า 32) ได้กล่าวไว้ว่า นักเรียนมีความจำเป็นในการเรียนรู้การใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เพราะกลวิธีนั้นสามารถนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้อย่างกว้างขวาง โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์บางโจทย์ไม่สามารถหาคำตอบได้จากการใช้ความรู้จากการเรียนเพียงอย่างเดียว ถ้านักเรียนรู้จักนำกลวิธีมาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาด้วย ก็จะทำให้สามารถหาคำตอบของโจทย์ปัญหาได้

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537) ได้กล่าวไว้ว่า นักแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดีควรเรียนรู้ให้มีความเข้าใจในกลวิธีการแก้โจทย์ปัญหา และต้องสะสมกลวิธีเอาไว้มาก ๆ เพื่อนำมาเลือกใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา

กล่าวโดยสรุปแล้วความสำคัญของกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น นักเรียนควรมีความรู้ความเข้าใจในกลวิธีที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหาย่างหลากหลาย เพื่อที่จะได้นำมาเลือกใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างเหมาะสมกับแต่ละปัญหา

การส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

Baur & George (1976, pp.344-353 อ้างใน สุนีย์ เงินขวง, 2546 , หน้า 17) ได้เสนอแนวทางการส่งเสริมทักษะการ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ 10 ประการ คือ

1. ส่งเสริมให้เด็กแก้ปัญหาโดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาทั่วไปเป็นหลัก ซึ่งได้แก่ การแก้ปัญหาเริ่มจากการมองเห็นปัญหา ดูว่าปัญหากำหนดอะไรมาให้ ต้องการให้หาอะไร จากนั้นจึงแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปแบบของคณิตศาสตร์ เช่น เปลี่ยนปัญหาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์แก้ปัญหา และท้ายสุด คือ การตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ กระบวนการแก้ปัญหาดังกล่าว เป็นแนวทางในการคิด ทำให้อย่างน้อยมีหลักการในการทำที่จะช่วยให้การแก้ปัญหาง่ายขึ้น

2. ให้เด็กใช้เครื่องมือ (Tool) ที่แต่ละคนถนัดในการแก้ปัญหา เด็กบางคนอาจจะเริ่มด้วยสิ่งที่จับต้องได้เป็นรูปธรรม เด็กบางคนอาจจะถนัดวาดรูปประกอบ บางคนอาจจะถนัดเขียนสมการ ครูควรส่งเสริมให้เด็กเลือกใช้เครื่องมืออะไรก็ตามที่จะช่วยแก้ปัญหาได้

3. ควรส่งเสริมให้เด็กพัฒนาวิธีการเฉพาะในการแก้ปัญหาของตนเอง ถ้าครูพยายามบอกให้เด็กทำโจทย์แบบ ก ด้วยวิธี A จะเป็นการไม่ติดต่อความคิดสร้างสรรค์ และแรงจูงใจที่จะแก้ปัญหา ดังนั้นควรปล่อยให้เด็กใช้วิธีการอะไรก็ได้ที่ดูเป็นธรรมชาติของเด็ก

4. นำเสนอปัญหาให้นักเรียนด้วยวิธีการต่าง ๆ ที่หลากหลาย ไม่จำกัดเฉพาะโจทย์ที่เขียนในกระดาษเท่านั้น

5. ทุกครั้งที่มีโอกาสควรพยายามชี้ให้นักเรียนเห็นเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น ทั้งในห้องเรียนและนอกห้องเรียนว่าเป็นปัญหาที่ต้องใช้ทักษะ และความรู้คณิตศาสตร์

6. กระตุ้นให้นักเรียนระลึกและพัฒนาวิธีการแก้โจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เพื่อให้เด็กเกิดการเรียนรู้

7. เด็กที่แตกต่างกัน ควรได้ทำโจทย์ปัญหาที่มีระดับความยากต่างกัน

8. ใช้โจทย์ปัญหาหลาย ๆ รูปแบบที่แตกต่างจากหนังสือเรียนโดยปกติ เช่น โจทย์ปัญหาที่มีข้อมูลไม่เพียงพอ โจทย์ปัญหาที่ไม่มีตัวเลข หรือไม่ให้นักเรียนแก้ปัญหา แต่ให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาจากเหตุการณ์ที่กำหนด

9. พยายามทำให้การแก้ปัญหเป็นส่วนหนึ่งของการเรียน ทักษะ และมโนคติใหม่ ๆ เช่น การพิเศษอาจจะเริ่มจากการวัดสิ่งต่างๆ

10. สร้างแรงจูงใจเด็กด้วยเกมปริศนา เนื่องจากเด็กจะกระตือรือร้นในการแก้ปัญหาก็ต่อเมื่อมีแรงจูงใจ

เกษรา สุภาภคเสน (2530, หน้า 28-29 อ้างใน จิราวรรณ เกิดผล, 2547, หน้า 37) เสนอแนวทางในการส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหาวัว ดังนี้

1. ฝึกฝนให้เด็กทำตามขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาวัว
 2. ควรเน้นในเรื่องการรวบรวมข้อมูลให้มาก
 3. ฝึกให้รู้จักใช้ทักษะการแก้ปัญหาวัว
 4. ใช้วิธีการชี้แจง อธิบายเหตุผลที่หลีกเลี่ยงวิธีการเข้มงวดกับเด็ก
 5. เปิดโอกาสให้เด็กมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งต่างๆ
 6. ส่งเสริมความคิดสร้างสรรค์ให้กับเด็ก เพราะมีความสัมพันธ์กับการแก้ปัญหาวัว
 7. ให้โอกาสเด็กตัดสินใจด้วยตัวเอง
 8. กระตุ้นให้เด็กคิดในหลายทิศทาง เพื่อนำไปใช้กับการแก้ปัญหาวัวที่ยากซับซ้อน
- ในทำนองเดียวกัน สิริพร ทิพย์คง (2544, หน้า 80 - 81) ได้กล่าวถึงหน้าที่ของครูในการส่งเสริมการแก้ปัญหาวัวทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ควรเลือกปัญหาที่ช่วยกระตุ้นความสนใจ และเป็นปัญหาที่นักเรียนมีประสบการณ์ในเรื่องเหล่านั้นมาใช้สอนนักเรียน
2. ควรทดสอบว่านักเรียนมีพื้นฐานความรู้ที่เพียงพอหรือไม่ที่จะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ ถ้ามีไม่เพียงพอนั้น ครูต้องสอนเสริม หรือทบทวนในสิ่งที่เคยเรียนไปแล้ว
3. ควรให้อิสระแก่นักเรียนในใช้ความคิดแก้ปัญหา
4. ควรให้แบบฝึกหัดที่มีข้อยาก ปานกลาง และง่าย เพื่อให้นักเรียนทุกคนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา เป็นการเสริมสร้างกำลังใจแก่นักเรียน
5. ควรทดสอบว่านักเรียนเข้าใจปัญหาในข้อนั้น ๆ หรือไม่ โดยการถามว่าโจทย์ถามอะไร และโจทย์กำหนดอะไรมาให้
6. ควรฝึกให้นักเรียนรู้จักการหาคำตอบ โดยการประมาณก่อนที่คิดคำนวณเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง
7. ควรช่วยนักเรียนคิดหาความสัมพันธ์ของปัญหา โดยการแนะนำให้วาดภาพ หรือเขียนแผนผัง ในกรณีที่ไม่สามารถคิดแก้ปัญหาได้
8. ควรช่วยนักเรียนในการคิดแก้ปัญหา เช่น การถามว่า เคยแก้ปัญหานี้หรือปัญหาที่ลักษณะคล้ายข้อนี้มาก่อนหรือไม่ ลองแยกปัญหาข้อนั้น ๆ ออกเป็นปัญหาย่อย ๆ
9. ควรให้นักเรียนคิดหาวิธีการอื่นๆ เพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหานั้น ๆ รวมทั้งสนับสนุนให้ตอบวิธีการที่คิดและทำ ในการแก้ปัญหานั้น ๆ ตลอดจนให้ทบทวนวิธีการคิดแก้ปัญหาแต่ละขั้นตอน
10. ควรให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาเป็นกลุ่มย่อย ๆ หรือให้นำปัญหามาเองเพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น

แนวคิดการใช้กลวิธีการวาดภาพในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

แนวคิดของ Bruner ที่มีต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ มีดังนี้

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ต้องประกอบด้วยองค์ประกอบสำคัญ 4 ประการ คือ โครงสร้าง (Structure) ของเนื้อหาสาระ ความพร้อม (Readiness) ที่จะเรียนรู้ การหยั่งรู้ (Intuition) โดยคะแนนจากประสบการณ์อย่างมีหลักเกณฑ์ และแรงจูงใจ (Motivation) ที่จะเรียนเนื้อหาใด ๆ Bruner ให้ความสำคัญกับสมดุลระหว่างผลลัพธ์กับกระบวนการเรียนการสอน (Process and Product Approach) นอกจากนี้ยังให้แนวคิดว่า มนุษย์สามารถเรียน หรือคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้ 3 ระดับ ดังนี้

1. ระดับที่มีประสบการณ์ตรง และสัมผัสได้ (Enactive Stage) เช่น ผู้เรียนรวมของ 4 ชั้น กับของ 5 ชั้น เพื่อเป็นของ 9 ชั้น ซึ่งเป็นการสัมผัสกับสิ่งที่เป็นรูปธรรม (Concrete Objects or Manipulatives)
2. ระดับของการใช้ภาพเป็นสื่อในการมองเห็น (Iconic Stage) เช่น การใช้รูปภาพ ใคอะแกรม ฟลิ้ม ที่เป็นสื่อทางสายตา (Visual Medium)
3. ระดับของการสร้างความสัมพันธ์ และใช้สัญลักษณ์ (Symbolic Stage) ซึ่งเป็นระดับที่ผู้เรียนสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนสิ่งที่เห็นในระดับที่สอง หรือสิ่งที่สัมผัสในระดับที่หนึ่งได้

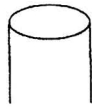
แนวคิดของ Bruner ปรากฏอยู่ในผลงานของเลซ (Lesh) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีในนามโมเดลของเลซ (Lesh's Model) เลซใช้แนวคิดข้างต้นของบรูเนอร์สร้างโมเดลที่แสดงว่าผู้เรียนสามารถใช้วิธีแสดงความคิดทางคณิตศาสตร์ได้ในหลายๆ รูปแบบ เช่น จากความรู้ที่เกิดจากการใช้สื่อรูปธรรม (Manipulative Aids) สามารถแสดงความรู้ในรูปของรูปภาพ (Pictures) ภาษาเขียน (Written Symbols) ภาษาพูด (Spoken Symbols) และสถานการณ์จริง (Real Word Situation) ได้ โมเดลนี้ทำให้เกิดการพัฒนาอื่น ๆ ที่ผู้สอนควรคำนึงถึง เช่น การให้ผู้เรียนได้พูดและได้เขียนมากขึ้น การได้พูดและเขียนเป็นการเปลี่ยนวิธีแสดงความคิดที่สะท้อนถึงความเข้าใจของผู้เรียน ตามโมเดลที่เลซได้เสนอนั้น ผู้สอนสามารถประเมินความเข้าใจของผู้เรียนได้จากการดูว่าผู้เรียนสามารถเปลี่ยนความเข้าใจจากรูปแบบหนึ่งไปยังอีกรูปแบบหนึ่งได้หรือไม่ (2546, อัมพร ม้าคนอง)

จากแนวคิดในการสอนของ Bruner พบว่า การที่เด็กสามารถสร้างจินตนาการ หรือ มโนภาพในใจนั้น สามารถช่วยให้เด็กเกิดการเรียนรู้ได้มากขึ้น ดังนั้นการใช้การวาดภาพเข้ามาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ก็น่าจะทำให้เด็กแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

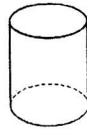
การวาดภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติ

สสวท. (2547) ได้กล่าวถึงการวาดภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติอย่างง่าย อาจใช้ขั้นตอนดังในตัวอย่างต่อไปนี้

การเขียนภาพของทรงกระบอก



ขั้นที่ 1



ขั้นที่ 2

รูปที่ 1 แสดงการเขียนภาพของทรงกระบอก

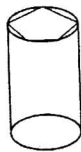
ขั้นที่ 1 เขียนวงรีแทนหน้าตัดที่เป็นวงกลม และเขียนส่วนของเส้นตรงสองเส้น แสดงส่วนสูงของทรงกระบอก ดังรูป

ขั้นที่ 2 เขียนวงรีที่มีขนาดเท่ากับวงรีที่ใช้ในขั้นที่ 1 แทนวงกลมซึ่งเป็นฐานของทรงกระบอก และเขียนเส้นประแทนเส้นที่บดตรงส่วนที่ถูกบัง

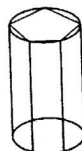
การเขียนภาพของปริซึม



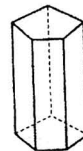
ขั้นที่ 1



ขั้นที่ 2



ขั้นที่ 3



ขั้นที่ 4

รูปที่ 2 แสดงการเขียนภาพของปริซึม

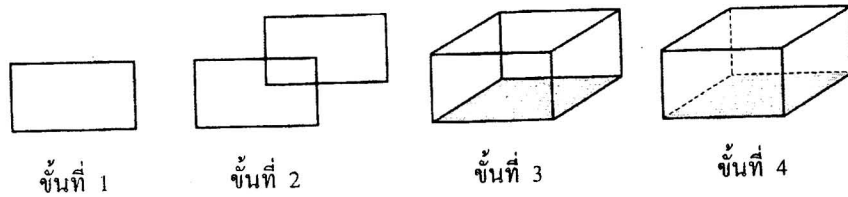
ขั้นที่ 1 เขียนทรงกระบอกตามวิธีการข้างต้น

ขั้นที่ 2 กำหนดจุดบนวงรีด้านบนเพื่อใช้เป็นจุดยอดของรูปเหลี่ยมที่เป็นฐานของปริซึมตามต้องการ แล้วลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อด้านบน

ขั้นที่ 3 เขียนส่วนสูงของปริซึมจากจุดยอดของรูปเหลี่ยมที่ได้ในขั้นที่ 2 มาตั้งฉากกับวงรีด้านล่าง

ขั้นที่ 4 เขียนส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดบนวงรีที่ได้ในขั้นที่ 3 และลบรอยส่วนโค้งของวงรี จะได้รูปหลายเหลี่ยมที่เป็นฐานของปริซึม แล้วเขียนเส้นประแทนด้านที่ถูกบัง

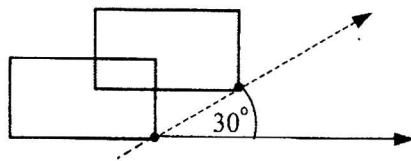
การเขียนภาพของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก



รูปที่ 3 แสดงการเขียนภาพของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ขั้นที่ 1 เขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป

ขั้นที่ 2 เขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาดเท่ากับรูปในขั้นที่ 1 อีก 1 รูป ให้อยู่ในลักษณะที่ขนานกัน และเหลื่อมกันประมาณ 30 องศา ดังรูป



ภาพที่ 4 แสดงการเขียนภาพเหลื่อมกัน

ขั้นที่ 3 ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อจุดให้ได้ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ขั้นที่ 4 เขียนเส้นประแทนด้านที่ถูกบัง

สำหรับการเขียนภาพของ กรวย ทรงกลม และพีระมิด ก็สามารถเขียนได้โดยใช้วิธีการเดียวกันกับข้างต้น ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

การเขียนภาพของกรวย



รูปที่ 5 แสดงการเขียนภาพของกรวย

การเขียนภาพของทรงกลม



ขั้นที่ 1



ขั้นที่ 2

รูปที่ 6 แสดงการเขียนภาพของทรงกลม

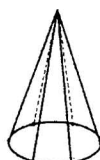
การเขียนภาพของพีระมิดฐานหกเหลี่ยม



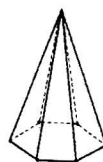
ขั้นที่ 1



ขั้นที่ 2



ขั้นที่ 3



ขั้นที่ 4

รูปที่ 7 แสดงการเขียนภาพของพีระมิดฐานหกเหลี่ยม

ความรู้สึกเชิงปริภูมิ (Spatial Sense)

สสวท. (2546) ได้กล่าวถึงความรู้สึกเชิงปริภูมิ (Spatial Sense) ไว้ว่าเป็นความรู้สึกที่เรามีโดยสัญชาตญาณเกี่ยวกับมิติของสิ่งต่างๆ รวมถึงองค์ประกอบของสิ่งนั้น เช่น ความกว้าง ความยาว ความสูง ความลึก ความหนา ความชัน ความคล้าย ความขนาน ความสมมาตร หรือความเท่ากันทุกประการ ตลอดจนความรู้สึกที่เรามีต่อภาพจำลอง (image) ของสิ่งของที่อยู่ในตำแหน่งต่าง ๆ กัน ผู้เรียนที่มีพัฒนาการทางด้านความรู้สึกเชิงปริภูมิ และมีพัฒนาการทางด้านภาษาเป็นอย่างดีจะสามารถพัฒนาให้มีความคิดรวบยอดที่เกี่ยวกับจำนวน (number) และการวัด (measurement) ในระดับสูงได้เป็นอย่างดีด้วย ในการเรียนการสอนเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิตินั้น จำเป็นที่ครูผู้สอนควรจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้สัมผัส และจับต้องกับอุปกรณ์ของจริง และควรให้ผู้เรียนได้สังเกต วาดภาพ เปรียบเทียบ คาดเดารูปร่างของรูปเรขาคณิตในตำแหน่งต่าง ๆ นอกจากนี้ครูผู้สอนควรสอดแทรกและเชื่อมโยงเนื้อหาความรู้เชิงปริภูมิกับเนื้อหาสาระทางจำนวน และความรู้สึกเชิงจำนวน (number and number sense) กราฟและการวัด นอกเหนือจากเนื้อหาสาระทางเรขาคณิต (geometry) ซึ่งต้องเชื่อมโยงอยู่แล้ว

Del Grande. (1990, pp 19-20 , อ้างใน ญัฐพร พาใจธรรม, 2546 หน้า 14-15) ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตกับความรู้สึกเชิงปริภูมิว่า แต่เดิมนักจิตวิทยาสนใจศึกษาความรู้สึก

เชิงปริภูมิและความสามารถเชิงปริภูมิมานานแล้ว สำหรับในการศึกษาคณิตศาสตร์เริ่มให้ความสนใจ ความสัมพันธ์ระหว่างความรู้เชิงปริภูมิกับการเรียนเรขาคณิตดังที่ปรากฏชัดเจนในเอกสารของสภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาชื่อ “มาตรฐานหลักสูตรและการวัดผลคณิตศาสตร์ในโรงเรียน” ปี ค.ศ. 1989 จากการศึกษาพบว่านักเรียนจะเรียนเรขาคณิตได้ดีถ้ามีความสามารถเชิงปริภูมิ ความสามารถเชิงปริภูมิหมายถึงการเลื่อน การหมุน การพลิกภาพในใจ ดังนั้นเรขาคณิตที่เหมาะสมสำหรับนักเรียนคือต้องพัฒนาจากการหยั่งรู้ และรวมถึงการทำ กิจกรรมที่มีการเคลื่อนที่ในปริภูมิในการเรียนการสอนเรขาคณิตครูผู้สอนพบว่า นักเรียนมีปัญหาในเรื่องของการทำความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติทางเรขาคณิตหลายอย่าง แต่ถ้านักเรียนใช้การเชื่อมโยงสิ่งที่มองเห็นและสมบัติของรูปกับประสบการณ์เดิม จะทำให้เข้าใจง่ายขึ้น หรือยอมรับมโนคตินั้นได้ดีขึ้น เช่น การเข้าใจมโนคติของรูปสามเหลี่ยมและการแปลง เริ่มต้นนักเรียนต้องอาศัยการรับรู้ความคงตัวของรูปร่างและในขณะเดียวกันการรับรู้ก็มีความจำเป็นสำหรับการจัดกิจกรรมเกี่ยวกับการแปลงหรือในการเรียนมโนคติเรื่องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า นักเรียนต้องอาศัยความสามารถในการมองภาพ

สสวท. (2546) ได้กล่าวไว้ว่า นักเรียนที่มีความรู้เชิงปริภูมิที่ดีควรจะมีทักษะต่างๆ ดังนี้

1. การประสานระหว่างสายตากับการเคลื่อนไหว (eye – motor coordination)
2. การจำแนกภาพออกจากพื้นหลัง (figure – ground perception)
3. ความคงตัวในการรับรู้รูปร่างหรือขนาด (perceptual constancy)
4. การรับรู้เกี่ยวกับตำแหน่งในปริภูมิ (position – in – space perception)
5. การรับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ ในปริภูมิ (perception of spatial relationship)
6. การจำแนกโดยใช้สายตา (visual discrimination)
7. ความทรงจำเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เห็น (visual memory)

แต่ที่นี้จะกล่าวถึง 2 ทักษะ คือ ความคงตัวในการรับรู้รูปร่างหรือขนาด (perceptual constancy) และ การรับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ ในปริภูมิ (perception of spatial relationship)

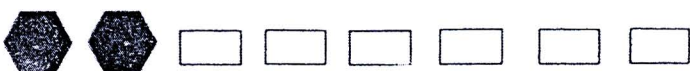
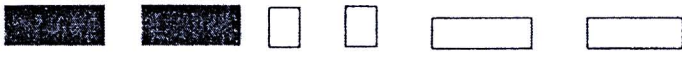
ความคงตัวในการรับรู้รูปร่างหรือขนาด (perceptual constancy)

ความคงตัวในด้านการรับรู้รูปร่าง หรือขนาดเป็นความสามารถของบุคคลในการจดจำรูปร่าง หรือขนาดของวัตถุ ไม่ว่าวัตถุนั้นจะอยู่ใกล้หรือไกล วางอยู่ ณ ตำแหน่งใด หรือภาพที่ปรากฏแก่สายตาจะเป็นภาพจากมุมมองใด

ความสามารถของบุคคลในการจดจำรูปร่าง เช่น การที่บุคคลรู้ว่าพื้นผิวโต๊ะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแม้ว่าภาพของพื้นโต๊ะที่ปรากฏแก่สายตาจากมุมมองนั้น ๆ จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูก็ตาม

ความสามารถของบุคคลในการจดจำขนาด เช่น การที่บุคคลซึ่งมีความคุ้นเคยกับกีฬาฟุตบอลรู้ว่าลูกฟุตบอลที่ตนถืออยู่ในมือกับลูกฟุตบอลที่อยู่ห่างออกไปอีก 10 เมตร ซึ่งมองเห็นเป็นเพียงจุดเล็ก ๆ นั้นมีขนาดเท่ากัน

- ตัวอย่างกิจกรรมที่ช่วยพัฒนาทักษะความคงตัวในการรับรู้รูปร่างหรือขนาด
- การพิจารณารูปเรขาคณิตสามมิติสองชนิด เช่น ปริซึมสี่เหลี่ยมจัตุรัส และปริซึมสามเหลี่ยมว่ามีอะไรบ้างที่เหมือนกัน และมีอะไรบ้างที่แตกต่างกัน
 - การสำรวจหน้าของรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดต่างๆ แล้วเขียนหน้าทุกหน้าลงในตาราง ซึ่งแบ่งเป็นสองคอลัมน์ คอลัมน์แรกเป็นภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติพร้อมชื่อ ประกอบได้ภาพ คอลัมน์ที่สองเป็นหน้าต่างๆ ของรูปเรขาคณิตสามมิติ ดังรูป

รูปเรขาคณิตสามมิติ	หน้าต่าง ๆ
 ลูกบาศก์	
 ปริซึมหกเหลี่ยม	
 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	

รูปที่ 8 กิจกรรมที่ช่วยพัฒนาทักษะความคงตัวในการรับรู้รูปร่างหรือขนาด

นำตารางที่ได้มาตัดเป็นชิ้นส่วนตามแนวเส้นคั่นตาราง จะได้ภาพรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดต่างๆ และภาพแสดงหน้าต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตสามมิติ แผ่นภาพที่ได้สามารถนำมาทำกิจกรรม ถาม – ตอบ หรือเล่นเกมจับคู่รูปภาพเรขาคณิตสามมิติกับหน้าต่างๆ

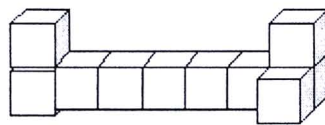
การรับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ ในปริภูมิ (perception of spatial relationship)

การรับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ ในปริภูมิเป็นความสามารถของบุคคลในการมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งสองสิ่ง หรือมากกว่าทั้งกับตนเองและระหว่างกันและกัน ความสัมพันธ์นี้รวมไปถึงในด้านตำแหน่ง และทิศทาง ทักษะนี้ต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจลึกซึ้งเกี่ยวกับตำแหน่ง และทิศทาง อันจะนำไปสู่การคาดคะเนที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริง และการตัดสินใจที่สมเหตุสมผลเกี่ยวกับขนาด ตำแหน่ง ทิศทาง ระยะทางของสิ่งต่างๆ รอบตัว

กิจกรรมที่ต้องอาศัยทักษะนี้ เช่น การให้ระบุความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่ง ระยะทาง หรือทิศทางของสิ่งของตั้งแต่สองสิ่งขึ้นไป การสังเกตความคล้าย และความแตกต่าง การหาเส้นทางที่สั้นที่สุดไปยังจุดหมาย การเชื่อมโยงระหว่างจุดต่างๆ การเติมลำดับที่หายไป และการต่อภาพจากชิ้นส่วนภาพ (jigsaw)

ตัวอย่างกิจกรรมที่ช่วยพัฒนาการรับรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ในปริภูมิ

- การต่อลูกบาศก์ หรือการต่อลูกบาศก์ให้เหมือนตัวอย่าง



รูปที่ 9 ตัวอย่างการต่อลูกบาศก์

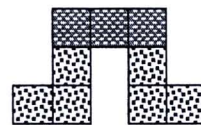
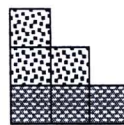
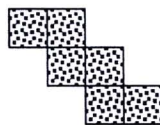
- การนำชิ้นส่วนมาต่อเป็นภาพต่างๆ เช่น มีชิ้นส่วนสีแดง และสีน้ำเงิน



ชิ้นส่วนสีแดง

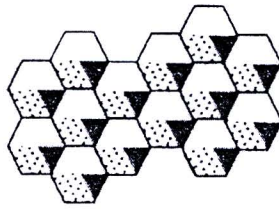


ชิ้นส่วนสีน้ำเงิน



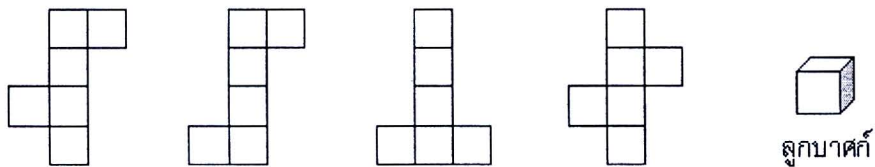
รูปที่ 10 การนำชิ้นส่วนมาต่อเป็นภาพต่างๆ

- กิจกรรมการต่อรูปเรขาคณิต โดยนำชิ้นส่วนรูปเรขาคณิตมาต่อกันบนพื้นผิวเรียบ โดยไม่ให้มีช่องว่างเหลืออยู่ และชิ้นส่วนของรูปไม่ 겹ทับกัน การต่อรูปเรขาคณิตต้องอาศัยความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการพลิก การเลื่อน และการหมุน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของความรู้สึกระเบิดเชิงปริภูมิ เช่น การต่อรูปโดยใช้รูปเรขาคณิตตั้งแต่สองชนิดขึ้นไป นำไปสู่การสำรวจแบบรูปของการต่อรูปเรขาคณิต ครูควรชี้แจงให้นักเรียนเข้าใจว่า แบบรูปสามารถต่อออกไปได้อย่างไม่จำกัดในทุกทิศทาง



รูปที่ 11 การต่อรูปโดยใช้รูปเรขาคณิตตั้งแต่สองชนิดขึ้นไป

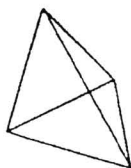
- การสังเกตรูปคลี่ว่า เมื่อประกอบแล้วได้เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดใด



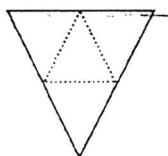
รูปคลี่แบบต่างๆ ของลูกบาศก์

รูปที่ 12 รูปคลี่แบบต่างๆ ของลูกบาศก์

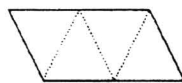
- การพิจารณารูปเรขาคณิตสามมิติที่กำหนดให้ว่า เมื่อคลี่ออกมาแล้วมีลักษณะเป็นรูปคลี่แบบใดบ้าง



ทรงสี่หน้า



รูปคลี่ของทรงสี่หน้า



รูปที่ 13 รูปคลี่ของรูปทรงสี่หน้า

ดังนั้นทักษะการรับรู้เชิงปริภูมิและมโนคติทางเรขาคณิต สามารถเรียนรู้ไปพร้อมกัน ถ้านักเรียนมีความสามารถในการจำแนก รู้ความสัมพันธ์และสมบัติของรูป การเรียนการสอนเรขาคณิตจะมีความง่ายมากขึ้น ทำให้การพัฒนาความรู้สึกระยะปริภูมิและการเรียนเรขาคณิตมีความต่อเนื่องเกี่ยวข้องกัน

จากแนวคิดในการใช้กลวิธีการวาดภาพในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้สรุปเป็นกรอบแนวคิดในการใช้กลวิธีการวาดภาพ คือให้นักเรียนฝึกวาดภาพโดยให้ดูจากของจริงก่อน แล้วจึงวาดภาพสามมิติ และรูปคลี่โดยมีการสรุปแนวทางในการวาดภาพสามมิติไว้ จากนั้นจึงให้นักเรียนฝึกใช้จินตนาการในการวาดรูปจากข้อความที่เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสามมิติที่กำหนดให้ พร้อมให้นักเรียนลองระบุตัวเลขตามที่ข้อความกำหนด ซึ่งในส่วนนี้นักเรียนต้องใช้ความรู้สึกระยะปริภูมิเข้ามาช่วยในการจินตนาการ และจึงให้นักเรียนลองวาดรูปจากโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของรูปทรงสามมิตินั้น พร้อมให้นักเรียนเขียนแนวคิดในการหาคำตอบและแก้โจทย์ปัญหาเพื่อหาคำตอบในข้อนั้น

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เจษฎ์สุดา จันทรเอี่ยม (2542) ได้ทำการศึกษาความสามารถและกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นในโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษา เขตการศึกษา 7 โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น 2 กลุ่ม คือ นักเรียนที่ทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จำนวน 472 คน และ นักเรียนที่ได้รับการสัมภาษณ์ประกอบการสังเกตการใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จำนวน 36 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1, 2 และ 3 มีความสามารถในการแก้โจทย์

ปัญหาค่ากว่าเกณฑ์ขั้นต่ำร้อยละ 50 ทั้งสามระดับ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 ใช้กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อยมากที่สุด รองลงมา คือ กลวิธีการเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ใช้กลวิธีการเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลองมากที่สุด รองลงมา คือกลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย เมื่อจำแนกเป็นระดับชั้น พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ระดับสูง ปานกลาง และต่ำ ใช้กลวิธีทำเป็นปัญหาให้เป็นปัญหาย่อยมากที่สุด ส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3 นั้น พบว่า นักเรียนที่มีความสามารถในระดับสูง ใช้กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อยมากที่สุด ส่วนนักเรียนที่มีความสามารถในระดับต่ำ ใช้กลวิธีการเขียนแผนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลองมากที่สุด

พิชิต แก้วทอง (2549) ได้ทำการวิจัย เรื่อง การพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสันหนองควาย จังหวัดเชียงราย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสันหนองควาย อำเภอพาน จังหวัดเชียงราย จำนวน 30 คน ผลการวิจัยสรุปได้ว่า ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถระบุสิ่งที่ปัญหาคำหนดให้ สิ่งที่ต้องการ ปัญหาต้องการ เขียนวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหา แสดงขั้นตอนในการแก้ปัญหาอยู่ในระดับดีมาก ส่วนวิธีการตรวจคำตอบนักเรียนพัฒนาอยู่ในระดับดี และในด้านการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนสามารถพัฒนาในด้านการฟัง อ่าน เขียน อภิปราย อยู่ในระดับดี ส่วนการนำเสนออยู่ในระดับปานกลาง

พิมพ์พฐ สุตานันต์ (2550) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การใช้กลวิธีการวาดภาพเพื่อขยายความคิดเพื่อส่งเสริมความเข้าใจในการอ่านภาษาอังกฤษ และความคิดสร้างสรรค์ของนักเรียนระดับต้น กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนเทศบาลเมืองสวรรคโลก อำเภอสวรรคโลก จังหวัดสุโขทัย จำนวน 40 คน ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้ นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้กลวิธีการวาดภาพเพื่อขยายความคิด มีความเข้าใจในการอ่านภาษาอังกฤษ หลังการทดลอง สูงกว่าก่อนการทดลอง และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้กลวิธีการวาดภาพเพื่อขยายความคิด มีความคิดสร้างสรรค์หลังการทดลอง สูงกว่าก่อนการทดลอง

พรทิพา โสภณทัต (2552) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ด้วยกลวิธีการเดาและตรวจสอบ กลวิธีการวาดภาพ กลวิธีการสร้างตารางและกลวิธีการใช้ตัวแปร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสันทรายวิทยาคม จังหวัดเชียงใหม่ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 79 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธีต่างๆ ได้ โดยกลวิธีที่นักเรียนเลือกใช้ส่วนใหญ่ขึ้นอยู่กับชนิดของโจทย์ เช่น โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน

นักเรียนส่วนส่วนใหญ่เลือกใช้กลวิธีการวาดภาพ และกลวิธีการใช้ตัวแปรมากที่สุด ถ้าเป็นโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตราส่วนและร้อยละ นักเรียนส่วนใหญ่เลือกใช้กลวิธีการใช้ตัวแปรมากที่สุด สำหรับโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตราเร็ว นักเรียนส่วนใหญ่เลือกใช้กลวิธีการสร้างตารางมากที่สุด

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น เป็นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหา และการนำสื่อมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา พบว่า เมื่อเลือกใช้วิธีในการแก้ปัญหที่เหมาะสมกับระดับความรู้ของนักเรียนและวิธีการที่เหมาะสมกับการแก้โจทย์ปัญหานั้น ๆ จะทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาคได้