



ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

เรื่อง การศึกษาเชิงวิเคราะห์เกี่ยวกับผลกระทบที่เกิดจากการปะทะของน้ำบนผิวโค้งของ
แท่งทรงกระบอก

โดย นายธนายุทธ ไยแก้ว

ได้รับอนุมัติให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร.มงคล หวังสถิตย์วงศ์)

14 พฤษภาคม 2550

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลยุตต์ วรรณสว่าง)

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุพร รัตนพันธ์)

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พรชัย สาตราหา)

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เสนอ คุณประเสริฐ)

การศึกษาเชิงวิเคราะห์เกี่ยวกับผลกระทบที่เกิดจากการปะทะของน้ำบนผิวโค้งของ
แท่งทรงกระบอก

นายธนายุทธ ไชแก้ว

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
ปีการศึกษา 2549
ลิขสิทธิ์ของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ชื่อ : นายธนายุทธ ไยแก้ว
ชื่อวิทยานิพนธ์ : การศึกษาเชิงวิเคราะห์เกี่ยวกับผลกระทบที่เกิดจากการปะทะของน้ำบน
ผิวโค้งของแท่งทรงกระบอก
สาขาวิชา : คณิตศาสตร์ประยุกต์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ : รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลยุดต์ วรรณสว่าง
ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุพร รัตนพันธ์
ปีการศึกษา : 2549

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเซกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน และแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยการใช้การคำนวณเชิงวิเคราะห์เพื่อหาแรงและโมเมนต์ที่เกิดจากการปะทะของน้ำที่ไหลผ่านด้วยความเร็วสม่ำเสมอบนผิวโค้งของแท่งทรงกระบอกตามแบบจำลองทั้ง 2 ลักษณะดังกล่าว พร้อมกับเปรียบเทียบกับกรณีของแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงรี ในสถานะที่แท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะอยู่นิ่ง และเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่โดยปราศจากการหมุน ซึ่งผลการศึกษาดังกล่าวสามารถนำมาใช้เป็นแนวทางในการออกแบบเรือที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นเส้นโค้งปิดที่มีแรงและโมเมนต์น้อยที่สุดที่มากระทำต่อต้านข้างของลำเรือ

(วิทยานิพนธ์มีจำนวนทั้งสิ้น 115 หน้า)

คำสำคัญ : การส่งคองแบบ , ทฤษฎีวงกลม , ศักย์เชิงซ้อน

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

Name : Mr. Tanayut Yaikaew
Thesis Title : Analytical Study of the Hydrodynamic Effect of the Stream
Impinging on a Cylinder
Major Field : Applied Mathematics
King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok
Thesis Advisors : Associate Professor Dr. Vimolyut Vansawang
Assistant Professor Suporn Ratanapun
Academic Year : 2006

Abstract

This research provides some mathematical model consisting of two types of fixed cylinders partially immersed in a uniform stream with the axes perpendicular to the direction of flow. The first type possesses a cross-section the boundary of which is of the symmetrical segments of two equal circles while the second type possesses a rhombus cross-section.

The theoretical results of the hydrodynamic effects in terms of forces and moment on the two types of cylinders due to the uniform stream impinging on the cylinder are then compared with the corresponding values derived from a fixed elliptic in the same condition

The results may lead to the judgment in the design of a vessel based on the least effect due to the forces and moments on the vessel.

(Total 115 pages)

Keywords : Conformal mapping , Circle theorem , Complex potential

Advisor

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของ รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลยุตต์ วรรณสว่าง ประธานกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์สุพรรณรัตน์ กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่าง ๆ ของการวิจัย รวมทั้งแนวทางในการแก้ไขปัญหาในการวิจัยมาโดยตลอด จึงขอกราบขอบพระคุณในความกรุณา มา ณ ที่นี้ด้วย

ท้ายนี้ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา พี่ น้อง ที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นที่กำลังใจแก่ผู้วิจัย ตลอดจนคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสาทวิชาและให้การสนับสนุนผู้วิจัยด้วยดี เสมอมาจนสำเร็จการศึกษา

ธนายุทธ ไยแก้ว

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ค
กิตติกรรมประกาศ	ง
สารบัญตาราง	ช
สารบัญภาพ	ซ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	1
1.3 ขอบเขตของการวิจัย	2
1.4 วิธีทำการศึกษาวิจัย	3
1.5 ประโยชน์ของการวิจัย	3
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	5
2.1 ศักยภาพและความพึงพอใจในการไหล	5
2.2 ศักยภาพเชิงซ้อน	7
2.3 นิยามของเส้นทางเดินของของไหล	7
2.4 จุดหยุดนิ่ง	10
2.5 การส่งและการส่งคงแบบ	15
2.6 การประยุกต์ใช้การส่งคงแบบกับกลศาสตร์ของของไหล	17
2.7 ทฤษฎีวงกลม	18
2.8 การใช้ทฤษฎีวงกลมควบคู่กับการส่งคงแบบ	18
2.9 สมการความดัน	19
2.10 สมการการแปลงชาร์วคริสโตเฟล	21
2.11 ทฤษฎีเบลเชียส	23
2.12 ทฤษฎีสโตคส์	26
2.13 ศักยภาพเชิงซ้อนในกรณีที่แบ่งทรงกระบอกวางขวางกันกระแสน้ำ ที่ไหลในแนวตั้งฉากด้วยความเร็วสม่ำเสมอ	27
2.14 ระบบพิกัดโคเออร์ดิเนต	30
2.15 ศักยภาพเชิงซ้อนในกรณีที่กระแสน้ำไหลผ่านเนินดิน (Mound) หรือคูดิน (ditch) ที่เป็นส่วนของทรงกลม	32

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 การปะทะของกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอบนแท่งทรงกระบอกที่อยู่นิ่ง	33
3.1 การหาคัดย้เชิงซ้อนสำหรับ Model A และ Model B	33
3.2 การหาแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A และ Model B	34
3.3 การหาแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับ Model C	37
3.4 การเปรียบเทียบแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับแท่งทรงกระบอกทั้งสามลักษณะ	67
3.5 การหาจุดหยุดนิ่งและเส้นแบ่งทางเดินของของไหล ของแท่งทรงกระบอก Model A	69
บทที่ 4 การปะทะของกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอบนแท่งทรงกระบอก ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และปราศจากการหมุน	75
4.1 การหาแรงและโมเมนต์ของแท่งทรงกระบอกที่เคลื่อนที่ ด้วยความเร็วคงที่และปราศจากการหมุน	75
4.2 การเปรียบเทียบโมเมนต์ของแท่งทรงกระบอกที่มีความกว้าง และความยาวของหน้าตัดเท่ากัน	78
4.3 การวิเคราะห์ผลการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของเรือ ในกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ	79
บทที่ 5 บทสรุปและข้อเสนอแนะ	89
5.1 บทสรุป	89
5.2 ข้อเสนอแนะ	91
บรรณานุกรม	93
ภาคผนวก ก การหาคัดย้เชิงซ้อนของกระแสน้ำที่ไหลผ่าน Model A	95
ภาคผนวก ข คัดย้เชิงซ้อนในกรณีแท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่โดยปราศจากการหมุน	107
ภาคผนวก ค ความหมายของ P_H (Hydrostatic pressure) และ P_D (Hydrodynamic pressure)	111
ประวัติผู้วิจัย	105

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
4-1 ตารางแสดงการเปรียบเทียบการมีเสถียรภาพของเรือทั้งสองลักษณะ ที่เคลื่อนที่ในทิศทางที่ทำให้โมเมนต์เท่ากับศูนย์	88

สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
2-1 แสดงแผ่นบางโค้งงอ AB ที่วางขวางกั้นทางเดินของน้ำในทิศทางที่ตั้งฉากกับกระแส น้ำที่ไหลด้วยความเร็ว q	5
2-2 แสดงส่วน 1 และส่วน 2 ของแผ่นบางโค้งงอ AB	6
2-3 แสดงเส้นแบ่งทางเดินของน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอปะทะแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงกลมรัศมี a ที่วางขวางกั้นกระแสน้ำ	8
2-4 แสดงเส้นแบ่งทางเดินของของไหลที่หยุดนิ่งบนแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงกลม	9
2-5 แสดงแท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่	9
2-6 แสดงแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมที่มีจุดกำเนิดเป็นจุดหยุดนิ่งบนผิวของแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นเส้นโค้งปิด	11
2-7 แสดงการตั้งฉากกันของเส้นแบ่งทางเดินของของไหล 2 เส้นที่จุดหยุดนิ่ง	14
2-8 แสดงเส้นทางการไหลของกระแสน้ำที่ปะทะบนผิวของแท่งทรงกระบอกในรูปแบบต่างๆ	15
2-9 แสดงสมบัติของการส่งคงแบบ	16
2-10 แสดงสมบัติคอนทัวร์เปี่ยง (Indented contour)	17
2.11 แสดงการส่งคงแบบบนเส้นโค้งปิดจากระนาบ z ไปยังระนาบ Z	17
2-12 แสดงการเคลื่อนที่ของระบบพิกัดฉาก F' โดยที่ระบบพิกัดฉาก F อยู่นิ่ง	20
2-13 แสดงทิศทางการเคลื่อนที่และการหมุนของแกนตั้งฉาก	21
2-14 แสดงการส่งจุดบนระนาบ z ไปยังจุดบนระนาบ Z โดยใช้การแปลงซาร์ซคริสโตฟเฟิล	22
2-15 แสดงแรงและโมเมนต์ที่กระทำบนผิวแท่งทรงกระบอกที่หยุดนิ่ง	23
2-16 แสดงแรงและโมเมนต์ที่กระทำบนผิวแท่งทรงกระบอกที่เคลื่อนที่	25
2-17 แสดงการแปลงจุดบนวงกลมในระนาบ Z ไปยังจุดบนวงรีในระนาบ z โดยการแปลงเยาคอฟสกี	28
2-18 แสดงระบบพิกัดโคเอ็กซอล	31
3-1 แสดงความกว้างและความยาวของหน้าตัด Model A	36
3-2 แสดงการแปลงจุดบน Model C ในระนาบ z ไปยังจุดบนวงกลมในระนาบ Z	37
3-3 แสดงพื้นผิวของ Model C ที่สัมพันธ์กับแท่งทรงกระบอกวงกลม	48
3-4 แสดงแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับแท่งทรงกระบอกทั้งสามลักษณะ	67

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
3-5 แสดงจุดหยุดนิ่งและเส้นแบ่งทางเดินของของไหลในกรณีที่ $\alpha = \frac{\pi}{6}, n = \frac{3}{2}$ และ $c = \sqrt{2}$	71
3-6 แสดงจุดหยุดนิ่งและเส้นแบ่งทางเดินของของไหลในกรณีที่ $\alpha = \frac{\pi}{4}, n = \frac{3}{2}$ และ $c = \sqrt{2}$	72
3-7 แสดงจุดหยุดนิ่งและเส้นแบ่งทางเดินของของไหลในกรณีที่ $\alpha = \frac{\pi}{3}, n = \frac{3}{2}$ และ $c = \sqrt{2}$	73
4-1 แสดงความกว้างและความยาวของหน้าตัด Model A	78
4-2 แสดงการเคลื่อนที่ของเรือที่แล่นด้วยความเร็วคงที่ U_0 ทวนกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ทำมุม α กับทิศทางลบของแกน ox	80
4-3 แสดงการเคลื่อนที่ของเรือที่แล่นด้วยความเร็วคงที่ U_0 ตามกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ทำมุม α กับทิศทางลบของแกน ox	80
4-4 แสดงการเคลื่อนที่ของเรือ Model A ในทิศทางต่างๆที่ทำมุม α กับทิศทางลบของแกน ox	84
4-5 แสดงการเคลื่อนที่ของเรือทรงกระบอก Model B ในทิศทางต่างๆที่ทำมุม α กับทิศทางลบของแกน ox	87
ค-1 แสดงลักษณะของแท่งทรงกระบอกที่ลอยในกระแสน้ำ	113

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติทางกายภาพไม่ว่าจะเป็น แรงและโมเมนต์ที่กระทำกับผิวของวัตถุ รวมทั้งเส้นทางการไหลของของไหล (Streamline) สำหรับปัญหาของกระแสที่มีความเร็วสม่ำเสมอที่ไหลผ่านแท่งทรงกระบอกที่วางกั้นอยู่ ได้รับความสนใจอย่างต่อเนื่องมาหลายสิบปี จนถึงปัจจุบัน นับตั้งแต่ทฤษฎีที่ปรากฏในหนังสือ “Theoretical Hydrodynamics” (Milne-Thomson 1962) และต่อมาในงานวิจัยเรื่อง “Finite Element Solutions for Potential Flow Problem” (Dechaumphai P. and Sucharitpwatskul 2000) ได้นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มาคำนวณพลศาสตร์ของของไหล ไม่ว่าจะเป็นการคำนวณหาแรง โมเมนต์ และเส้นทางการไหลของของไหล

อย่างไรก็ดี แท่งทรงกระบอกที่นำมาเป็นกรณีตัวอย่าง ในการคำนวณเชิงวิเคราะห์ที่ผ่านมา มักจะเป็นแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงกลมหรือวงรี ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเชกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน และแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยมีปลายล่างปิด

งานวิจัยนี้ได้เริ่มจากการศึกษาเกี่ยวกับแรงและโมเมนต์ที่เกิดจากการปะทะของน้ำที่ไหลผ่านแท่งทรงกระบอกด้วยความเร็วสม่ำเสมอใน 2 สถานะด้วยกันคือ

สถานะที่ 1 แท่งทรงกระบอกอยู่นิ่ง

สถานะที่ 2 แท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และปราศจากการหมุน ในลักษณะเดียวกันกับการเคลื่อนที่ของเรือ

นอกจากนี้ในงานวิจัยยังได้ศึกษาหาจุดหยุดนิ่ง (Stagnation point) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เกิดความดันสูงสุดบนผิวโค้งของแท่งทรงกระบอกดังกล่าว

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อนำผลการศึกษาเชิงวิเคราะห์ของแรงและโมเมนต์ที่เกิดจากการปะทะของน้ำที่ไหลผ่านแท่งทรงกระบอกด้วยความเร็วสม่ำเสมอ มาใช้เป็นแนวทางในการออกแบบเรือที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นบริเวณภายในเส้นโค้งเปิด ที่มีแรงและโมเมนต์น้อยที่สุดที่มากกระทำต่อต้านข้างของลำเรือ

1.2.2 เพื่อหาตำแหน่งจุดหยุดนิ่งของการไหลของน้ำบนพื้นผิวด้านข้างของแท่งทรงกระบอกกรณีที่พื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเซกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เกิดความดันสูงสุดบนผิวโค้งของแท่งทรงกระบอก

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 แท่งทรงกระบอกที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้มี 3 ลักษณะด้วยกันคือ

1.3.1.1 แท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเซกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน

1.3.1.2 แท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงรี

1.3.1.3 แท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

1.3.2 สถานะของแท่งทรงกระบอกมีอยู่ 2 สถานะด้วยกันคือ

1.3.2.1 แท่งทรงกระบอกอยู่นิ่ง

1.3.2.2 แท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ในแนวราบด้วยความเร็วคงที่ และปราศจากการหมุนโดยให้แกนของแท่งทรงกระบอกอยู่ในแนวดิ่งตลอดเวลา

1.3.3 ในขณะที่แท่งทรงกระบอกอยู่นิ่ง เราคำนวณหาจุดหยุดนิ่ง ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เกิดความดันสูงสุดบนผิวโค้งของแท่งทรงกระบอก

ภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้

(1) การไหลของน้ำมีความเร็วสม่ำเสมอตลอดเวลาและปราศจากการหมุน
 (2) ระนาบของการไหลของน้ำอยู่ในแนวนอนหรือในระนาบ oxy
 (3) ตัวแปรของการคำนวณต่างๆ ไม่เป็นฟังก์ชันของความสูงของน้ำ นั่นคือถ้าวางระบบแกนตั้งฉาก oxyz โดยให้ระนาบ oxy เป็นระดับของน้ำในแนวนอน ส่วนแกน oz เป็นทิศทางในแนวดิ่งที่ตั้งฉากกับระดับของน้ำ $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$

(4) ในกรณีแท่งทรงกระบอกส่วนหนึ่งจมอยู่ใต้ผิวน้ำจะเกิดแรงพยุงขึ้น ตามกฎของอาร์คิมิดีส ทำให้เราสามารถกำจัดเทอม “gh” ในสมการแบร์นูลลี คงเหลือสมการในรูป $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 = \text{ค่าคงที่}$ ซึ่งในที่นี้ P เป็น hydrodynamic pressure (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ค)

(5) ให้แกน oz ของแท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะ อยู่ในแนวดิ่งที่ตั้งฉากกับระดับของน้ำตลอดเวลา เพื่อไม่ให้ฐานของแท่งทรงกระบอกปะทะกับน้ำ (น้ำจะไหลผ่านฐานของแท่งทรงกระบอกด้วยความเร็วเดิม)

(6) ในขณะที่แท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ ให้ส่วนของแท่งทรงกระบอกที่อยู่ใต้ผิวน้ำมีความสูงเท่าเดิมภายใต้แรงพยุงขึ้นของน้ำ

(7) ส่วนที่น้ำปะทะ เป็นพื้นผิวด้านข้างของแท่งทรงกระบอกที่จมอยู่ในน้ำเท่านั้น ซึ่งไม่มีขนาดของแรงเพียงพอที่จะทำให้เกิดโมเมนต์ในระนาบแนวดิ่ง ที่ทำให้แกนของแท่งทรงกระบอกเอียงออกไปจากแนวดิ่งได้

(8) ไม่มีผลกระทบจากแรงอื่นๆที่กระทำต่อฐานของแท่งทรงกระบอก

1.4 วิธีทำการศึกษาวิจัย

1.4.1 คำนวณหาค่าศูนย์กลางของแท่งทรงกระบอก

1.4.2 คำนวณหาแรงและโมเมนต์ ที่กระทำต่อพื้นผิวด้านข้างของแท่งทรงกระบอก ที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงรี และรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเซกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน โดยมีปลายล่างปิด ในกรณีแท่งทรงกระบอกอยู่นิ่งและในกรณีที่แท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ $W_0 = U_0 + iV_0$ และปราศจากการหมุน (อัตราเร็วเชิงมุมเท่ากับศูนย์)

1.4.3 คำนวณหาแรงและโมเมนต์ที่กระทำที่ผิวโค้งของแท่งทรงกระบอก ที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนในกรณีอยู่นิ่ง

1.4.4 ทำการเปรียบเทียบแรงและโมเมนต์ที่คำนวณได้ในข้อ 1.4.2 และ 1.4.3 ในกรณีที่แท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะอยู่นิ่ง

1.4.5 คำนวณหาจุดหยุดนิ่ง บนพื้นผิวแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเซกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เกิดความดันสูงสุดบนผิวโค้งของแท่งทรงกระบอก

1.5 ประโยชน์ของการวิจัย

ผลของการวิจัยข้างต้นนี้ สามารถนำมาประยุกต์ใช้เป็นแนวทางในการออกแบบเรือ โดยการใช้แบบจำลองของแท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะมาเปรียบเทียบกับที่กล่าวไว้ในตอนต้น เมื่อแท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ทวนกระแสน้ำ ตามกระแสน้ำ หรือวิ่งตัดกระแสน้ำจากจุดหนึ่งของชายฝั่งคลองไปยังอีกจุดหนึ่งของชายฝั่งคลองตรงข้าม ผลการประยุกต์นี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่ออกแบบเรือและผู้ถือหางเสือเรือ (helmsman) ที่จะสามารถบังคับทิศทางการเคลื่อนที่ของเรือได้อย่างปลอดภัย

การวิจัยยังได้ศึกษาหาจุดหยุดนิ่งบนพื้นผิวด้านข้างของแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเซกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน ซึ่งสัมพันธ์กับตำแหน่งที่มีความดันสูงสุด เพื่อหาจุดตรึงให้แท่งทรงกระบอกอยู่กับที่ และเป็นจุดที่มีความเหมาะสมที่สุด

บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ศักย์ความเร็วและฟังก์ชันการไหล (Velocity Potential and Stream Function)

2.1.1 ศักย์ความเร็ว (Velocity Potential)

สมมติความเร็วของของไหลเท่ากับ $\vec{q}$ ซึ่งในสองมิติสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} \quad (2-1)$$

ศักย์ความเร็ว คือการไหลของของไหลที่สัมพันธ์กับความเร็ว $\vec{q}$ ที่สอดคล้องกับ

สมการ

$$\vec{q} = -\nabla\phi \quad (2-2)$$

โดยที่ ϕ = ศักย์ความเร็ว

นั่นคือ

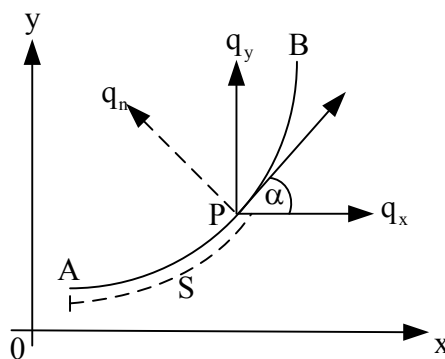
$$q_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \text{ และ } q_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

ในกรณีที่ของไหลที่ไม่เกิดการหมุน (Irrotational) ศักย์ความเร็วนี้สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\nabla \times \vec{q} = \vec{0} \quad (2-3)$$

2.1.2 ฟังก์ชันการไหล (Stream Function)

เราจะพิจารณาเฉพาะฟังก์ชันการไหลในสองมิติ ที่มาของฟังก์ชันการไหลอธิบายได้ดังนี้ ถ้ามีแผ่นบางโค้งงอ AB ตามภาพที่ 2-1 วางขวางกั้นทางเดินของน้ำในทิศทางที่ตั้งฉากกับกระแสและให้น้ำไหลผ่านแผ่นบางโค้งงอดังกล่าวโดยไม่มีสิ่งกีดขวาง (free force) ให้ P เป็นจุดใดจุดหนึ่งระหว่าง AB, S เป็นความยาวเส้นโค้ง AP เราจะพิจารณาปริมาณน้ำที่ไหลผ่าน AB ตามภาพที่ 2-1 q_n เป็นความเร็วย่อยของกระแสน้ำของ $\vec{q}$ ในทิศทางที่ตั้งฉากกับพื้นผิวของแผ่นบางโค้งงอที่จุด P



ภาพที่ 2-1 แสดงแผ่นบางโค้งงอ AB ที่วางขวางกั้นทางเดินของน้ำในทิศทางที่ตั้งฉากกับกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็ว $\vec{q}$

ใน 1 วินาทีปริมาณน้ำที่ไหลผ่านพื้นที่ผิวโค้ง ds ที่กว้าง 1 หน่วยเท่ากับ $(q_n \cdot 1)ds = q_n ds$ ดังนั้นปริมาณน้ำที่ไหลผ่านพื้นผิว $AB = \int_{AB} (q_n ds)$ ปริมาณน้ำจำนวนนี้เรียกว่า ฟลักซ์(Flux) ของน้ำที่ไหลผ่าน AB ซึ่งใช้สัญลักษณ์ ψ ถ้า q_x และ q_y เป็นส่วนประกอบของความเร็วย่อยและ α เป็นมุมที่เส้นสัมผัสที่จุด P ทำกับแกน ox

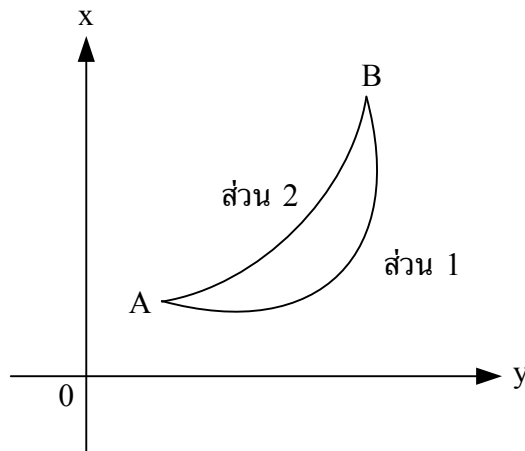
$$q_n = -q_x \sin \alpha + q_y \cos \alpha \quad (2-4)$$

ดังนั้น
$$\int_{AB} q_n ds = \int_{AB} (-q_x \sin \alpha + q_y \cos \alpha) ds$$

แต่ $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$ และ $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \psi = \int_{AB} q_n ds &= \int_{AB} \left(-q_x \frac{dy}{ds} + q_y \frac{dx}{ds} \right) ds \\ &= \int_{AB} (-q_x dy + q_y dx) \end{aligned} \quad (2-5)$$

ถ้าลองพิจารณาแผ่นบางโค้งจาก A ถึง B ในลักษณะต่างกันและถ้าไม่มีปริมาณของน้ำเพิ่มขึ้นหรือลดลงด้วยสาเหตุอื่น ๆ แล้ว ฟลักซ์หรือการไหลของน้ำที่ผ่าน ส่วนที่ 1 และส่วนที่ 2 จะเป็นไปในลักษณะที่ไม่มีการสะสมของน้ำระหว่างทั้งสองส่วน



ภาพที่ 2-2 แสดงส่วน 1 และส่วน 2 ของแผ่นบางโค้งจาก AB

หลักการเดียวกันนี้เป็นจริงทุกๆแผ่นบางโค้งจากจุด A และ B นั่นคือ $\int_{AB} (-q_x dy + q_y dx)$ เป็นค่าคงที่สำหรับทุกเส้นโค้งที่ผ่าน A และ B แสดงว่า $-q_x dy + q_y dx$ เป็นผลต่างเชิงอนุพันธ์ (Exact differential) เราจึงเขียน

$$\int_{AB} (-q_x dy + q_y dx) = \int_{AB} d\psi$$

หรือ
$$\psi = \int_{AB} d\psi = \psi_A - \psi_B \quad (2-6)$$

ในกรณีที่ A และ B เป็นจุดที่อยู่บนเส้นทางเดินของของไหล เดียวกันจะไม่มีน้ำไหลผ่าน นั่นคือ ฟลักซ์ที่ไหลผ่าน AB เท่ากับศูนย์ นั่นคือ $\psi_A = \psi_B$ แสดงว่า ψ เท่ากับค่าคงที่ เป็นสมการของเส้นทางเดินของของไหล ซึ่งค่าคงที่ค่าหนึ่งก็จะได้เส้นทางเดินของของไหลเส้นหนึ่งแต่

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy \\ &= -q_x dy + q_y dx \end{aligned} \quad (2-7)$$

ดังนั้น $q_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, q_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}$

เมื่อเปรียบเทียบกับศักย์ความเร็ว ϕ โดยที่ $\vec{q} = -\nabla\phi$

$$q_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ และ } q_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

นั่นคือ $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ และ } \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (2-8)$

ด้วยเหตุนี้ศักย์เชิงซ้อน $\Omega = \phi + i\psi$ จึงเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เนื่องจากสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ (Cauchy Riemann equation)

2.2 ศักย์เชิงซ้อน (Complex potential)

ศักย์เชิงซ้อนอยู่ในรูป

$$\Omega = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (2-9)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้นสมการที่ (2-9) จึงสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ นั่นคือ

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ และ } \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ซึ่ง $\phi(x, y)$ และ $\psi(x, y)$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก (Harmonic function) ซึ่งสอดคล้องกับ สมการลาปลาซ (Laplace's equation) นั่นคือ

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (2-10)$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad (2-11)$$

โดยที่ $\phi(x, y)$ เป็นศักย์ความเร็ว

$\psi(x, y)$ เป็นฟังก์ชันการไหล

2.3 นิยามของเส้นทางเดินของของไหล (Streamlines)

สมการของเส้นทางเดินของของไหล ในสองมิติ คือ

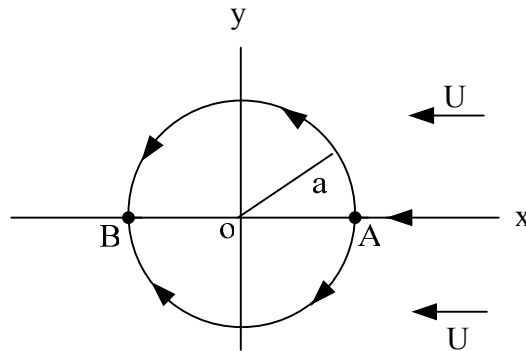
$$\psi(x, y) = \text{ค่าคงที่} \quad (2-12)$$

เส้นแบ่งทางเดินของของไหล (Dividing Streamline) คือเส้นทางเดินของของไหลที่มีสมการอยู่ในรูปของ

$$\psi(x, y) = 0 \quad (2-13)$$

สมการที่ (2-13) ใช้เฉพาะในกรณีที่วัตถุไม่เคลื่อนที่หรืออยู่นิ่งที่วางขวางกั้นการไหลของกระแส

ตัวอย่างที่ 1 ให้ U แทนความเร็วสม่ำเสมอของกระแสน้ำที่ไหลปะทะแท่งทรงกระบอก



ภาพที่ 2-3 แสดงเส้นแบ่งทางเดินของน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอปะทะแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงกลมรัศมี a ที่วางขวางกั้นกระแสน้ำ

เนื่องจาก

$$\Omega = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

$$\phi + i\psi = U \left\{ (x + iy) + \frac{a^2}{x + iy} \frac{(x - iy)}{(x - iy)} \right\}$$

$$= U \left\{ (x + iy) + \frac{a^2(x - iy)}{x^2 + y^2} \right\}$$

$$= U \left(x + \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \right) + iU \left(y - \frac{a^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\psi = Uy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (2-14)$$

ดังนั้นเส้นแบ่งทางเดินของของไหลมีสมการดังนี้

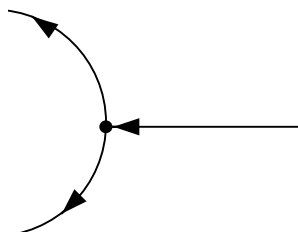
$$y \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) = 0 \quad (2-15)$$

ซึ่งประกอบด้วยเส้นทางเดินของของไหล 2 เส้นคือ เส้นตรง $y = 0$ และวงกลม $x^2 + y^2 = a^2$ ตามภาพที่ 2-3 อธิบายได้ว่าเส้นแบ่งทางเดินของของไหล $y = 0$ จะแยกออกเป็น 2 เส้นที่จุด A และมาบรรจบกันที่จุด B

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า พื้นผิวของแท่งทรงกระบอกหรือวงกลม $x^2 + y^2 = a^2$ เป็นเส้นแบ่งทางเดินของของไหลเส้นหนึ่ง ข้อสังเกตที่น่าสนใจคือ ที่จุด A และ B เส้นแบ่งทางเดินของของไหลทั้ง 2 เส้นตั้งฉากกันเนื่องจากจุด A และ B เป็นจุดหยุดนิ่งซึ่งเป็นจุดที่ $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y},$

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ มีค่าจริง

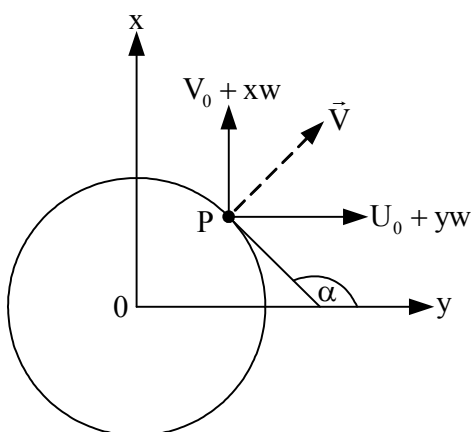
จากตัวอย่างข้างต้นแสดงว่าพื้นผิวของแท่งทรงกระบอกไม่ว่าจะมีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปใดก็ตามจะมีเส้นแบ่งทางเดินของของไหลเส้นหนึ่งเสมอ แต่ผลลัพธ์อย่างหนึ่งที่ถือว่าเป็นบรรทัดฐานได้ก็คือถ้าหากมีจุดหยุดนิ่งอยู่ที่จุดใด จุดนั้นจะมีเส้นแบ่งทางเดินของของไหลจากภายนอกแท่งทรงกระบอกตัดกับพื้นผิวของแท่งทรงกระบอกซึ่งเป็นเส้นแบ่งทางเดินของของไหลอีกเส้นหนึ่งเป็นมุมฉากเสมอ ดังแสดงในภาพที่ 2-4



ภาพที่ 2-4 แสดงเส้นแบ่งทางเดินของของไหลที่จุดหยุดนิ่งบนแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงกลม

ในกรณีทั่วไป พื้นผิวของวัตถุเกร็ง (Rigid body) ที่อยู่นิ่ง และวางขวางกั้นการไหลของของไหล จะเป็นเส้นแบ่งทางเดินของของไหลเส้นหนึ่งนั่นคือ $\psi = 0$ ที่ทุก ๆ จุดบนพื้นผิวของวัตถุเกร็ง แต่ถ้าวัตถุเกร็งนั้นไม่อยู่นิ่ง ความสัมพันธ์ของสมการ $\psi = 0$ บนพื้นผิวดังกล่าวใช้ไม่ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดแท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงเส้น $\vec{W} = U_0 \vec{i} + V_0 \vec{j}$ และความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ ให้ U_0 และ V_0 เป็นความเร็วของจุดกำเนิด o ในทิศทาง ox และ oy



ภาพที่ 2-5 แสดงแท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่

ความเร็วของจุด P บนผิวของแท่งทรงกระบอก

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= (U_0 \vec{i} + V_0 \vec{j}) + \omega \vec{k} \times (x \vec{i} + y \vec{j}) \\ &= (U_0 - y\omega) \vec{i} + (V_0 + x\omega) \vec{j}\end{aligned}$$

ความเร็วย่อยในทิศทางเส้นแนวฉากชี้ออก (Outward normal) ที่จุด P คือ

$$(U_0 - yw) \sin \alpha - (V_0 + xw) \cos \alpha \quad (2-16)$$

โดยที่ α เป็นมุมที่เส้นสัมผัสที่จุด P ทำกับแกน ox

เนื่องจาก $q_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ และ $q_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

ซึ่ง q เป็นความเร็วของไหล และ ψ เป็นฟังก์ชันของการไหลที่จุด P

ความเร็วย่อยในทิศทางเส้นแนวฉากชี้ออกเท่ากับ

$$q_x \sin \alpha - q_y \cos \alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \sin \alpha - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \alpha \quad (2-17)$$

แต่ $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$ และ $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$

ดังนั้นจากสมการที่ (2-16) และ (2-17) จะได้

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} &= (U_0 - yw) \frac{dy}{ds} - (V_0 + xw) \frac{dx}{ds} \\ -\frac{d\psi}{ds} &= (U_0 - yw) \frac{dy}{ds} - (V_0 + xw) \frac{dx}{ds} \\ \psi &= V_0 x - U_0 y + \frac{1}{2} w(x^2 + y^2) + B \end{aligned} \quad (2-18)$$

เนื่องจาก $\psi = 0$ เมื่อ $U_0 = V_0 = w = 0$ ดังนั้น $B = 0$

ดังนั้น $\psi = V_0 x - U_0 y + \frac{1}{2} w(x^2 + y^2) \quad (2-19)$

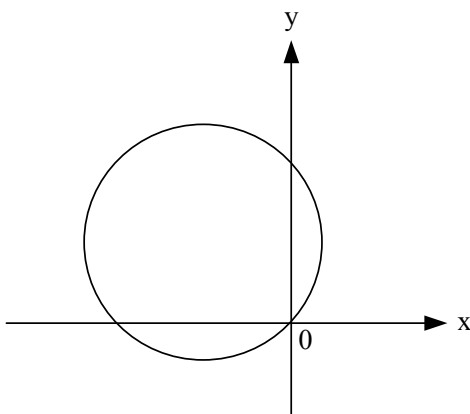
2.4 จุดหยุดนิ่ง (Stagnation point)

จุดหยุดนิ่งคือจุดที่มีความเร็วของของไหลเป็นศูนย์ เราจะพิสูจน์ว่าที่จุดนี้จะมีเส้นทางการไหลของของไหล 2 เส้นตัดกันเป็นมุมฉาก

สมมุติจุดหยุดนิ่งอยู่ที่จุดกำเนิด (0,0) และเราจะพิจารณาเฉพาะสองมิติเท่านั้น ดังนั้นจากการสมมุติดังกล่าวจะได้

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{(0,0)} = 0 \text{ และ } \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{(0,0)} = 0$$

จากทฤษฎีแมคคลอริน (Maclaurin's theorem) การพิสูจน์ว่าเส้นแบ่งทางเดินของของไหล ที่แตกต่างจากขอบของผิวแห่งทรงกระบอก มีทิศทางเข้าหาจุดหยุดนิ่งบนผิวของแห่งทรงกระบอกนั้น สมมุติมีแห่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นเส้นโค้งปิดในภาพที่ 2-6 และกำหนดให้จุด o เป็นจุดหยุดนิ่งบนผิวของแห่งทรงกระบอกซึ่งเราจะกำหนด ให้เป็นจุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก oxy



ภาพที่ 2-6 แสดงแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมที่มีจุดกำเนิดเป็นจุดหยุดนิ่งบนผิวของแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นเส้นโค้งปิด

โดยทั่วไปจุดหยุดนิ่งหาได้จากสมการ $\frac{d\Omega}{dz} = 0$

โดยที่ $\Omega =$ ศักย์เชิงซ้อน
 $= \phi(x, y) + i\psi(x, y)$

และ $z = x + iy$

ในที่นี้ ϕ เป็นศักย์ความเร็ว และ ψ เป็นฟังก์ชันการไหล

ความสัมพันธ์ระหว่าง ϕ และ ψ เป็นไปตามสมการโคชี-รีมันน์

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ณ จุดที่ ϕ และ ψ มีอนุพันธ์ย่อยทุกอันดับและเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\frac{d\Omega}{dz}$ มีค่าจริงซึ่งเท่ากับ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

ดังนั้นเมื่อ $\frac{d\Omega}{dz} = 0$ ก็หมายความว่า

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

จะเห็นว่า $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{(0,0)} = 0$ และ $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{(0,0)} = 0$ เพราะว่าจุด o เป็นจุดหยุดนิ่ง

$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{(0,0)}$ คือค่าของ $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ที่จุด o และ $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{(0,0)}$ คือค่าของ $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ที่จุด o

โดยใช้ อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin's series) ใน 2 มิติ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \psi(0,0) + \left\{ x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{(0,0)} + y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{(0,0)} \right\} \\ + \frac{1}{2} \left\{ x^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{(0,0)} + 2xy \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_{(0,0)} + y^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{(0,0)} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2-20)$$

ในย่านของจุด o ซึ่งเป็นจุดหยุดนิ่ง x และ y มีค่าน้อยมาก ($x, y > 0$ และเข้าใกล้ 0) และถ้ากำหนดให้ $\psi(x, y)$ มีความต่อเนื่องที่จุด o ซึ่งเป็นจุดหยุดนิ่งอยู่บนพื้นผิวแห่งทรงกระบอก $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \psi(x, y) = \psi(0,0)$ ดังนั้นสำหรับค่า x และ y ในย่านของ o จากสมการที่ (2-20) จะได้

$$x^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{(0,0)} + 2xy \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_{(0,0)} + y^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{(0,0)} = 0$$

$$\text{หรือ} \quad ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad (2-21)$$

$$\text{โดยที่ } a = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{(0,0)}, \quad b = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{(0,0)}, \quad h = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_{(0,0)}$$

สมการที่ (2-21) เป็นสมการของภาคตัดกรวย (Conic section) ซึ่งประกอบด้วยเส้นตรง 2 เส้นตัดกันที่จุดกำเนิด o ถ้ากำหนดให้สมการของเส้นตรงดังกล่าวมีรูปเป็น

$$x - m_1 y = 0 \text{ และ } x - m_2 y = 0 \text{ โดยที่ } m_1 \neq m_2$$

สมการ $(x - m_1 y)(x - m_2 y) = 0$ จะเป็นสมการที่มีรูปแบบเดียวกันกับสมการที่ (2-21) ซึ่งเขียนได้ในรูป

$$x^2 - (m_1 + m_2)xy + (m_1 m_2)y^2 = 0 \quad (2-22)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการที่ (2-21) และ (2-22) ในกรณีที่ $a \neq 0$ จะได้

$$\frac{b}{a} = m_1 m_2 \quad (2-23)$$

$$\text{โดยที่ } m_1, m_2 \neq 0$$

ในกรณีที่ของไหลปราศจากการหมุน (Irrotational) จะได้ความสัมพันธ์เป็น $\text{curl } \vec{q} = 0$

โดยที่ $\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j}$ เป็นความเร็ว

$$\text{ซึ่ง} \quad q_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ และ } q_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \text{curl } \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ q_x & q_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{ถ้า } \text{curl } \vec{q} = 0 \text{ จะได้} \quad \frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y} = 0$$

หรือ
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

ซึ่งเป็นจริงที่จุดหยุดนิ่งหรือจุด 0 ด้วย

นั่นคือ
$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{(0,0)} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{(0,0)} = 0$$

หรือ
$$a + b = 0 \quad (2-24)$$

จากสมการที่ (2-24)
$$b = -a$$

และจากสมการที่ (2-23)
$$m_1 m_2 = \frac{b}{a} = \frac{-a}{a} = -1 \quad (2-25)$$

ความชันของเส้นตรง $x - m_1 y = 0$ และ $x - m_2 y = 0$

คือ $\frac{1}{m_1}$ และ $\frac{1}{m_2}$ โดยที่ $m_1 \neq m_2$ และ $m_1, m_2 \neq 0$

ดังนั้นผลคูณของความชันเท่ากับ $\frac{1}{m_1 m_2} = \frac{1}{(-1)} = -1$ แสดงว่าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกัน

เราจึงได้ข้อสรุปว่าเส้นแบ่งทางเดินของของไหลจากภายนอกแห่งทรงกระบอกวงรีเข้าหาจุดหยุดนิ่งบนพื้นผิวของแห่งทรงกระบอกทำมุมฉากกับพื้นผิวของแห่งทรงกระบอก หรืออีกนัยหนึ่งเราอาจกล่าวได้ว่าเส้นแบ่งทางเดินของของไหลตัดกับพื้นผิวของแห่งทรงกระบอกซึ่งไม่เคลื่อนที่ในกระแสน้ำเป็นมุมฉาก

หมายเหตุ ถ้าค่าใดค่าหนึ่งของ m_1 และ m_2 เท่ากับศูนย์เช่น สมมติ $m_1 = 0$ และ $m_2 = m$ ($m \neq 0$) สมการ 2 เส้นคือ $x = 0$ และ $x - my = 0$ ดังนั้นสมการ $x(x - my) = 0$ จะเป็นสมการเดียวกันกับสมการที่ (2-21) ซึ่งเป็นในรูป $x^2 - mxy = 0$ หรือ $\frac{1}{m} x^2 - xy = 0$ เมื่อเปรียบเทียบกับสัมประสิทธิ์กับสมการ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ จะได้

$$a = \frac{1}{m}, \quad b = 0 \quad \text{และ} \quad h = -\frac{1}{2}$$

แต่จากสมการที่ (2-24)
$$a + b = 0$$

เมื่อ $b = 0$ จะได้ $a = 0$ ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ $m \rightarrow \infty$

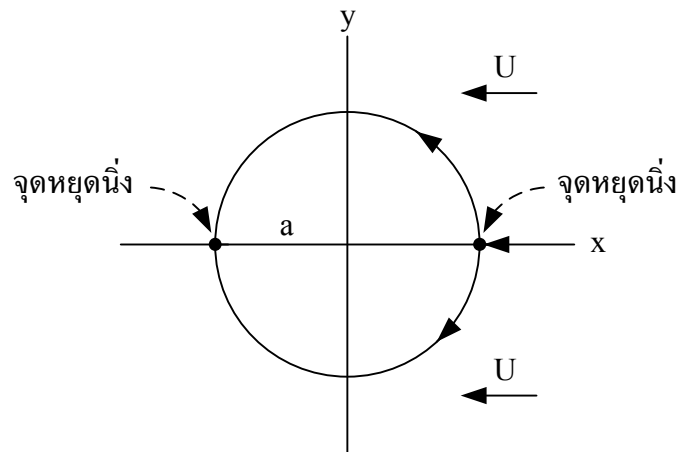
สมการเส้นตรง $x - my = 0$ จะกลายเป็นเส้นตรง $y = 0$ หรือสมการของแกน ox นั่นเองและสมการของเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งคือ $x = 0$ ซึ่งเป็นสมการของแกน oy

ดังนั้นผลลัพธ์ที่สรุปในตอนต้นจึงใช้ได้กับกรณีที่ค่าใดค่าหนึ่งของความชันหรือ m_1, m_2 เท่ากับศูนย์ ตัวอย่างเช่นกรณีที่แห่งทรงกระบอกวงกลมรัศมี a ที่อยู่นิ่งและขวางกั้นกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ในทิศทางลบของแกน ox ซึ่งเราได้ศึกษากันในรูป

$$\Omega = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

$$\phi + i\psi = U\left\{(x + iy) + \frac{a^2(x - iy)}{x^2 + y^2}\right\}$$

$$\psi = Uy\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)$$



ภาพที่ 2-7 แสดงการตั้งฉากกันของเส้นแบ่งทางเดินของของไหล 2 เส้นที่จุดหยุดนิ่ง

พื้นผิวของแท่งทรงกระบอก ($x^2 + y^2 = a^2$) เป็นเส้นแบ่งทางเดินของของไหลเส้นหนึ่งเพราะเมื่อแทน $x^2 + y^2 = a^2$ จะได้ $\psi = 0$ และจุดหยุดนิ่งเกิดขึ้นที่จุด $(a, 0)$ และ $(-a, 0)$ โดยที่ $a > 0$

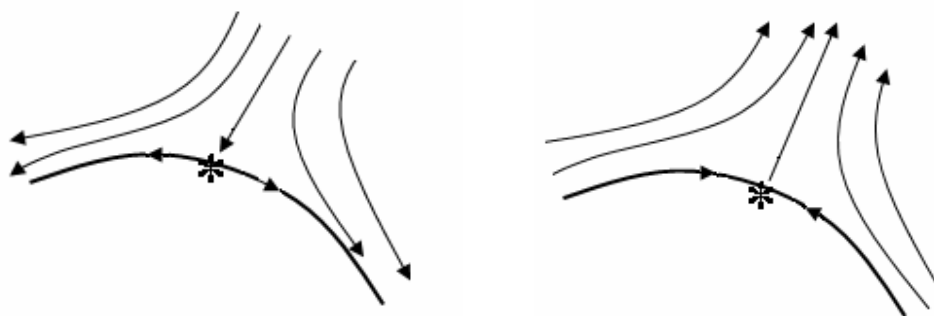
แสดงว่าเส้นแบ่งทางเดินของของไหลอีกเส้นหนึ่งคือเส้นตรง $y = 0$ จาก $\psi = Uy\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)$

ตัดกับเส้นแบ่งทางเดินของของไหลที่เป็นพื้นผิวของแท่งทรงกระบอก (แท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดตั้งฉากกับแกนเป็นวงกลม) เป็นมุมฉาก

ข้อสังเกตคือ ผลลัพธ์ที่ได้นี้จะใช้ได้ในบริเวณใกล้เคียงของจุดหยุดนิ่งโดยที่ฟังก์ชัน $\psi(x, y)$ ณ บริเวณดังกล่าวมีสมบัติดังนี้

- (1) $\psi(x, y)$ มีความต่อเนื่องทุกจุดในย่านของจุดหยุดนิ่ง
- (2) $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$ มีค่าจริงในย่านของจุดหยุดนิ่ง

เส้นแบ่งของทางเดินของของไหลที่มีทิศทางผ่านจุดหยุดนิ่งบนแท่งทรงกระบอกมีลักษณะดังนี้ (* คือจุดหยุดนิ่ง)



ภาพที่ 2-8 แสดงเส้นทางการไหลของกระแสน้ำที่ปะทะบนผิวของแท่งทรงกระบอก
ในรูปแบบต่างๆ

2.5 การส่งและการส่งคงแบบ (Mapping and Conformal Mapping)

กำหนดให้ความสัมพันธ์ $Z = f(z)$ จากระนาบ z ไปยังระนาบ Z โดยที่ $z = x + iy$ และ $Z = X + iY$ และ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ที่ทุก ๆ จุดภายในและบนคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว C (Simple closed contour) ในระนาบ z

เราจะได้การส่งของจุดภายในและจุดบนคอนทัวร์ C ไปเป็นจุดภายในและจุดบนคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว τ ในระนาบ Z ภายใต้สมมุติฐานดังนี้

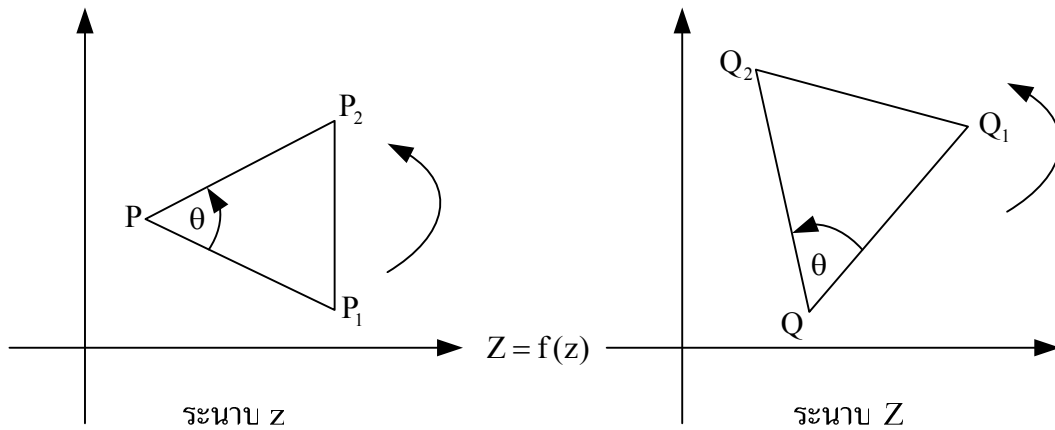
- (1) จุด 2 จุดที่ต่างกันบนคอนทัวร์ C ไม่ถูกส่งเป็นจุดเดียวกันบน τ
- (2) $f'(z) \neq 0$ ที่จุดใด ๆ บนคอนทัวร์ C

จากสมมุติฐานที่ (1) จะทำให้ τ ไม่ตัดกันเอง ส่วนสมมุติฐาน (2) จะทำให้ $Z = f(z)$ เป็นการส่งคงแบบ ซึ่งมีสมบัติ 2 ประการคือ

1. การคงสภาพ (preserve) มุมที่ตัดกันซึ่งหมายความว่ามุมระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นที่ตัดกัน ในระนาบ z เท่ากับมุมระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นที่ตัดกันในระนาบ Z โดยที่เส้นโค้งดังกล่าวเป็นเส้นที่ถูกส่ง (mapped) จากระนาบ z และมุมที่เท่ากันอยู่ในทิศทางการหมุน (Sense of rotation) เดียวกัน

2. ทำให้เกิดความคล้ายกันของสามเหลี่ยมกณิกนันต์ (Infinitesimal triangles) ที่สมนัยกัน

สมบัติทั้ง 2 ประการอธิบายจากรูปดังนี้



ภาพที่ 2-9 แสดงสมบัติของการส่งคงแบบ

ตามภาพที่ 2-9 ภายใต้การส่ง $Z = f(z)$ จะได้ว่าจุด P_1, P_2 และ P_3 ในระนาบ z สมนัยกับจุด Q_1, Q_2 และ Q_3 ในระนาบ Z ตามลำดับ

ดังนั้น
$$\frac{Z_1 - Z}{z_1 - z} = \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} \quad (2-26)$$

และ
$$\frac{Z_2 - Z}{z_2 - z} = \frac{f(z_2) - f(z)}{z_2 - z} \quad (2-27)$$

ถ้าหากว่า $z_1 \rightarrow z$ และ $z_2 \rightarrow z$

เราจะได้
$$\frac{Z_1 - Z}{z_1 - z} = f'(z) \text{ และ } \frac{Z_2 - Z}{z_2 - z} = f'(z)$$

จากการหามอดูลัส (Modulus) และอาร์กิวเมนต์ (Argument)

$$\left| \frac{QQ_1}{PP_1} \right| = \left| \frac{QQ_2}{PP_2} \right| = |f'(z)| = \left| \frac{dZ}{dz} \right|$$

$$\arg(QQ_1) - \arg(PP_1) = \arg(QQ_2) - \arg(PP_2) = \arg f'(z)$$

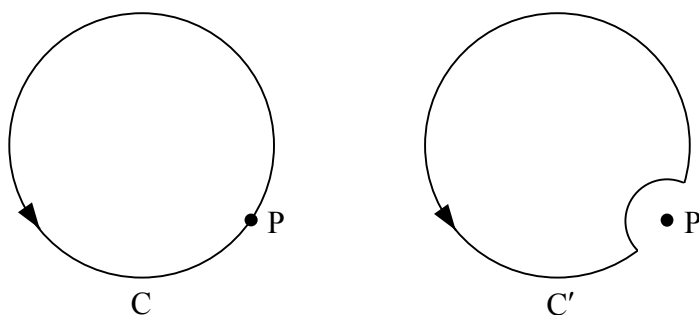
ซึ่งถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใดจุดหนึ่งในระนาบ z จะทำให้ $f'(z)$ มีค่าจริงที่จุดนั้น และ $\arg f'(z)$ มีค่าจริงดังนั้น

$$\arg(QQ_2) - \arg(QQ_1) = \arg(PP_2) - \arg(PP_1) \quad (2-28)$$

ซึ่งเป็นสมบัติข้อที่ 1 ของการส่งคงแบบ และถ้า $\frac{dZ}{dz} \neq 0$ ที่จุดใดจุดหนึ่งจะทำให้ $\frac{QQ_1}{PP_1} = \frac{QQ_2}{PP_2}$

และจากสมบัติข้อที่ 1 แสดงว่า $\triangle PP_1P_2$ และ $\triangle QQ_1Q_2$ มีความคล้ายกัน ดังนั้นสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปดังกล่าวเป็นสามเหลี่ยมกณิกนันต์ (Infinitesimal Triangles)

หมายเหตุ ถ้ามีจุดบนคอนทัวร์ C ที่ทำให้ $f'(z) = 0$ เช่นจุด P ตามภาพที่ 2-10

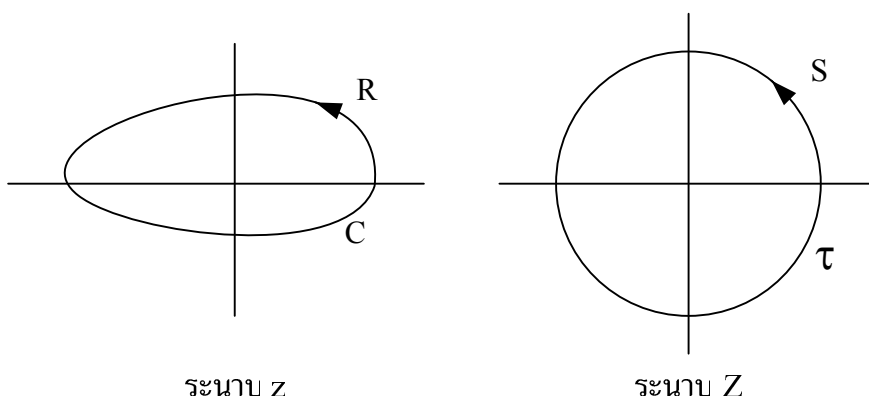


ภาพที่ 2-10 แสดงสมบัติคอนทัวร์เบี้ยง (Indented contour)

เราอาจใช้คอนทัวร์เบี้ยง ที่เป็นส่วนของวงกลมที่มี P เป็นจุดศูนย์กลางและรัศมีเล็กมาก (ตามภาพที่ 2-10) เพื่อให้จุด P อยู่นอก C' ซึ่งในกรณีนี้ $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดภายในและบน C' ทำให้มีความสอดคล้องกับสมมุติฐานของการส่งและสมบัติของการส่งคงแบบ ในที่นี้ C' เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวที่ประกอบด้วยส่วนหนึ่งของ C และคอนทัวร์เบี้ยง

2.6 การประยุกต์ใช้การส่งคงแบบกับกลศาสตร์ของของไหล

ถ้าเรามีเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C ในระนาบ z ซึ่งถูกส่งเป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว τ ในระนาบ Z โดย $Z = f(z)$ ซึ่งเป็นการส่งคงแบบ



ภาพที่ 2-11 แสดงการส่งคงแบบบนเส้นโค้งปิดจากระนาบ z ไปยังระนาบ Z

และกำหนดให้บริเวณ R ภายนอก C ถูกส่งไปเป็นบริเวณ S ภายนอก τ

สมมุติเรากำหนดการเคลื่อนที่ของของไหลในบริเวณ R มีศักย์เชิงซ้อนเป็น

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

ณ จุด Z_0 ในระนาบ Z ที่สมนัยกับจุด z_0 ในระนาบ z ศักย์เชิงซ้อนที่จุด Z_0 จะมีค่าเดียวกับศักย์เชิงซ้อนที่จุด z_0 ด้วย

ต่อไปเรากำหนดให้ C เป็นเส้นขอบ (Boundary) ของแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัด C ซึ่งอยู่นิ่ง เส้นขอบ C ก็จะเป็นเส้นแบ่งทางเดินของของไหล เส้นหนึ่งนั้นคือ $\psi = 0$ บน C แต่เนื่องจากเส้นขอบของ τ สมนัยกับจุดบนเส้นขอบ C ดังนั้นเราก็จะได้ผลลัพธ์ว่าที่เส้นขอบ τ เป็นเส้นแบ่งทางเดินของของไหลด้วย

2.7 ทฤษฎีวงกลม(The Circle Theorem)

ถ้าการไหลของของไหลปราศจากการหมุน (Irrotational motion) และของไหลมีความหนาแน่น(มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร)คงที่ ก่ออัดไม่ได้ (Incompressible) และไม่มี ความหนืด (Inviscid) ของไหลจะมีศักย์เชิงซ้อนเป็น

$$\Omega = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

โดยที่ ϕ เป็นศักย์ของความเร็ว และ ψ เป็นฟังก์ชันการไหล

ซึ่งสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ นั่นคือ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ในกรณีที่ไม่มีสิ่งกีดขวาง กำหนดให้ $\Omega = f(z)$ โดยมีเงื่อนไขว่า $f(z)$ ไม่มีจุดเอกฐาน (Singularity) ที่ระยะน้อยกว่าหรือเท่ากับ a จากจุดกำเนิด (a เป็นค่าคงที่ที่กำหนด)

ถ้ามีสิ่งกีดขวางเป็นแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมรัศมีเท่ากับ a จะทำให้ศักย์เชิงซ้อนของการเคลื่อนที่ของของไหลนอกแท่งทรงกระบอกมีรูปเป็น

$$\Omega = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right) \quad (2-29)$$

ซึ่งพิสูจน์ได้จากข้อเท็จจริงที่ว่าขอบของทรงกระบอกหรือเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีเท่ากับ a จะต้องเป็นเส้นแบ่งทางเดินของของไหล ($\psi = 0$) เนื่องจากที่จุดต่างๆบนขอบของทรงกระบอก $\bar{z} = \frac{a^2}{z}$ ทำให้ศักย์เชิงซ้อนบนจุดต่างๆบนขอบของทรงกระบอกมีรูป $\Omega = f(z) + \bar{f}(\bar{z})$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง ดังนั้น $\psi = 0$

ตามสมมุติฐาน $f(z)$ ไม่มีจุดเอกฐานภายในแท่งทรงกระบอก ดังนั้น $\bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$ จึงไม่มีจุดเอกฐานภายนอกแท่งทรงกระบอก แสดงว่าศักย์เชิงซ้อนใหม่ $\Omega = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$ มีจุดเอกฐานภายนอกแท่งทรงกระบอกเช่นเดียวกับศักย์เชิงซ้อน $\Omega = f(z)$ เดิม

2.8 การใช้ทฤษฎีวงกลมควบคู่กับการส่งคงแบบ

ในกรณีที่สิ่งกีดขวางทางเดินของกระแสไม่ใช้แท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลม เราจำเป็นต้องใช้การส่งคงแบบเพื่อส่งรูปพื้นที่หน้าตัดของแท่งทรงกระบอกเดิม เป็นรูปพื้นที่หน้าตัดใหม่ที่เป็นวงกลมรัศมีเท่ากับ a

ดังนั้นศักย์เชิงซ้อนที่จุดสมนัยกันจะมีค่าเท่ากัน ต่อไปเราใช้ทฤษฎีวงกลมบนระนาบ Z โดยมีเงื่อนไขว่า ศักย์เชิงซ้อนที่คำนวณได้เมื่อนำกลับมาใช้ในระนาบ z จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า $\Omega \rightarrow Uze^{-ia}$ เมื่อ $z \rightarrow \infty$ ดังได้กล่าวมาแล้วในช่วงต้น กล่าวคือที่ระยะห่างไกลจากแท่ง

ทรงกระบอกความเร็วของกระแสที่คำนวณมา $\frac{d\Omega}{dz} = -q_x + iq_y$ จะต้องเท่ากับความเร็วของ
กระแสเมื่อไม่มีสิ่งกีดขวางนั้นคือ $\frac{d\Omega}{dz} \rightarrow Ue^{-i\alpha}$

2.9 สมการความดัน (Pressure equation)

เมื่อความดัน P เป็นฟังก์ชันของความหนาแน่น ρ หรือ $P = f(\rho)$ สมการของการเคลื่อนที่
ของของไหลที่ปราศจากการหมุน มีรูปแบบ

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = -\nabla \left(\int \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega_E \right) \quad (2-30)$$

โดยที่ $q = |\vec{q}|$ และ Ω_E เป็นศักย์ของแรงภายนอก ถ้ากำหนดให้ $\vec{q} = -\nabla\phi$ ซึ่ง ϕ เป็นศักย์ของ
ความเร็ว สมการที่ (2-30) เปลี่ยนรูปเป็น

$$\nabla \left(\int \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega_E - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0$$

ดังนั้น
$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega_E - \frac{\partial \phi}{\partial t} = c(t) \quad (2-31)$$

โดยที่ $c(t)$ เป็นฟังก์ชันของ t ที่เรียกว่า ค่าคงที่ बदดล (Instantaneous constant)

สมการที่ (2-31) เรียกว่า สมการความดัน และถ้าของไหลกอดอัดไม่ได้ ρ เท่ากับค่าคงที่ สมการที่
(2-31) จะอยู่ในรูป

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega_E - \frac{\partial \phi}{\partial t} = c(t) \quad (2-32)$$

ในสภาวะคงที่ (Steady state) $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ และ $c(t)$ จะเป็นค่าคงที่สมบูรณ์ (Absolute constant)

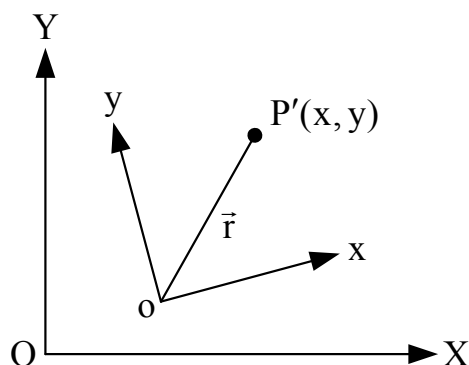
สมการที่ (2-32) จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega_E = c \quad (2-33)$$

ซึ่งเป็นสมการแบร์นูลลี (Bernoulli's equation) โดยที่ c เป็นคงที่

2.9.1 สมการความดันในระบบพิกัดฉาก 2 มิติที่เคลื่อนที่

กำหนดให้มีระบบพิกัดฉาก F (OXY) ที่อยู่นิ่งและระบบพิกัดฉาก F' (oxy)
เคลื่อนที่ในลักษณะที่จุดกำเนิด o เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงเส้น $\vec{U}$ และความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$
ให้จุด P' เป็นจุดหยุดนิ่งจุดหนึ่งที่ติดอยู่ในระนาบของระบบแกน F' ความเร็ว $\vec{V}$ ที่จุด P' คือ
 $\vec{V} = \vec{U} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ โดยที่ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่ง (Position vector) ของ P' ใน F'



ภาพที่ 2-12 แสดงการเคลื่อนที่ของระบบพิกัดฉาก F' โดยที่ระบบพิกัดฉาก F อยู่นิ่ง

ในทางกลับกันถ้า P เป็นจุดที่ติดอยู่ในระนาบของระบบพิกัดฉาก F ผู้สังเกตการณ์ที่จุด P' ใน F' จะสังเกตเช่นกันว่า P เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $-\vec{V}$ สำหรับการเคลื่อนที่ที่ปราศจากการหมุน $\vec{q}_F = -\nabla\phi$ ผู้สังเกตการณ์ที่จุด P' ใน F' จะสังเกตเช่นกันว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ϕ ที่จุด P ที่ติดอยู่กับ F เท่ากับ $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{V} \cdot \nabla\right)\phi$

ดังนั้นสมการความดันของของไหลสมการที่ (2-32) เปลี่ยนรูปเป็น

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q_F^2 + \Omega_E - \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\phi = c(t) \quad (2-34)$$

แต่

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q_F^2 + (\vec{V} \cdot \nabla)\phi &= \frac{1}{2}(\vec{q}_F - \vec{V})^2 - \frac{1}{2}\vec{V}^2 \\ &= \frac{1}{2}\vec{q}_{F'}^2 - \frac{1}{2}\vec{V}^2 \end{aligned} \quad (2-35)$$

ในที่นี้

$$(\vec{q}_F - \vec{V})^2 = (\vec{q}_F - \vec{V}) \cdot (\vec{q}_F - \vec{V}) \quad (2-36)$$

และ

$$\vec{V}^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$$

สมการที่ (2-34) จึงเป็นในรูป

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q_{F'}^2 + \Omega_E - \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\vec{V}^2 = c(t) \quad (2-37)$$

โดยที่ $q_F = |\vec{q}_F|$

ถ้าอ้างอิงกับ F' เพียงอย่างเดียว เราอาจเขียน $\vec{q}_{F'} = \vec{q}$

สมการที่ (2-37) เปลี่ยนรูปเป็น

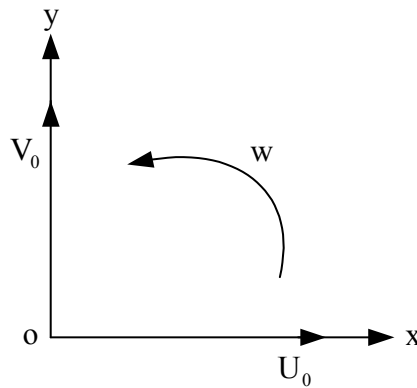
$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega_E - \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\vec{V}^2 = c(t) \quad (2-38)$$

ตามภาพที่ (2-13) oxy เป็นระบบพิกัดฉากบัดดล (Instantaneous position of the axes) o เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{W}$ โดยที่ $\vec{W} = U_0\vec{i} + V_0\vec{j}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{W} + \vec{w} \times \vec{r} \\ &= U_0\vec{i} + V_0\vec{j} + w\vec{k} \times (x\vec{i} + y\vec{j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U_0 \vec{i} + V_0 \vec{j} + xw(\vec{k} \times \vec{i}) + yw(\vec{k} \times \vec{j}) \\
&= U_0 \vec{i} + V_0 \vec{j} + xw\vec{j} - yw\vec{i} \\
&= (U_0 - wy)\vec{i} + (V_0 + wx)\vec{j} \\
\bar{V}^2 &= (U_0 - wy)^2 + (V_0 + wx)^2 \\
&= (W + iwz)(\bar{W} - iw\bar{z})
\end{aligned} \tag{2-39}$$



ภาพที่ 2-13 แสดงทิศทางการเคลื่อนที่และการหมุนของแกนตั้งฉาก

แทนสมการที่ (2-39) ในสมการที่ (2-38) จะได้

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega_E - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(W + iwz)(\bar{W} - iw\bar{z}) = c(t) \tag{2-40}$$

ในสภาวะคงตัวสมการที่ (2-40) มีรูป

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega_E - \frac{1}{2}(W + iwz)(\bar{W} - iw\bar{z}) = c \tag{2-41}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่สัมบูรณ์

2.10 การการแปลงชวาร์ชคริสโตเฟล (Schwarz-Christoffel Transformation)

กำหนดเส้นตรง 2 เส้น γ_1 และ γ_2 ในระนาบ oxy ตัดกันที่จุด A และทำมุม $\pi - \alpha$ เราต้องการที่จะส่ง (map) จุดต่างๆ บนเส้นตรง γ_1 และ γ_2 เป็นจุดบนเส้นตรง $v = 0$ ในระนาบ $o'uv$ โดยให้จุดตัด A ถูกส่งเป็นจุด $w = a$ จำนวนจริง ให้ความสัมพันธ์ระหว่าง z และ w สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{dz}{dw} = k(w - a)^t \tag{2-42}$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่เชิงซ้อน, a และ t เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| = |k| |w - a|^t$$

และ

$$\arg\left(\frac{dz}{dw}\right) = \arg(k) + t \arg(w - a) \tag{2-43}$$

ซึ่งเป็นเกรเดียนต์ของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งของทางเดินของจุด Q บนระนาบของ z ที่สมนัยกับจุด P เราจึงได้ผลลัพธ์จากสมการที่ (2-44) ว่าเกรเดียนต์ที่จุดใด ๆ บน γ_1 (สมนัยกับ Γ_1) เป็นค่าคงที่ (ที่จุดนั้น $\frac{dy}{dx} = \tan \theta_1$) ในทำนองเดียวกันเกรเดียนต์ที่จุดใด ๆ บน γ_2 (สมนัยกับ Γ_2) เป็นค่าคงที่เช่นกัน ($\frac{dy}{dx} = \tan \theta_2$) นั่นคือ γ_1 และ γ_2 เป็นเส้นตรงตามภาพที่ 2-14 ที่ได้กำหนดไว้ในตอนต้น

จากสมการที่ (2-46) $\theta_2 - \theta_1 = -\pi t$ แสดงว่า เมื่อ P ผ่านจุด $w = a$ บน $v = 0$ จุด Q ก็

จะเปลี่ยนทิศทางจาก γ_1 ถึง γ_2 ด้วยโดยที่ γ_1 กับ γ_2 ทำมุม $\pi - \alpha$

นั่นคือ

$$\theta_2 - \theta_1 = \pi - \alpha$$

หรือ

$$-\pi t = \pi - \alpha$$

$$t = \frac{\alpha}{\pi} - 1$$

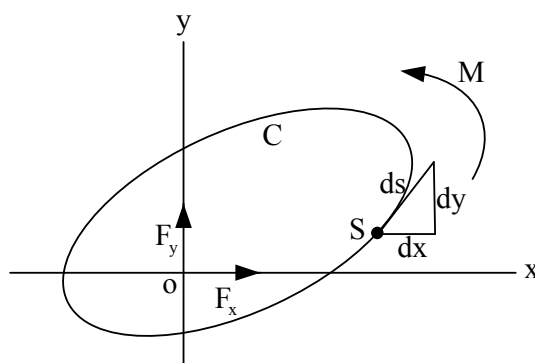
ดังนั้น

$$\frac{dz}{dw} = k(w - a)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1}$$

เป็นการแปลงที่เรียกว่า ชวาร์ซคริสโตเฟล (Schwarz Christoffel Transformation)

2.11 ทฤษฎีเบลเชียส (Blasius's theorem)

2.11.1 กรณีแท่งทรงกระบอกที่อยู่นิ่ง (Fixed cylinder)



ภาพที่ 2-15 แสดงแรงและโมเมนต์ที่กระทำบนผิวแท่งทรงกระบอกที่หยุดนิ่ง

กำหนดให้แท่งทรงกระบอก อยู่ในของไหลที่เคลื่อนที่สม่ำเสมอและไม่เกิดการหมุนให้ F_x , F_y เป็นส่วนประกอบของแรงตามแนวแกน x , y และ M เป็นโมเมนต์รอบจุดกำเนิด ซึ่งเกิดจากความดันที่กระทำบนแท่งทรงกระบอก โดยที่ปราศจากแรงภายนอกอื่น ๆ พิจารณาส่วนของเส้นโค้ง ds ที่จุด S เราจะได้

$$dF_x = -Pdy$$

$$dF_y = Pdx$$

$$dM = P(xdx + ydy)$$

โดยที่ P เป็นความดัน

ดังนั้น

$$dF_x - i dF_y = -i P d\bar{z}$$

และ

$$dM = \text{ส่วนจริงของ } (P z d\bar{z})$$

จากสมการความดันในภาคผนวก ค สมการที่ (ค-5)

$$P = a - \frac{1}{2} \rho q^2$$

โดยที่ a เป็นค่าคงที่

เนื่องจากความดันคงที่ ค่าคงที่จะไม่ส่งผลกระทบต่อผลลัพธ์ เราจะได้

$$P = -\frac{1}{2} \rho q^2 = -\frac{1}{2} \rho \frac{d\Omega}{dz} \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{z}}$$

ดังนั้น

$$d(F_x - i F_y) = \frac{1}{2} i \rho \frac{d\Omega}{dz} d\bar{\Omega}$$

$$dM = \text{ส่วนจริงของ} \left(-\frac{1}{2} \rho z \frac{d\Omega}{dz} d\bar{\Omega} \right)$$

แต่บนเส้นโค้ง C , $\psi = \text{ค่าคงที่}$ และ $d\bar{\Omega} = d\Omega$ ซึ่งจะได้

$$d(F_x - i F_y) = \frac{1}{2} i \rho \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \text{ และ } dM = \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \right\}$$

ดังนั้นทฤษฎีเบลมเซียสจะได้ว่า

$$F_x - i F_y = \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \quad (2-47)$$

$$M = \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \right\} \quad (2-48)$$

โดยที่ Ω เป็นศักย์เชิงซ้อน

ρ เป็นความหนาแน่นและการอินทิเกรตจะเป็นการอินทิเกรตตามเส้นโค้งปิดของแท่งทรงกระบอก

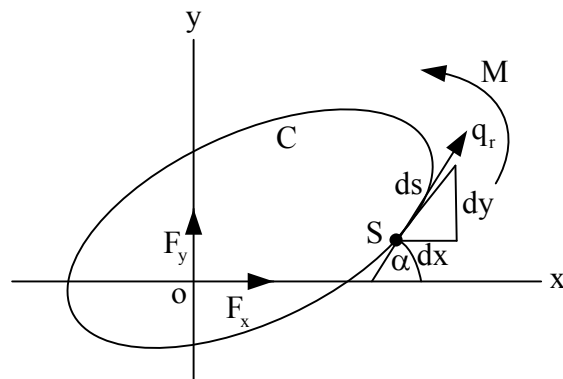
2.11.2 แท่งทรงกระบอกที่เคลื่อนที่ (Moving cylinder)

สำหรับการดำเนินการบนส่วนของเส้นโค้ง ds ที่จุด S เราจะได้

$$F_x - i F_y = -i \oint_C P d\bar{z} = -i \oint_C P e^{-2i\alpha} dz$$

$$M = \text{ส่วนจริงของ} \left\{ \oint_C P z d\bar{z} \right\}$$

$$= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ \oint_C P z e^{-2i\alpha} dz \right\}$$



ภาพที่ 2-16 แสดงแรงและโมเมนต์ที่กระทำบนผิวแห่งทรงกระบอกที่เคลื่อนที่

ที่จุด S บนผิวของโลหะบางหรือ บนผิวนอกของแท่งทรงกระบอก S ทิศทางของน้ำอยู่ในแนวของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด S และให้ขนาดของความเร็วเท่ากับ q_r ซึ่งวัดในระบบพิกัดฉาก oxy ซึ่ง o เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $W = U_0 + iV_0$

ดังนั้นในระบบพิกัดฉาก oxy

$$q_r \cos \alpha = q_x - (U_0 - yw)$$

$$q_r \sin \alpha = q_y - (V_0 + xw)$$

$$q_r e^{-i\alpha} = q_x - iq_y - \bar{W} + iw\bar{z}$$

โดยที่ q_x และ q_y เป็นส่วนประกอบของความเร็วในระบบพิกัดฉาก oxy ที่อยู่นิ่ง

แต่ $q_x - iq_y = -\frac{d\Omega}{dz}$ โดยที่ Ω เป็นศักย์เชิงซ้อน

ในระบบพิกัดฉาก oxy เมื่อ $U_0 = 0$ และ $V_0 = 0$

เราจึงเขียน
$$q_r e^{-i\alpha} = -\frac{d\Omega}{dz} - \bar{W} + iw\bar{z}$$

$$q_r = e^{i\alpha} \left(-\frac{d\Omega}{dz} - \bar{W} + iw\bar{z} \right)$$

$$q_r^2 = e^{2i\alpha} \left(\frac{d\Omega}{dz} + \bar{W} - iw\bar{z} \right)^2$$

ดังนั้น

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} + \bar{W} - iw\bar{z} \right)^2 dz - \frac{1}{2} i \rho \oint_C (W + iwz)(\bar{W} - iw\bar{z}) d\bar{z} \quad (2-49)$$

$$M + iN = -\frac{1}{2} \rho \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} + \bar{W} - iw\bar{z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \rho \oint_C z(W + iwz)(\bar{W} - iw\bar{z}) d\bar{z} \quad (2-50)$$

สูตรทั้ง 2 นี้ได้มาจากการสมการความดันในสมการที่ (2-41) โดยการตัดพจน์ Ω_E และ c ออกไปเนื่องจากไม่มีแรงภายนอกมากระทำแท่งทรงกระบอกและอื่น ๆ และที่ความดันคงที่ค่าคงที่ “ ρc ” ไม่จะส่งผลกระทบทับผลลัพธ์

หมายเหตุ สูตรในสมการที่ (2-49) และ (2-50) จะเป็นสูตรเดียวกันกับสมการที่ (2-47) และสมการที่ (2-48) ในกรณีที่แท้จริงทรงกระบอกหยุดนิ่ง

2.12 ทฤษฎีสโตกส์ (Complex Stokes' theorem)

ถ้า $f(z, \bar{z})$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ทุก ๆ จุดบนพื้นผิว S ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งปิด C แล้ว

$$\begin{aligned}\oint_C f(z, \bar{z}) dz &= 2i \iint_S \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dS \\ \oint_C f(z, \bar{z}) dz &= -2i \iint_S \frac{\partial f}{\partial z} dS \\ \oint_C (\bar{W} - iw\bar{z})^2 dz &= 2i \iint_S (-2iw)(\bar{W} - iw\bar{z}) dS \\ &= 4w(\bar{W} - iw\bar{z}_c) \iint_S dS \\ &= 4wA(\bar{W} - iw\bar{z}_c)\end{aligned}$$

($z_c = x_c + iy_c$ เป็นจุดกลางรูปของบริเวณ A)

$$\begin{aligned}\oint_C (W + iwz)(\bar{W} - iw\bar{z}) d\bar{z} &= -2i \iint_S iw(\bar{W} - iw\bar{z}) dS \\ &= 2wA(\bar{W} - iw\bar{z}_c) \\ \oint_C (-\bar{W}z + W\bar{z} + iwz\bar{z}) d\bar{z} &= -2i \iint_S (-\bar{W} + iw\bar{z}) dS \\ &= 2iA(\bar{W} - iw\bar{z}_c)\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการที่ (2-49) จะเปลี่ยนรูปของสมการเป็น

$$\begin{aligned}F_x - iF_y &= \frac{1}{2}ip \left\{ \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz + 2 \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) (\bar{W} - iw\bar{z}) dz + \oint_C (\bar{W} - iw\bar{z})^2 dz \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}ip \oint_C (W + iwz)(\bar{W} - iw\bar{z}) d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2}ip \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz + ip \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) (\bar{W} - iw\bar{z}) dz + \frac{1}{2}ip \oint_C (\bar{W} - iw\bar{z})^2 dz \\ &\quad - \frac{1}{2}ip \oint_C (W + iwz)(\bar{W} - iw\bar{z}) d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2}ip \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz + ip\bar{W} \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz + ip \oint_C \bar{z} \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz \\ &\quad + 2ipwA(\bar{W} - iw\bar{z}_c) - ipwA(\bar{W} - iw\bar{z}_c)\end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } \oint_C \bar{z} \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz = \oint_C \bar{z} d\Omega = \oint_C \bar{z} (d\bar{\Omega} + 2id\psi) \quad (\Omega = \bar{\Omega} + 2i\psi)$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_C \bar{z} d\bar{\Omega} + 2i \oint_C \bar{z} d\psi \\
&= \oint_C \bar{z} d\bar{\Omega} + 2i \left\{ [\bar{z}\psi]_C - \oint_C \psi d\bar{z} \right\}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\bar{z}\psi$ ย้อนกลับไปยังค่าเริ่มต้นรอบแท่งทรงกระบอก $[\bar{z}\psi]_C = 0$

$$\text{ดังนั้น} \quad \oint_C \bar{z} d\Omega = \oint_C \bar{z} d\bar{\Omega} - 2i \oint_C \psi d\bar{z}$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad 2i\psi = -\bar{W}z + W\bar{z} + iwz\bar{z}$$

$$\text{โดยที่ } \psi = Vx - Uy + \frac{1}{2}w(x^2 + y^2)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \oint_C \bar{z} d\Omega = \oint_C \bar{z} d\bar{\Omega} - 2iA(\bar{W} - iw\bar{z}_C)$$

$$\text{และ} \quad F_x - iF_y = \frac{1}{2}ip \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz + wp \oint_C \bar{z} d\bar{\Omega} - ipAw(\bar{W} - iw\bar{z}_C) \quad (2-52)$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าโมเมนต์ของสมการที่ (2-50) เท่ากับ

$$\text{ส่วนจริงของ} \quad \left\{ -\frac{1}{2}p \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz - p\bar{W} \oint_C z d\Omega + wpA\bar{W}z_C \right\} \quad (2-53)$$

2.13 ศักย์เชิงซ้อนในกรณีที่แท่งทรงกระบอกวางขวางกันกระแสน้ำ ที่ไหลในแนวตั้งจากด้วยความเร็วสม่ำเสมอ

2.13.1 แท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลม

จากศักย์เชิงซ้อนของกระแสน้ำที่ไหลโดยไม่มีสิ่งกีดขวางคือ $UZe^{-i\alpha}$ ถ้าแท่งทรงกระบอกมีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a แล้ว จากทฤษฎีวงกลมในหัวข้อ 2.7 กำหนดให้ $f(Z) = UZe^{-i\alpha}$ จะได้ว่า

$$\Omega = U \left(Ze^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{Z} \right) \quad (2-54)$$

เป็นศักย์เชิงซ้อนของกระแสน้ำที่ไหลผ่านแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงกลมในระนาบ Z ที่กระแสน้ำมีความเร็วสม่ำเสมอ U ในทิศทางลบของแกนจริง

2.13.2 แท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงรี

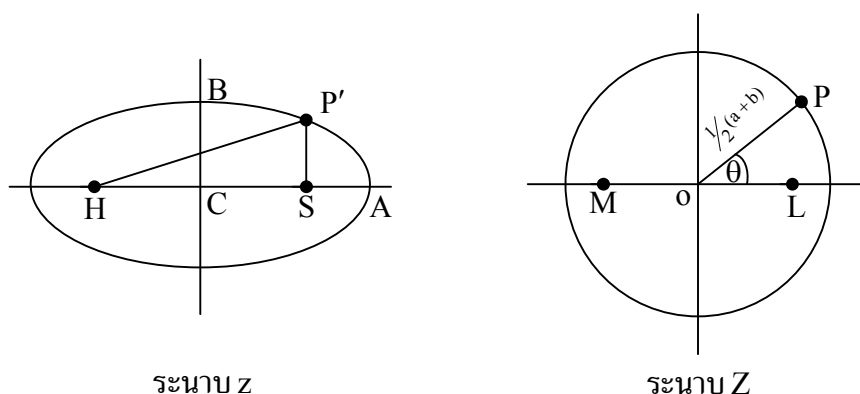
ก่อนอื่นเราจะหาความสัมพันธ์ระหว่างวงกลมกับวงรี โดยใช้การแปลงเยาคอฟสกี (Joukowski transformation) ดังนี้

$$z = Z + \frac{c^2}{4Z} \quad (2-55)$$

โดยที่ วงรีอยู่ในระนาบ z และวงกลมอยู่ในระนาบ Z

เป็นสมการการแปลงจุดต่าง ๆ บนระนาบ Z ไปยังระนาบ z หรือในทางกลับกัน โดยเราเริ่มด้วยการตั้งข้อสังเกตว่าเมื่อ $|z|$ ใหญ่มากเราจะได้ว่า Z เข้าใกล้ z ดังนั้นเส้นทางการไหลของกระแสที่ระยะห่างไกลในระนาบ z จะสมนัยกับเส้นทางการไหลในระนาบ Z ทั้งขนาดและทิศทาง

เรากำหนดให้ L และ M เป็นจุด $Z = \frac{1}{2}c$ และ $Z = -\frac{1}{2}c$ ซึ่งสมนัยกับจุด S และ H หรือ $z = c$ และ $z = -c$ ในระนาบ z ตามลำดับ



ภาพที่ 2-17 แสดงการแปลงจุดบนวงกลมในระนาบ Z ไปยังจุดบนวงรีในระนาบ z โดยการแปลงเยาคอฟสกี

กำหนดให้จุด P' เป็นจุดบนวงรีในระนาบ z ที่สมนัยกับจุด P บนวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ $\frac{1}{2}(a+b)$ และ $a^2 - b^2 = c^2$ ในระนาบ Z จากการแปลงเราจะได้ว่า

$$Z + \frac{c^2}{4Z} - c = z - c, \quad Z + \frac{c^2}{4Z} + c = z + c$$

ดังนั้น

$$P'S = |z - c| = \left| \frac{\left(Z - \frac{1}{2}c\right)^2}{Z} \right| = \frac{2PL^2}{a+b}$$

$$P'H = |z + c| = \left| \frac{\left(Z + \frac{1}{2}c\right)^2}{Z} \right| = \frac{2PM^2}{a+b}$$

และ

$$SP' + HP' = \frac{2(PL^2 + PM^2)}{(a+b)}$$

แต่ OP เป็นเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม MPL

$$PL^2 + PM^2 = 2(OL^2 + OP^2)$$

และ

$$SP' + HP' = 2a$$

ดังนั้นจุด P' เป็นจุดบนวงรีที่จุดโฟกัสอยู่ที่จุด S และ H มีความยาวของแกนเอก ถ้าให้ B เป็นจุดปลายของแกนโท และ C เป็นจุดศูนย์กลาง จะได้

$$CB^2 = SB^2 - CS^2 = b^2$$

ซึ่งครึ่งแกนเอกและครึ่งแกนโทของวงรีคือ a และ b ตามลำดับ

ดังนั้นวงกลมทั้งหลายที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดในระนาบของ Z จะถูกแปลงไปเป็นวงรีทั้งหลายที่มีจุดศูนย์กลางเดียวกันในระนาบ z จากสมการที่ (2-55) จัดรูปใหม่เพื่อหา Z ในพจน์ของ z ได้ดังนี้

$$Z^2 - zZ + \frac{1}{4}c^2 = 0$$

$$Z = \frac{1}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - c^2})$$

ค่า z ที่ระยะไกล ๆ จะมีค่าใกล้เคียงกับ Z ต่อเมื่อ

$$Z = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - c^2}) \quad (2-56)$$

โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$

เป็นสมการการแปลงจุดต่างๆ บริเวณภายนอกวงรีในระนาบ z ไปยังจุดต่างๆ ที่อยู่ภายนอกวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ $\frac{1}{2}(a+b)$ ในระนาบของ Z

สำหรับการไหลของกระแสน้ำที่ไหลผ่านทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงรีนั้น ถ้าเรากำหนดให้รัศมีของวงกลมเป็น $\frac{1}{2}(a+b)$ แทนลงในสมการที่ (2-54) เราจะได้

$$\Omega = U \left\{ Ze^{-i\alpha} + \frac{(a+b)^2 e^{i\alpha}}{4Z} \right\} \quad (2-57)$$

โดยที่ U เป็นความเร็วสม่ำเสมอของกระแสน้ำ

และจากสมการที่ (2-56) แทนในสมการ (2-57) จะได้

$$\Omega = \frac{1}{2} U \left\{ (z + \sqrt{z^2 - c^2}) e^{-i\alpha} + \frac{(a+b)^2 e^{i\alpha}}{(z + \sqrt{z^2 - c^2})} \right\} \quad (2-58)$$

แต่เนื่องจาก $(z + \sqrt{z^2 - c^2})^{-1} = \frac{1}{c^2}(z - \sqrt{z^2 - c^2})$

ดังนั้นศักย์เชิงซ้อนสำหรับกระแสน้ำที่ไหลผ่านแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงรีด้วยความเร็วสม่ำเสมออยู่ในรูป

$$\Omega = \frac{1}{2} U(a+b) \left\{ \frac{e^{-i\alpha}(z + \sqrt{z^2 - c^2})}{a+b} + \frac{e^{i\alpha}(z - \sqrt{z^2 - c^2})}{a-b} \right\} \quad (2-59)$$

โดยใช้พิกัดของวงรี (Elliptic coordinates)

กำหนดให้ $z = c \cosh \varsigma$ ซึ่ง $\varsigma = \xi + i\eta$ โดยที่ $0 \leq \xi < \infty$ และ $\eta \in [0, 2\pi]$

เราจะได้ว่า $x + iy = c \cosh(\xi + i\eta)$

$$= c \cosh \xi \cos \eta + ic \sinh \xi \sin \eta$$

ซึ่ง $x = c \cosh \xi \cos \eta$, $y = c \sinh \xi \sin \eta$ (2-60)

ดังนั้น
$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1 ; \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1$$

จากสมการที่ (2-60) เราจะสังเกตได้ว่า ถ้า ξ มีค่าคงที่ ξ_0 ของจุด (x, y) บนวงรี ดังนั้น จะได้

$$a = c \cosh(\xi_0), \quad b = c \sinh(\xi_0) \quad (2-61)$$

เราจะได้ว่า $a + b = c(\cosh \xi_0 + \sinh \xi_0) = c e^{\xi_0}$ (2-62)

$$a - b = c(\cosh \xi_0 - \sinh \xi_0) = c e^{-\xi_0} \quad (2-63)$$

จากสมการที่ (2-62) และ (2-63) โดยการหารจะได้

$$e^{2\xi_0} = \frac{a+b}{a-b}$$

ดังนั้น
$$\xi_0 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{a+b}{a-b} \right)$$

โดยที่ $a^2 - b^2 = c^2$ ดังนั้นถ้า $z = c \cosh \zeta$ เราจะได้

$$\sqrt{z^2 - c^2} = c \sinh \zeta$$

และ $z + \sqrt{z^2 - c^2} = c(\cosh \zeta + \sinh \zeta) = c e^{\zeta}$ (2-64)

$$z - \sqrt{z^2 - c^2} = c(\cosh \zeta - \sinh \zeta) = c e^{-\zeta} \quad (2-65)$$

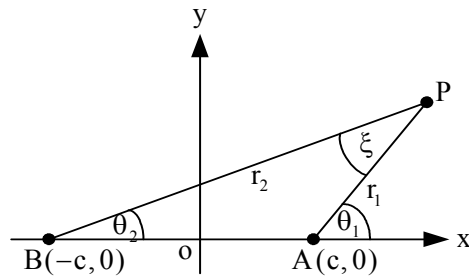
จากสมการที่ (2-59) , (2-64) และ (2-65) ศักย์เชิงซ้อนจะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} U(a+b)(e^{-i\alpha+\zeta-\xi_0} + e^{i\alpha-\zeta+\xi_0}) \\ &= U(a+b) \cosh(\zeta - \xi_0 - i\alpha) \\ &= cA \cosh(\zeta - \zeta_0) \end{aligned} \quad (2-66)$$

โดยที่ $A = \frac{U(a+b)}{c}$, $\zeta_0 = \xi_0 - i\alpha$

2.14 ระบบพิกัดโคเอ็กซอล (Coaxal coordinates)

กำหนดให้ A, B เป็นจุดที่มีพิกัดเป็น $(c, 0)$ และ $(-c, 0)$ ตามลำดับ และให้แกนจริง เป็นเส้นเริ่มต้น (initial line) ให้ P เป็นจุดใดๆ ที่มีพิกัดเชิงขั้วเป็น (r_1, θ_1) ในกรณีที่ A เป็นขั้ว และมีพิกัดเชิงขั้วเป็น (r_2, θ_2) ในกรณีที่ B เป็นขั้ว ถ้าจุด P เป็นจุดบนวงกลมที่ผ่านจุด A และ B แล้ว



ภาพที่ 2-18 แสดงระบบพิกัดโคเอ็กซอล

มุมของสามเหลี่ยม $\angle APB = \theta_1 - \theta_2$ มีค่าคงที่ ให้ $\xi = \theta_1 - \theta_2$ และ $\eta = \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ เราจะได้

$$\begin{aligned}\eta - i\xi &= \log(r_2 e^{i\theta_2}) - \log(r_1 e^{i\theta_1}) \\ &= \log(z + c) - \log(z - c) \\ &= \log\left(\frac{z + c}{z - c}\right)\end{aligned}\quad (2-67)$$

ดังนั้น

$$e^{\eta - i\xi} = \frac{z + c}{z - c}$$

กำหนดให้

$$\varsigma = \xi + i\eta$$

ซึ่ง

$$-i\varsigma = -i(\xi + i\eta) = \eta - i\xi$$

ดังนั้น

$$e^{-i\varsigma} = \frac{z + c}{z - c}$$

$$\frac{z}{c} = \frac{e^{-i\varsigma} + 1}{e^{-i\varsigma} - 1} = i \cot\left(\frac{1}{2}\varsigma\right)$$

ดังนั้น

$$z = ic \cot\left(\frac{1}{2}\varsigma\right) \quad \text{หรือ} \quad \varsigma = 2 \cot^{-1}\left(\frac{z}{ic}\right) \quad (2-68)$$

ξ, η เรียกระบบพิกัดโคเอ็กซอล

ส่วนโค้ง ξ เป็นค่าคงที่ ที่เป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, c \cot \xi)$ และมีรัศมีเท่ากับ $c \csc(\xi)$ และส่วนโค้ง η เป็นค่าคงที่ ที่เป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(c \cot \eta, 0)$ และมีรัศมีเท่ากับ $c \operatorname{csch}(\eta)$ เนื่องจาก $\bar{z} = -ic \cot\left(\frac{1}{2}\bar{\varsigma}\right)$ เราจะได้

$$\frac{x}{c} = \frac{i}{2} \left\{ \cot\left(\frac{1}{2}\varsigma\right) - \cot\left(\frac{1}{2}\bar{\varsigma}\right) \right\}, \quad \frac{y}{c} = \frac{1}{2} \left\{ \cot\left(\frac{1}{2}\varsigma\right) + \cot\left(\frac{1}{2}\bar{\varsigma}\right) \right\} \quad (2-69)$$

เนื่องจาก $2 \sin\left(\frac{1}{2}\varsigma\right) \sin\left(\frac{1}{2}\bar{\varsigma}\right) = \cos(i\eta) - \cos(\xi) = \cosh(\eta) - \cos(\xi)$ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$x = c \left(\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \right) \quad (2-70)$$

$$y = c \left(\frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \right) \quad (2-71)$$

2.15 ศักย์เชิงซ้อนในกรณีที่กระแสน้ำไหลผ่านเนินดิน (Mound) หรือคูดิน (ditch) ที่เป็น ส่วนของทรงกลม

ศักย์เชิงซ้อนของของไหลที่ไหลผ่านเนินดิน หรือคูดินที่เป็นส่วนวงกลมให้มีรูปเป็น

$$\Omega = \frac{2Uci}{n} \cot\left(\frac{\zeta}{n}\right) \quad (2-72)$$

$$z = ic \cot\left(\frac{1}{2}\zeta\right), \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (2-73)$$

โดยที่ n เป็นจำนวนจริง เราจะเห็นว่า Ω เป็นจำนวนจริงเมื่อ $\xi = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ $0 < n < 2$ สำหรับ

เนินดินและ $2 < n < 4$ สำหรับคูดิน ซึ่งจะแสดงให้เห็นได้จากสมการที่ (2-72) แทน $\xi = \frac{n\pi}{2}$ จะได้

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{2Uci}{n} (-i) \tanh\left(\frac{\eta}{n}\right) \\ &= \frac{2Uc}{n} \tanh\left(\frac{\eta}{n}\right) \end{aligned} \quad (2-74)$$

ซึ่งแสดงว่าพื้นผิวของเนินดินหรือคูดิน เป็นเส้นแบ่งทางเดินของของไหล ($\psi = 0$)

นอกจากนี้เราสามารถคำนวณได้ว่า $\frac{d\Omega}{dz} = -q_x + iq_y = U$ เมื่อ $\zeta \rightarrow 0$ หรือเมื่อ $z \rightarrow \infty$

ทำให้ $q_x = -U$ ซึ่งเป็นไปตามความจริงที่แสดงว่า รูปแบบของ Ω มีความสมเหตุสมผล

เราอาจนำความรู้นี้มาใช้กับแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นส่วนของวงกลมที่เท่ากัน มาประกบกันที่ถูกนำมาวางขวางกันทางเดินของของไหล โดยกำหนดให้พื้นที่หน้าตัดดังกล่าวอยู่ในระนาบในแนวนอน ซึ่งจะมีลักษณะแตกต่างจากเนินดินหรือคูดิน ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดอยู่ในแนวตั้ง สำหรับกระแสน้ำที่ไหลกระทบแท่งทรงกระบอกที่อยู่นิ่งด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ทำมุม α ในทิศทางลบของแกนจริง เรากำหนดให้

$$\Omega = \frac{2Uc}{n} \left\{ i \cos \alpha \cot\left(\frac{\zeta}{n}\right) + \sin \alpha \operatorname{cosec}\left(\frac{\zeta}{n}\right) \right\} \quad (2-75)$$

ซึ่งในกรณีนี้พื้นผิวโค้งของแท่งทรงกระบอกได้จากการแทนค่า $\xi = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ $0 < n < 2$ สำหรับ

ส่วนที่อยู่เหนือแกน ox และ เมื่อ $\xi = -\frac{n\pi}{2}$ โดยที่ $0 < n < 2$ จะเป็นส่วนที่อยู่ใต้แกน ox ทั้งนี้

เพราะระนาบของพื้นที่หน้าตัดอยู่ในแนวนอน (horizontal plane)

สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ เราต้องการส่วนของวงกลมที่เท่ากันประกบกัน โดยที่มุมในเซกเมนต์มากกว่า $\frac{\pi}{2}$ ดังนั้นเราจึงกำหนดค่า n อยู่ในช่วง (1,2) หรือ $1 < n < 2$ ศักย์เชิงซ้อนที่กำหนดข้างต้นมีความเป็นสมเหตุสมผลเพราะ $\psi = 0$ บนผิวโค้งของแท่งทรงกระบอกและ

$$\frac{d\Omega}{dz} \rightarrow Ue^{-i\alpha} \text{ เมื่อ } \zeta \rightarrow 0 \text{ หรือเมื่อ } z \rightarrow \infty$$

บทที่ 3

การปะทะของกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอบน แท่งทรงกระบอกที่อยู่นิ่ง

ในบทนี้เราจะคำนวณหาแรงและโมเมนต์ที่เกิดจากการปะทะของกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ในทิศทางลบของแกนจริง บนแท่งทรงกระบอกที่อยู่นิ่งในแนวดิ่ง ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดในหัวข้อ 1.3 โดยใช้ทฤษฎีเบลเซียส

แท่งทรงกระบอกที่นำมาศึกษาในงานวิจัย มีพื้นที่หน้าตัดดังนี้

1. รูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเซกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน เราจะเรียกว่า Model A

2. รูปวงรี เราจะเรียกว่า Model B

3. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน เราจะเรียกว่า Model C

โดยแท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะ มีปลายล่างปิดเพื่อป้องกันน้ำไหลเข้าไปในบริเวณภายในแท่งทรงกระบอก

3.1 การหาค่าเชิงซ้อนสำหรับ Model A และ Model B

3.1.1 คำนวณเชิงซ้อนสำหรับ Model A

จากหัวข้อ 2.15 ในกรณีที่กระแสน้ำไหลปะทะแท่งทรงกระบอกที่อยู่นิ่งด้วยความเร็วสม่ำเสมอ และจากภาคผนวก ก เราจะได้ค่าเชิงซ้อนของกระแสน้ำที่ไหลผ่าน Model A ในรูป

$$\Omega = U \left\{ (\cos \alpha - i \sin \alpha) z + (H - iG) \frac{c^2}{z} + \dots \right\}$$

$$\text{โดยที่ } G = -\left(\frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3} \right) \sin \alpha$$

$$H = \left(\frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3} \right) \cos \alpha \text{ และ } 1 < n < 2$$

3.1.2 คำนวณเชิงซ้อนสำหรับ Model B

ค่าเชิงซ้อนของแท่งของกระแสน้ำที่ไหลผ่าน Model B จะอยู่ในรูปของสมการที่ (2-66)

$$\Omega = cA \cosh(\zeta - \zeta_0)$$

$$\text{โดยที่ } z = c \cosh \zeta, \zeta = \xi + i\eta, \zeta_0 = \xi_0 - i\alpha \text{ และ } A = \frac{U(a+b)}{c}$$

หมายเหตุ $\zeta = \xi + i\eta$ เป็นฟังก์ชันจริง ซึ่งแตกต่างจาก $\zeta = \xi + i\eta$ ในฟังก์ชันเชิงซ้อน

3.2 การหาแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A และ Model B

ในการคำนวณหาแรงและโมเมนต์ในกรณีแท่งทรงกระบอกอยู่นิ่ง โดยทฤษฎีเบลเซียสจะอยู่ในรูปของสมการที่ (2-47) และ (2-48)

3.2.1 แรงและโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A

เนื่องจากศักย์เชิงซ้อนสำหรับ Model A อยู่ในรูปสมการ

$$\Omega = U \left\{ (\cos \alpha - i \sin \alpha) z + (H - iG) \frac{c^2}{z} + \dots \right\}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{d\Omega}{dz} = U \left\{ (\cos \alpha - i \sin \alpha) + (iG - H) \frac{c^2}{z^2} + \dots \right\}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 = U^2 \left\{ (\cos \alpha - i \sin \alpha)^2 + 2(\cos \alpha - i \sin \alpha)(iG - H) \frac{c^2}{z^2} + \dots \right\} \quad (3-1)$$

$$z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 = U^2 \left\{ (\cos \alpha - i \sin \alpha)^2 z + 2(\cos \alpha - i \sin \alpha)(iG - H) \frac{c^2}{z} + \dots \right\} \quad (3-2)$$

แรงที่กระทำกับ Model A จากสมการที่ (2-47) โดยทฤษฎีบทส่วนตกค้างจะได้

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= \frac{1}{2} i \rho \oint_c \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} i \rho (2\pi i)(0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-3)$$

ดังนั้นไม่มีแรงกระทำกับ Model A ในกรณีดังกล่าว

สำหรับโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A จากสมการที่ (2-48) โดยทฤษฎีบทส่วนตกค้าง จะได้

$$\begin{aligned} M_A &= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint_c z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \right\} \\ &= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \left[2U^2 c^2 (\cos \alpha - i \sin \alpha)(iG - H)(2\pi i) \right] \right\} \\ &= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \left[4U^2 c^2 \pi i (G i \cos \alpha i - H \cos \alpha + G \sin \alpha + H i \sin \alpha) \right] \right\} \\ &= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -2\rho U^2 c^2 \pi i [(-H \cos \alpha + G \sin \alpha) + (H \sin \alpha + G \cos \alpha)i] \right\} \\ &= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -2\rho U^2 c^2 \pi [(-H \cos \alpha + G \sin \alpha)i - (H \sin \alpha + G \cos \alpha)] \right\} \\ &= 2\rho U^2 c^2 \pi (H \sin \alpha + G \cos \alpha) \\ &= 2\rho U^2 c^2 \pi \left\{ \left(\frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3} \right) \cos \alpha \sin \alpha - \left(\frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3} \right) \cos \alpha \sin \alpha \right\} \\ &= \frac{4}{3} \rho U^2 c^2 \pi \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

ดังนั้นโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A คือ

$$M_A = \frac{4}{3} \rho U^2 c^2 \pi \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) \sin \alpha \cos \alpha \quad (3-4)$$

3.2.2 แรงและโมเมนต์ที่กระทำกับ Model B

จากสมการที่ (2-66)

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \frac{d\Omega}{dz} &= \frac{d\Omega}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \\ &= \frac{A \sinh(\zeta - \zeta_0)}{\sinh \zeta} \\ &= A \left\{ \frac{\sinh \zeta \cosh(\zeta_0) - \cosh \zeta \sinh(\zeta_0)}{\sinh \zeta} \right\} \\ &= A \left\{ \cosh(\zeta_0) - \sinh(\zeta_0) \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \right\} \\ &= A \left\{ \cosh(\zeta_0) - \sinh(\zeta_0) \left(1 + \frac{c^2}{2z^2} + \dots \right) \right\} \\ &= A \left\{ \cosh(\zeta_0) - \sinh(\zeta_0) - \frac{c^2 \sinh(\zeta_0)}{2z^2} + \dots \right\} \\ &= A \left(e^{-\zeta_0} - \frac{c^2 \sinh(\zeta_0)}{2z^2} + \dots \right) \\ \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 &= A^2 \left(e^{-2\zeta_0} - e^{-\zeta_0} \frac{c^2 \sinh(\zeta_0)}{z^2} + \frac{c^4 \sinh^2(\zeta_0)}{4z^4} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3-5)$$

$$z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 = A^2 \left(ze^{-2\zeta_0} - e^{-\zeta_0} \frac{c^2 \sinh(\zeta_0)}{z} + \frac{c^4 \sinh^2(\zeta_0)}{4z^3} + \dots \right) \quad (3-6)$$

แรงที่กระทำกับ Model B จากสมการที่ (2-47) โดยทฤษฎีบทส่วนตกค้าง

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} i \rho (2\pi i)(0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-7)$$

ดังนั้นไม่มีแรงกระทำกับ **Model B** ในกรณีดังกล่าว

สำหรับโมเมนต์ที่กระทำกับ Model B จากสมการที่ (2-48) โดยทฤษฎีบทส่วนตกค้าง จะได้

$$M_B = \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho (2\pi i) (-c^2 A^2 e^{-\zeta_0} \sinh(\zeta_0)) \right\} \\
&= \text{ส่วนจริงของ} [\rho \pi A^2 c^2 i e^{-\zeta_0} \sinh(\zeta_0)] \\
&= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ \frac{1}{2} \rho \pi A^2 c^2 i e^{-\zeta_0} (e^{\zeta_0} - e^{-\zeta_0}) \right\} \\
&= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ \frac{1}{2} i \rho \pi A^2 c^2 (1 - e^{-2\zeta_0}) \right\} \tag{3-8}
\end{aligned}$$

แต่จาก $e^{-2\zeta_0} = e^{-2(\xi_0 + i\alpha)}$

$$= e^{-2\xi_0} e^{-2i\alpha}$$

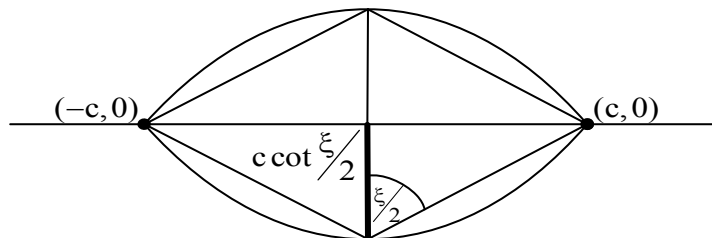
$$= e^{-2\xi_0} \{\cos(2\alpha) - i\sin(2\alpha)\}$$

และ $A^2 = U^2 e^{2\xi_0}$

ดังนั้นสมการที่ (3-8) จะได้

$$\begin{aligned}
M_B &= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ \frac{1}{2} i \rho \pi U^2 e^{2\xi_0} (a^2 - b^2) [1 - e^{-2\xi_0} (\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha)] \right\} \\
&= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ \frac{1}{2} i \rho \pi U^2 (a^2 - b^2) [e^{2\xi_0} - \{\cos(2\alpha) - i \sin(2\alpha)\}] \right\} \\
&= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ \frac{1}{2} i \rho \pi U^2 (a^2 - b^2) [e^{2\xi_0} - \{\cos(2\alpha) - i \sin(2\alpha)\}] \right\} \\
&= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ \frac{1}{2} \rho \pi U^2 (a^2 - b^2) [i \{e^{2\xi_0} - \cos(2\alpha)\} - \sin(2\alpha)] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \rho \pi U^2 (a^2 - b^2) \sin(2\alpha) \\
&= \rho \pi U^2 (b^2 - a^2) \sin \alpha \cos \alpha \tag{3-9}
\end{aligned}$$

ถ้าเราต้องการหาโมเมนต์ที่กระทำบนพื้นผิว Model B ที่มีขนาดพื้นที่หน้าตัดใกล้เคียง Model A โดยที่ Model A มีพื้นที่หน้าตัดเป็นส่วนของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากันตามภาพที่ 3-1 และกำหนดให้มุมคือ $\frac{\xi}{2}$ โดยที่ $\xi = \frac{n\pi}{2}$ สำหรับ $1 < n < 2$



ภาพที่ 3-1 แสดงความกว้างและความยาวของหน้าตัด Model A

หน้าตัดของ Model A มีความยาวเท่ากับ $2c$ และความกว้างเท่ากับ $2c \cot\left(\frac{\xi}{2}\right)$ ดังนั้นสำหรับ Model B จะได้ $a = c$, $b = c \cot\left(\frac{\xi}{2}\right)$ ซึ่งขนาดของหน้าตัดของ Model A และ Model B มีความกว้างและความยาวเท่ากัน

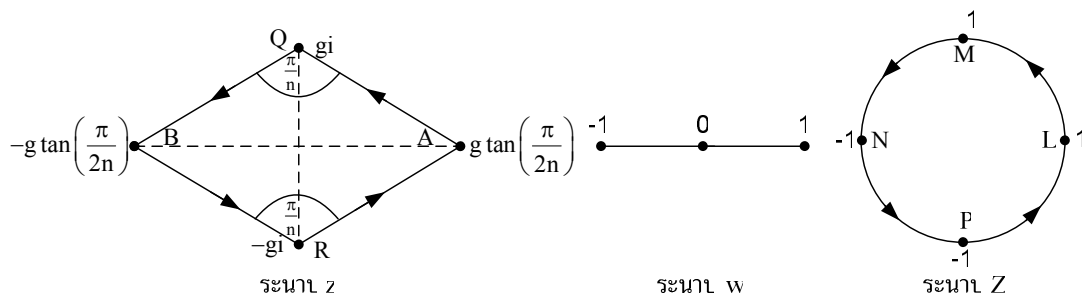
ดังนั้นจากสมการที่ (3-9) แทน $a = c$, $b = c \cot\left(\frac{\xi}{2}\right)$ จะได้

$$\begin{aligned} M_B &= \rho\pi \left\{ c^2 \cot^2\left(\frac{\xi}{2}\right) - c^2 \right\} U^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \rho\pi c^2 \left\{ \cot^2\left(\frac{\xi}{2}\right) - 1 \right\} U^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \rho\pi c^2 \left\{ \cot^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 1 \right\} U^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (3-10)$$

โดยที่ $1 < n < 2$

3.3 การหาแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับ Model C

การหาค่าเชิงซ้อนสำหรับกระแสที่ไหลผ่าน Model C เพื่อใช้ในการคำนวณหาแรงและโมเมนต์นั้น เราต้องอาศัยทฤษฎีวงกลมตามหัวข้อ 2.7 ซึ่งจำเป็นต้องใช้การส่งคงแบบ (Conformal mapping) จากแท่งทรงกระบอก Model C ไปยังแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงกลมตามภาพที่ 3-2



ภาพที่ 3-2 แสดงการแปลงจุดบน Model C ในระนาบ z ไปยังจุดบนวงกลมในระนาบ Z

3.3.1 การแปลงจุดในระนาบของแท่งทรงกระบอก Model C ไปยังระนาบของวงกลม

ในการแปลงจุดในระนาบของแท่งทรงกระบอก Model C ในส่วน $\text{Im}(z) \geq 0$ ในระนาบ z ไปยังระนาบของเส้นตรง $v = 0$ ในระนาบ w โดยใช้ การแปลงชวาร์ชคริสโตเฟล

$$\frac{dz}{dw_1} = k(w_1 - a)^{\frac{1}{n}-1} \quad (3-11)$$

ให้ $a = 0$ จะได้

$$\frac{dz}{dw_1} = kw_1^{\frac{1}{n}-1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} z &= k \int w_1^{\frac{1}{n}-1} dw_1 \\ &= nk w_1^{\frac{1}{n}} + s \\ w_1 &= \left(\frac{1}{nk} \right)^n (z - s)^n \end{aligned}$$

กำหนดให้ $z = gi$ สมัยกับ $w_1 = 0$

$$0 = \left(\frac{1}{nk} \right)^n (gi - s)^n$$

จะได้ $s = gi$

ดังนั้น

$$w_1 = \left(\frac{1}{nk} \right)^n (z - gi)^n$$

กำหนดให้ $z = g \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ ในระนาบ z สมัยกับ $w_1 = 1$ ในระนาบ w

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{1}{nk} \right)^n \left\{ g \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) - gi \right\}^n \\ \left(\frac{1}{nk} \right)^n &= \frac{1}{g^n \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \right\}^n} \\ &= \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g^n (-i)^n \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^n} \\ &= \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g^n (-1)^n (i)^{n+1}} \\ \left(\frac{1}{nk} \right)^n &= \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g^n (-1)^n (i)^{n+1}} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการการแปลงซาร์ชคริสโตเฟล คือ

$$w_1 = \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z - gi)^n}{g^n (-1)^n (i)^{n+1}} \quad (3-12)$$

ในทำนองเดียวกัน การแปลงจุดของแท่งทรงกระบอก Model C ในระนาบ z ในส่วน $\text{Im}(z) \leq 0$ ในระนาบ z ไปยังระนาบของเส้นตรง $v = 0$ ในระนาบ w

$$\frac{dz}{dw_2} = k(w_2 - a)^{\frac{1}{n}-1} \quad (3-13)$$

ให้ $a = 0$

$$\frac{dz}{dw_2} = kw_2^{\frac{1}{n}-1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} z &= k \int w_2^{\frac{1}{n}-1} dw_2 \\ &= nk w_2^{\frac{1}{n}} + s \\ w_2 &= \left(\frac{1}{nk} \right)^n (z - s)^n \end{aligned}$$

กำหนดให้ $z = -gi$ สมัยกับ $w_2 = 0$

$$0 = \left(\frac{1}{nk} \right)^n (-gi - s)^n$$

จะได้ $s = -gi$

ดังนั้น

$$w_2 = \left(\frac{1}{nk} \right)^n (z + gi)^n$$

กำหนดให้ $z = g \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ ในระนาบ z สมัยกับ $w_2 = 1$ ในระนาบ w

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{1}{nk} \right)^n \left\{ g \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) + gi \right\}^n \\ \left(\frac{1}{nk} \right)^n &= \frac{1}{g^n \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \right\}^n} \\ &= \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g^n (i)^n \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^n} \\ &= \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g^n (i)^n \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\}} \\ &= \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g^n (i)^n (-i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g^n(i)^{n-1}} \\ \left(\frac{1}{nk}\right)^n &= \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g^n(i)^{n-1}} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการการแปลงซาร์ชคริสโตฟเฟล คือ

$$w_2 = \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z + gi)^n}{g^n(i)^{n-1}} \quad (3-14)$$

w_1 เป็น สมการการแปลงซาร์ชคริสโตฟเฟล ที่แปลงจุดต่างๆบนเส้นตรง AQ ไปเป็นจุดบน $v = 0$ จาก $u = 0$ ถึง $u = 1$ และจุดต่างๆบนเส้นตรง BQ เป็นจุดบน $v = 0$ จาก $u = -1$ ถึง $u = 0$

w_2 เป็น สมการการแปลงซาร์ชคริสโตฟเฟล ที่แปลงจุดต่างๆบนเส้นตรง AR ไปเป็นจุดบน $v = 0$ จาก $u = 0$ ถึง $u = 1$ และจุดต่างๆบนเส้นตรง BR เป็นจุดบน $v = 0$ จาก $u = -1$ ถึง $u = 0$

ในการแปลงจุดในระนาบของเส้นตรง $v = 0$ ในระนาบ w ไปยังระนาบของวงกลมในระนาบ Z โดยใช้สมการ

$$w = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right) \quad (3-15)$$

ซึ่งแปลงจุดต่างๆ บนเส้นตรง $v = 0$ ในระนาบ w จาก $u = -1$ ถึง $u = 1$ ที่สมนัยกับจุดทุกจุดบนสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน AQBR ไปยังจุดต่างๆบนวงกลม $|Z| = 1$ ($Z = e^{i\theta}$)

การหาจุดที่สมนัยในระหว่างจุดบนระนาบ z และ Z จากสมการที่ (3-12) และ (3-15) จะได้

$$\frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right) = \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z - gi)^n}{g^n(-1)^n(i)^{n+1}} = f(z) \quad (\text{Im } z \geq 0)$$

ดังนั้น $Z^2 - 2f(z)Z + 1 = 0$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2f(z) \pm \sqrt{4f^2(z) - 4}}{2} \\ &= f(z) \pm \sqrt{f^2(z) - 1} \end{aligned}$$

เนื่องจากเราต้องการให้จุดภายนอกของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนในระนาบ z สมนัยกับจุดภายนอกของวงกลม $|Z| = 1$ ในระนาบ Z ดังนั้นเราจะได้

$$Z = f(z) + \sqrt{f^2(z) - 1} \quad (3-16)$$

ซึ่งเมื่อ $z \rightarrow \infty$ แล้ว $f(z) \rightarrow \infty$ $Z \rightarrow \infty$ ด้วย

ในกรณีที่ $\text{Im}(z) \leq 0$ ความสัมพันธ์จากระนาบ z ไปยังในระนาบ Z จากสมการที่ (3-14) และ (3-15) จะได้

$$\frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) = \frac{\cos^n \left(\frac{\pi}{2n} \right) (z + gi)^n}{g^n (i)^{n-1}} = g(z) \quad (\text{Im } z \leq 0)$$

ดังนั้น $Z^2 - 2g(z)Z + 1 = 0$

$$Z = \frac{2g(z) \pm \sqrt{4g^2(z) - 4}}{2} \\ = g(z) \pm \sqrt{g^2(z) - 1}$$

เนื่องจากเราต้องการให้ภายนอกของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนในระนาบ z สมนัยกับจุดภายนอกของวงกลม $|Z| = 1$ ในระนาบ Z ดังนั้นเราจะได้

$$Z = g(z) + \sqrt{g^2(z) - 1} \quad (3-17)$$

ซึ่งเมื่อ $z \rightarrow \infty$ แล้ว $g(z) \rightarrow \infty$ $Z \rightarrow \infty$ ด้วย

รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนในระนาบ z จะถูกส่งไปเป็นวงกลม $|Z| = 1$ โดยที่ส่วนของเส้นตรง AQB ถูกส่งไปเป็นส่วนของวงกลม ($|Z| = 1$) LMN และ ส่วนของเส้นตรง BRA ถูกส่งไปเป็นส่วนของวงกลม ($|Z| = 1$) NPL ดังภาพที่ 3-2

3.3.2 การหาค่าเชิงซ้อนของกระแสที่ไหลผ่าน Model C

จากทฤษฎีวงกลมในสมการที่ (2-29) เมื่อเรานำผลของการแปลงที่ได้ในหัวข้อ 3.3.1 มาประยุกต์ใช้กับกลศาสตร์การไหล (Fluid Dynamics) เมื่อ Model C วางขวางกั้นกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วคงที่ U ทำมุม α กับทิศทางลบของแกนจริงในระนาบ z ความยากอยู่ที่การหารูปแบบของสมการ $f(Z)$ ในระนาบ Z ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า ศักย์เชิงซ้อนที่คำนวณได้ในระนาบ Z เมื่อนำกลับมาใช้ในระนาบ z แล้วที่ระยะห่างไกลจากแท่งทรงกระบอก ความเร็วของกระแสน้ำมีค่าเดียวกันกับความเร็วของกระแสน้ำเมื่อไม่มีสิ่งกีดขวาง ($\frac{d\Omega}{dz} \rightarrow Ue^{-i\alpha}$ เมื่อ $z \rightarrow \infty$)

ในการหาค่าเชิงซ้อนสำหรับ Model C ในส่วน $\text{Im}(z) \geq 0$ การหารูปแบบของสมการ $f(Z)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่าที่ระยะห่างจากแท่งทรงกระบอกมากๆ ($z \rightarrow \infty$) แล้วความเร็วของกระแสน้ำจะมีค่าเข้าใกล้ $Ue^{-i\alpha}$ ในทิศทางลบของแกน ox หรือ $\Omega_1 \rightarrow Uze^{-i\alpha}$ เรากำหนดให้

$$f(Z) = - \left\{ \frac{Ugi}{2^{\frac{1}{n}} \cos \left(\frac{\pi}{2n} \right)} \right\} (iZ)^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} \quad (3-18)$$

ในระนาบ Z เมื่อมีสิ่งกีดขวางเป็นทรงกระบอกรูปวงกลมรัศมี 1 หน่วย ขวางกั้นกระแสน้ำดังกล่าว ซึ่งโดยทฤษฎีวงกลม ศักย์เชิงซ้อนมีรูปเป็น

$$\Omega_1 = f(Z) + \bar{f}\left(\frac{1}{Z}\right)$$

โดยแทน $a = 1$ ในสมการที่ (2-29)

จากสมการที่ (3-18) จะได้ $\bar{f}\left(\frac{1}{Z}\right) = -\left\{\frac{Ug(-i)}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right\} \left(-\frac{i}{Z}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\alpha}$

ดังนั้นศักย์เชิงซ้อนจะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\left\{\frac{Ugi}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right\} (iZ)^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} - \left\{\frac{Ug(-i)}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right\} \left(-\frac{i}{Z}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\alpha} \\ &= -\left\{\frac{Ug(i)^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right\} \left[Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} - \left(-\frac{1}{Z}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\alpha}\right] \end{aligned}$$

เมื่อ $Z \rightarrow \infty$

$$\Omega_1 \rightarrow -\left\{\frac{Ug(i)^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right\} Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha}$$

จากสมการที่ (3-16) $Z = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}$ ($w_1 = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)$ และ $w_1 \rightarrow \infty$ เมื่อ $Z \rightarrow \infty$)

และจาก
$$w_1 = \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z - gi)^n}{g^n (-1)^n (i)^{n+1}}$$

เมื่อ $z \rightarrow \infty$
$$w_1 \rightarrow \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z)^n}{g^n (-1)^n (i)^{n+1}}$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าเมื่อ $z \rightarrow \infty$

$$\Omega_1 \rightarrow -\left\{\frac{Ug(i)^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right\} \left\{\frac{2 \cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z)^n}{g^n (-1)^n (i)^{n+1}}\right\}^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow - \left\{ \frac{Ug(i)^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\} \left\{ \frac{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g(-1)(i)^{\frac{n+1}{n}}} \right\} ze^{-i\alpha} \\ &\rightarrow Uze^{-i\alpha} \end{aligned}$$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $\frac{d\Omega_1}{dz} \rightarrow Ue^{-i\alpha}$ เมื่อ $z \rightarrow \infty$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ศักย์เชิงซ้อนในส่วน $\text{Im}(z) \geq 0$

$$\Omega_1 = - \frac{Ug(i)^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} - \left(-\frac{1}{Z}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\alpha} \right] \quad (3-19)$$

ในระนาบ Z มีความสมเหตุสมผล

ในทำนองเดียวกัน การหาค่าศักย์เชิงซ้อนสำหรับ Model C ในส่วน $\text{Im}(z) \leq 0$ การหารูปของสมการ $f(z)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่าที่ระยะห่างจากแท่งทรงกระบอกมากๆ ($z \rightarrow \infty$) แล้วความเร็วของกระแสจะมีค่าเข้าใกล้ $Ue^{-i\alpha}$ ในทิศทางลบของแกน ox หรือ $\Omega_2 \rightarrow Uze^{-i\alpha}$ เราสมมุติให้

$$f(Z) = \left\{ \frac{Ugi^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\} Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} \quad (3-20)$$

โดยใช้ทฤษฎีวงกลม ศักย์เชิงซ้อนมีรูปเป็น

$$\Omega_2 = f(Z) + \bar{f}\left(\frac{1}{Z}\right)$$

แต่

$$\begin{aligned} \bar{f}\left(\frac{1}{Z}\right) &= \left\{ \frac{Ug(-i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\} \left(\frac{1}{Z}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\alpha} \\ &= - \left\{ \frac{Ug(i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\} \frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{Z^{\frac{1}{n}}} e^{i\alpha} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\Omega_2 = \frac{Ug(i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left\{ Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} - \left(\frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{Z^{\frac{1}{n}}}\right) e^{i\alpha} \right\}$$

เมื่อ $Z \rightarrow \infty$

$$\Omega_2 \rightarrow \frac{Ug(i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} (Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha})$$

จากสมการที่ (3-17) $Z = w_2 + \sqrt{w_2^2 - 1}$ ($w_2 = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)$ และ $w_2 \rightarrow \infty$ เมื่อ $Z \rightarrow \infty$)

และจาก

$$w_2 = \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z + gi)^n}{g^n(i)^{n-1}}$$

ซึ่งเมื่อ $z \rightarrow \infty$

$$w_2 \rightarrow \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z)^n}{g^n(i)^{n-1}}$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าเมื่อ $z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Omega_2 &\rightarrow \left\{ \frac{Ug(i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\} \left\{ \frac{2 \cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z)^n}{g^n(i)^{n-1}} \right\}^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} \\ &\rightarrow \left\{ \frac{Ug(i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\} \left\{ \frac{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g(i)^{\frac{n-1}{n}}} \right\} z e^{-i\alpha} \\ &\rightarrow Uze^{-i\alpha} \end{aligned}$$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $\Omega_2 \rightarrow Uze^{-i\alpha}$ เมื่อ $z \rightarrow \infty$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ศักย์เชิงซ้อนในส่วน $\text{Im}(z) \leq 0$

$$\Omega_2 = \frac{Ug(i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left\{ Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} - \left(\frac{(-1)^{\frac{-1}{n}}}{Z^{\frac{1}{n}}} \right) e^{i\alpha} \right\} \quad (3-21)$$

ในระนาบ Z มีความสมเหตุสมผล

การตรวจสอบสมบัติของความเป็นสมมาตร (Symmetrical properties) ของ w_1 , w_2 , Ω_1 และ Ω_2 ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ใช้มีดังนี้

กรณีที่ 1 เราจะทดลองตรวจสอบดูว่า w_1 และ w_2 จะแปลงจุดบน

$$AQ \left[y = -\left\{ \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} x + g \right] \text{ และ } AR \left[y = \left\{ \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} x - g \right] \text{ ที่มีค่า } x \text{ เดียวกันไปเป็น}$$

จุดบนเส้นตรง $v = 0$ ในระนาบ w ได้เป็นจุดเดียวกันหรือไม่

สมมติจุดนั้นมีค่า $x = \frac{1}{2}g \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ ซึ่งจะได้ $y = \frac{1}{2}g$ บนด้าน AQ และ $y = -\frac{1}{2}g$ บน

ด้าน AR

$$\text{จาก } w_1 = \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z - gi)^n}{g^n(-1)^n(i)^{n+1}} \text{ แทนค่า } z = \frac{1}{2}g\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i\right\} \text{ จะได้}$$

$$w_1 = \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left\{\frac{1}{2}g\left(\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i\right) - gi\right\}^n}{g^n(-1)^n(i)^{n+1}}$$

$$= \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{(-1)^n(i)^{n+1}}\left\{\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i\right) - i\right\}^n$$

$$= \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{(-1)^n(i)^{n+1}}\left\{\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \frac{1}{2}i\right\}^n$$

$$= \frac{1}{2^n(-1)^n(i)^{n+1}}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^n$$

$$= \frac{(-1)^n(i)^n}{2^n(-1)^n(i)^{n+1}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^n$$

$$= -\frac{i}{2^n}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^n$$

$$= -\frac{i}{2^n}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= -\frac{i}{2^n}(i)$$

$$= 2^{-n}$$

$$\text{จาก } w_2 = \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z + gi)^n}{g^n(i)^{n-1}} \text{ แทนค่า } z = \frac{1}{2}g\left(\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i\right) \text{ จะได้}$$

$$w_2 = \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{(i)^{n-1}}\left\{\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i\right) + i\right\}^n$$

$$= \frac{(i)^n}{2^n(i)^{n-1}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^n$$

$$= \frac{i}{2^n}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2^n} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} \\
&= \frac{i}{2^n} (-i) \\
&= 2^{-n}
\end{aligned}$$

แสดงว่าจุด $\left(\frac{1}{2}g \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right), \frac{1}{2}g\right)$ บนเส้น AQ และจุด $\left(\frac{1}{2}g \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right), -\frac{1}{2}g\right)$ บนเส้น AR ใน

ระนาบ z ถูกแปลงเป็นจุดบนเส้นตรง $v = 0$ ในระนาบ w เป็นจุดเดียวกันคือจุด $(2^{-n}, 0)$

กรณีที่ 2 ตรวจสอบว่าในกรณีแห่งทรงกระบอกอยู่นิ่ง Ω_1 และ Ω_2 ทำให้เส้นรอบวงของวงกลม $|Z| = 1$ เป็นเส้นแบ่งทางเดินของของไหล หรือไม่

1. สำหรับ Ω_1 บนวงกลม $Z = e^{i\theta}$ ซึ่ง $Z\bar{Z} = 1$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)

จากสมการที่ (3-19)

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= -\frac{Ug(i)^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} - \frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{Z^{\frac{1}{n}}} e^{i\alpha} \right] \\
&= -\frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[i(iZ)^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} + \frac{(-i)(-i)^{\frac{1}{n}}}{Z^{\frac{1}{n}}} e^{i\alpha} \right] \\
&= -\frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[i(iZ)^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} + (-i)\left(\frac{-i}{Z}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\alpha} \right] \\
&= -\frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[i(iZ)^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} + (-i)(-i\bar{Z})^{\frac{1}{n}} e^{i\alpha} \right] \tag{3-22}
\end{aligned}$$

ในพจน์ที่ 2 ในวงเล็บเป็นสังยุคของพจน์แรก ดังนั้นผลบวกของพจน์ในวงเล็บจึงเป็นจำนวนจริง แสดงว่า $\psi = 0$ โดยที่ ψ คือฟังก์ชันของการไหล

2. สำหรับ Ω_2 บนวงกลม $Z = e^{i\theta}$ ซึ่ง $Z\bar{Z} = 1$ ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$)

จากสมการที่ (3-22)

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \frac{Ug(i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} - \frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{Z^{\frac{1}{n}}} e^{i\alpha} \right] \\
&= \frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[i\left(\frac{Z}{i}\right)^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} - i\frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{(iZ)^{\frac{1}{n}}} e^{i\alpha} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[i \left(\frac{Z}{i} \right)^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} + (-i) \left\{ \frac{(\bar{Z})}{(-i)} \right\}^{\frac{1}{n}} e^{i\alpha} \right] \quad (3-23)$$

เนื่องจาก $Z\bar{Z}=1$

ดังนั้นในพจน์ที่ 2 ในวงเล็บเป็นสังยุคของพจน์แรก ดังนั้นผลบวกของพจน์ในวงเล็บ จึงเป็นจำนวนจริงแสดงว่า $\psi = 0$ โดยที่ ψ คือฟังก์ชันของการไหล

กรณีที่ 3 Ω_1 และ Ω_2 ที่จุดบนวงกลม ในส่วนบนของแกน ox ในตำแหน่ง θ และส่วนล่างของแกน OX ในตำแหน่ง $-\theta$ ในขณะที่ $\alpha = 0$ จะต้องมามีค่าเดียวกัน

จากการแทน $\alpha = 0$ และเขียน $Z = e^{i\theta}$ ($\theta > 0$) ใน Ω_1 ในสมการที่ (3-22) และ $Z = e^{-i\theta}$ ($\theta > 0$) ใน Ω_2 ในสมการที่ (3-23) จะได้

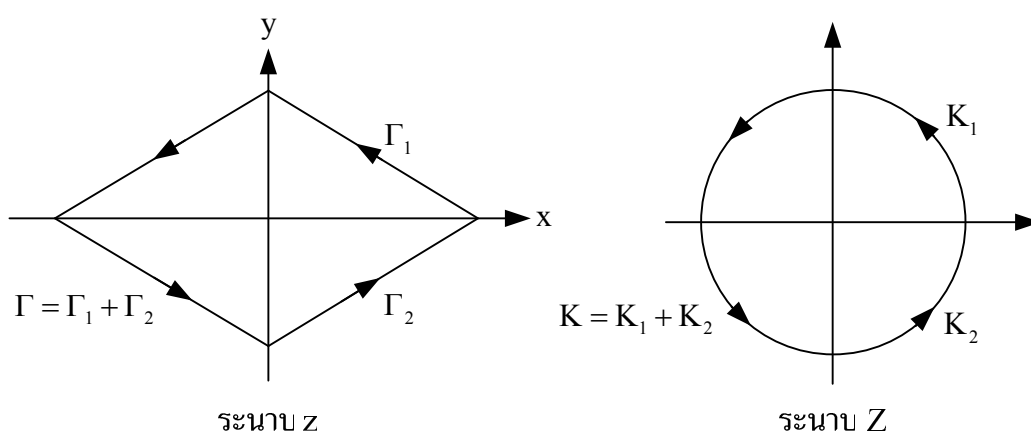
$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[-i(iZ)^{\frac{1}{n}} + (i)(-i\bar{Z})^{\frac{1}{n}} \right] \\ &= \frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[-i \left(e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\theta} \right)^{\frac{1}{n}} + i \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \\ &= \frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[-ie^{\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)i} + ie^{-\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)i} \right] \\ &= -gUi 2^{-\frac{1}{n}} \sec\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[e^{\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)i} - e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)i} \right] \\ &= gU 2^{\frac{n-1}{n}} \sec\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin\left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right\} \quad (3-24) \\ \Omega_2 &= \frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[i \left(\frac{Z}{i} \right)^{\frac{1}{n}} + (-i) \left\{ \frac{(\bar{Z})}{(-i)} \right\}^{\frac{1}{n}} \right] \\ &= \frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[i \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta} \right)^{\frac{1}{n}} - i \left(e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\theta} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \\ &= \frac{Ug}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[ie^{-\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)i} - ie^{\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)i} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -gU_1 2^{-\frac{1}{n}} \sec\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[e^{\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)i} - e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)i} \right] \\
&= gU_1 2^{\frac{n-1}{n}} \sec\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\} \quad (3-25)
\end{aligned}$$

แสดงว่าที่จุด θ และ $-\theta$ บนวงกลม $|Z|=1$ $\Omega_1 = \Omega_2$ ตามสมบัติของความสมมาตร

ดังนั้นศักย์เชิงซ้อน Ω_1 และ Ω_2 ที่กำหนดขึ้นมีความสมเหตุสมผลสำหรับ Model C ตามสมบัติของความสมมาตร

3.3.3 การหารูปแบบสมการของแรงและโมเมนต์สำหรับ Model C



ภาพที่ 3-3 แสดงพื้นผิวของ Model C ที่สัมพันธ์กับแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลม

3.3.3.1 การหารูปแบบสมการของแรงที่กระทำกับ Model C

จากสมการที่ (2-46) แรงที่กระทำกับแท่งทรงกระบอก

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i\rho \oint_{\Gamma} \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz = \frac{1}{2} i\rho \left\{ \int_{\Gamma_1} \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \right\}$$

โดยที่ $\Gamma = \Gamma_1$ ในบริเวณ $\text{Im } z \geq 0$ และ $\Gamma = \Gamma_2$ ในบริเวณ $\text{Im } z \leq 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
F_x - iF_y &= \frac{1}{2} i\rho \left[\int_{K_1} \left(\frac{d\Omega_1}{dZ} \right)^2 \left(\frac{dZ}{dw_1} \right)^2 \left(\frac{dw_1}{dz} \right)^2 \left(\frac{dz}{dw_1} \right) \left(\frac{dw_1}{dZ} \right) dZ \right. \\
&\quad \left. + \int_{K_2} \left(\frac{d\Omega_2}{dZ} \right)^2 \left(\frac{dZ}{dw_2} \right)^2 \left(\frac{dw_2}{dz} \right)^2 \left(\frac{dz}{dw_2} \right) \left(\frac{dw_2}{dZ} \right) dZ \right] \\
&= \frac{1}{2} i\rho \left\{ \int_{K_1} \left(\frac{d\Omega_1}{dZ} \right)^2 \left(\frac{dZ}{dw_1} \right) \left(\frac{dw_1}{dz} \right) dZ + \int_{K_2} \left(\frac{d\Omega_2}{dZ} \right)^2 \left(\frac{dZ}{dw_2} \right) \left(\frac{dw_2}{dz} \right) dZ \right\} \quad (3-26)
\end{aligned}$$

โดยที่ $K = K_1$ ในบริเวณ $\text{Im } Z \geq 0$ และ $K = K_2$ ในบริเวณ $\text{Im } Z \leq 0$

จากสมการที่ (3-15)

$$w_1 = \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) \quad (\text{Im } Z \geq 0) \quad (3-27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dZ} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) \\ \frac{dZ}{dw_1} &= \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} \end{aligned} \quad (3-28)$$

จากสมการที่ (3-12) จะได้
$$\frac{dw_1}{dz} = n \frac{\cos^n \left(\frac{\pi}{2n} \right) (z - gi)^{n-1}}{g^n (-1)^n (i)^{n+1}} \quad (3-29)$$

จากสมการที่ (3-12) และ (3-27) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\cos^n \left(\frac{\pi}{2n} \right) (z - gi)^n}{g^n (-1)^n (i)^{n+1}} &= \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) \\ z - gi &= -g \frac{\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos \left(\frac{\pi}{2n} \right)} (i)^{\frac{n+1}{n}} \\ (z - gi)^{n-1} &= (-1)^{n-1} g^{n-1} (i)^{\frac{n^2-1}{n}} \left\{ \frac{\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{n-1}{n}} \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2n} \right)} \right\} \end{aligned} \quad (3-30)$$

แทนสมการที่ (3-30) ลงในสมการที่ (3-31) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dz} &= n \frac{\cos^n \left(\frac{\pi}{2n} \right)}{g^n (-1)^n (i)^{n+1}} (-1)^{n-1} g^{n-1} (i)^{\frac{n^2-1}{n}} \left\{ \frac{\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{n-1}{n}} \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2n} \right)} \right\} \\ &= -n \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2n} \right)}{g(i)^{\frac{n+1}{n}} 2^{\frac{n-1}{n}}} \left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned} \quad (3-31)$$

จาก
$$w_2 = \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) \quad (\text{Im } Z \leq 0) \quad (3-32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw_2}{dZ} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) \\ \frac{dZ}{dw_2} &= \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} \end{aligned}$$

จากสมการที่ (3-14) จะได้

$$\frac{dw_2}{dz} = n \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z+gi)^{n-1}}{g^n(i)^{n-1}} \quad (3-33)$$

จากสมการที่ (3-14) และ (3-32) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)(z+gi)^n}{g^n(i)^{n-1}} &= \frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right) \\ z+gi &= g \frac{\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} (i)^{\frac{n-1}{n}} \\ (z+gi)^{n-1} &= g^{n-1}(i)^{\frac{(n-1)^2}{n}} \left\{ \frac{\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{n-1}{n}} \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\} \end{aligned} \quad (3-34)$$

แทนสมการที่ (3-34) ลงในสมการที่ (3-33) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dw_2}{dz} &= n \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g^n(i)^{n-1}} g^{n-1}(i)^{\frac{(n-1)^2}{n}} \left\{ \frac{\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{n-1}{n}} \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\} \\ &= n \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g(i)^{\frac{n-1}{n}} 2^{\frac{n-1}{n}}} \left(Z+\frac{1}{Z}\right)^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned} \quad (3-35)$$

จากคํักย้เซ่งซ้อน

$$\begin{aligned} \Omega_1 = F_1(Z) &= -\frac{Ug(i)^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} - \frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{Z^{\frac{1}{n}}} e^{i\alpha} \right] \\ F_1'(Z) &= -\frac{Ug(i)^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[\frac{1}{n} Z^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} e^{-i\alpha} + \frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{n} Z^{-\left(\frac{1}{n}+1\right)} e^{i\alpha} \right] \end{aligned} \quad (3-36)$$

$$\Omega_2 = F_2(Z) = \frac{Ug(i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[Z^{\frac{1}{n}} e^{-i\alpha} - \frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{Z^{\frac{1}{n}}} e^{i\alpha} \right]$$

$$F_2'(Z) = \frac{Ug(i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[\frac{1}{n} Z^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} e^{-i\alpha} + \frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{n} Z^{-\left(\frac{1}{n}+1\right)} e^{i\alpha} \right] \quad (3-37)$$

$$\frac{dw_1}{dz} = G_1(Z) = -n \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g(i)^{\frac{n+1}{n}} 2^{\frac{n-1}{n}}} \left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (3-38)$$

$$\frac{dw_2}{dz} = G_2(Z) = n \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{g(i)^{\frac{n-1}{n}} 2^{\frac{n-1}{n}}} \left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (3-39)$$

ดังนั้น แรงที่กระทำกับ Model C จากสมการที่ (3-26) คือ

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} ip \left\{ \int_{K_1} F_1'^2(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_1(Z) dZ + \int_{K_2} F_2'^2(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_2(Z) dZ \right\} \quad (3-40)$$

3.3.3.2 การหารูปสมการของโมเมนต์ที่กระทำกับ Model C

ในการหาโมเมนต์ที่กระทำกับ Model C จากสมการที่ (2-48) โมเมนต์คือ

$$\text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint_{\Gamma} z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \right\}$$

พิจารณาเทอม

$$\oint_{\Gamma} z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz = \int_{\Gamma_1} z \left(\frac{d\Omega_1}{dz} \right)^2 dz + \int_{\Gamma_2} z \left(\frac{d\Omega_2}{dz} \right)^2 dz \quad (3-41)$$

$$\text{ในกรณีที่ } \Gamma_1 \rightarrow K_1 \quad z - gi = -g(i)^{\frac{n+1}{n}} \left\{ \frac{\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad z = H_1(Z) + gi \quad (3-42)$$

$$\text{โดยที่} \quad H_1(Z) = -g(i)^{\frac{n+1}{n}} \left\{ \frac{\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\}$$

ในทำนองเดียวกันในกรณีที่ $\Gamma_2 \rightarrow K_2$

$$z + gi = g (i)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \frac{\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\}$$

ดังนั้น

$$z = H_2(Z) - gi \quad (3-43)$$

โดยที่

$$H_2(Z) = g (i)^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \frac{\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right\}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (3-41) จะได้

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz &= \int_{\Gamma_1} (H_1(Z) + gi) \left(\frac{d\Omega_1}{dz} \right)^2 dz + \int_{\Gamma_2} (H_2(Z) - gi) \left(\frac{d\Omega_2}{dz} \right)^2 dz \\ &= \int_{K_1} (H_1(Z) + gi) F_1^{/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_1(Z) dZ \\ &\quad + \int_{K_2} (H_2(Z) - gi) F_2^{/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_2(Z) dZ \\ &= \left\{ \int_{K_1} H_1(Z) F_1^{/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_1(Z) dZ + \int_{K_2} H_2(Z) F_2^{/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_2(Z) dZ \right\} \\ &\quad + gi \left\{ \int_{K_1} F_1^{/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_1(Z) dZ - \int_{K_2} F_2^{/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_2(Z) dZ \right\} \\ &= P + Q \end{aligned} \quad (3-44)$$

โดยที่

$$P = \left\{ \int_{K_1} H_1(Z) F_1^{/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_1(Z) dZ + \int_{K_2} H_2(Z) F_2^{/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_2(Z) dZ \right\} \quad (3-45)$$

$$Q = gi \left\{ \int_{K_1} F_1^{/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_1(Z) dZ - \int_{K_2} F_2^{/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_2(Z) dZ \right\} \quad (3-46)$$

ดังนั้นโมเมนต์คือส่วนจริงของ $\left\{ -\frac{1}{2} \rho(P + Q) \right\}$

3.3.4 การหาแรงและโมเมนต์สำหรับ Model C

เนื่องจากเราจะทำการเปรียบเทียบระหว่างแท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะ ดังนั้นความกว้างและความยาวของหน้าตัดต้องมีขนาดใกล้เคียงกันซึ่งจาก Model A และ Model B

ความยาวของหน้าตัดเท่ากับ $2c$ เราต้องกำหนดให้ $g \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ ใน Model C เท่ากับ c หรือ

$g = c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ แทน g ลงในสมการที่ (3-36), (3-37), (3-38), (3-42) และ (3-43) จะได้

$$\begin{aligned} F_1'(Z) &= -c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) U \frac{U(i)^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[\frac{1}{n} e^{i\left(\frac{1}{n}-1\right)\theta} e^{-i\alpha} + \frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{n} e^{-i\left(\frac{1}{n}+1\right)\theta} e^{i\alpha} \right] \\ &= -c \frac{\csc\left(\frac{\pi}{2n}\right) U}{2^{\frac{1}{n}} n} \left\{ e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \theta - \alpha\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \alpha - \frac{\theta}{n} - \theta\right)} \right\} \end{aligned} \quad (3-47)$$

$$\begin{aligned} F_2'(Z) &= c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{U(i)^{\frac{n-1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[\frac{1}{n} e^{i\left(\frac{1}{n}-1\right)\theta} e^{-i\alpha} + \frac{(-1)^{\frac{1}{n}}}{n} e^{-i\left(\frac{1}{n}+1\right)\theta} e^{i\alpha} \right] \\ &= c \frac{\csc\left(\frac{\pi}{2n}\right) U}{2^{\frac{1}{n}} n} \left\{ e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} - \theta - \alpha\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{n} - \frac{\theta}{n} - \theta\right)} \right\} \end{aligned} \quad (3-48)$$

$$\begin{aligned} G_1(Z) &= -n \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) i \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}} 2^{\frac{n-1}{n}} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{\frac{n-1}{n}} \\ &= -n \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) i \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}} 2^{\frac{n-1}{n}} (2 \cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \frac{ni \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \frac{ni}{c} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{-i\frac{\pi}{2n}} \cos^{\frac{n-1}{n}}(\theta) \end{aligned} \quad (3-49)$$

$$G_2(Z) = n \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) (i)^{\frac{n-1}{n}} 2^{\frac{n-1}{n}}} \left(Z + \frac{1}{Z} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\begin{aligned}
&= n \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) i \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} 2^{\frac{n-1}{n}}} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{\frac{n-1}{n}} \\
&= n \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) i \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} 2^{\frac{n-1}{n}}} (2 \cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= -\frac{ni \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= -\frac{ni}{c} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{i\frac{\pi}{2n}} \cos^{\frac{n-1}{n}}(\theta)
\end{aligned} \tag{3-50}$$

$$\begin{aligned}
H_1(Z) &= -c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} i \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} \\
&= -c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{(2 \cos \theta)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} i \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} \\
&= -\frac{ic \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) (\cos \theta)^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= -\frac{ci}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cos^{\frac{1}{n}}(\theta)
\end{aligned} \tag{3-51}$$

$$\begin{aligned}
H_2(Z) &= c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} i \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} \\
&= c \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{(2 \cos \theta)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} i \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ic \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) (\cos \theta)^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{ci}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{-i\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cos^{\frac{1}{n}}(\theta)
\end{aligned} \tag{3-52}$$

เราจะพิจารณาใน 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 $n = 1 + \varepsilon$ โดยที่ $0 < \varepsilon \ll 1$

เนื่องจากกรณีดังกล่าวพื้นที่หน้าตัดของแท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะจะมีความกว้างของหน้าตัดน้อยมาก ซึ่งจะทำให้แรงและโมเมนต์ที่กระทำจะต้องมีค่าเท่ากันหรือใกล้เคียงกันมาก

กรณีที่ 2 $n = \frac{4}{3}$ (กรณีทั่วไป $1 < n < 2$)

3.3.4.1 การหาแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับ Model C กรณีที่ 1

สำหรับกรณีที่ 1 เราสามารถลดรูปให้ง่ายขึ้นดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &\approx (1 + \varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon \\
i^{\frac{n+1}{n}} &= i^{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = i^{1+(1-\varepsilon)} = i^2 i^{-\varepsilon} \approx -1 \\
\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) &\approx \cos\left\{\frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon)\right\} = \sin\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \approx \frac{\pi\varepsilon}{2} \\
\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) &\approx \sin\left\{\frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon)\right\} = \cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \approx 1 \\
(-1)^{\frac{1}{n}} &\approx (-1)^{1-\varepsilon} \approx -1, \quad (-1)^{\frac{1}{n}} \approx (-1)^{\varepsilon-1} \approx -1
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (3-47)

$$\begin{aligned}
F'_l(Z) &= -c \frac{\csc\left(\frac{\pi}{2n}\right) U}{2^{\frac{1}{n}} n} \left\{ e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \theta - \alpha\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \alpha - \frac{\theta}{n} - \theta\right)} \right\} \\
&\approx -\frac{cU}{2} (e^{i(\pi-\alpha)} + e^{i(2\pi+\alpha-2\theta)}) \\
&\approx -\frac{cU}{2} (-e^{-i\alpha} + e^{i(\alpha-2\theta)}) \\
&\approx \frac{cU}{2} e^{-i\alpha} (1 - e^{2i(\alpha-\theta)}) \\
&\approx -\frac{cU}{2} e^{-i\alpha} (e^{2i(\alpha-\theta)} - 1) \\
&\approx -\frac{cU}{2} e^{-i\alpha} e^{i(\alpha-\theta)} (e^{i(\alpha-\theta)} - e^{-i(\alpha-\theta)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx -\frac{cU}{2} e^{-i\theta} 2i \sin(\alpha - \theta) \\
&\approx -cU i e^{-i\theta} \sin(\alpha - \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi)
\end{aligned} \tag{3-53}$$

จากสมการที่ (3-48)

$$\begin{aligned}
F'_2(Z) &= c \frac{\csc\left(\frac{\pi}{2n}\right)U}{2^{\frac{1}{n}}n} \left\{ e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} - \theta - \alpha\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{n} - \frac{\theta}{n} - \theta\right)} \right\} \\
&\approx \frac{cU}{2} (e^{-i\alpha} + e^{i(-\pi + \alpha - 2\theta)}) \\
&\approx \frac{cU}{2} e^{-i\alpha} (1 - e^{2i(\alpha - \theta)}) \\
&\approx -\frac{cU}{2} e^{-i\alpha} e^{i(\alpha - \theta)} (e^{i(\alpha - \theta)} - e^{-i(\alpha - \theta)}) \\
&\approx -\frac{cU}{2} e^{-i\theta} 2i \sin(\alpha - \theta) \\
&\approx -cU i e^{-i\theta} \sin(\alpha - \theta) \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi)
\end{aligned} \tag{3-54}$$

จากสมการที่ (3-51)

$$\begin{aligned}
H_1(Z) &= -\frac{ci}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cos^{\frac{1}{n}}(\theta) \\
&\approx c \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)
\end{aligned} \tag{3-55}$$

จากสมการที่ (3-52)

$$\begin{aligned}
H_2(Z) &= \frac{ci}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{-i\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cos^{\frac{1}{n}}(\theta) \\
&\approx c \cos \theta \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi)
\end{aligned} \tag{3-56}$$

จากสมการที่ (3-51)

$$\begin{aligned}
G_1(Z) &= \frac{ni}{c} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\approx ic^{-1} \left(\frac{\pi \varepsilon}{2} - i \right)
\end{aligned} \tag{3-57}$$

จากสมการที่ (3-50)

$$\begin{aligned}
G_2(Z) &= -\frac{ni}{c} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\approx -ic^{-1} \left(\frac{\pi \varepsilon}{2} + i \right)
\end{aligned} \tag{3-58}$$

3.3.4.1.1 การหาแรงที่กระทำกับ Model C

จากสมการที่ (3-40)

$$\begin{aligned}
 & \text{พิจารณาเทอม } \int_{K_1} F_1'^2(Z) \frac{2Z^2}{Z^2-1} G_1(Z) dZ \text{ จากสมการที่ (3-53), (3-57) จะได้} \\
 & \approx \int_0^\pi \left\{ -c^2 U^2 e^{-2i\theta} \sin^2(\alpha - \theta) \right\} \left\{ \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1} \right\} \left\{ ic^{-1} \left(\frac{\pi\varepsilon}{2} - i \right) \right\} ie^{i\theta} d\theta \\
 & = -icU^2 \left(\frac{\pi\varepsilon}{2} - i \right) \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \\
 & = -cU^2 \left(1 + \frac{\pi\varepsilon}{2} i \right) \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \tag{3-59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{พิจารณาเทอม } \int_{K_2} F_2'^2(Z) \frac{2Z^2}{Z^2-1} G_2(Z) dZ \text{ จากสมการที่ (3-54), (3-58) จะได้} \\
 & \approx \int_\pi^{2\pi} \left\{ -c^2 U^2 e^{-2i\theta} \sin^2(\alpha - \theta) \right\} \left\{ \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}-1} \right\} \left\{ -ic^{-1} \left(\frac{\pi\varepsilon}{2} + i \right) \right\} ie^{i\theta} d\theta \\
 & = icU^2 \left(\frac{\pi\varepsilon}{2} + i \right) \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \\
 & = -cU^2 \left(1 - \frac{\pi\varepsilon}{2} i \right) \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \\
 & = cU^2 \left(1 - \frac{\pi\varepsilon}{2} i \right) \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \tag{3-60}
 \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการที่ (3-40) จะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned}
 F_x - iF_y &= \frac{1}{2} ip \left[-cU^2 \left(1 + \frac{\pi\varepsilon}{2} i \right) \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \right. \\
 & \quad \left. + cU^2 \left(1 - \frac{\pi\varepsilon}{2} i \right) \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{2} ipcU^2 \left\{ \left(1 - \frac{\pi\varepsilon}{2} i \right) - \left(1 + \frac{\pi\varepsilon}{2} i \right) \right\} \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} ipcU^2 \left\{ -2 \left(\frac{\pi\varepsilon}{2} i \right) \right\} \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \\
 &= \frac{\pi p \varepsilon c U^2}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \tag{3-61}
 \end{aligned}$$

การพิจารณาว่า ฟังก์ชัน $I = \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta$ ลู่เข้าหรือไม่

$$\begin{aligned}
|I| &= \left| \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \right| \\
&\leq \left| \int_0^\pi \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \right| \\
&= \left| \int_0^\pi \frac{\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta}{\sin \theta} d\theta \right| \\
&= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta}{\sin \theta} d\theta \right| \\
&= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \left(\sin \alpha \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \cos \alpha \right) d\theta \right| \\
&= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin \alpha \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos \alpha \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} d\theta \right| \\
&= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin \alpha [\ln |\sin \theta|]_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} - \cos \alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\pi - \varepsilon - \varepsilon) \right| \\
&= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin \alpha \left[\ln \left| \frac{\sin(\pi - \varepsilon)}{\sin \varepsilon} \right| \right] - \pi \cos \alpha \right| \\
&= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin \alpha \left[\ln \left| \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon} \right| \right] - \pi \cos \alpha \right| \\
&= \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin \alpha [\ln 1] - \pi \cos \alpha \right| \\
&= \left| -\pi \cos \alpha \right| \\
&= \pi |\cos \alpha|
\end{aligned} \tag{3-62}$$

นั่นคือ $|I| \leq \pi |\cos \alpha|$

ซึ่งแสดงว่า $I = \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta$ ลู่เข้าและมีค่าจริง

ดังนั้น แรงในทิศทางแกน x $F_x = \frac{\pi p \varepsilon c U^2}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta$

เนื่องจาก $\varepsilon \ll 1$

ดังนั้น แรงในทิศทางแกนจริง $F_x \approx 0$

แรงในทิศทางแกนจินตภาพ $F_y = 0$

3.3.4.1.2 การหาโมเมนต์ที่กระทำกับ Model C

จากสมการที่(3-45) คำนวณหาค่า P ได้ดังนี้

พิจารณาเทอม $\int_{K_1} H_1(Z) F_1^2(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_1(Z) dZ$ จากสมการที่ (3-53), (3-55), (3-57) จะได้

$$\begin{aligned}
& \approx \int_0^{\pi} c \cos \theta \left\{ -c^2 U^2 e^{-2i\theta} \sin^2(\alpha - \theta) \right\} \left\{ \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} \right\} \left\{ ic^{-1} \left(\frac{\pi \varepsilon}{2} - i \right) \right\} ie^{i\theta} d\theta \\
& = -ic^2 U^2 \left(\frac{\pi \varepsilon}{2} - i \right) \int_0^{\pi} \cos \theta \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \\
& = -c^2 U^2 \left(1 + \frac{\pi \varepsilon}{2} i \right) \int_0^{\pi} \cos \theta \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \quad (3-63)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอม $\int_{K_2} H_2(Z) F_2^{1/2}(Z) \frac{2Z^2}{Z^2 - 1} G_2(Z) dZ$ จากสมการที่ (3-54), (3-56), (3-48) จะได้

$$\begin{aligned}
& \approx \int_{\pi}^{2\pi} c \cos \theta \left\{ -c^2 U^2 e^{-2i\theta} \sin^2(\alpha - \theta) \right\} \left\{ \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} \right\} \left\{ -ic^{-1} \left(\frac{\pi \varepsilon}{2} + i \right) \right\} ie^{i\theta} d\theta \\
& = ic^2 U^2 \left(\frac{\pi \varepsilon}{2} + i \right) \int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \\
& = -c^2 U^2 \left(1 - \frac{\pi \varepsilon}{2} i \right) \int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \quad (3-64)
\end{aligned}$$

ดังนั้น จากสมการที่ (3-63), (3-64) จะได้

$$\begin{aligned}
P & = -c^2 U^2 \left(1 + \frac{\pi \varepsilon}{2} i \right) \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta \sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \\
& \quad - c^2 U^2 \left(1 - \frac{\pi \varepsilon}{2} i \right) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \quad (3-65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{แต่ว่า } \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta & = \int_0^{\pi} \frac{-\cos \theta \sin^2(\alpha - \theta)}{-\sin \theta} d\theta \quad (\text{แทน } \theta \text{ ด้วย } \pi + \theta) \\
& = \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta \sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ดังนั้น } P & = -c^2 U^2 \left(1 + \frac{\pi \varepsilon}{2} i \right) \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta \sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \\
& \quad - c^2 U^2 \left(1 - \frac{\pi \varepsilon}{2} i \right) \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta \sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \\
& = -2c^2 U^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta \sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \quad (3-66)
\end{aligned}$$

$$\text{พิจารณาเทอม } \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta \sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos \theta \left\{ \frac{1 - \cos(2\alpha - 2\theta)}{\sin \theta} \right\} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \{1 - (\cos 2\alpha \cos 2\theta + \sin 2\alpha \sin 2\theta)\} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (1 - \cos 2\alpha (1 - 2\sin^2 \theta) - 2\sin 2\alpha \sin \theta \cos \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \{(1 - \cos 2\alpha) + 2\cos(2\alpha)\sin^2 \theta - 2\sin 2\alpha \sin \theta \cos \theta\} d\theta \\
&= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta + \cos(2\alpha) \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta - \sin(2\alpha) \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \\
&= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^{\pi-\delta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta + \cos(2\alpha) \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^\pi - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \int_0^\pi (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\ln |\sin \theta| \right]_\delta^{\pi-\delta} - \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \left[\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \lim_{\delta \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\sin(\pi - \delta)}{\sin \delta} \right| - \frac{1}{2} \sin(2\alpha)(\pi) \\
&= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \lim_{\delta \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\sin \delta}{\sin \delta} \right| - \pi \sin \alpha \cos \alpha \\
&= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \lim_{\delta \rightarrow 0} \ln 1 - \pi \sin \alpha \cos \alpha \\
&= -\pi \sin \alpha \cos \alpha
\end{aligned} \tag{3-67}$$

ดังนั้น เราจะได้

$$\begin{aligned}
P &= -2c^2 U^2 (-\pi \sin \alpha \cos \alpha) \\
&= 2\pi c^2 U^2 (\sin \alpha \cos \alpha)
\end{aligned} \tag{3-68}$$

และจากสมการที่ (3-46), (3-59) และ (3-60) ค่า Q จะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned}
Q &\approx c \left(\frac{\pi \epsilon}{2} \right) i \left\{ -cU^2 \left(1 + \frac{\pi \epsilon}{2} i \right) \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta - cU^2 \left(1 - \frac{\pi \epsilon}{2} i \right) \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \right\} \\
&= c \left(\frac{\pi \epsilon}{2} \right) i \left\{ -2cU^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta \right\} \\
&= -\pi \epsilon c^2 U^2 i \int_0^\pi \frac{\sin^2(\alpha - \theta)}{\sin \theta} d\theta
\end{aligned} \tag{3-69}$$

(จากความสัมพันธ์ $g = c \cot \left(\frac{\pi}{2n} \right)$)

ดังนั้นโมเมนต์ที่กระทำกับ Model C คือ

$$\begin{aligned}
\text{ส่วนจริงของ } \left\{ -\frac{1}{2} \rho (P + Q) \right\} &= -\frac{1}{2} \rho \{ 2\pi c^2 U^2 (\sin \alpha \cos \alpha) \} \\
M &\approx -\pi \rho c^2 U^2 (\sin \alpha \cos \alpha)
\end{aligned} \tag{3-70}$$

ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า ถ้า $\alpha = 0$ และ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ โมเมนต์เท่ากับ 0

3.3.4.2 การหาแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับ Model C กรณีที่ 2

3.3.4.2.1 การหาแรงที่กระทำกับ Model C

จากสมการที่ (3-40) เปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูปของ

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i\rho \left\{ \int_0^\pi F_1^{/2}(e^{i\theta}) \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} G_1(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta + \int_\pi^{2\pi} F_2^{/2}(e^{i\theta}) \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} G_2(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta \right\}$$

แทน θ ด้วย $2\pi - \theta$ ในอินทิกรัลที่ 2 จะได้

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} i\rho \left\{ \int_0^\pi F_1^{/2}(e^{i\theta}) \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} G_1(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta + \int_0^\pi F_2^{/2}(e^{-i\theta}) \frac{2e^{-2i\theta}}{e^{-2i\theta} - 1} G_2(e^{-i\theta}) ie^{-i\theta} d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2} i\rho \int_0^\pi \left\{ F_1^{/2}(e^{i\theta}) \frac{e^{2i\theta}}{\sin \theta} G_1(e^{i\theta}) - F_2^{/2}(e^{-i\theta}) \frac{e^{-2i\theta}}{\sin \theta} G_2(e^{-i\theta}) \right\} d\theta \end{aligned}$$

จากสมการที่ (3-49) และ (3-50) ดังนั้น $F_1^{/2}(e^{i\theta}) \frac{e^{2i\theta}}{\sin \theta} G_1(e^{i\theta}) - F_2^{/2}(e^{-i\theta}) \frac{e^{-2i\theta}}{\sin \theta} G_2(e^{-i\theta})$ จะได้

$$\begin{aligned} &F_1^{/2}(e^{i\theta}) \frac{e^{2i\theta}}{\sin \theta} \left\{ \frac{ni}{c} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{\frac{i\pi}{2n}} (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \right\} - F_2^{/2}(e^{-i\theta}) \frac{e^{-2i\theta}}{\sin \theta} \left\{ -\frac{ni}{c} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{\frac{i\pi}{2n}} (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \right\} \\ &= \left\{ F_1^{/2}(e^{i\theta}) e^{2i\theta} e^{-\frac{i\pi}{2n}} + F_2^{/2}(e^{-i\theta}) e^{-2i\theta} e^{\frac{i\pi}{2n}} \right\} \left\{ \frac{ni}{c \sin \theta} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \right\} \\ &= -\frac{c^2 U^2 \cos \sec^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n^2 2^{\frac{2}{n}}} \left[e^{i\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2\theta}{n} - 2\alpha\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n} - \frac{2\theta}{n} - 2\alpha\right)} + 2e^{i\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)} \right. \\ &\quad \left. + e^{i\left(-\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} - \frac{2\theta}{n} - 2\alpha\right)} + e^{i\left(-\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} - \frac{2\pi}{n} + \frac{2\theta}{n} + 2\alpha\right)} + 2e^{i\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{2\pi}{n}\right)} \right] \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{ni}{c \sin \theta} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \right\} \\ &= -\frac{c^2 U^2 \cos \sec^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n^2 2^{\frac{2}{n}}} \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\theta}{n} - 2\alpha\right)} + e^{i\left(\frac{5\pi}{2n} - \frac{2\theta}{n} + 2\alpha\right)} + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2n}\right)} \right. \\ &\quad \left. + e^{i\left(-\frac{\pi}{2n} - \frac{2\theta}{n} - 2\alpha\right)} + e^{i\left(-\frac{5\pi}{2n} + \frac{2\theta}{n} + 2\alpha\right)} + 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{2n}\right)} \right] \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{ni}{c \sin \theta} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \right\} \\ &= -\frac{2ciU^2 \cos \sec\left(\frac{\pi}{2n}\right) (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}}}{n 2^{\frac{2}{n}} \sin \theta} \left[e^{-2i\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\theta}{n}\right) + e^{2i\alpha} \cos\left(\frac{5\pi}{2n} - \frac{2\theta}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right) \right] \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$F_x - iF_y = -\frac{\rho c U^2 \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n 2^{\frac{2}{n}}} \int_0^\pi \left[\frac{\left[e^{-2i\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\theta}{n}\right) + e^{2i\alpha} \cos\left(\frac{5\pi}{2n} - \frac{2\theta}{n}\right) \right]}{\left[+2 \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right) \right] \cdot \frac{(\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\sin \theta}} \right] d\theta$$

$$\text{แรง} \quad F_x = \frac{\rho c U^2 \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n 2^{\frac{2}{n}}} f_x \quad (3-72)$$

$$\text{โดยที่} \quad f_x = \int_0^\pi \left(\cos(2\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\theta}{n}\right) + \cos(2\alpha) \cos\left(\frac{5\pi}{2n} - \frac{2\theta}{n}\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right) \right) \frac{\cos^{\frac{n-1}{n}} \theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$\text{แรง} \quad F_y = \frac{\rho c U^2 \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n 2^{\frac{2}{n}}} f_y \quad (3-73)$$

$$\text{โดยที่} \quad f_y = \int_0^\pi \left(\sin(2\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\theta}{n}\right) - \sin(2\alpha) \cos\left(\frac{5\pi}{2n} - \frac{2\theta}{n}\right) \right) \frac{\cos^{\frac{n-1}{n}} \theta}{\sin \theta} d\theta$$

เมื่อดำเนินการหาค่า F_x ในสมการที่ (3-71) และ F_y ในสมการที่ (3-72) โดยใช้โปรแกรม Matlab โดยกำหนดให้ $n = \frac{4}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ได้ $F_x \approx 5.5276 \rho c U^2$ และ $F_y \approx 1.0815 \rho c U^2$

ดังนั้นเราจะเห็นว่า F_x และ F_y ไม่เท่ากับศูนย์สำหรับบางค่าของ n และ α ซึ่งแตกต่างจากกรณีของ Model A และ B ซึ่งเท่ากับศูนย์ทุกค่าของ n และ α

3.3.4.2.2 การหาโมเมนต์ที่กระทำกับ Model C

$$\text{จาก } M = \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \int_{\tau} z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \right\}$$

$$\text{โดยที่} \quad \int_{\tau} z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz = P + Q$$

ซึ่ง P และ Q กำหนดในสมการที่ (3-45) และ (3-46) โดยแทน $G_1(Z), G_2(Z), H_1(Z)$ และ $H_2(Z)$ จากสมการที่ (3-49), (3-50), (3-51) และ (3-52) ลงในสมการที่ (3-45) จะได้

$$P = \int_0^\pi F_1'^2(e^{i\theta}) \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} (n \cos \theta) i e^{i\theta} d\theta$$

$$+ \int_\pi^{2\pi} F_2'^2(e^{i\theta}) \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} (n \cos \theta) i e^{i\theta} d\theta$$

แทน θ ด้วย $2\pi - \theta$ ในอินทิกรัลที่ 2 จะได้

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^\pi F_1'^2(e^{i\theta}) \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} (n \cos \theta) i e^{i\theta} d\theta \\
&+ \int_0^\pi F_2'^2(e^{-i\theta}) \frac{2e^{-2i\theta}}{e^{-2i\theta} - 1} (n \cos \theta) i e^{-i\theta} d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(F_1'^2(e^{i\theta}) e^{2i\theta} - F_2'^2(e^{-i\theta}) e^{-2i\theta} \right) \left\{ \frac{1}{\sin \theta} (n \cos \theta) \right\} d\theta \quad (3-73)
\end{aligned}$$

$$F_1'(e^{i\theta}) e^{i\theta} = -c \frac{\csc\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n 2^{1/n}} U_{ii}^{1/n} \left\{ e^{\frac{i\theta}{n}} e^{-i\alpha} + (-1)^{\frac{1}{n}} e^{-\frac{i\theta}{n}} e^{i\alpha} \right\}$$

$$F_1'^2(e^{i\theta}) e^{2i\theta} = -c^2 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n^2 2^{2/n}} U_{ii}^{2/n} \left\{ e^{\frac{2i\theta}{n}} e^{-2i\alpha} + (-1)^{\frac{2}{n}} e^{-\frac{2i\theta}{n}} e^{2i\alpha} + 2(-1)^{\frac{1}{n}} \right\}$$

$$F_2'(e^{-i\theta}) e^{-i\theta} = c \frac{\csc\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n 2^{1/n}} U_{ii}^{-1/n} \left\{ e^{-\frac{i\theta}{n}} e^{-i\alpha} + (-1)^{-\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} e^{i\alpha} \right\}$$

$$F_2'^2(e^{-i\theta}) e^{-2i\theta} = -c^2 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n^2 2^{2/n}} U_{ii}^{-2/n} \left\{ e^{-\frac{2i\theta}{n}} e^{-2i\alpha} + (-1)^{-\frac{2}{n}} e^{\frac{2i\theta}{n}} e^{2i\alpha} + 2(-1)^{-\frac{1}{n}} \right\}$$

ดังนั้น $F_1'^2(e^{i\theta}) e^{2i\theta} - F_2'^2(e^{-i\theta}) e^{-2i\theta}$

$$\begin{aligned}
&= -c^2 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n^2 2^{2/n}} U^2 \left[e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\theta}{n} - 2\alpha\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} - \frac{2\theta}{n} + 2\alpha\right)} + 2e^{\frac{2\pi}{n}} \right. \\
&\quad \left. - e^{i\left(-\frac{\pi}{n} - \frac{2\theta}{n} - 2\alpha\right)} - e^{i\left(-\frac{\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} + \frac{2\theta}{n} + 2\alpha\right)} - 2e^{-\frac{2\pi}{n}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -c^2 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n^2 2^{2/n}} U^2 \left[e^{-2\alpha i} \left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\theta}{n}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\theta}{n}\right)} \right\} + e^{2\alpha i} \left\{ e^{i\left(\frac{3\pi}{n} - \frac{2\theta}{n}\right)} - e^{-i\left(\frac{3\pi}{n} - \frac{2\theta}{n}\right)} \right\} \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(e^{\frac{2\pi}{n}} - e^{-\frac{2\pi}{n}} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -c^2 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n^2 2^{2/n}} U^2 \left[2ie^{-2\alpha i} \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\theta}{n}\right) + 2ie^{2\alpha i} \sin\left(\frac{3\pi}{n} - \frac{2\theta}{n}\right) \right. \\
&\quad \left. + 4i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right]
\end{aligned}$$

แทนผลที่ได้ทั้งหมดลงในสมการที่ (3-73) และให้ $P = P_1 + iP_2$ จะได้

$$P_1 = -\frac{4c^2 \csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)}{n 2^{\frac{2}{n}}} U^2 \sin(2\alpha) \int_0^\pi \sin\left\{\frac{2}{n}(\pi - 2\theta)\right\} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad (3-74)$$

ซึ่งเป็นส่วนจริงของ P

ในทำนองเดียวกัน จากสมการที่ (3-46) จะได้

$$\begin{aligned} Q &= ci \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[\int_0^\pi F_1'^2(e^{i\theta}) \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} G_1(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_\pi^{2\pi} F_2'^2(e^{i\theta}) \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} G_2(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta \right] \\ &= ci \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[\int_0^\pi F_1'^2(e^{i\theta}) \frac{2e^{2i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} G_1(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi F_2'^2(e^{-i\theta}) \frac{2e^{-2i\theta}}{e^{-2i\theta} - 1} G_2(e^{-i\theta}) ie^{-i\theta} d\theta \right] \end{aligned} \quad (3-75)$$

$$\text{แต่ } G_1(e^{i\theta}) = \frac{ni}{c} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{-\frac{i\pi}{2n}} (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} \text{ และ } G_2(e^{-i\theta}) = -\frac{ni}{c} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{\frac{i\pi}{2n}} (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} Q &= -n \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[\int_0^\pi F_1'^2(e^{i\theta}) \frac{2e^{3i\theta}}{e^{2i\theta} - 1} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{-\frac{i\pi}{2n}} (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} id\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi F_2'^2(e^{-i\theta}) \frac{2e^{-3i\theta}}{e^{-2i\theta} - 1} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{\frac{i\pi}{2n}} (\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}} id\theta \right] \\ &= -n \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left[\int_0^\pi \left\{ F_1'^2(e^{i\theta}) e^{i\left(2\theta - \frac{\pi}{2n}\right)} - F_2'^2(e^{-i\theta}) e^{-i\left(2\theta - \frac{\pi}{2n}\right)} \right\} \left\{ \frac{(\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\sin \theta} \right\} d\theta \right] \\ &= \left[-\frac{c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n^2 2^{\frac{2}{n}}} \right] \left[-n \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right] \left[\int_0^\pi \left\{ 2ie^{-2i\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\theta}{n}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2ie^{2i\alpha} \sin\left(\frac{5\pi}{2n} - \frac{2\theta}{n}\right) + 2i \sin\left(\frac{3\pi}{2n}\right) \right\} \left\{ \frac{(\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\sin \theta} \right\} d\theta \right] \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n 2^{\frac{2}{n}}}\right\} \left[\int_0^\pi \left\{ \begin{aligned} &2ie^{-2i\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\theta}{n}\right) \\ &+ 2ie^{2i\alpha} \sin\left(\frac{5\pi}{2n} - \frac{2\theta}{n}\right) \\ &+ 2i \sin\left(\frac{3\pi}{2n}\right) \end{aligned} \right\} \left\{ \frac{(\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\sin \theta} \right\} d\theta \right] \quad (3-76)$$

ถ้า $Q = Q_1 + iQ_2$ ดังนั้นจากสมการที่ (3-76) จะได้

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{2c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n 2^{\frac{2}{n}}} \sin(2\alpha) \left[\int_0^\pi \left\{ \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2\theta}{n}\right) \\ &-\sin\left(\frac{5\pi}{2n} - \frac{2\theta}{n}\right) \end{aligned} \right\} \left\{ \frac{(\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\sin \theta} \right\} d\theta \right] \\ &= \frac{4c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n 2^{\frac{2}{n}}} \sin(2\alpha) \left[\int_0^\pi \left\{ \cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{4\theta}{n} - \frac{2\pi}{n}\right) \right\} \frac{(\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\sin \theta} d\theta \right] \\ &= - \frac{4c^2 U^2 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n 2^{\frac{2}{n}}} \sin(2\alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) \left[\int_0^\pi \sin\left\{ \frac{2}{n}(\pi - 2\theta) \right\} \frac{\cos(\theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\sin(\theta)} d\theta \right] \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นส่วนจริงของ Q

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } M_c &= \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \int_{\tau} z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \rho (P_1 + Q_1) \\ &= \frac{2\rho c^2 \csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)}{n 2^{\frac{2}{n}}} U^2 \sin(2\alpha) \int_0^\pi \sin\left\{ \frac{2}{n}(\pi - 2\theta) \right\} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \\ &\quad + \frac{2\rho c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n 2^{\frac{2}{n}}} \sin(2\alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) \int_0^\pi \sin\left\{ \frac{2}{n}(\pi - 2\theta) \right\} \frac{(\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\sin \theta} d\theta \\ &= \frac{4\rho c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin \alpha \cos \alpha}{n 2^{\frac{2}{n}}} \left[\cos \frac{4\pi}{n} \int_0^\pi \sin\left\{ \frac{2}{n}(\pi - 2\theta) \right\} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{3\pi}{n} \int_0^\pi \sin\left\{ \frac{2}{n}(\pi - 2\theta) \right\} \frac{(\cos \theta)^{\frac{n-1}{n}}}{\sin \theta} d\theta \right] \quad (3-77) \end{aligned}$$

จากสมการที่ (3-77) ถ้าให้ $n = \frac{4}{3}$ จะได้โมเมนต์ที่กระทำกับ Model C เป็น

$$\begin{aligned}
 M_C &= \frac{3\rho c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{2^{3/2}} \sin \alpha \cos \alpha \left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) \int_0^\pi \sin\left\{\frac{3}{2}(\pi - 2\theta)\right\} \frac{(\cos \theta)^{\frac{1}{4}}}{\sin \theta} d\theta \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\pi \sin\left\{\frac{3}{2}(\pi - 2\theta)\right\} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \right] \\
 &= \frac{3\rho c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{2^{3/2}} \sin \alpha \cos \alpha \left\{ \int_0^\pi \sin\left\{\frac{3}{2}(2\theta - \pi)\right\} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{(\cos \theta)^{\frac{1}{4}}}{\sin \theta} \right] d\theta \right\} \\
 &= \frac{3\rho c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{2^{3/2}} \sin \alpha \cos \alpha \left[\int_0^\pi \frac{\cos 3\theta}{\sin \theta} \left[\cos \theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) (\cos \theta)^{\frac{1}{4}} \right] d\theta \right] \\
 &= \frac{3\rho c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{2^{3/2}} \sin \alpha \cos \alpha \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 3\theta}{\sin \theta} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) (\cos \theta)^{\frac{1}{4}} \right\} d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\pi/2}^\pi \frac{\cos 3\theta}{\sin \theta} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) (\cos \theta)^{\frac{1}{4}} \right\} d\theta \right] \\
 &= \frac{3\rho c^2 U^2 \csc^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{2^{3/2}} \sin \alpha \cos \alpha \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\cos 3\theta}{\sin \theta} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) (\cos \theta)^{\frac{1}{4}} \right\} d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2 - \varepsilon} \frac{\sin 3\theta}{\cos \theta} \left\{ \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) (\sin \theta)^{\frac{1}{4}} \right\} d\theta \right] \quad (3-78)
 \end{aligned}$$

เมื่อคำนวณหาค่าโมเมนต์ที่กระทำกับ Model C โดยใช้โปรแกรม Matlab ในกรณี

$n = \frac{4}{3}$ จะได้

$$M_C \approx -12.7062 \rho U^2 c^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

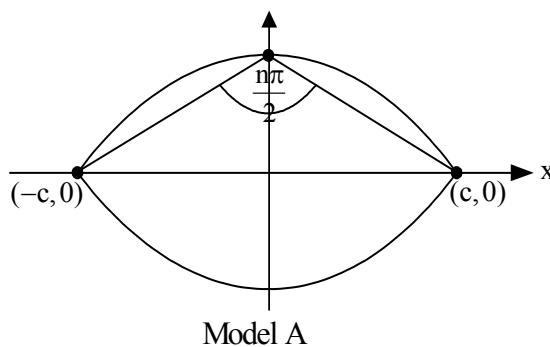
ซึ่งเป็นโมเมนต์ที่กระทำในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

หมายเหตุ ถ้า $\alpha = 0$ เราจะได้ $M_C = 0$ ซึ่งตรงกับความเป็นจริงเช่นเดียวกับ M_A และ M_B

3.4 การเปรียบเทียบแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับแท่งทรงกระบอกทั้งสามลักษณะ

1. Model A ที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นส่วนของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากันประกอบกัน
2. Model B ที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงรี
3. Model C ที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

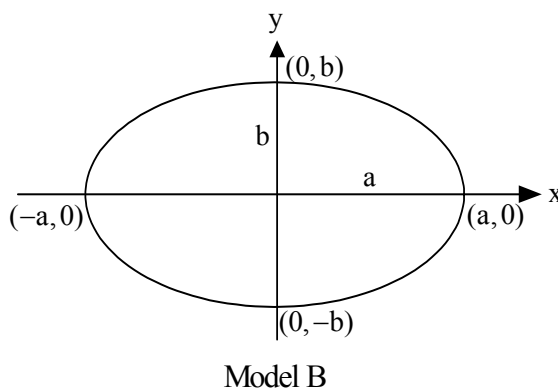
ผลการวิจัยเบื้องต้นก่อนการเปรียบเทียบเป็นดังนี้



$$F_x = 0 ; F_y = 0$$

$$M_A = \frac{4}{3} \rho U^2 c^2 \pi \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) \cos \alpha \sin \alpha$$

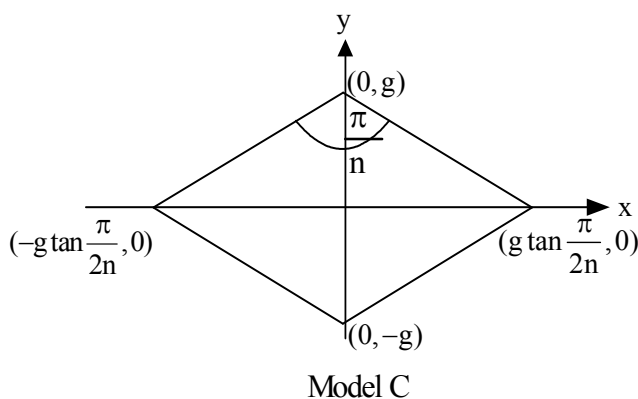
$$\text{โดยที่ } 1 < n < 2$$



$$F_x = 0 ; F_y = 0$$

$$M_B = \rho \pi c^2 \left(\cot^2 \frac{n\pi}{4} - 1 \right) U^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{โดยที่ } 1 < n < 2$$



$$F_x \approx 0 ; F_y = 0$$

$$M_C \approx -\pi p c^2 U^2 (\sin \alpha \cos \alpha)$$

$$\text{โดยที่ } n = 1 + \varepsilon \quad (0 < \varepsilon \ll 1)$$

$$\text{และ } F_x, F_y \text{ และ } M_C \text{ ตามสมการที่ (3-72), (3-73) และ (3-77)}$$

$$\text{โดยที่ } n = \frac{4}{3}$$

ภาพที่ 3-4 แสดงแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับแท่งทรงกระบอกทั้งสามลักษณะ

ในการแทน n ให้เหมือนกันนั้น เราจะใช้ค่าอ้างอิงของค่า n ใน M_C โดยเปลี่ยนค่า n ใน M_A และ M_B เป็น $\frac{2}{n}$

ดังนั้นเราจะได้ M_A และ M_B ในรูปใหม่ เป็น

$$M_A = \frac{4}{3} \rho U^2 c^2 \pi \left(\frac{n^2}{4} - 1 \right) \cos \alpha \sin \alpha \quad (3-79)$$

$$M_B = \rho U^2 c^2 \pi \left(\cot^2 \left\{ \frac{\pi}{2n} \right\} - 1 \right) \sin \alpha \cos \alpha \quad (3-80)$$

เมื่อกำหนดให้ $n = 1 + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) เราจะได้

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{4}{3} \rho U^2 c^2 \pi \left(\frac{n^2}{4} - 1 \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ &\approx \frac{4}{3} \rho U^2 c^2 \pi \left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - 1 \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \frac{4}{3} \rho U^2 c^2 \pi \left(\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{4} - 1 \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \frac{4}{3} \rho U^2 c^2 \pi \left(-\frac{3}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \cos \alpha \sin \alpha \\ &\approx -\rho U^2 c^2 \pi \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (3-81)$$

$$\begin{aligned} M_B &= \rho U^2 c^2 \pi \left(\cot^2 \left\{ \frac{\pi}{2n} \right\} - 1 \right) \sin \alpha \cos \alpha \\ &\approx \rho U^2 c^2 \pi \left(\frac{\pi^2 \varepsilon^2}{4} - 1 \right) \sin \alpha \cos \alpha \\ &\approx -\rho U^2 c^2 \pi \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (3-82)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า M_A , M_B และ M_C มีค่าใกล้เคียงกันมาก โดยทั้งสามค่าเป็นลบ แสดงว่าแท่งทรงกระบอก ทั้ง 3 ลักษณะได้รับผลกระทบเป็นโมเมนต์ตามเข็มนาฬิกา

เมื่อกำหนดให้ $n = \frac{4}{3}$ (มุมด้านข้างของ Model A,B และ C เท่ากับ $\frac{3\pi}{4}$ และความกว้างความยาวของหน้าตัดเท่ากัน)

$$\begin{aligned} M_A &= -2.3271 \rho U^2 c^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ M_B &= -2.6026 \rho U^2 c^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ M_C &\approx -12.7062 \rho U^2 c^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า M_A , M_B และ M_C ทั้งสามค่าเป็นลบ แสดงว่าแท่งทรงกระบอก ทั้ง 3 ลักษณะได้รับผลกระทบเป็นโมเมนต์ที่กระทำในทิศทางตามเข็มนาฬิกา และขนาดของ M_C มีค่ามากกว่าขนาดของ M_A และ M_B

3.5 การหาจุดหยุดนิ่ง และเส้นแบ่งทางเดินของของไหลของแท่งทรงกระบอก Model A

กระแสไหลปะทะแท่งทรงกระบอก Model A ด้วยความเร็วที่ U ทำมุม α กับทิศทาง
 ลบของแกนแกนจริงสำหรับศักย์เชิงซ้อนมีรูปแบบทั่วไปตามสมการที่ (2-75)

การหาเส้นแบ่งทางเดินของของไหล ในกรณีที่ $\alpha \neq 0$

จากสมการที่ (2-75) ศักย์เชิงซ้อนสำหรับ Model A เป็น

$$\Omega = \frac{2Uc}{n} \left\{ i \cos \alpha \cot\left(\frac{\zeta}{n}\right) + \sin \alpha \operatorname{cosec}\left(\frac{\zeta}{n}\right) \right\}$$

เนื่องจาก $\cos \frac{1}{n}(\xi + i\eta) = \cos\left(\frac{\xi}{n}\right) \cosh\left(\frac{\eta}{n}\right) - i \sin\left(\frac{\xi}{n}\right) \sinh\left(\frac{\eta}{n}\right)$

$$\sin \frac{1}{n}(\xi + i\eta) = \sin\left(\frac{\xi}{n}\right) \cosh\left(\frac{\eta}{n}\right) + i \cos\left(\frac{\xi}{n}\right) \sinh\left(\frac{\eta}{n}\right)$$

ดังนั้น

$$\Omega = \frac{2Uc}{n} \left(i \cos \alpha \frac{\cos \frac{\xi}{n} \cosh \frac{\eta}{n} - i \sin \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n}}{\sin \frac{\xi}{n} \cosh \frac{\eta}{n} + i \cos \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n}} + \sin \alpha \frac{1}{\sin \frac{\xi}{n} \cosh \frac{\eta}{n} + i \cos \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n}} \right)$$

$$= \frac{2Uc}{n} \left[i \cos \alpha \frac{\left\{ \cos \frac{\xi}{n} \cosh \frac{\eta}{n} - i \sin \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n} \right\} \cdot \left\{ \sin \frac{\xi}{n} \cosh \frac{\eta}{n} - i \cos \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n} \right\}}{\sin^2\left(\frac{\xi}{n}\right) \cosh^2\left(\frac{\eta}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi}{n}\right) \sinh^2\left(\frac{\eta}{n}\right)} + \sin \alpha \frac{\sin \frac{\xi}{n} \cosh \frac{\eta}{n} - i \cos \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n}}{\sin^2\left(\frac{\xi}{n}\right) \cosh^2\left(\frac{\eta}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi}{n}\right) \sinh^2\left(\frac{\eta}{n}\right)} \right]$$

$$= \frac{2Uc}{n} \left[i \cos \alpha \frac{\left\{ \frac{1}{2} \sin \frac{2\xi}{n} \right\} - i \left\{ \frac{1}{2} \sinh \frac{2\eta}{n} \right\}}{\sin^2\left(\frac{\xi}{n}\right) \cosh^2\left(\frac{\eta}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi}{n}\right) \sinh^2\left(\frac{\eta}{n}\right)} + \sin \alpha \frac{\sin \frac{\xi}{n} \cosh \frac{\eta}{n} - i \cos \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n}}{\sin^2\left(\frac{\xi}{n}\right) \cosh^2\left(\frac{\eta}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{\xi}{n}\right) \sinh^2\left(\frac{\eta}{n}\right)} \right]$$

$$= \frac{2Uc}{n} \left[\frac{\left(\frac{1}{2} \cos \alpha \sin \frac{2\xi}{n} \right) i + \left(\frac{1}{2} \cos \alpha \sinh \frac{2\eta}{n} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\xi}{n} \right) \cosh^2 \left(\frac{\eta}{n} \right) + \cos^2 \left(\frac{\xi}{n} \right) \sinh^2 \left(\frac{\eta}{n} \right)} + \sin \alpha \frac{\sin \frac{\xi}{n} \cosh \frac{\eta}{n} - i \cos \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n}}{\sin^2 \left(\frac{\xi}{n} \right) \cosh^2 \left(\frac{\eta}{n} \right) + \cos^2 \left(\frac{\xi}{n} \right) \sinh^2 \left(\frac{\eta}{n} \right)} \right]$$

ดังนั้นฟังก์ชันการไหลจะอยู่ในรูปของสมการ

$$\psi = \frac{2Uc}{n} \left(\frac{\frac{1}{2} \cos \alpha \sin \frac{2\xi}{n} - \sin \alpha \cos \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n}}{\sin^2 \left(\frac{\xi}{n} \right) \cosh^2 \left(\frac{\eta}{n} \right) + \cos^2 \left(\frac{\xi}{n} \right) \sinh^2 \left(\frac{\eta}{n} \right)} \right) \quad (3-83)$$

เส้นแบ่งทางเดินของของไหล $\psi = 0$ เกิดขึ้นเมื่อ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \frac{2\xi}{n} &= \sin \alpha \cos \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n} \\ \cos \alpha \sin \frac{\xi}{n} \cos \frac{\xi}{n} &= \sin \alpha \cos \frac{\xi}{n} \sinh \frac{\eta}{n} \\ \text{ดังนั้น} \quad \cos \frac{\xi}{n} &= 0 \quad \text{หรือ} \quad \cos \alpha \sin \frac{\xi}{n} = \sin \alpha \sinh \frac{\eta}{n} \end{aligned} \quad (3-84)$$

$$\text{ในกรณี} \quad \cos \left(\frac{\xi}{n} \right) = 0 \rightarrow \xi = \pm \frac{n\pi}{2} \quad (3-85)$$

โดยที่ $1 < n < 2$

ดังนั้นพื้นผิวของแท่งทรงกระบอกทั้งหมดเป็นเส้นแบ่งทางเดินของของไหล

$$\begin{aligned} \text{ในกรณีที่} \quad \cos \alpha \sin \frac{\xi}{n} &= \sin \alpha \sinh \frac{\eta}{n} \\ \eta &= n \sinh^{-1} \left(\cot \alpha \sin \frac{\xi}{n} \right) \end{aligned} \quad (3-86)$$

จะได้ว่าเส้นแบ่งทางเดินของของไหลที่อยู่ภายนอกผิวแท่งทรงกระบอก ซึ่งจากสมบัติของเส้นแบ่งทางเดินของของไหลจะวิ่งเข้าหาจุดหยุดนิ่งบนพื้นผิวแท่งทรงกระบอก

ดังนั้นจากสมการที่ (2-70) และ (2-71) โดยที่จุดหยุดนิ่งอยู่ที่จุด

$$x = c \left(\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \right), \quad y = c \left(\frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \right) \quad (3-87)$$

ในกรณีศึกษากำหนดให้ $\xi = \frac{3\pi}{4}$, $n = \frac{3}{2}$ และ $c = \sqrt{2}$ โดยที่ $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$

กรณีที่ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ จากสมการที่ (3-86) จะได้

$$\eta = \frac{3}{2} \sinh^{-1} \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{3\pi/4}{3/2} \right) \right\}$$

$$= 1.9754$$

แทนค่าที่ได้ในสมการที่ (3-87) จุดหยุดนิ่งคือ

$$x = 1.1412 \text{ และ } y = 0.2282$$

กำหนดให้ $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\xi = -\frac{3\pi}{4}$, $n = \frac{3}{2}$ และ $c = \sqrt{2}$

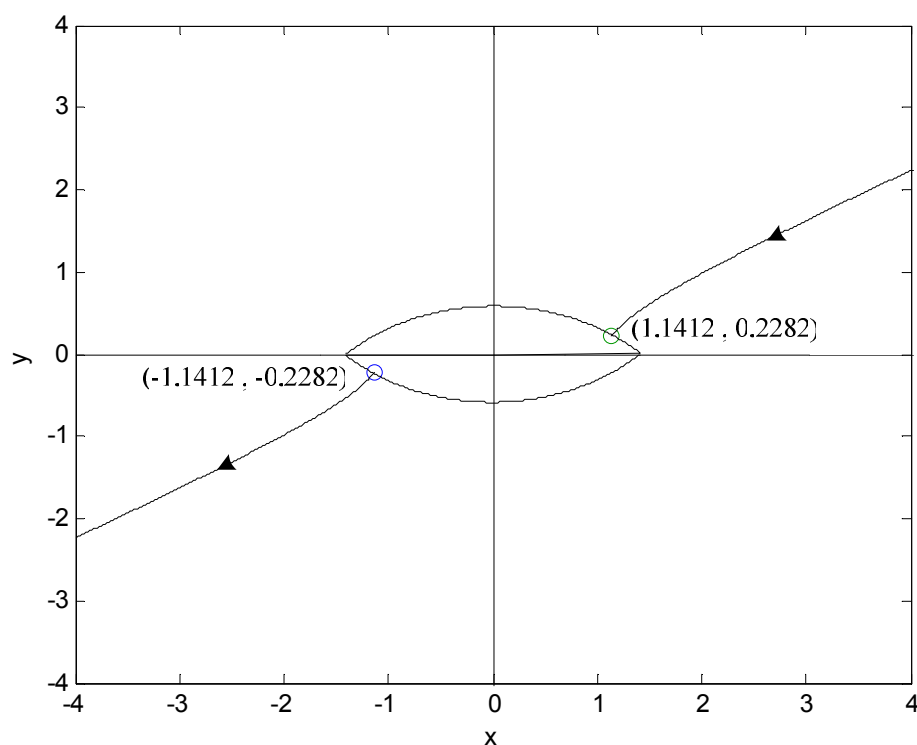
แทนลงในสมการที่ (3-86) จะได้

$$\eta = \frac{3}{2} \sinh^{-1} \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{6} \right) \sin \left(-\frac{3\pi/4}{3/2} \right) \right\}$$

$$= -1.9754$$

แทนค่าที่ได้ในสมการที่ (3-87) จุดหยุดนิ่งคือ

$$x = -1.1412 \text{ และ } y = -0.2282$$



ภาพที่ 3-5 แสดงจุดหยุดนิ่งและเส้นแบ่งทางเดินของของไหลในกรณีที่

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \quad n = \frac{3}{2} \text{ และ } c = \sqrt{2}$$

กรณีที่ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ดังนั้นจากสมการที่ (3-86) จะได้

$$\eta = \frac{3}{2} \sinh^{-1} \left\{ \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi/4}{3/2}\right) \right\}$$

$$= 1.3221$$

แทนค่าที่ได้ในสมการที่ (3-87) จุดหยุดนิ่งคือ

$$x = 0.9072 \text{ และ } y = 0.3682$$

กำหนดให้ $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\xi = -\frac{3\pi}{4}$, $n = \frac{3}{2}$ และ $c = \sqrt{2}$

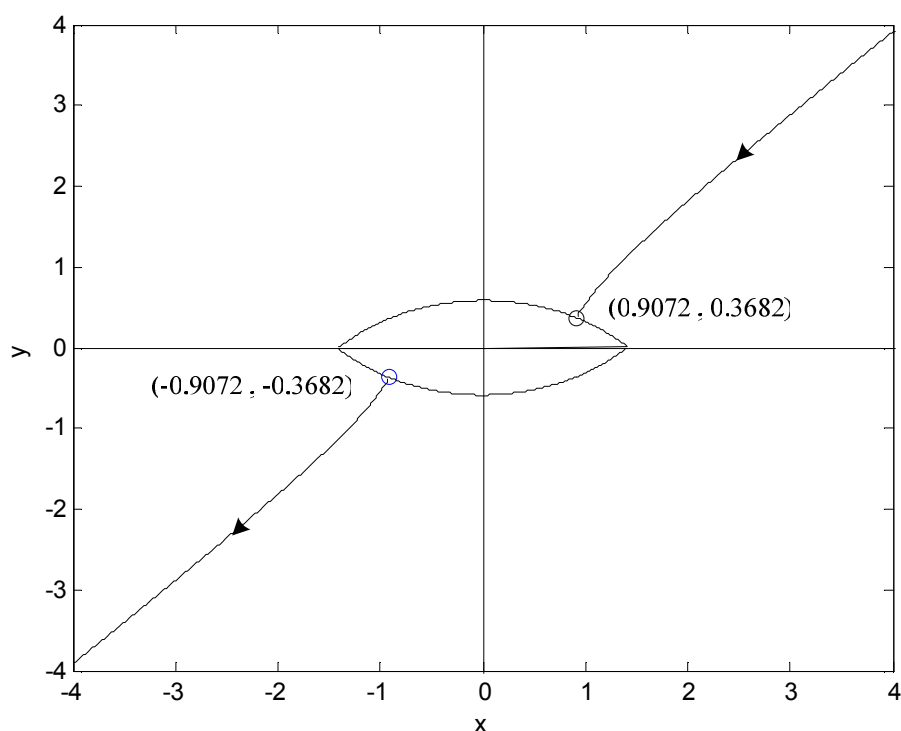
แทนลงในสมการที่ (3-86) จะได้

$$\eta = \frac{3}{2} \sinh^{-1} \left\{ \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{3\pi/4}{3/2}\right) \right\}$$

$$= -1.3221$$

แทนค่าที่ได้ในสมการที่ (3-87) จุดหยุดนิ่งคือ

$$x = -0.9072 \text{ และ } y = -0.3682$$



ภาพที่ 3-6 แสดงจุดหยุดนิ่งและเส้นแบ่งทางเดินของของไหลในกรณีที่

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad n = \frac{3}{2} \text{ และ } c = \sqrt{2}$$

กรณีที่ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ จากสมการที่ (3-86) จะได้

$$\eta = \frac{3}{2} \sinh^{-1} \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{3\pi/4}{3/2} \right) \right\}$$

$$= 0.8240$$

แทนค่าที่ได้ในสมการที่ (3-87) จุดหยุดนิ่งคือ

$$x = 0.6300 \text{ และ } y = 0.4840$$

กำหนดให้ $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\xi = -\frac{3\pi}{4}$, $n = \frac{3}{2}$ และ $c = \sqrt{2}$

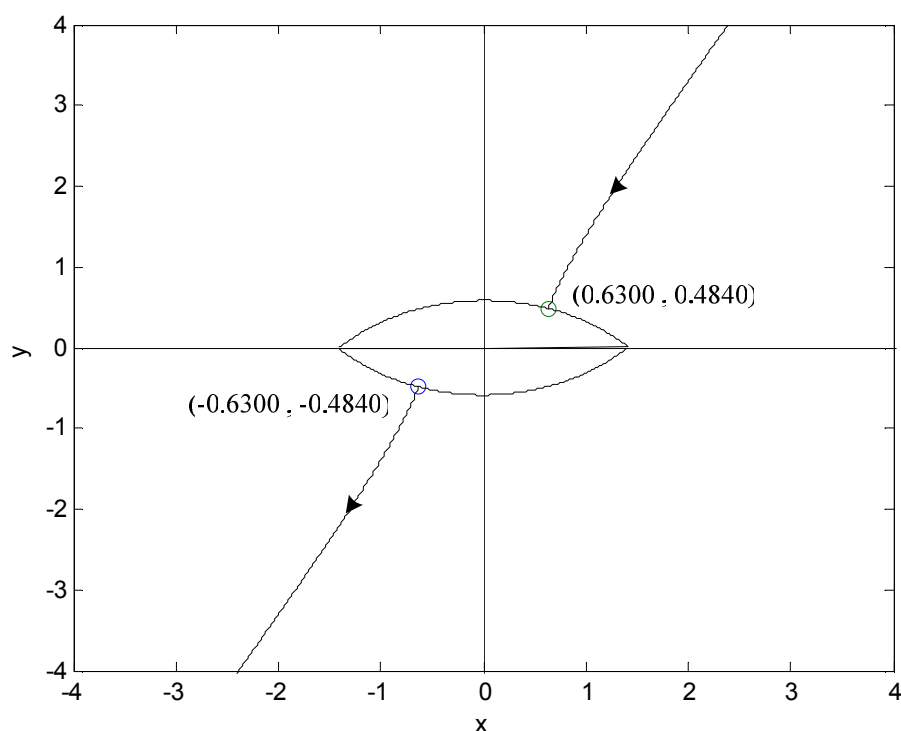
แทนลงในสมการที่ (3-86) จะได้

$$\eta = \frac{3}{2} \sinh^{-1} \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(-\frac{3\pi/4}{3/2} \right) \right\}$$

$$= -0.8240$$

แทนค่าที่ได้ในสมการที่ (3-87) จุดหยุดนิ่งคือ

$$x = -0.6300 \text{ และ } y = -0.4840$$



ภาพที่ 3-7 แสดงจุดหยุดนิ่งและเส้นแบ่งทางเดินของของไหลในกรณีที่

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad n = \frac{3}{2} \text{ และ } c = \sqrt{2}$$

บทที่ 4

การปะทะของกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอบนแท่งทรงกระบอก ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และปราศจากการหมุน

จากผลการคำนวณในบทที่ 3 พบว่าแรง (hydrodynamic force) ที่กระทำต่อแท่งทรงกระบอกที่อยู่หนึ่งของ Model A และ Model B มีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุกค่าของ n และ α ในขณะที่แรงที่กระทำต่อแท่งทรงกระบอกที่อยู่หนึ่งใน Model C ไม่เป็นศูนย์สำหรับบางค่าของ n และ α ในส่วนโมเมนต์ที่กระทำกับแท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะ ที่มีความกว้างและความยาวของหน้าตัดเท่ากัน (ขนาดพื้นที่หน้าตัดใกล้เคียงกัน) โดยกำหนดให้ $n = \frac{4}{3}$ ผลการวิจัยปรากฏว่าโมเมนต์ที่กระทำกับแท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะดังกล่าว มีทิศทางตามเข็มนาฬิกาเช่นเดียวกัน แต่โมเมนต์ที่กระทำกับ Model C จะมีขนาดมากกว่า Model A และ Model B ถึงประมาณ 5 เท่า ดังนั้นด้วยข้อจำกัดดังกล่าว การวิจัยในบทที่ 4 จึงใช้ผลการเปรียบเทียบเฉพาะแท่งทรงกระบอก 2 ลักษณะเท่านั้น คือ Model A และ Model B โดยแท่งทรงกระบอกทั้ง 2 เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ $W_0 = U_0 + iV_0$ และปราศจากการหมุน

4.1 การหาแรงและโมเมนต์ของแท่งทรงกระบอกที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และปราศจากการหมุน

จากสมการที่ (2-44) และ (2-45) ในกรณีที่แท่งทรงกระบอกปลายล่างปิดเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และปราศจากการหมุน แรงและโมเมนต์ที่กระทำกับแท่งทรงกระบอกจะอยู่ในรูปของสมการ

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \quad (4-1)$$

$$M = \text{ส่วนจริงของ} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz - \rho \bar{W}_0 \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz \right\} \quad (4-2)$$

ดังนั้นแรงที่กระทำในกรณีดังกล่าวเท่ากับกรณีที่แท่งทรงกระบอกอยู่นิ่ง และปราศจากการหมุนซึ่งเท่ากับศูนย์

ส่วนโมเมนต์ที่เกิดขึ้นคือโมเมนต์ในกรณีที่แท่งทรงกระบอกอยู่นิ่งรวมกับส่วนจริงของ

$$\left\{ -\rho \bar{W}_0 \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz \right\}$$

4.1.1 โมเมนต์ที่กระทำกับ Model A

พิจารณาพจน์ $\left\{ -\rho \bar{W}_0 \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz \right\}$ จากหัวข้อ 3.2.1 โดยใช้ทฤษฎีบทส่วนตกค้าง

จะได้
$$\begin{aligned} \left\{ -\rho \bar{W}_0 \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz \right\} &= -\rho(U_0 - iV_0)(2\pi i)Uc^2(iG - H) \\ &= 2\rho\pi Uc^2(V_0 + iU_0)(H - iG) \\ &= 2\rho\pi Uc^2\{(HV_0 + GU_0) + i(HU_0 - GV_0)\} \end{aligned}$$

ดังนั้นส่วนจริงของ $\left\{ -\rho \bar{W}_0 \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz \right\}$ คือ $2\rho Uc^2\pi(HV_0 + GU_0)$ จะเท่ากับ

$$2\rho Uc^2\pi \left\{ V_0 \left(\frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3} \right) \cos \alpha - U_0 \left(\frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3} \right) \sin \alpha \right\} \quad (4-3)$$

ดังนั้นจากสมการที่ (3-5) และ (4-3) โมเมนต์ที่กระทำกับ Model A ที่เคลื่อนที่โดยปราศจากการหมุนคือ

$$\frac{4}{3}\rho U^2 c^2 \pi \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) \cos \alpha \sin \alpha + 2\rho Uc^2 \pi \left\{ V_0 \left(\frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3} \right) \cos \alpha - U_0 \left(\frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3} \right) \sin \alpha \right\}$$

ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{aligned} 2\rho Uc^2 \pi \left[\frac{2}{3} U \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) \cos \alpha \sin \alpha \right. \\ \left. + V_0 \left(\frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3} \right) \cos \alpha - U_0 \left(\frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3} \right) \sin \alpha \right] \end{aligned} \quad (4-4)$$

โดยที่ $G = -\left(\frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3} \right) \sin \alpha$

$$H = \left(\frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3} \right) \cos \alpha$$

$$W_0 = U_0 + iV_0$$

= ความเร็วคงที่ของแท่งทรงกระบอกที่เคลื่อนที่

U = ความเร็วสม่ำเสมอของกระแส

α = มุมที่กระแสไหลปะทะแท่งทรงกระบอกในทิศทางลบกับแกนจริง (ox)

ρ = ความหนาแน่นของน้ำ

4.1.2 โมเมนต์ที่กระทำกับ Model B

พิจารณาพจน์ $\left\{ -\rho \bar{W}_0 \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz \right\}$ จากหัวข้อ 3.2.2 โดยใช้ทฤษฎีบทส่วนตกค้าง

จะได้
$$\left\{ -\rho \bar{W}_0 \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz \right\} = -\rho(U_0 - iV_0)(2\pi i) \left(-\frac{Ac^2 \sinh(\zeta_0)}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \rho\pi(V_0 + iU_0)c^2 A \sinh(\xi_0) \\
&= \frac{1}{2}\rho\pi(V_0 + iU_0)c^2 U e^{\xi_0} (e^{\xi_0} - e^{-\xi_0}) \\
&= \frac{1}{2}\rho\pi(V_0 + iU_0)c^2 U e^{\xi_0} (e^{\xi_0 + i\alpha} - e^{-\xi_0 - i\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}\rho\pi(V_0 + iU_0)c^2 U e^{\xi_0} \{e^{\xi_0} (\cos \alpha + i \sin \alpha) - e^{-\xi_0} (\cos \alpha - i \sin \alpha)\} \\
&= \frac{1}{2}\rho\pi U c^2 (V_0 + iU_0) \{\cos \alpha (e^{2\xi_0} - 1) + i \sin \alpha (e^{2\xi_0} + 1)\} \\
&= \frac{1}{2}\rho\pi U c^2 (V_0 + iU_0) \{\cos \alpha (e^{2\xi_0} - 1) + i \sin \alpha (e^{2\xi_0} + 1)\} \\
&= \frac{1}{2}\rho\pi U c^2 \left[\{V_0 \cos \alpha (e^{2\xi_0} - 1) - U_0 \sin \alpha (e^{2\xi_0} + 1)\} \right. \\
&\quad \left. + i \{U_0 \cos \alpha (e^{2\xi_0} - 1) + V_0 \sin \alpha (e^{2\xi_0} + 1)\} \right]
\end{aligned}$$

ดังนั้นส่วนจริงของ $\left\{ -\rho \bar{W}_0 \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dz \right\}$ คือ

$$\frac{1}{2}\rho\pi U c^2 \{V_0 \cos \alpha (e^{2\xi_0} - 1) - U_0 \sin \alpha (e^{2\xi_0} + 1)\} \quad (4-5)$$

เนื่องจาก $e^{2\xi_0} = \frac{a+b}{a-b}$

ดังนั้นสมการที่ (4-5) จะอยู่ในรูป

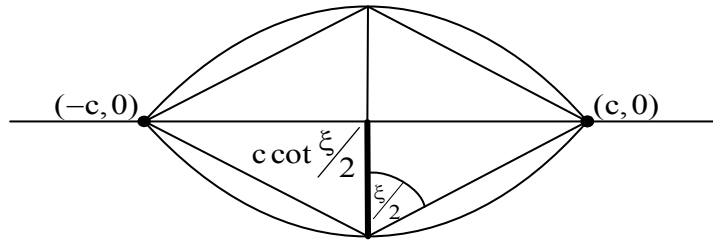
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho\pi U (a^2 - b^2) \left\{ V_0 \cos \alpha \left(\frac{a+b}{a-b} - 1 \right) - U_0 \sin \alpha \left(\frac{a+b}{a-b} + 1 \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2}\rho\pi U (a^2 - b^2) \left\{ V_0 \cos \alpha \left(\frac{2b}{a-b} \right) - U_0 \sin \alpha \left(\frac{2a}{a-b} \right) \right\} \\
&= \rho\pi U (a+b) (bV_0 \cos \alpha - aU_0 \sin \alpha) \quad (4-6)
\end{aligned}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (3-11) และ (4-6) โมเมนต์ที่กระทำกับ Model B ที่เคลื่อนที่โดยปราศจากการหมุนคือ

$$\begin{aligned}
&\rho\pi U^2 (b^2 - a^2) \sin \alpha \cos \alpha + \rho\pi U (a+b) \{bV_0 \cos(\alpha) - aU_0 \sin(\alpha)\} \\
&= \rho\pi U (a+b) \{(b-a)U \sin \alpha \cos \alpha + bV_0 \cos \alpha - aU_0 \sin \alpha\} \\
&= \rho\pi U (a+b) \{bU \sin \alpha \cos \alpha - aU \sin \alpha \cos \alpha + bV_0 \cos \alpha - aU_0 \sin \alpha\} \\
&= \rho\pi U (a+b) \{b \cos \alpha (U \sin \alpha + V_0) - a \sin \alpha (U \cos \alpha + U_0)\} \quad (4-7)
\end{aligned}$$

4.2 การเปรียบเทียบโมเมนต์ของแท่งทรงกระบอกที่มีความกว้างและความยาวของหน้าตัดเท่ากัน

การเปรียบเทียบโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A และ Model B ที่มีขนาดความกว้างและความยาวของหน้าตัดเท่ากัน (มีขนาดใกล้เคียงกัน) โดย Model A ตามรูปกำหนดให้ มุมคือ $\frac{\xi}{2}$ โดยที่ $\xi = \frac{n\pi}{2}$ สำหรับ $1 < n < 2$



ภาพที่ 4-1 แสดงความกว้างและความยาวของหน้าตัด Model A

จากรูปที่ 4-1 ความยาวของ Model A เป็น $2c$ และความกว้างเป็น $2c \cot\left(\frac{\xi}{2}\right)$ ดังนั้นสำหรับแท่งทรงกระบอก Model B จะได้ $a = c$, $b = c \cot\left(\frac{\xi}{2}\right)$ ซึ่งจะทำให้ Model A และ Model B มีความยาวและความกว้างเท่ากัน

กำหนดให้ โมเมนต์ที่กระทำกับ Model A เป็น M_A และโมเมนต์ที่กระทำกับ Model B เป็น M_B จากสมการที่ (4-7) โมเมนต์กรณีเคลื่อนที่คือ

$$\begin{aligned}
 M_B &= \rho\pi U(a+b)\{b \cos \alpha (U \sin \alpha + V_0) - a \sin \alpha (U \cos \alpha + U_0)\} \\
 &= \rho\pi U \left\{ c + c \cot\left(\frac{\xi}{2}\right) \right\} \left[c \cot\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos \alpha (U \sin \alpha + V_0) \right. \\
 &\quad \left. - c \sin \alpha (U \cos \alpha + U_0) \right] \\
 &= \rho\pi U c^2 \left\{ 1 + \cot\left(\frac{\xi}{2}\right) \right\} \left[\cot\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos \alpha (U \sin \alpha + V_0) \right. \\
 &\quad \left. - \sin \alpha (U \cos \alpha + U_0) \right] \\
 &= \rho\pi U c^2 \left\{ 1 + \cot\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\} \left[\cot\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos \alpha (U \sin \alpha + V_0) \right. \\
 &\quad \left. - \sin \alpha (U \cos \alpha + U_0) \right] \\
 &= \rho\pi U c^2 \left\{ 1 + \cot\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\} \left[U \cot\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos \alpha \sin \alpha + V_0 \cot\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos \alpha \right. \\
 &\quad \left. - U \cos \alpha \sin \alpha - U_0 \sin \alpha \right]
 \end{aligned}$$

$$= \rho\pi U c^2 \left\{ 1 + \cot\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\} \left[U \cos \alpha \sin \alpha \left\{ \cot\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 1 \right\} + \left\{ V_0 \cot\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos \alpha - U_0 \sin \alpha \right\} \right] \quad (4-8)$$

หมายเหตุ ในกรณีที่แท่งทรงกระบอกทั้ง 2 เคลื่อนที่ทวนหรือตามกระแสน้ำที่ท่าม $\alpha = 0$ ซึ่ง $W_0 = U_0$ โมเมนต์จะเท่ากับศูนย์

เราคำนวณหาโมเมนต์ เปรียบเทียบกันระหว่างแท่งทรงกระบอกทั้งสองลักษณะในกรณี

$$U_0 = U, V_0 = 0, \alpha = \frac{\pi}{4}, n = \frac{3}{2}$$

จากสมการที่ (4-4) โมเมนต์ที่กระทำกับ Model A จะได้

$$\begin{aligned} M_A &= -2\rho\pi U c^2 \left[\frac{10}{27} U \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{27} \left\{ 17U \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} \right] \\ &= -2\rho\pi U c^2 \left[\frac{5}{27} U + \frac{17}{27\sqrt{2}} U \right] \\ &= -1.2608\rho\pi U^2 c^2 \end{aligned} \quad (4-9)$$

จากสมการที่ (4-8) โมเมนต์ที่กระทำกับ Model B จะได้

$$\begin{aligned} M_B &= \rho\pi U c^2 \left(1 + \cot\frac{3\pi}{8} \right) \left[U \left\{ \cot\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1 \right\} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left\{ U \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} \right] \\ &= \rho\pi U^2 c^2 \left(1 + \cot\frac{3\pi}{8} \right) \left[\left\{ \cot\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1 \right\} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} \right] \\ &= -1.4142\rho\pi U^2 c^2 \end{aligned} \quad (4-10)$$

เราจะเห็นได้ว่าโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A มีขนาดน้อยกว่า Model B ในอัตราส่วนประมาณ 0.8915 : 1

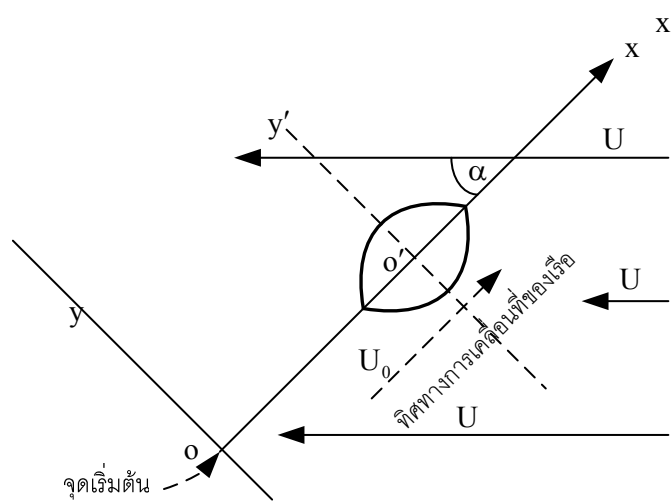
4.3 การวิเคราะห์ผลการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของเรือ ในกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ

ถ้าเรานำผลลัพธ์ข้างต้นมาประยุกต์กับเรือที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปทรงกระบอก ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกว่าเรือทรงกระบอกที่วิ่งด้วยความเร็วคงที่ W_0 เราต้องการทราบว่า

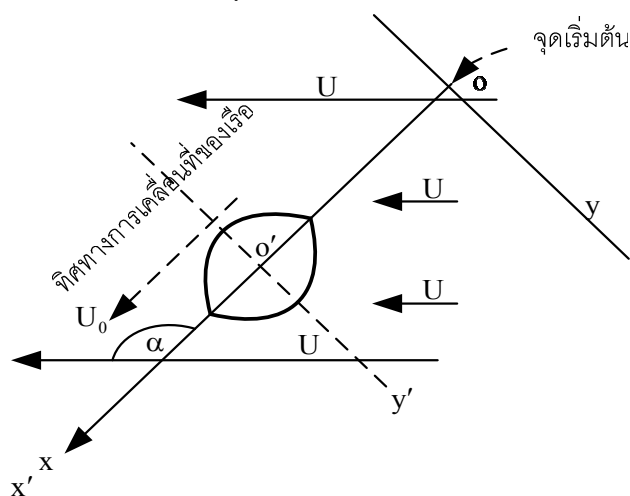
1 เรือทรงกระบอกมีเส้นทางการเคลื่อนที่อย่างไรจึงจะทำให้โมเมนต์เป็นศูนย์ เส้นทางการเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ (Line of zero moment)

2 ในขณะที่เรือทรงกระบอกเคลื่อนที่ไปตาม เส้นทางการเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ นั้น การเคลื่อนที่จะเสถียร (Stable) หรือไม่

ก่อนอื่นเราควรมีความเข้าใจเกี่ยวกับการใช้ระบบแกนตั้งฉาก $o'x'y'$ หรือ F' ในการศึกษาปัญหาของการเคลื่อนที่ของเรือ Model A และ Model B ในกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ถ้าเรากำหนดให้เรือเคลื่อนที่ในทิศทางตรงโดยปราศจากการหมุน ($w = 0$) เราให้จุดกำเนิด o ของระบบแกนตั้งฉาก oxy อยู่บนจุดเริ่มต้นของการเคลื่อนที่ของเรือ และให้ ox อยู่ในแนวของการเคลื่อนที่ของเรือซึ่งจะเป็นเส้นตรงที่ไม่เปลี่ยนแปลงทิศทางเพราะไม่มีการหมุน ในลักษณะเช่นนี้จุดกำเนิด o' ของระบบแกน $o'x'y'$ ซึ่งผูกติดกับเรือจะเคลื่อนที่ไปกับเรือในทิศทางของ ox เช่นกันนั่นคือจุด o' เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ U_0 และไม่มีความเร็วย่อยในทิศทาง oy หรือ $o'y'$ นั่นคือ $V_0 = 0$ ค่าของมุม α ที่กระแสน้ำทำกับแกน $o'x'$ ในลักษณะต่างๆ ดังภาพข้างล่างนี้



ภาพที่ 4-2 แสดงการเคลื่อนที่ของเรือที่แล่นด้วยความเร็วคงที่ U_0 ทวนกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ทำมุม α กับทิศทางลบของแกน ox



ภาพที่ 4-3 แสดงการเคลื่อนที่ของเรือที่แล่นด้วยความเร็วคงที่ U_0 ตามกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ทำมุม α กับทิศทางลบของแกน ox

หมายเหตุ คำว่า เสถียร ในที่นี้หมายความว่า ในขณะที่เรือทรงกระบอกเคลื่อนที่ในทิศทางของเส้นทางการเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ ถ้าหากมีการเบี่ยงเบนของเรือจากแนวการเคลื่อนที่ซึ่งมุมที่เบี่ยงเบนเป็น ε และการเคลื่อนที่ในเวลาต่อไปมุมที่เบี่ยงเบนจะไม่เกินค่ามุมจำกัดที่เรียกว่าแอมพลิจูด (ε_{am}) นั่นคือ $\varepsilon \leq \varepsilon_{am}$ ที่ได้จากการสมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดี่ยว (Simple harmonic motion) ในรูป $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -w^2\varepsilon$ ซึ่งได้ผลเฉลยอยู่ในรูป $\varepsilon = \varepsilon_{am} \sin wt$ ($\varepsilon = 0$ เมื่อ $t = 0$) โดยที่คาบของการสั่นสะท้อนเท่ากับ $\frac{2\pi}{w}$ ส่วนการเคลื่อนที่ที่ไม่เสถียร มีความหมายตรงข้ามกันนั่นคือ มุมที่เบี่ยงเบนในการเคลื่อนที่ในเวลาต่อไป จะไม่มีค่ามุมที่จำกัด เพราะ ε สอดคล้องกับสมการ $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = w^2\varepsilon$ ซึ่งมีผลเฉลยอยู่ในรูป $\varepsilon = \varepsilon_1 e^{wt} + \varepsilon_2 e^{-wt}$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ เป็นค่าคงที่) ซึ่งผลที่ได้คือ เมื่อ $t \rightarrow \infty$ แล้ว $\varepsilon \rightarrow \infty$ ด้วย

4.3.1 การเคลื่อนที่ของเรือ Model A

จากสมการที่ (4-4) ในกรณีที่ $n = \frac{3}{2}$ และเรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ U_0 (เรือเคลื่อนที่ตามทิศทางของความยาวของเรือ, $V_0 = 0$) จะได้

$$M_A = -2\rho\pi U c^2 \left(\frac{10}{27} U \sin \alpha \cos \alpha + \frac{17}{27} U_0 \sin \alpha \right) \quad (4-11)$$

จากสมการที่ (4-11) โมเมนต์ $M_A = 0$ เมื่อ

$$\frac{10}{27} U \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{17}{27} U_0 \sin \alpha$$

นั่นคือเมื่อ $\sin \alpha = 0$ หรือ $\cos \alpha = -1.7 \frac{U_0}{U}$

ซึ่งจะได้ $\alpha = 0, \pi$ หรือ $\alpha = \arccos \left(-1.7 \frac{U_0}{U} \right)$

ให้ $\alpha_0 = 0$ หรือ π

และ $\alpha_1 = \arccos \left(-1.7 \frac{U_0}{U} \right)$

จะได้ว่า $-1 < -1.7 \frac{U_0}{U} < 0$ หรือ $0 < \frac{U_0}{U} < 0.5882$ (4-12)

เสถียรภาพของ เส้นทางการเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ สำหรับเรือ Model A

กำหนดให้ $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$ โดยที่ α_0 เป็นมุมที่ เส้นทางการเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ ทำกับทิศทางบวกของแกน ox และ ε เป็นจำนวนจริงมีค่าใกล้ศูนย์

ดังนั้น $\sin \alpha \cos \alpha \approx \sin(\alpha_0) \cos(\alpha_0) + \varepsilon \{ \cos^2(\alpha_0) - \sin^2(\alpha_0) \}$ (4-13)

และ $\sin \alpha \approx \sin(\alpha_0) + \varepsilon \cos(\alpha_0)$ (4-14)

กรณีที่ 1 เส้นทางเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ เกิดที่ $\alpha_0 = 0$ (เรือแล่นทวนกระแสน้ำ)
 ดังนั้นจากสมการที่ (4-13) และ (4-14) จะได้

$$\sin \alpha \cos \alpha \approx \varepsilon \cos^2(0) = \varepsilon$$

และ $\sin \alpha \approx \varepsilon \cos(0) = \varepsilon$

จาก อัตราการเปลี่ยนของโมเมนต์เชิงมุม = ผลรวมของโมเมนต์

นั่นคือ
$$I_A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M_A \quad (4-15)$$

และจากสมการที่ (4-11) และ (4-15) จะได้

$$\begin{aligned} I_A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= I_A \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = -\frac{2}{27} \rho \pi U c^2 (10U \sin \alpha \cos \alpha + 17U_0 \sin \alpha) \\ &= -\frac{2}{27} \rho \pi U c^2 \varepsilon (10U + 17U_0) \\ &= -W_A^2 \varepsilon \end{aligned} \quad (4-16)$$

แสดงว่าการเคลื่อนที่ที่เกิดจากการเบี่ยงเบนเล็กน้อยจาก $\alpha_0 = 0$ จะเสถียร

กรณีที่ 2 เส้นทางเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ เกิดที่ $\alpha_0 = \pi$ (เรือแล่นตามกระแสน้ำ)
 ดังนั้นจากสมการที่ (4-13) และ (4-14) จะได้

$$\sin \alpha \cos \alpha \approx \varepsilon \cos^2(\pi) = \varepsilon$$

และ $\sin \alpha \approx \varepsilon \cos(\pi) = -\varepsilon$

แทนในสมการที่ (4-11) และ (4-15) จะได้

$$\begin{aligned} I_A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= I_A \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = -\frac{2}{27} \rho \pi U c^2 \varepsilon (10U - 17U_0) \\ &= -\frac{20}{27} \rho \pi U^2 c^2 \varepsilon \left(1 - 1.7 \frac{U_0}{U}\right) \end{aligned} \quad (4-17)$$

ดังนั้นการเคลื่อนที่จะเสถียรภาพ เมื่อ $\left(1 - 1.7 \frac{U_0}{U}\right) > 0$ นั่นคือ

$$\frac{U_0}{U} < \frac{1}{1.7} = 0.5882 \quad (4-18)$$

ดังนั้นถ้า $\frac{U_0}{U} > 0.5882$ การเคลื่อนที่จะไม่เสถียร

กรณีที่ 3 เส้นทางเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ เกิดที่ $\alpha = \alpha_1$ (เรือแล่นตัดกระแสน้ำ)

กำหนด $\alpha = \alpha_1 + \varepsilon$ โดยที่ α_1 เป็นมุมที่ เส้นทางเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ ทำกับทิศ
 ทางบวกของแกน ox และ ε เป็นจำนวนจริงมีค่าใกล้ศูนย์ จากสมการที่ (4-11) และ (4-15)

เมื่อ $\alpha_1 = \arccos\left[-1.7 \frac{U_0}{U}\right]$ จะได้

$$\begin{aligned}
I_A \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= I_A \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\frac{2}{27}\rho\pi U c^2 \left[10U \left\{ \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + \varepsilon (\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1) \right\} \right. \\
&\quad \left. + 17U_0 (\sin\alpha_1 + \varepsilon \cos\alpha_1) \right] \\
&= -\frac{2}{27}\rho\pi U c^2 \left[(10U \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + 17U_0 \sin\alpha_1) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \{ 10U (\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1) + 17U_0 \cos\alpha_1 \} \right] \\
&= -\frac{2}{27}\rho\pi U c^2 \left[(10U \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + 17U_0 \sin\alpha_1) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \{ 10U (2\cos^2\alpha_1 - 1) + 17U_0 \cos\alpha_1 \} \right] \\
&= -\frac{2}{27}\rho\pi U c^2 \varepsilon \{ 10U (2\cos^2\alpha_1 - 1) + 17U_0 \cos\alpha_1 \} \quad (4-19)
\end{aligned}$$

จาก $\cos\alpha_1 = -1.7 \frac{U_0}{U}$ ดังนั้นจากสมการที่ (4-19) จะได้

$$\begin{aligned}
I_A \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} &= -\frac{2}{27}\rho\pi U c^2 \varepsilon \left[10U \left\{ 2 \left(-1.7 \frac{U_0}{U} \right)^2 - 1 \right\} + 17U_0 \left(-1.7 \frac{U_0}{U} \right) \right] \\
&= -\frac{2}{27}\rho\pi U c^2 \varepsilon \left[57.8000 \frac{U_0^2}{U} - 10U - 28.9000 \frac{U_0^2}{U} \right] \\
&= -\frac{2}{27}\rho\pi U c^2 \varepsilon \left[28.9000 \frac{U_0^2}{U} - 10U \right] \\
&= -\frac{2}{27}\rho\pi U c^2 \varepsilon (28.9000U_0^2 - 10U^2) \quad (4-20)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $I_A \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\frac{2}{27}\rho\pi U c^2 \varepsilon (28.9000U_0^2 - 10U^2)$

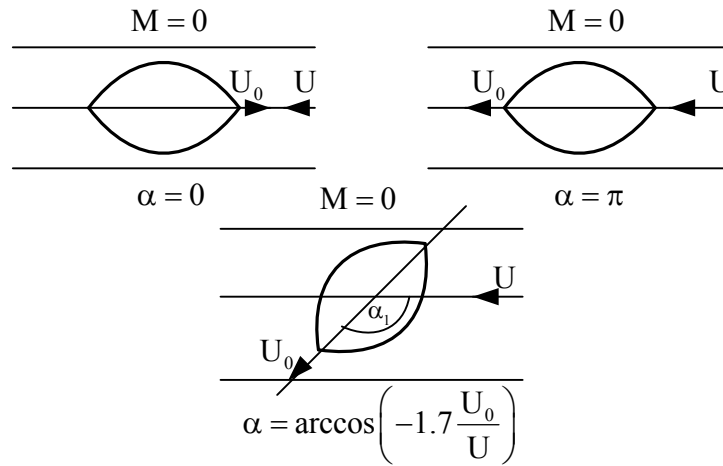
ดังนั้นการเคลื่อนที่จะเสถียรภาพเมื่อ $(28.9000U_0^2 - 10U^2) > 0$ นั่นคือ

$$\frac{U_0^2}{U^2} > \frac{10}{28.9000}$$

ซึ่ง $\frac{U_0}{U} > 0.5882$ หรือ $\frac{U_0}{U} < -0.5882$ (4-21)

แต่เงื่อนไขของ เส้นทางการเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ ซึ่งเป็นไปได้เมื่อ $\frac{U_0}{U} < 0.5882$

ดังนั้นการเคลื่อนที่จะไม่เสถียร



ภาพที่ 4-4 แสดงการเคลื่อนที่ของเรือ Model A ในทิศทางต่างๆที่ทำมุม α กับทิศทางบวกของแกน ox

4.3.2 การเคลื่อนที่ของเรือ Model B

จากสมการที่ (4-8) ในกรณีที่ $n = \frac{3}{2}$ และเรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ U_0 (เรือเคลื่อนที่ตามทิศทางของความยาวของเรือ, $V_0 = 0$) จะได้

$$M_B = \rho \pi U c^2 \left\{ 1 + \cot\left(\frac{3\pi}{8}\right) \right\} \left[U \left\{ \cot\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1 \right\} \cos(\alpha) \sin \alpha - U_0 \sin \alpha \right] \quad (4-22)$$

จากสมการที่ (4-22) โมเมนต์ $M_B = 0$ เมื่อ

$$U \left\{ \cot\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1 \right\} \sin \alpha \cos \alpha = U_0 \sin \alpha$$

นั่นคือเมื่อ $\sin \alpha = 0$ หรือ $\cos \alpha = -1.7071 \frac{U_0}{U}$

ซึ่งจะได้ $\alpha = 0, \pi$ หรือ $\alpha = \arccos\left(-1.7071 \frac{U_0}{U}\right)$

ให้ $\alpha_0 = 0$ หรือ π

และ $\alpha_1 = \arccos\left(-1.7071 \frac{U_0}{U}\right)$

จะได้ว่า $-1 < -1.7071 \frac{U_0}{U} < 0$ หรือ $0 < \frac{U_0}{U} < 0.5858$ (4-23)

เสถียรภาพของ เส้นทางการเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ สำหรับเรือทรงกระบอก Model B

กำหนด $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$ โดยที่ α_0 เป็นมุมที่ เส้นทางการเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ ทำกับทิศทางบวกของแกน ox และ ε เป็นจำนวนจริงมีค่าใกล้ศูนย์

ดังนั้น $\sin \alpha \cos \alpha \approx \sin(\alpha_0) \cos(\alpha_0) + \varepsilon \{ \cos^2(\alpha_0) - \sin^2(\alpha_0) \}$ (4-24)

และ $\sin \alpha \approx \sin(\alpha_0) + \varepsilon \cos(\alpha_0)$ (4-25)

กรณีที่ 1 เส้นทางเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ เกิดที่ $\alpha_0 = 0$ (เรือแล่นทวนกระแสน้ำ)
จากสมการที่ (4-24) และ (4-25) เมื่อ $\alpha_0 = 0$ จะได้

$$\sin \alpha \cos \alpha \approx \varepsilon \cos^2(0) = \varepsilon$$

และ

$$\sin \alpha \approx \varepsilon \cos(0) = \varepsilon$$

จาก อัตราการเปลี่ยนของโมเมนต์เชิงมุม = ผลรวมของโมเมนต์

$$\text{นั่นคือ} \quad I_B \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M_B \quad (4-26)$$

ดังนั้นสมการที่ (4-8) และสมการที่ (4-26) จะได้

$$\begin{aligned} I_B \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= I_B \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = -1.4142 \rho \pi U c^2 (0.5858 U \cos \alpha \sin \alpha + U_0 \sin \alpha) \\ &= -1.4142 \rho \pi U c^2 \varepsilon (0.5858 U + U_0) \\ &= -W_B^2 \varepsilon \end{aligned} \quad (4-27)$$

แสดงว่าการเคลื่อนที่ที่เกิดจากการเบี่ยงเบนเล็กน้อยจาก $\alpha_0 = 0$ จะเสถียร

กรณีที่ 2 เส้นทางเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ $\alpha_0 = \pi$ (เรือแล่นตามกระแสน้ำ)

จากสมการที่ (4-24) และ (4-25) เมื่อ $\alpha_0 = \pi$ จะได้

$$\sin \alpha \cos \alpha \approx \varepsilon \cos^2 \pi = \varepsilon$$

และ

$$\sin \alpha \approx \varepsilon \cos \pi = -\varepsilon$$

แทนในสมการที่ (4-8) และสมการที่ (4-26) จะได้

$$\begin{aligned} I_B \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} &= -1.4142 \rho \pi U c^2 \varepsilon (0.5858 U - U_0) \\ &= -1.4142 \rho \pi U^2 c^2 \varepsilon \left(0.5858 - \frac{U_0}{U} \right) \end{aligned} \quad (4-28)$$

ดังนั้นการเคลื่อนที่จะเสถียรภาพเมื่อ $\left(0.5858 - \frac{U_0}{U} \right) > 0$ นั่นคือ

$$\frac{U_0}{U} < 0.5858 \quad (4-29)$$

ดังนั้นถ้า $\frac{U_0}{U} > 0.5858$ การเคลื่อนที่จะไม่เสถียร

กรณีที่ 3 เส้นทางเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ เกิดที่ $\alpha = \alpha_1$ (เรือแล่นตัดกระแสน้ำ)

โดยวิธีเดียวกันกับกรณีที่ 1 ซึ่งกำหนด $\alpha = \alpha_1 + \varepsilon$ โดยที่ α_1 เป็นมุมที่ เส้นทางเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ ทำกับทิศทางบวกของแกน ox และ ε เป็นจำนวนจริงมีค่าใกล้ศูนย์

จากสมการที่ (4-24) และ (4-25) เมื่อ $\alpha = \alpha_1$ จะได้

$$\sin \alpha \cos \alpha \approx \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1) + \varepsilon \{ \cos^2(\alpha_1) - \sin^2(\alpha_1) \} \quad (4-30)$$

และ

$$\sin \alpha \approx \sin(\alpha_1) + \varepsilon \cos(\alpha_1) \quad (4-31)$$

จากสมการที่ (4-8) และ (4-26) จะได้

$$\begin{aligned}
 I_B \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= -1.4142\rho\pi U c^2 \left[0.5858U \left\{ \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + \varepsilon (\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + U_0 (\sin\alpha_1 + \varepsilon \cos\alpha_1) \right] \\
 &= -1.4142\rho\pi U c^2 \left[(0.5858U \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + U_0 \sin\alpha_1) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon \left\{ 0.5858U (\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1) + U_0 \cos\alpha_1 \right\} \right] \\
 &= -1.4142\rho\pi U c^2 \left[(0.5858U \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + U_0 \sin\alpha_1) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon \left\{ 0.5858U (2\cos^2\alpha_1 - 1) + U_0 \cos\alpha_1 \right\} \right] \\
 &= -1.4142\rho\pi U c^2 \varepsilon \left\{ 0.5858U (2\cos^2(\alpha_1) - 1) + U_0 \cos\alpha_1 \right\} \quad (4-32)
 \end{aligned}$$

จาก $\cos\alpha_1 = -1.7071 \frac{U_0}{U}$ ดังนั้นสมการที่ (4-32) จะได้

$$\begin{aligned}
 I_B \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= -1.4142\rho\pi U c^2 \varepsilon \left[0.5858U \left\{ 2 \left(-1.7071 \frac{U_0}{U} \right)^2 - 1 \right\} + U_0 \left(-1.7071 \frac{U_0}{U} \right) \right] \\
 &= -1.4142\rho\pi U c^2 \varepsilon \left[3.4143 \frac{U_0^2}{U} - 0.5858U - 1.7071 \frac{U_0^2}{U} \right] \\
 &= -1.4142\rho\pi U c^2 \varepsilon \left[1.7072 \frac{U_0^2}{U} - 0.5858U \right]
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$I_B \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -1.4142\rho\pi U c^2 \varepsilon (1.7072U_0^2 - 0.5858U^2) \quad (4-33)$$

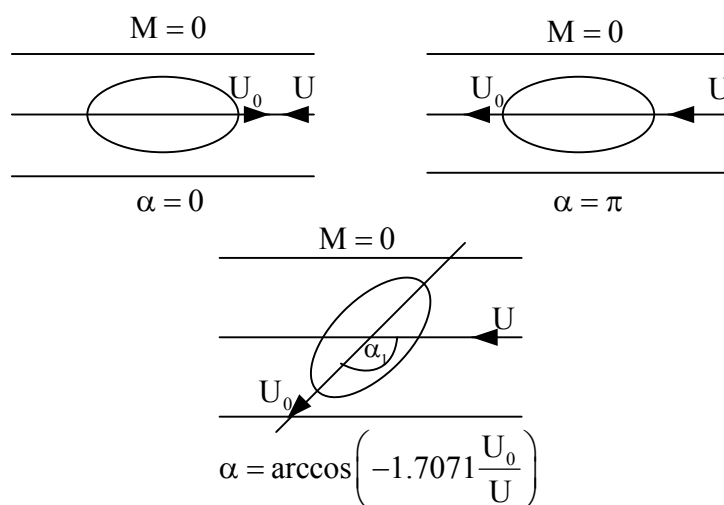
ดังนั้นการเคลื่อนที่จะเสถียรภาพ เมื่อ $(1.7072U_0^2 - 0.5858U^2) > 0$ นั่นคือ

$$\frac{U_0^2}{U^2} > \frac{0.5858}{1.7072}$$

$$\text{ซึ่ง} \quad \frac{U_0}{U} > 0.5858 \quad \text{หรือ} \quad \frac{U_0}{U} < -0.5858 \quad (4-34)$$

แต่เงื่อนไขของ เส้นทางการเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ ซึ่งเป็นไปได้เมื่อ $\frac{U_0}{U} < 0.5858$

ดังนั้นการเคลื่อนที่จะไม่เสถียร



ภาพที่ 4-5 แสดงการเคลื่อนที่ของเรือ Model B ในทิศทางต่างๆที่ทำมุม α กับทิศทางบวกของแกน ox

4.3.3 เสถียรภาพ (Stability) ของการเคลื่อนที่ของเรือ

ในความเป็นจริงนั้น เรือทุกลำจะมีหางเสือเรือบังคับทิศทาง การเคลื่อนที่ของเรือ ถึงแม้จะมีโมเมนต์ของกระแสน้ำกระทำบนลำเรือ เราก็สามารถใช้หางเสือเรือบังคับเรือให้แล่นไปในทิศทางที่ต้องการด้วยแรงขับเคลื่อนที่ติดอยู่บนเรือได้

อย่างไรก็ดี ในการศึกษานี้ได้แสดงให้เห็นว่า ถ้าหากมีกระแสน้ำไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U และเรือแล่นตัดกระแสน้ำด้วยความเร็วคงที่ U_0 การที่จะให้เกิดโมเมนต์ของกระแสน้ำบนเรื่อน้อยที่สุดหรือเท่ากับศูนย์ เรือจะต้องแล่นในทิศทางใด และแล่นด้วยความเร็วเท่าไรจึงจะทำให้มีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่ ซึ่งข้อมูลในการศึกษาเชิงวิเคราะห์นี้จะเป็นประโยชน์และให้ความรู้แก่ผู้บังคับทิศทางของเรือ

ผลการศึกษาเชิงวิเคราะห์ของเรือ Model A และ Model B ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าเรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ U_0 และ $n = \frac{4}{3}$ แสดงในตารางที่ 4-1

ตารางที่ 4-1 ตารางแสดงการเปรียบเทียบการมีเสถียรภาพของเรือทั้งสองลักษณะ ที่เคลื่อนที่ในทิศทางที่ทำให้โมเมนต์เท่ากับศูนย์

เรือ ทิศทาง	เรือทรงกระบอก Model A (ทำมุม α)			เรือทรงกระบอก Model B (ทำมุม α)		
ทิศทางของเรือที่ทำให้โมเมนต์เท่ากับศูนย์	0	π	$\arccos\left(-1.7\frac{U_0}{U}\right)$	0	π	$\arccos\left(-1.7071\frac{U_0}{U}\right)$
เสถียรภาพ	มี	มีถ้า $U_0 < 0.5882U$	ไม่มี	มี	มีถ้า $U_0 < 0.5858U$	ไม่มี

จากตารางที่ 4-1 เราจะเห็นว่าเรือทั้ง 2 ลำ คือ Model A และ Model B มีทิศทางการเคลื่อนที่ และปราศจากการหมุน ที่ทำให้โมเมนต์เท่ากับศูนย์และการมีเสถียรภาพ มีความคล้ายคลึงกัน ดังนี้

เรือ Model A

ถ้าเรือแล่นทวนกระแสน้ำ ($\alpha = 0$) จะทำให้โมเมนต์ของกระแสน้ำที่กระทบลำเรือเท่ากับศูนย์ และการเคลื่อนที่มีเสถียรภาพไม่ว่าความเร็วของเรือจะมีขนาดเท่าใดก็ตาม แต่ถ้าเรือแล่นตามกระแสน้ำ ($\alpha = \pi$) จะทำให้โมเมนต์ของกระแสน้ำที่กระทบลำเรือเท่ากับศูนย์ แต่การเคลื่อนที่จะมีเสถียรภาพต่อเมื่อ ความเร็วของเรือคือ U_0 ต้องน้อยกว่า 0.5882 เท่าของความเร็วของกระแสน้ำ U

ในกรณีที่เรือแล่นตัดกระแสน้ำจากการวิจัยพบว่า โมเมนต์เท่ากับศูนย์ต่อเมื่อเรือแล่นในทิศทางที่ขึ้นอยู่กับขนาดของ U_0 โดยที่ $U_0 < 0.5882U$ แต่ไม่มีเสถียรภาพของการเคลื่อนที่

เรือ Model B

การเคลื่อนที่ของเรือทวนกระแสน้ำหรือตามกระแสน้ำลักษณะคล้ายคลึงกับเรือทรงกระบอก Model A รวมทั้งกรณีที่เรือแล่นตัดกระแสน้ำด้วย ภายใต้เงื่อนไข $U_0 < 0.5858U$

บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 บทสรุป

5.1.1 การศึกษาเชิงวิเคราะห์ เกี่ยวกับแรงและโมเมนต์ที่เกิดจากกระแสน้ำ ที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอปะทะแท่งทรงกระบอกที่มีความกว้างและความยาวของหน้าตัดเท่ากัน ซึ่งได้ผลการวิจัยดังนี้

กรณีที่แท่งทรงกระบอกอยู่นิ่ง และกระแสน้ำไหลปะทะแท่งทรงกระบอกด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ทำมุม α กับทิศทางลบของแกนจริง เมื่อกำหนดค่า n เข้าใกล้ 1 ($n = 1 + \varepsilon$ โดยที่ $0 < \varepsilon \ll 1$) แรงที่กระทำกับแท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ในส่วนของโมเมนต์ที่กระทำจะมีค่าประมาณ $-pU^2c^2\pi\sin\alpha\cos\alpha$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเมื่อพื้นที่หน้าตัดของแท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะ มีความกว้างของหน้าตัดน้อยมาก จะทำให้แรงและโมเมนต์ที่กระทำกับแท่งทรงกระบอกมีค่าเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน และเมื่อกำหนดค่า n เป็นค่าทั่วไป ($1 < n < 2$) จะพบว่าแรงที่กระทำกับ Model A และ Model B มีค่าเท่ากับศูนย์สำหรับทุกค่าของ n และ α ในขณะที่แรงที่กระทำกับ Model C มีค่าไม่เท่ากับศูนย์สำหรับบางค่าของ n และ α ซึ่งทดสอบโดยใช้โปรแกรม Matlab เมื่อกำหนดให้ $n = \frac{4}{3}$ และ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ จะได้แรงที่กระทำในทิศทางแกนจริง $F_x \approx 5.5276pcU^2$ แรงที่กระทำในทิศทางแกนจินตภาพ $F_y \approx 1.0815pcU^2$ ในส่วนโมเมนต์ที่กระทำกับแท่งทรงกระบอก เมื่อกำหนดให้ $n = \frac{4}{3}$ ผลการวิจัยพบว่าโมเมนต์ที่กระทำกับแท่งทรงกระบอกทั้ง 3 ลักษณะดังกล่าวจะมีทิศทางตามเข็มนาฬิกาเช่นเดียวกัน แต่โมเมนต์ที่กระทำกับ Model C จะมีขนาดมากกว่าโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A และ Model B ถึงประมาณ 5 เท่า ดังนั้นด้วยข้อจำกัดดังกล่าวข้างต้น ในการศึกษาแรงและโมเมนต์ กรณีที่แท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ โดยปราศจากการหมุน จึงศึกษาเฉพาะ Model A และ Model B เท่านั้น

ถ้า Model A และ Model B หยุดนิ่ง และอัตราส่วนระหว่างความกว้างและความยาวของหน้าตัดเท่ากับ $\cot\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ ($1 < n < 2$) การเปรียบเทียบโมเมนต์ระหว่าง Model A และ Model B จากสมการที่ (3-4) และ (3-10) เราพบว่าอัตราส่วนของโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A ต่อ Model B มีค่าประมาณ $\frac{4(n^2 - 1)}{3n^2 \left\{ 1 - \cot^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\}}$ โดยที่ $\alpha \neq 0$ (Model A และ Model B มีความ

กว้างและความยาวของหน้าตัดเท่ากัน) เช่นเมื่อ $n = \frac{3}{2}$ จะได้อัตราส่วนของความกว้างต่อความยาวเท่ากับ 0.4142 และอัตราส่วนของโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A ต่อ Model B มีค่าเท่ากับ 0.8942 ถ้า Model A และ Model B เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $W = U_0 + iV_0$ โดยปราศจากการหมุนซึ่ง $U_0 = U, V_0 = 0$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ และ $n = \frac{3}{2}$ เราพบว่า อัตราส่วนของโมเมนต์ที่กระทำกับ Model A ต่อเรือ Model B ประมาณ 0.8915

นอกจากนี้จากการศึกษาในกรณีที่เรือ Model A และเรือ Model B เคลื่อนที่ในทิศทางทวนกระแสน้ำ ตามกระแสน้ำ และตัดกระแสน้ำ รวมทั้งการมีเสถียรภาพ และการไม่มีเสถียรภาพของการเคลื่อนที่ ภายใต้ข้อกำหนด $W_0 = U_0, n = \frac{3}{2}$ และความเร็วของกระแสน้ำ U (เรือเคลื่อนที่ตามทิศทางของความยาวของเรือ) ผลการวิจัยพบว่า เส้นทางเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ ของ Model A ทำมุม $\alpha = 0, \pi$ หรือ $\alpha = \arccos\left(-1.7 \frac{U_0}{U}\right)$ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของเรือ สำหรับ เส้นทางเคลื่อนที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์ ของ Model B ทำมุม $\alpha = 0, \pi$, และ $\arccos\left(-1.7071 \frac{U_0}{U}\right)$ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของเรือ ถ้าเรือทั้ง 2 ลักษณะเคลื่อนที่ทวนกระแสน้ำจะเสถียรตลอดการเคลื่อนที่ และถ้าเคลื่อนที่ตัดกระแสน้ำจะไม่เสถียรในการเคลื่อนที่ไม่ว่าเรือจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว U_0 เท่าใดตาม ในกรณีที่เรือเคลื่อนที่ตามกระแสน้ำ เรือ Model A จะเสถียรเมื่อ $\frac{U_0}{U} < 0.5882$ และสำหรับเรือ Model B จะเสถียรภาพเมื่อ $\frac{U_0}{U} < 0.5858$ (ตามรายละเอียดที่ปรากฏในบทที่ 4) จากผลลัพธ์ดังกล่าวจะเป็นประโยชน์แก่ผู้บังคับทิศทางของเรือที่มีรูปแบบคล้ายกับ เรือ Model A และเรือ Model B

แรงและโมเมนต์จะกระทำต่อผิวด้านข้างของแท่งทรงกระบอกเท่านั้น เพราะเป็นบริเวณที่เกิดขวางทางเดินของกระแสน้ำ ส่วนบริเวณใต้ฐานของแท่งทรงกระบอกจะไม่มีผลกระทบใดๆ เพราะไม่เกิดขวางทางเดินของน้ำ เนื่องจากแกนของแท่งทรงกระบอกตั้งฉากกับทางเดินของน้ำตลอดเวลา จะมีก็แต่แรงดันขึ้น (Upward thrust) ช่วยพยุงให้แท่งทรงกระบอกลอยในน้ำ ตามหลักของอาร์คิมิดีสเท่านั้น

5.1.2 ในกรณีที่แท่งทรงกระบอกถูกยึดอยู่กับที่ เราได้ใช้แท่งทรงกระบอก Model A ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเซกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน โดยที่ปลายล่างปิด ตามรายละเอียดที่ปรากฏในบทที่ 3 สมมุติถูกยึดด้วยเชือกที่ผูกติดกับด้านข้างของแท่งทรงกระบอกที่อยู่ใต้ผิวน้ำ (ในขณะเดียวกันแท่งทรงกระบอกอาจถูกยึดที่จุดอื่นๆด้วย) เพื่อไม่ทำให้เกิดแรงเหวี่ยงบนเชือกมากนัก เราควรใช้เชือกยึดที่จุดที่เกิดความดันสูงสุด ซึ่งเป็นจุดหยุดนิ่ง บนผิวนอกของแท่งทรงกระบอกในส่วนที่อยู่ใต้ผิวน้ำ ดังนั้นเราจึงคำนวณหาจุดหยุดนิ่งเพื่อประโยชน์ดังกล่าวด้วย

5.2 ข้อเสนอแนะ

เราสามารถนำผลการวิจัยครั้งนี้มาใช้เป็นแนวทางในการออกแบบเรือที่มีลักษณะพื้นที่หน้าตัดคล้ายกับพื้นที่หน้าตัดของ Model A และ Model B ถึงแม้ว่าเราจะมีข้อจำกัด เช่น น้ำไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ หรือ ลักษณะของแท่งทรงกระบอกที่ไม่ใช้ลักษณะของเรือทั่วไปก็ตาม โดยสมมุติว่ามีเรืออยู่ 2 ลำ ที่มีลักษณะเป็นแท่งทรงกระบอก ลำที่หนึ่ง เรียกว่า เรือ A ที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเชกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน และเรืออีกลำเรียกว่าเรือ B มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงรี โดยที่ความกว้างและความยาวของหน้าตัดเท่ากัน (กำหนดให้ n เท่ากับ $\frac{3}{2}$) ถ้านำผลวิจัยมาใช้กับเรือทั้ง 2 ลำ จะพบว่าเรือ A มีขนาดโมเมนต์ที่เกิดจากการปะทะของน้ำในแนวเฉียง 45 องศา กับทิศทางการเคลื่อนที่ของเรือ น้อยกว่าเรือ B รวมทั้งโอกาสที่เรือ A จะสูญเสียการทรงตัวที่เกิดจากการไม่มีเสถียรภาพของการเคลื่อนที่ก็น้อยกว่าเรือ B ด้วย อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าการไหลของน้ำอยู่ในแนวเฉียงเป็นมุม 45 องศา กับทิศทางการเคลื่อนที่ของเรือ แต่จากผลของการวิจัยจะเห็นว่าผลลัพธ์ต่างๆ จะเกิดขึ้นในท่านองเดียวกันสำหรับมุมอื่นๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 หรือ 180 องศา ดังนั้นเมื่อพิจารณาผลดีผลเสียดังกล่าวแล้ว เราพอตัดสินใจได้ว่า ควรออกแบบเรือแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วยเชกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกัน

งานวิจัยครั้งนี้จะเห็นได้ว่าในการศึกษากรณีที่แท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ และปราศจากการหมุนเราศึกษาเฉพาะ Model A และ Model B โดยไม่ได้ทำการศึกษา Model C และในการคำนวณหาจุดหยุดนิ่ง และเส้นแบ่งทางเดินของของไหลเราศึกษาเฉพาะ Model A ดังนั้นการขยายผลของงานวิจัยจึงสามารถกระทำได้หลายแนวทางเช่นการศึกษกรณีที่ Model C เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และปราศจากการหมุน หรือแท่งทรงกระบอกทั้งสามลักษณะมีความเร็วเชิงมุมเกิดขึ้น หรือศึกษาในกรณีที่กระแสน้ำไหลด้วยความเร็วไม่สม่ำเสมอลักษณะน้ำเป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

ภาษาอังกฤษ

1. Darren G.Crowdy. "Analytical solutions for uniform potential flow past multiple cylinders." *European journal of mechanics B/Fluids*. 25 (2006) : 459-470
2. Dechaumphai P, Sucharitpwatskul. "Adaptive finite element technique for Potential flow analysis. Proceedings of the 15th Conference of the Mechanical Engineering." *Network of Thailand (ME-NETT 15)*. , vol.1, pp. CM 79-84, Srinakharinwirot University Bangkok. 28-30 November 2001.
3. F.Carlsson, M.Sen. "Hydrodynamic effects in channel flow due to vibrating walls, Department of Theorem and Fluid Dynamics." *Chalmers University of Technology* 2003.
4. L.M. Milne-Thomson. "Theoretical Hydrodynamics.", *Brown University Press Inc., London* 1969.
5. Muman B.R. "Fundamental of Finite Mechanic." *Oxford University Press Inc., New York* 1998.
6. Wansophark N., Dechaumphai P. "Enhancement of Streamline Unwinding Finite Element Solutions by Adaptive Meshing." *JSME International Journal, Series B*. Vol.45, No.4 (2001)

ภาคผนวก ก

การหาค่าเชิงซ้อนของกระแสไฟฟ้าไหลผ่าน Model A

การหาค่าเชิงซ้อนของกระแสไฟฟ้าไหลผ่าน Model A

กระแสน้ำไหลปะทะแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเส้นโค้งปิดที่ประกอบด้วย เซกเมนต์ของวงกลม 2 วงที่มีรัศมีเท่ากันประกบกันโดยปลายล่างปิด ด้วยความเร็วที่ U ทำมุม α กับทิศทางลบของแกนจริง สำหรับค่าเชิงซ้อนมีรูปแบบทั่วไปคือ

$$\Omega = \frac{2Uc}{n} \left\{ i \cos \alpha \cot\left(\frac{\varsigma}{n}\right) + \sin \alpha \csc\left(\frac{\varsigma}{n}\right) \right\} \quad (ก-1)$$

โดยที่ $\varsigma = \xi + i\eta$

$$\begin{aligned} & \text{พิจารณา } \left\{ i \cos \alpha \cot\left(\frac{\varsigma}{n}\right) + \sin \alpha \csc\left(\frac{\varsigma}{n}\right) \right\} \\ &= \left\{ i \cos \alpha \cot\left(\frac{\varsigma}{n}\right) + \sin \alpha \cos \operatorname{ec}\left(\frac{\varsigma}{n}\right) - \sin \alpha \cot\left(\frac{\varsigma}{n}\right) \right. \\ & \quad \left. - \sin \alpha \cos \operatorname{ec}\left(\frac{\varsigma}{n}\right) + \sin \alpha \left(\cot\left(\frac{\varsigma}{n}\right) + \cos \operatorname{ec}\left(\frac{\varsigma}{n}\right) \right) \right\} \\ &= (i \cos \alpha - \sin \alpha) \cot\left(\frac{\varsigma}{n}\right) + \sin \alpha \left(\cot\left(\frac{\varsigma}{n}\right) + \cos \operatorname{ec}\left(\frac{\varsigma}{n}\right) \right) \\ &= (i \cos \alpha - \sin \alpha) \cot\left(\frac{\varsigma}{n}\right) + \sin \alpha \cot\left(\frac{\varsigma}{2n}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการที่ (ก-1) จะได้

$$\Omega = \frac{2Uc}{n} \left\{ (i \cos \alpha - \sin \alpha) \cot\left(\frac{\varsigma}{n}\right) + \sin \alpha \cot\left(\frac{\varsigma}{2n}\right) \right\} \quad (ก-2)$$

$$\text{จาก } z = ic \cot\left(\frac{\varsigma}{2}\right) \rightarrow \cot\left(\frac{\varsigma}{2}\right) = \frac{z}{ic}$$

$$e^{i\varsigma} = \left(1 - \frac{c}{z}\right) \left(1 + \frac{c}{z}\right)^{-1}$$

$$e^{\frac{1}{2n}i\varsigma} = \left(1 - \frac{c}{z}\right)^{1/2n} \left(1 + \frac{c}{z}\right)^{-1/2n}$$

$$\begin{aligned} &= \left[1 + \left(\frac{1}{2n}\right) \left(-\frac{c}{z}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2n}\right) \left(\frac{1}{2n} - 1\right) \left(-\frac{c}{z}\right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3!} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - 1\right) \left(\frac{1}{2n} - 2\right) \left(-\frac{c}{z}\right)^3 + \dots \right] \\ & \quad \left[1 + \left(-\frac{1}{2n}\right) \left(\frac{c}{z}\right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2n}\right) \left(-\frac{1}{2n} - 1\right) \left(\frac{c}{z}\right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{2n}\right) \left(-\frac{1}{2n} - 1\right) \left(-\frac{1}{2n} - 2\right) \left(\frac{c}{z}\right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 - \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3!} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{1}{2n} - 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \\
&\quad \left[1 - \frac{1}{2n} \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \left(\frac{1}{2n} + 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \right) \frac{c}{z} + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) + \left(\frac{1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \right] \frac{c^2}{z^2} - \\
&\quad \left[\frac{1}{6} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \left(\frac{1}{2n} + 2 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{2n} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{2n} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) + \frac{1}{6} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{1}{2n} - 2 \right) \right] \frac{c^3}{z^3} + \dots \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n} \right) \frac{c}{z} + \left[\frac{1}{4n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) + \left(\frac{1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{4n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \right] \frac{c^2}{z^2} - \\
&\quad \left[\frac{1}{12n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \left(\frac{1}{2n} + 2 \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) + \frac{1}{12n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{1}{2n} - 2 \right) \right] \frac{c^3}{z^3} + \dots \quad (n-3)
\end{aligned}$$

$$e^{-\frac{1}{2n} i c} = \left(1 - \frac{c}{z} \right)^{-1/2n} \left(1 + \frac{c}{z} \right)^{1/2n}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 + \left(-\frac{1}{2n} \right) \left(-\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2n} \right) \left(-\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(-\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{2n} \right) \left(-\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(-\frac{1}{2n} - 2 \right) \left(-\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \\
&\quad \left[1 + \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{1}{2n} - 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 + \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \left(\frac{1}{2n} + 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \\
&\quad \left[1 + \frac{1}{2n} \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2n} \right) \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{1}{2n} - 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \right) \frac{c}{z} + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) + \left(\frac{1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \right] \frac{c^2}{z^2} + \\
&\quad \left[\frac{1}{6} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{1}{2n} - 2 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{2n} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{2n} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) + \frac{1}{6} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \left(\frac{1}{2n} + 2 \right) \right] \frac{c^3}{z^3} + \dots \\
&= 1 + \left(\frac{1}{n} \right) \frac{c}{z} + \left[\frac{1}{4n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) + \left(\frac{1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{4n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \right] \frac{c^2}{z^2} - \\
&\quad \left[\frac{1}{12n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{1}{2n} - 2 \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) + \frac{1}{12n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \left(\frac{1}{2n} + 2 \right) \right] \frac{c^3}{z^3} + \dots \quad (n-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{n} i c} &= \left(1 - \frac{c}{z} \right)^{1/n} \left(1 + \frac{c}{z} \right)^{-1/n} \\
&= \left[1 + \left(\frac{1}{n} \right) \left(-\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(-\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \left(-\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \\
&\quad \left[1 + \left(-\frac{1}{n} \right) \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{n} \right) \left(-\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{n} \right) \left(-\frac{1}{n} - 1 \right) \left(-\frac{1}{n} - 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 - \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \\
&\quad \left[1 - \frac{1}{n} \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) \frac{c}{z} + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right] \frac{c^2}{z^2} - \\
&\quad \left[\frac{1}{6} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1}{6} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \right] \frac{c^3}{z^3} + \dots \\
&= 1 - \left(\frac{2}{n} \right) \frac{c}{z} + \left[\frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right] \frac{c^2}{z^2} - \\
&\quad \left[\frac{1}{6n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1}{6n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \right] \frac{c^3}{z^3} + \dots \tag{n-5} \\
e^{-\frac{1}{n} i \zeta} &= \left(1 - \frac{c}{z} \right)^{-1/n} \left(1 + \frac{c}{z} \right)^{1/n} \\
&= \left[1 + \left(-\frac{1}{n} \right) \left(-\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{n} \right) \left(-\frac{1}{n} - 1 \right) \left(-\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{n} \right) \left(-\frac{1}{n} - 1 \right) \left(-\frac{1}{n} - 2 \right) \left(-\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \times \\
&\quad \left[1 + \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 + \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \\
&\quad \left[1 + \frac{1}{n} \left(\frac{c}{z} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \left(\frac{c}{z} \right)^3 + \dots \right] \\
&= 1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) \frac{c}{z} + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \right] \frac{c^2}{z^2} + \\
&\quad \left[\frac{1}{6} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{6} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) \right] \frac{c^3}{z^3} + \dots \\
&= 1 + \left(\frac{2}{n} \right) \frac{c}{z} + \left[\frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \right] \frac{c^2}{z^2} - \\
&\quad \left[\frac{1}{6n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{6n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) \right] \frac{c^3}{z^3} + \dots \quad (n-6)
\end{aligned}$$

จากสมการที่(ก-3)และ(ก-4)

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{c}{2n}} + e^{-i\frac{c}{2n}} &= 2 + 2 \left[\frac{1}{4n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) + \left(\frac{1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{4n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \right] \frac{c^2}{z^2} + \dots \\
e^{i\frac{c}{2n}} - e^{-i\frac{c}{2n}} &= 2 \left(\frac{1}{n} \right) \frac{c}{z} - 2 \left[\frac{1}{12n} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{1}{2n} - 2 \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) + \frac{1}{12n} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) \left(\frac{1}{2n} + 2 \right) \right] \frac{c^3}{z^3} + \dots \\
&= -\frac{2c}{nz} \left[1 + \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \left(\frac{1}{2n} - 2 \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \right\} \frac{c^2}{z^2} + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\frac{i\zeta}{2n}} + e^{-\frac{i\zeta}{2n}}}{e^{\frac{i\zeta}{2n}} - e^{-\frac{i\zeta}{2n}}} &= \frac{2\left(1 + B\frac{c^2}{z^2} + \dots\right)}{-\frac{2c}{nz}\left(1 + A\frac{c^2}{z^2} + \dots\right)} \\
&= -\frac{nz}{c}\left(1 + B\frac{c^2}{z^2} + \dots\right)\left(1 + A\frac{c^2}{z^2} + \dots\right)^{-1} \\
&= -\frac{nz}{c}\left(1 + B\frac{c^2}{z^2} + \dots\right)\left(1 - A\frac{c^2}{z^2} + \dots\right) \\
&= -\frac{nz}{c}\left(1 + B\frac{c^2}{z^2} - A\frac{c^2}{z^2} + \dots\right) \\
&= -\frac{nz}{c}\left(1 + (B - A)\frac{c^2}{z^2} + \dots\right) \\
&= -\frac{n}{c}\left(z + (B - A)\frac{c^2}{z} + \dots\right) \\
\cot\frac{1}{2n}\zeta &= -\frac{ni}{c}\left(z + (B - A)\frac{c^2}{z} + \dots\right) \tag{n-7}
\end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
A &= \left[\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2n} - 1\right)\left(\frac{1}{2n} - 2\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2n} - 1\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2n} + 1\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2n} + 1\right)\left(\frac{1}{2n} + 2\right) \right] \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + 2\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + 2\right) \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2n^2} + 4\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8n^2} \\
&= \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{3} \\
B &= \left[\frac{1}{4n}\left(\frac{1}{2n} + 1\right) + \left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{4n}\left(\frac{1}{2n} - 1\right) \right] \\
&= \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{4n} \\
&= \frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

จากสมการที่(ก-5)และ(ก-6)

$$e^{\frac{ic}{n}} + e^{-\frac{ic}{n}} = 2 + 2 \left[\frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right] \frac{c^2}{z^2} + \dots$$

$$e^{\frac{ic}{n}} - e^{-\frac{ic}{n}} = -2 \left(\frac{2}{n} \right) \frac{c}{z} - 2 \left[\frac{1}{6} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1}{6} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \right] \frac{c^3}{z^3} + \dots$$

$$= -\frac{4c}{nz} \left[1 + \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) \right\} \frac{c^2}{z^2} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{\frac{ic}{2n}} + e^{-\frac{ic}{2n}}}{e^{\frac{ic}{2n}} - e^{-\frac{ic}{2n}}} &= \frac{2 \left(1 + B_1 \frac{c^2}{z^2} + \dots \right)}{-\frac{4c}{nz} \left(1 + A_1 \frac{c^2}{z^2} + \dots \right)} \\ &= -\frac{nz}{2c} \left(1 + B_1 \frac{c^2}{z^2} + \dots \right) \left(1 + A_1 \frac{c^2}{z^2} + \dots \right)^{-1} \\ &= -\frac{nz}{2c} \left(1 + B_1 \frac{c^2}{z^2} + \dots \right) \left(1 - A_1 \frac{c^2}{z^2} + \dots \right) \\ &= -\frac{nz}{2c} \left(1 + B_1 \frac{c^2}{z^2} - A_1 \frac{c^2}{z^2} + \dots \right) \\ &= -\frac{nz}{2c} \left(1 + (B_1 - A_1) \frac{c^2}{z^2} + \dots \right) \\ &= -\frac{n}{2c} \left(z + (B_1 - A_1) \frac{c^2}{z} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\cot \frac{1}{n} \zeta = -\frac{ni}{2c} \left(z + (B_1 - A_1) \frac{c^2}{z} + \dots \right) \quad (\text{ก-8})$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[\frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + 2 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} + 2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12} \left(\frac{2}{n^2} + 4 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{n^2} \right) \\
&= \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n^2} \\
&= \frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3} \\
B_1 &= \left[\frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n} \\
&= \frac{2}{n^2}
\end{aligned}$$

แทนสมการที่ (ก-7) และ (ก-8) ใน (ก-2)

$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{2Uc}{n} \left[\begin{aligned} & \left(i \cos \alpha - \sin \alpha \right) \left\{ -\frac{ni}{2c} \left(z + (B_1 - A_1) \frac{c^2}{z} + \dots \right) \right\} \\ & + \sin \alpha \left\{ -\frac{ni}{c} \left(z + (B - A) \frac{c^2}{z} + \dots \right) \right\} \end{aligned} \right] \\
&= \frac{2Uc}{n} \left(-\frac{ni}{2c} \right) \left[\begin{aligned} & \left(i \cos \alpha - \sin \alpha \right) \left\{ \left(z + (B_1 - A_1) \frac{c^2}{z} + \dots \right) \right\} \\ & + 2 \sin \alpha \left\{ \left(z + (B - A) \frac{c^2}{z} + \dots \right) \right\} \end{aligned} \right] \\
&= -Ui \left[\begin{aligned} & \left(i \cos \alpha - \sin \alpha \right) z + \left(i \cos \alpha - \sin \alpha \right) (B_1 - A_1) \frac{c^2}{z} \\ & + 2z \sin \alpha + 2(B - A) \sin \alpha \frac{c^2}{z} + \dots \end{aligned} \right] \\
&= -U \ i \left[\begin{aligned} & \left(i \cos \alpha + \sin \alpha \right) z + \left(\begin{aligned} & i(B_1 - A_1) \cos \alpha \\ & -(B_1 - A_1) \sin \alpha \\ & + 2(B - A) \sin \alpha \end{aligned} \right) \frac{c^2}{z} + \dots \end{aligned} \right] \\
&= -U \ i \left[\begin{aligned} & \left(i \cos \alpha + \sin \alpha \right) z + \left\{ \begin{aligned} & 2(B - A) \sin \alpha \\ & -(B_1 - A_1) \sin \alpha \\ & + i(B_1 - A_1) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \frac{c^2}{z} + \dots \end{aligned} \right] \\
&= -Ui \left[\left(i \cos \alpha + \sin \alpha \right) z + (G + iH) \frac{c^2}{z} + \dots \right] \\
&= U \left[\left(\cos \alpha - i \sin \alpha \right) z + (H - iG) \frac{c^2}{z} + \dots \right]
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (ก-2) จะได้สมการศักย์จำนวนเชิงซ้อนอยู่ในรูปของ

$$\Omega = U \left\{ (\cos \alpha - i \sin \alpha) z + (H - iG) \frac{c^2}{z} + \dots \right\} \quad (\text{ก-9})$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} G &= 2(B - A) \sin \alpha - (B_1 - A_1) \sin \alpha \\ &= 2 \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{3} \right) \sin \alpha - \left(\frac{2}{n^2} - \frac{2}{3n^2} - \frac{1}{3} \right) \sin \alpha \\ &= \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^2} - \frac{2}{3} - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3} \right) \sin \alpha \\ &= \left(-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{3} \right) \sin \alpha \\ &= -\left(\frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3} \right) \sin \alpha \\ H &= (B_1 - A_1) \cos \alpha \\ &= \left(\frac{2}{n^2} - \frac{2}{3n^2} - \frac{1}{3} \right) \cos \alpha \\ &= \left(\frac{4}{3n^2} - \frac{1}{3} \right) \cos \alpha \\ A_1 &= \frac{2}{3n^2} + \frac{1}{3} \\ B_1 &= \frac{2}{n^2} \\ A &= \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{3} \\ B &= \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

ภาคผนวก ข

ศักดิ์เชิงซ้อนในกรณีที่แห่งทรงกระบอกเคลื่อนที่โดยปราศจากการหมุน

ศักย์เชิงซ้อนในกรณีที่แท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่โดยปราศจากการหมุน

ในปัญหาของแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมรัศมี a วางขวางกั้นกระแสน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ในทิศทางลบของแกน OX ถ้าจุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมศักย์เชิงซ้อนคือ

$$\Omega = U \left(Z + \frac{a^2}{Z} \right) \quad (\text{ข-1})$$

ถ้าแท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ U ไปทางขวาของจุด O เราต้องเปลี่ยนรูปของศักย์เชิงซ้อนเป็น

$$\begin{aligned} \Omega &= U \left(Z + \frac{a^2}{Z} \right) - UZ \\ &= \frac{Ua^2}{Z} \end{aligned} \quad (\text{ข-2})$$

ซึ่งเราจะเห็นว่า

$$\psi = -\frac{Ua^2 Y}{X^2 + Y^2}$$

ดังนั้นบนแท่งทรงกระบอก ($X^2 + Y^2 = a^2$)

$$\psi = -\frac{Ua^2 Y}{a^2} = -UY$$

ซึ่งสอดคล้องกับผลลัพธ์

$$\psi = V_0 X - U_0 Y + \frac{1}{2} w(X^2 + Y^2) \quad (\text{ข-3})$$

ซึ่ง $V_0 = 0, U_0 = U$ และ $w = 0$

ในกรณีทั่วไปถ้า Ω เป็นศักย์เชิงซ้อนเมื่อ OXY เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $W = U_0 + iV_0$ เราจะได้

$$\Omega' = \Omega - \bar{W}Z \quad (\text{ข-4})$$

ดังนั้น

$$\psi' = \psi + \text{Im}(-\bar{W}Z)$$

บริเวณผิวนอกของแท่งทรงกระบอก $\psi = 0$ ทำให้ ψ' ที่ผิวนอกของแท่งทรงกระบอกเท่ากับ

$$V_0 X - U_0 Y$$

ซึ่งสอดคล้องกับผลลัพธ์ที่แสดงไว้แล้วว่า

$$\psi' = V_0 X - U_0 Y + \frac{1}{2} w(X^2 + Y^2) \quad (\text{ข-5})$$

โดยที่ $w = 0$

ตัวอย่างเช่น ในกรณีของแท่งทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมเท่ากันประกบกัน วางขวางกั้นทางเดินของน้ำที่ไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ U ในทิศทางลบของแกน OX ซึ่งมีศักย์เชิงซ้อน

$$\Omega = U \frac{2ci}{n} \cot\left(\frac{\zeta}{n}\right)$$

ซึ่ง $\zeta = \frac{n\pi}{2} + in$ และ $z = ic \cot \frac{1}{2}\zeta$ โดยที่ $1 < n < 2$

ถ้าเรากำหนดให้ระบบทั้งหมดเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว W ซึ่งจะทำให้แท่งทรงกระบอกเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว W และน้ำในบริเวณที่ห่างไกลจากแท่งทรงกระบอก ($Z \rightarrow \infty$) ก็จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $U_0 - U$ ในทิศทางบวกของแกน OX และความเร็ว V_0 ในทิศทางบวกของแกน OY เราจึงเพิ่มศักย์เชิงซ้อนเดิมอีกจำนวน $-\overline{W}Z$

ดังนั้นศักย์เชิงซ้อนใหม่ Ω' จึงเท่ากับ $\Omega - \overline{W}Z$ แต่

$$\frac{d\Omega}{dZ} \rightarrow U \text{ เมื่อ } Z \rightarrow \infty$$

ดังนั้น $\frac{d\Omega'}{dZ} \rightarrow (U - U_0) + V_0 i \text{ เมื่อ } Z \rightarrow \infty$

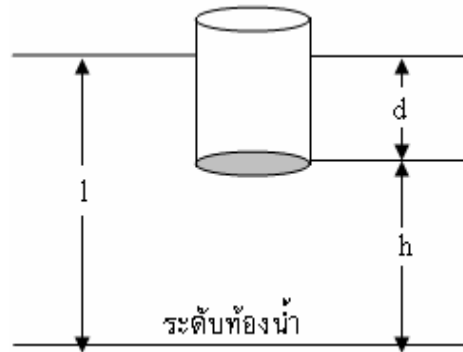
แสดงว่า $-q'_x + iq'_y \rightarrow (U - U_0) + V_0 i \text{ เมื่อ } Z \rightarrow \infty$

หรือ $q'_x \rightarrow (U - U_0) \text{ และ } q'_y \rightarrow V_0$

ภาคผนวก ค

ความหมายของ P_H (Hydrostatic pressure) และ P_D (Hydrodynamic pressure)

ความหมายของ P_H (Hydrostatic pressure) และ P_D (Hydrodynamic pressure)
ตามกฎของอาร์คิมิดีส น้ำหนักของแท่งทรงกระบอกเท่ากับน้ำหนักของน้ำที่ถูกแทนที่



ภาพที่ ค-1 แสดงลักษณะของแท่งทรงกระบอกที่ลอยในกระแสน้ำ

กำหนดให้

σ = พื้นที่หน้าตัดของแท่งทรงกระบอก

ρ = ความหนาแน่น(มวลของน้ำต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร)

h = ระดับของฐานของแท่งทรงกระบอกวัดจากท้องน้ำ

d = ส่วนลึกของแท่งทรงกระบอกที่อยู่ใต้ผิวน้ำ

g = แรงโน้มถ่วงของโลก

ปริมาตรของน้ำที่ถูกแทนที่เท่ากับ σd

ดังนั้นน้ำหนักของน้ำที่ถูกแทนที่เท่ากับ $(\sigma d)\rho g$ ในสภาวะที่น้ำอยู่นิ่งและแท่งทรงกระบอกไม่มีการเคลื่อนที่และอยู่ในลักษณะสมดุล จะมีแรงพยุงขึ้น (buoyant force) ซึ่งเป็นแรงสุทธิที่กระทำต่อแท่งทรงกระบอก(ไม่มีแรงดันข้าง)

ถ้ากำหนด P_H เรียกว่า Hydrostatic pressure ที่จุดต่างๆ บนฐานของแท่งทรงกระบอก ซึ่งมีขนาดเท่ากันทุก ๆ จุด

แรงพยุงขึ้นเท่ากับ $P_H \sigma$ = น้ำหนักของแท่งทรงกระบอก

$$= \text{น้ำหนักของน้ำที่ถูกแทนที่}$$

$$= \sigma d \rho g$$

(ค-1)

ดังนั้น

$$P_H = d \rho g$$

หรือ

$$\frac{P_H}{\rho} = dg$$

$$= (l - h)g$$

$$= lg - hg$$

ดังนั้น

$$\frac{P_H}{\rho} + gh = lg = \text{ค่าคงที่}$$

(ค-2)

ในสถานะที่น้ำเคลื่อนที่ ด้วยความเร็ว q และแท่งทรงกระบอกไม่เคลื่อนที่ กฎของอาร์คิเมดิส ยังคงใช้ได้ แต่ความดัน P จะประกอบด้วยความดัน P_H และ P_D ความดัน P_D เรียกว่า Hydrodynamic pressure ซึ่งเกิดขึ้นจากการไหลของน้ำ

ในกรณีนี้ $P = P_H + P_D$

ดังนั้นจากสมการแบร์นูลลี

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + gh = C \quad (\text{ค-3})$$

โดยที่ $|\vec{q}| = q$ และ $C = \text{ค่าคงที่}$

$$\frac{P_H + P_D}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + gh = C \quad (\text{ค-4})$$

$$\frac{P_D}{\rho} + \frac{P_H}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + gh = C$$

$$\begin{aligned} \frac{P_D}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 &= C - \left(\frac{P_H}{\rho} - gh \right) \\ &= C - \lg \\ &= C' \end{aligned} \quad (\text{ค-5})$$

ใน 2 มิติเรสมมุติให้ q ไม่เป็นฟังก์ชันของ Z หรือระดับความสูงของอนุภาคของน้ำที่วัดจากระดับท้องน้ำ ดังนั้น P_D จึงมีค่าเท่ากันที่ทุกจุดของน้ำที่มีตำแหน่ง (x, y) ใน 2 มิติเท่ากัน

เราจึงใช้ค่า P_D นี้สำหรับการคำนวณหาแรงและโมเมนต์บนแท่งทรงกระบอกได้โดยทั่วไป เราเขียน P แทน P_D ซึ่งหมายความว่า P ที่ปรากฏในงานวิจัยนี้ หมายถึง Hydrodynamic pressure นั้นเอง

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ : นายธนายุทธ ไยแก้ว
ชื่อวิทยานิพนธ์ : การศึกษาเชิงวิเคราะห์เกี่ยวกับผลกระทบที่เกิดจากการปะทะของน้ำบน
ผิวโค้งของแท่งทรงกระบอก
สาขาวิชา : คณิตศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ประวัติ

ประวัติส่วนตัว เกิดวันที่ 12 เดือนธันวาคม พ.ศ. 2520 เป็นบุตรคนที่ 2 ของ นายสมัย
ไยแก้ว และนางสำลี ไยแก้ว

ประวัติการศึกษา จบการศึกษาระดับปริญญาตรี จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น ปีการศึกษา
2542

สถานที่ติดต่อ บ้านเลขที่ 110 หมู่ 16 ตำบลบ้านขาม อำเภอน้ำพอง จังหวัดขอนแก่น
40140