

ภาคผนวก

- ก กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
- ข เอกสารการเรียนรู้เรื่อง ความน่าจะเป็น
- ค แบบทดสอบวัดผลการเรียนรู้เรื่องความน่าจะเป็น
- ง แบบวัดเจตคติต่อกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ
- จ ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ภาคผนวก ก

ก กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ และเอกสารการเรียนรู้เรื่อง ความน่าจะเป็น

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง กฎการนับเบื้องต้นและการเรียงสับเปลี่ยน

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายกฎการนับเบื้องต้นและใช้กฎการนับเบื้องต้นในการหาจำนวนวิธีของเหตุการณ์ที่กำหนดได้
2. อธิบายแนวคิดและบอกความแตกต่างเกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยนแต่ละแบบ
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับการนับและการเรียงสับเปลี่ยนหาคำตอบของปัญหาได้

สาระสำคัญ

1. กฎการนับเบื้องต้น
2. การเรียงสับเปลี่ยนแบบต่าง ๆ

สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารการเรียนรู้เรื่องกฎการนับเบื้องต้น และการเรียงสับเปลี่ยนแบบต่าง ๆ

ยุทธวิธีการจัดการเรียนรู้

1. แนะนำกิจกรรม

ผู้สอนเสนอสถานการณ์ปัญหาการเดินทาง เช่น “ต้องการเดินทางจากกรุงเทพมหานครไปยังจังหวัดเชียงใหม่ โดยผ่านจังหวัดพิษณุโลก จะสามารถเดินทางได้กี่เส้นทาง เมื่อมีเส้นทางจากกรุงเทพมหานครไปยังจังหวัดพิษณุโลก 4 เส้นทาง และเส้นทางจากจังหวัดพิษณุโลก 4 ไปยังจังหวัดเชียงใหม่ 3 เส้นทาง”

2. กิจกรรมการเรียนรู้

- 1) ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาคำตอบของปัญหาข้างต้น ว่าสามารถหาคำตอบได้อย่างไรบ้าง
- 2) ให้นักศึกษาเสนอแนวทางการหาคำตอบของแต่ละวิธี
- 3) ผู้สอนเสนอสถานการณ์ปัญหาที่มีจำนวนวิธีที่เป็นไปได้หลายวิธีและมีหลายขั้นตอนให้นักศึกษาหาคำตอบที่เป็นไปได้ เพื่อนำไปสู่การสรุปเป็นกฎการนับเบื้องต้น
- 4) ผู้สอนให้บทนิยามกฎการนับเบื้องต้น พร้อมยกตัวอย่างเพิ่มเติม จากนั้นผู้สอนเสนอสถานการณ์ปัญหาที่ 2

“ต้องการจัดนักศึกษา 3 คน สมมติว่าเป็น ก ข และ ค ให้ออกมารายงานหน้าชั้นเรียนทีละคน จะสามารถจัดได้กี่วิธีที่แตกต่างกัน”

- 5) ให้นักศึกษาคิดหาคำตอบ เมื่อได้แนวทางในการหาคำตอบแล้วขยายปัญหาให้มากขึ้น เช่น จัดนักศึกษา 10 คน ให้เข้าแถวเรียงลำดับกันทั้ง 10 คน จะจัดได้กี่วิธีและหาคำตอบได้อย่างไร
- 6) ผู้สอนให้ข้อตกลงเกี่ยวกับการหาผลคูณจำนวนนับ n ตัวแรก เช่น $n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)$ จะเขียนแทนด้วย $n!$ นั่นคือ $n! = n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)$
- 7) นำเสนอสถานการณ์การจัดเรียงสิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง แล้วสรุปเป็นบทนิยามของการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ r สิ่ง จากของทั้งหมด n สิ่ง ($r \leq n$)
- 8) ให้เสนอปัญหาการเรียงสิ่งของแบบต่าง เช่น เรียงเป็นวงกลม หรือเรียงสิ่งของที่มีของซ้ำกัน ให้นักศึกษาฝึกหาคำตอบ เพื่อนำไปสู่การให้บทนิยามของการเรียงสับเปลี่ยนแบบต่าง ๆ
- 9) ให้นักศึกษาฝึกหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนแบบต่าง ๆ เช่น เรียงเป็นวงกลม เรียงแบบที่มีของซ้ำกัน . . .
- 10) ให้นักศึกษาฝึกหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการเรียงสับเปลี่ยนแบบต่าง ๆ
- 11) ให้นักศึกษาแต่งโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ r สิ่งจากของทั้งหมด n สิ่ง

3. ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาสรุปความรู้เกี่ยวกับหลักการนับเบื้องต้นและการเรียงสับเปลี่ยนแบบต่าง ๆ

งานที่มอบหมาย

ให้นักศึกษาฝึกทำโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับกฎการนับเบื้องต้นและการเรียงสับเปลี่ยนท้ายเอกสารการเรียนรู้นอกเหนือจากการเรียนในชั้นเรียนปกติ

การวัดและประเมินผล

- 1) สังเกตการร่วมมือ การอภิปราย การแสดงความคิดเห็นและการชี้แจงเหตุผลในการหาคำตอบของปัญหา(ใช้แบบสังเกต)

2) การตรวจผลงานการแก้ปัญหาในเอกสารการเรียนรู้ โดยพิจารณาความถูกต้อง ความสมบูรณ์ของแนวคิดของการเชื่อมโยงความรู้ ความเหมาะสมในการแสดงเหตุผลในการคิด และเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาในแต่ละขั้นตอนของการหาคำตอบ

เอกสารการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง หลักการนับเบื้องต้นและการเรียงสับเปลี่ยน

(Fundamental Counting Principle and Permutations)

1. บทนำ

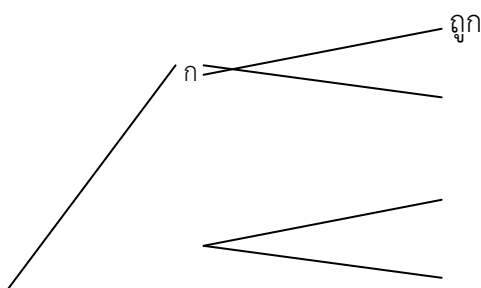
การนับมีความสำคัญในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนอกจากการนับจำนวนเบื้องต้นแล้ว ยังมีการนับที่เกิดจากการกระทำ เช่น สามารถเดินทางจากเมือง ก ไปเมือง ข ได้ 3 วิธี และจากเมือง ข ไปเมือง ค ได้ 2 จะมีวิธีเดินทางจากเมือง ก ไปเมือง ค โดยผ่านเมือง ข ได้กี่วิธี แนวคิดเกี่ยวกับการนับมีความสำคัญ สามารถนำมาใช้ในการหาคำตอบของปัญหาต่าง ๆ ได้ โดยเฉพาะปัญหาเกี่ยวกับความน่าจะเป็น และบางปัญหาที่มีความซับซ้อน อาจต้องใช้วิธีการนับที่มีลักษณะเฉพาะหรือใช้เทคนิคการนับ ในบทนี้จะกล่าวถึงการนับลักษณะต่าง ๆ เริ่มตั้งแต่ หลักการนับเบื้องต้น (Fundamental Counting Principle) การเรียงสับเปลี่ยน (Permutations) การจัดหมู่ (Combinations) และทฤษฎีบททวินาม (The Binomial Theorem) ส่วนเทคนิคการนับขั้นสูงจะนำเสนอในบทต่อไป

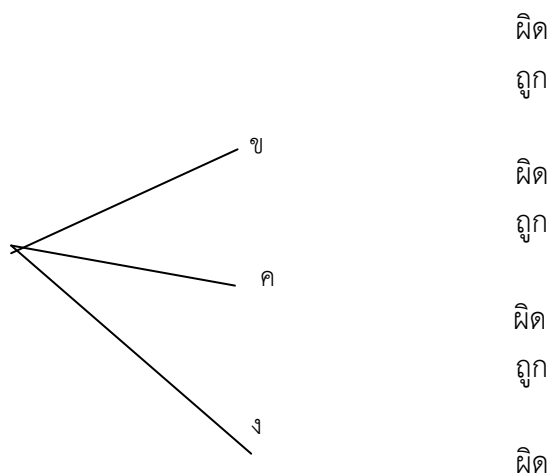
2. หลักการนับเบื้องต้น (Fundamental Counting Principle)

ในการทำข้อสอบที่เป็นแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก คือ ก ข ค และ ง จำนวน 1 ข้อและแบบถูก-ผิด อีก 1 ข้อ แสดงกรณีที่เป็นไปได้ของการทำข้อสอบทั้งสองข้อ ได้ดังแผนภาพ

ข้อ 1

ข้อ 2





แผนภาพ 1 แผนภาพต้นไม้แสดงกรณีที่เป็นไปได้ของการเลือกตอบข้อสอบทั้งสองข้อ

แผนภาพต้นไม้ เป็นการแจกกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดอย่างเป็นระบบของการทำข้อสอบทั้งสองข้อ จากแผนภาพ 1 จะพบว่า มีกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด 8 กรณี ดังนี้

ข้อ 1 เลือก ก และข้อ 2 เลือก	ถูก	แทนด้วย	(ก, ถูก)
ข้อ 1 เลือก ก และข้อ 2 เลือก	ผิด	แทนด้วย	(ก, ผิด)
ข้อ 1 เลือก ข และข้อ 2 เลือก	ถูก	แทนด้วย	(ข, ถูก)
ข้อ 1 เลือก ข และข้อ 2 เลือก	ผิด	แทนด้วย	(ข, ผิด)
ข้อ 1 เลือก ค และข้อ 2 เลือก	ถูก	แทนด้วย	(ค, ถูก)
ข้อ 1 เลือก ค และข้อ 2 เลือก	ผิด	แทนด้วย	(ค, ผิด)
ข้อ 1 เลือก ง และข้อ 2 เลือก	ถูก	แทนด้วย	(ง, ถูก)
ข้อ 1 เลือก ง และข้อ 2 เลือก	ผิด	แทนด้วย	(ง, ผิด)

หากมีกรณีที่ต้องพิจารณาจำนวนมาก จะใช้แผนภาพต้นไม้แจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะไม่สะดวก นักคณิตศาสตร์จึงพัฒนาวิธีการนับให้สามารถหาจำนวนวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด โดยไม่ต้องสร้างแผนภาพต้นไม้ ด้วยวิเคราะห์ถึงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทำข้อสอบแต่ละข้อ จะพบว่า ข้อ 1 มีวิธีเลือกตอบได้ 4 วิธี คือ ก ข ค หรือ ง แต่ละวิธีที่เลือกตอบในข้อ 1 สามารถเลือกตอบข้อ 2 ได้ 2 วิธี คือ ถูก หรือ ผิด ซึ่งจะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $4 \times 2 = 8$ วิธี จึงให้เป็นบทนิยามของการนับ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 (The Fundamental Counting Principle)

ให้ $E_1, E_2, \dots, E_n$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน ถ้า E_i มีจำนวนวิธีที่แตกต่างกัน m_i วิธี สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ แล้วจะมีจำนวนวิธีที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ วิธี

ตัวอย่าง 1 เลขหมายโทรศัพท์ จะประกอบด้วยตัวเลข 10 หลัก โดย 3 หลักแรกเป็นเลขหมายของเครือข่าย เช่น 081 แล้วตามด้วยเลขหมายโทรศัพท์ ถ้าเลขหมายหลักแรกต้องไม่เป็นเลข 0 และ 1 จงหาจำนวนเลขหมายทั้งหมดของเครือข่ายนี้

วิธีทำ เลขหมายของระบบ จะประกอบด้วย

เลขหมายเครือข่าย			เลขหมายโทรศัพท์						
			1	2	3	4	5	6	7
0	8	1							

จากหลักของตัวเลขที่เหลือ 7 หลัก หลักที่ 1 เลือกได้ 8 ตัว คือ 2 ถึง 9 หลักที่เหลือสามารถเลือกได้ 10 ตัว

ดังนั้น จำนวนเลขหมายที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเครือข่าย 081

$$\text{คือ } 8 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 8 \times 10^6 \\ = 8,000,000 \text{ เลขหมาย}$$

ตัวอย่าง 2 ปัจจุบันนี้เทคโนโลยีมีความก้าวหน้า การให้บริการต่าง ๆ จึงนิยมให้บริการผ่านระบบหรือเครือข่ายโดยใช้เทคโนโลยี เช่น การเบิกถอนเงิน โดยใช้บัตร ATM (Automated Teller Machine) ซึ่งเจ้าของบัตรจะมีรหัสส่วนบุคคล หรือ PIN (Personal Identification Number) จงหาจำนวน PINS ทั้งหมดที่เป็นไปได้

วิธีการ รหัสส่วนบุคคล จะประกอบด้วย ตัวเลข 4 หลัก ที่เป็นอิสระต่อกัน ประกอบด้วย หลักที่

1	2	3	4

หลักที่ 1 จะสามารถเลือกตัวเลขได้ 0 ถึง 9 มี 10 ตัว

หลักที่ 2 จะสามารถเลือกตัวเลขได้ 0 ถึง 9 มี 10 ตัว

หลักที่ 3 จะสามารถเลือกตัวเลขได้ 0 ถึง 9 มี 10 ตัว

หลักที่ 4 จะสามารถเลือกตัวเลขได้ 0 ถึง 9 มี 10 ตัว

ดังนั้น จำนวนรหัสส่วนบุคคล จะมี $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10,000$ รหัส

3. การเรียงสับเปลี่ยน (Permutations)

การจัดเรียงสิ่งต่าง ๆ โดยถือลำดับของการจัดเรียงเป็นสำคัญ จะเรียกว่า การเรียงสับเปลี่ยน เช่น จัดนักศึกษา 3 คน สมมติว่าเป็น ก ข และ ค การออกมารายงานหน้าชั้น ครั้งแรกมีสิทธิเลือกได้ 3 กรณี คือ ก ข หรือ ค เมื่อเลือกคนแรกแล้วมีสิทธิเลือกคนที่ 2 ได้เพียง 2 กรณีที่เหลือจากกรณีแรก กล่าวคือ ถ้าครั้งแรกเลือกได้ ก ครั้งที่สองจะเลือกได้ ข หรือ ค และการเลือกคนที่ 3 มีสิทธิเลือกได้เพียง กรณีเดียวที่เหลือจากการเลือกคนแรก และคนที่ 2 การดำเนินการเลือกเป็นการทำงาน 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกคนแรก เลือกได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกคนที่สอง เลือกได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกคนที่สาม เลือกได้ 1 วิธี

ดังนั้น จากหลักการนับเบื้องต้น จะได้ จำนวนวิธีทั้งหมด คือ $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี คือ

ก ข ค , ก ค ข , ข ก ค , ข ค ก , ค ก ข , ค ข ก

ในทำนองเดียวกัน หากเป็นการเลือกนักศึกษา 10 คน จะมีจำนวนวิธีที่เลือกได้ทั้งหมด

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3,628,800 \text{ วิธี}$$

เพื่อความสะดวก เรานิยมเขียนแทนการคูณกันของจำนวนนับที่เรียงลำดับ เช่น $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ โดยใช้สัญลักษณ์แฟคทอเรียล ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2 สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$n!$ อ่านว่า “เอ็นแฟคทอเรียล (n-factorial)”

$$\text{เช่น } 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ข้อตกลง $0! = 1$

ลักษณะของการเรียงสับเปลี่ยน

1. การเรียงสับเปลี่ยน เป็นการจัดเรียงลำดับของที่มีอยู่ จากชุดของสิ่งของ
2. ไม่มีการจัดซ้ำ เช่น AA
3. ถือลำดับของการจัดเรียงเป็นสำคัญ เช่น AB กับ BA ถือว่าเป็นวิธีที่แตกต่างกัน

หากมีสิ่งของจำนวนมาก ๆ เช่น มีสิ่งของ n สิ่ง จะสามารถหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนได้ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3 ถ้ามีสิ่งของอยู่ทั้งหมด n สิ่ง ในการนำมาจัดเรียงสับเปลี่ยน จะสามารถจัดเรียงได้

$$n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง 3 มีหนังสือที่แตกต่างกัน 5 เล่ม จะจัดเรียงหนังสือทั้ง 5 เล่มนี้บนชั้น ได้กี่วิธี

วิธีทำ หนังสือ 5 เล่ม แตกต่างกันให้เป็นเล่มที่ 1, 2, 3, 4 และ 5 จัดเรียงบนชั้น จะจัดได้

ตำแหน่งที่	1	2	3	4	5
จัดเรียงได้	5	4	3	2	1

ดังนั้น สามารถจัดเรียงได้ $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ วิธี

มีสิ่งของอยู่ทั้งหมด n สิ่ง ในการนำมาจัดเรียงสับเปลี่ยน หากไม่จำเป็นต้องนำมาจัดเรียงทั้งหมด จะเรียกว่า เป็นการจัดเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง ($r \leq n$) เช่น การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของจากของทั้งหมด 4 สิ่ง คือ a, b, c และ d จะมีวิธีการเรียงสับเปลี่ยนได้ดังนี้

วิธีการเรียงสับเปลี่ยน

ทีละ 1 สิ่ง ($r=1$)	ทีละ 2 สิ่ง ($r=2$)	ทีละ 3 สิ่ง ($r=3$)	ทีละ 4 สิ่ง ($r=4$)
-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

a	ac	abc	cab	abcd	cabd
	ac	abd	cad	abdc	cadb
	ad	acb	cba	acbd	cbad
b	ba	acd	cbd	acdb	cbda
	bc	adb	cda	adbc	cdab
	bd	adc	cdb	adcb	cdba
c	ca	bac	dab	badc	dabc
	cb	bad	dac	badc	dacb
	cd	bca	dba	bcad	dbac
d	da	bcd	dbc	bcda	dbca
	db	bda	dca	bdac	dcab
	dc	bdc	dcb	bdca	dcba
4 วิธี	12 วิธี	24 วิธี		24 วิธี	

ข้อสังเกต ในกรณีที่มีจำนวนวิธีที่เป็นไปได้หลายวิธี การแจกแจงทุกกรณีจะไม่สะดวก จึงนิยามวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง โดยนำมาจัดเรียงเพียง r สิ่ง โดยใช้บทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4 การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ r สิ่ง จากของทั้งหมด n สิ่ง ($r \leq n$) จะเขียนแทนด้วย nP_r หรือ nPr หรือ $P(n,r)$ โดยที่

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

ตัวอย่าง 4 กำหนดสิ่งของชุดหนึ่งมีอยู่ 4 สิ่ง นำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนคราวละ 1 สิ่ง 2 สิ่ง 3 สิ่ง 4 สิ่ง ได้กี่วิธี

วิธีทำ 1. มีสิ่งของ 4 สิ่ง ให้เป็น a, b, c, d นำมาจัดเรียงคราวละ 1 สิ่ง จัดได้ 4 วิธี คือ a

$$\text{หรือ b หรือ c หรือ d หรือจัดเรียงได้ } {}^4P_1 = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

2. มีสิ่งของ 4 สิ่ง ให้เป็น a, b, c, d นำมาจัดคราวละ 2 สิ่ง จัดได้

$${}^4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 2 = 12 \text{ วิธี คือ}$$

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc

3. มีสิ่งของ 4 สิ่ง นำมาจัดเรียงคราวละ 3 สิ่ง จัดได้

$${}^4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 24 \text{ วิธี}$$

4. มีสิ่งของ 4 สิ่ง นำมาจัดเรียงคราวละ 4 สิ่ง

$$\text{จัดได้ } {}^4P_4 = \frac{4!}{(4-0)!} = \frac{4!}{0!} = 4! = 24 \text{ วิธี}$$

ข้อสังเกต $P(n,n) = n!$

$$P_{(n,1)} = n$$

ตัวอย่าง 5 มีหนังสืออยู่ 5 เล่มแตกต่างกัน นำมาจัดเรียงบนชั้นเพียง 3 เล่ม จะมีจำนวนวิธีจัดเรียงได้กี่วิธี

วิธีทำ มีหนังสือทั้งหมด 5 เล่ม แตกต่างกัน
นำมาจัดเรียงเพียง 3 เล่ม

$$\begin{aligned}\text{สามารถจัดเรียงได้ } {}^5P_3 &= \frac{5!}{(5-3)!} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1} \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ &= 60 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6 มีนักเรียน 10 คน จะจัดนักเรียน 3 คน เป็นตัวแทนกลุ่มเข้ารับรางวัล 3 รางวัล คือ รางวัลที่ 1 รางวัลที่ 2 และรางวัลที่ 3 คนละหนึ่งรางวัล ได้กี่วิธี

วิธีทำ จากนักเรียน 10 คน สามารถจัดนักเรียนเข้ารับรางวัลที่ 1 ได้ 10 วิธี
เหลือนักเรียนอีก 9 คน สามารถจัดนักเรียนเข้ารับรางวัลที่ 2 ได้ 9 วิธี
เหลือนักเรียนอีก 8 คน สามารถจัดนักเรียนเข้ารับรางวัลที่ 3 ได้ 8 วิธี
ดังนั้น สามารถจัดนักเรียน 10 คน เข้ารับรางวัลได้ $10 \times 9 \times 8 = 720$ วิธี
หรืออาจใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนในการหาจำนวนวิธีทั้งหมด ซึ่งทำได้ดังนี้

มีนักเรียนทั้งหมด 10 คน

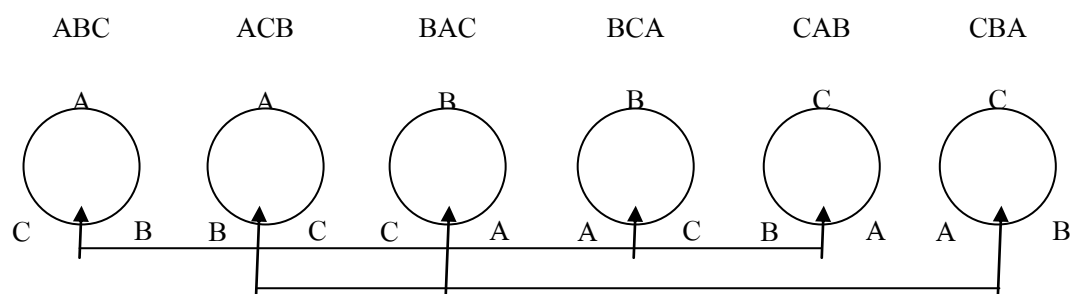
จัดให้เข้ารับรางวัล 3 รางวัล

$$\begin{aligned}\text{สามารถจัดได้ } {}^{10}P_3 &= \frac{10!}{(10-3)!} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} \\ &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \\ &= 720 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

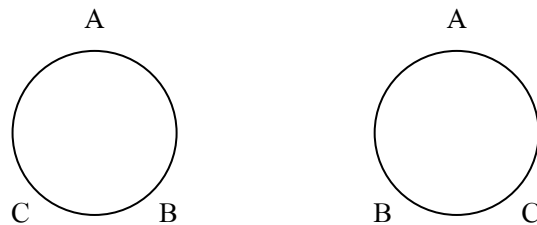
ดังนั้น สามารถจัดนักเรียน 10 คน เข้ารับรางวัลได้ 720 วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม

มีคนอยู่ 3 คน ให้เป็น A, B และ C หากนำทั้ง 3 คน มาเรียงเป็นแถว จะได้จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนเป็น 6 วิธี คือ ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA หากนำทั้ง 6 วิธีข้างต้นมาจัดเรียงเป็นวงกลม ในแต่ละวิธีจะจัดเรียงได้ ดังนี้



การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม จะถือลำดับเป็นสำคัญ เช่น A B C กับ B C A กับ C A B จะถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน ดังนั้น จาก 6 วิธี ข้างต้น เมื่อนำมาจัดเรียงเป็นวงกลม จะถือว่าจัดเรียงได้เพียง 2 วิธี ที่แตกต่างกัน คือ



เพราะ ABC กับ BCA กับ CAB ถือเป็นวิธีเดียวกัน
และ ACB กับ BAC กับ CBA ถือเป็นวิธีเดียวกัน

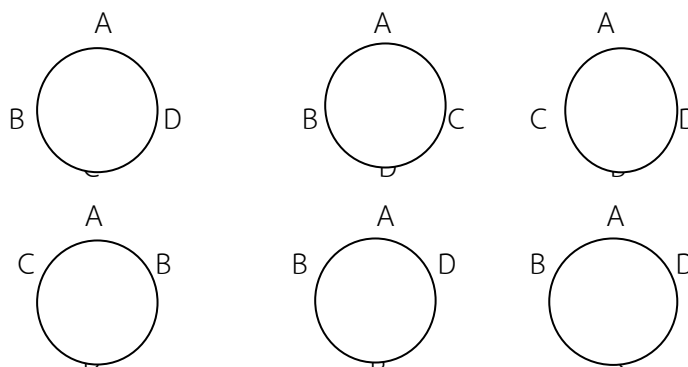
ทำนองเดียวกัน ถ้ามีคนอยู่ 4 คน ให้เป็น A, B, C และ D นำทั้ง 4 คน มาจัดเรียงเป็นแถว จะจัดเรียงได้ 24 วิธี คือ

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

จาก จำนวนวิธีเรียง

สับเปลี่ยนทั้ง 24 วิธี นำมาจัดเรียงเป็นวงกลม จะจัดเรียงได้ทั้งหมด

6 วิธีที่แตกต่างกัน คือ



จากการรวมชุดเดียวกันเข้าด้วยกันของการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลม จะได้ผลการจัดเรียงดังบทนิยาม

บทนิยาม 5 วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน เป็นวงกลม จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด เท่ากับ $(n - 1)!$ วิธี

ตัวอย่าง 7 จัดให้คน 5 คน นั่งรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี

วิธีทำ มีคนอยู่ 5 คน จัดให้นั่งรอบโต๊ะกลม
จัดได้ $(5-1)! = 4! = 24$ วิธี

ตัวอย่าง 8 จะจัดวางกระถางต้นไม้ 8 กระถางรอบเสาธงได้กี่แบบ

วิธีทำ มีกระถางต้นไม้ 8 กระถาง นำมาจัดเรียงรอบเสาธง
จะจัดได้ $(8-1)! = 7! = 5040$ วิธี

บางครั้งสิ่งที่นำมาจัดเรียงอาจเหมือนกัน เช่นตัวอักษร AA ซึ่งจะใช้ตัวอักษรใดก่อนหรือหลังก็เหมือนกัน ดังนั้นในการหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหมือนกันได้ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6 วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน นำมาจัดเรียงเป็นวงกลมคราวละ r

$$\text{สิ่ง} \quad \text{จะได้จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดเท่ากับ} \quad \frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r}$$

ตัวอย่าง 9 งานเลี้ยงสังสรรค์ครั้งหนึ่ง มีผู้มาในงาน 15 คน จะเล่นเกมเก้าอี้ดนตรีเป็นวงกลม
10 ตัว จะจัดคนเข้านั่ง ได้กี่วิธี

วิธีทำ มีผู้มาในงานเลี้ยงทั้งหมด 15 คน จัดให้นั่งเก้าอี้เป็นวงกลมทีละ 10 คน
จัดได้ $\frac{15!}{(15-10)!10} = 1,089,728,640$ วิธี

ตัวอย่าง 10 จะจัดคน 5 คน จาก 10 คน ให้ร่วรอบกองไฟ ได้กี่วิธี

วิธีทำ มีทั้งหมด 10 คน ให้ร่วรอบกองไฟครั้งละ 5 คน
จัดได้ $\frac{10!}{(10-5)!5} = 6,048$ วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนของซึ่งมีบางสิ่งเหมือนกันหรือซ้ำกัน

บทนิยาม 7 ถ้ามีของ n สิ่ง แบ่งเป็น k กลุ่มที่แตกต่างกัน โดยกลุ่มที่ 1 มีของเหมือนกัน n_1 สิ่ง กลุ่มที่ 2 มีของเหมือนกัน n_2 สิ่ง ... และกลุ่มที่ k มีของเหมือนกัน n_k สิ่ง ซึ่ง $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนของทั้ง n สิ่งนั้นเป็นแนวตรงได้

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} \quad \text{วิธี}$$

ตัวอย่าง 11 ในการสลับตัวอักษรจากคำว่า “CANADA” ให้เป็นคำใหม่ จะได้คำใหม่ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่คำ โดยคำใหม่ที่ได้ไม่สนใจว่าจะมีความหมายหรือไม่

วิธีทำ จากคำว่า “CANADA” มีตัวอักษรทั้งหมด 6 ตัว มีตัวอักษร A ซ้ำกัน 3 ตัว

$$\begin{aligned}\text{จัดเรียงเป็นคำใหม่ จะได้คำใหม่ทั้งหมด} \quad \frac{6!}{3!1!1!1!} &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 120 \text{ คำ}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 12 ในการสลับตัวอักษรจากคำว่า “RUSSELL” ให้เป็นคำใหม่ จะได้คำใหม่ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่คำ โดยคำใหม่ที่ได้ไม่สนใจว่าจะมีความหมายหรือไม่

วิธีทำ จากคำว่า “RUSSELL” มีอักษรทั้งหมด 7 ตัว มีตัวอักษร S ซ้ำกัน 2 ตัว ตัวอักษร L ซ้ำกัน 2 ตัว

$$\begin{aligned}\text{จัดเรียงเป็นคำใหม่ จะได้คำใหม่ทั้งหมด} \quad \frac{7!}{2!2!1!1!1!} &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2} \\ &= 1,260 \text{ คำ}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 13 ในการสลับอักษรจากคำว่า “MISSISSIPPI” ให้เป็นคำใหม่ จะได้คำใหม่ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่คำ โดยคำใหม่ที่ได้ไม่สนใจว่าจะมีความหมายหรือไม่

วิธีทำ จากคำว่า “MISSISSIPPI” มีอักษรทั้งหมด 11 ตัว มีตัวอักษร I ซ้ำกัน 4 ตัว ตัวอักษร S ซ้ำกัน 4 ตัว และตัวอักษร P ซ้ำกัน 2 ตัว

$$\begin{aligned}\text{จัดเรียงเป็นคำใหม่ จะได้คำใหม่ทั้งหมด} \quad \frac{11!}{4!4!2!1!} &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!4 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \\ &= 34,650 \text{ คำ}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 14 การให้สัญญาณ โดยการแขวนธงบนยอดเสาซึ่งมีธงอยู่ 10 ผืนเหมือนกันต่างกัน เฉพาะสี มีสีแดง 3 ผืน สีน้ำเงิน 2 ผืน สีดำ 4 ผืน และสีขาว 1 ผืน จะให้สัญญาณโดยการแขวนธงทั้ง 10 ผืน บนยอดเสาเรียงกันเป็นแนวดิ่งได้กี่สัญญาณ

วิธีทำ มีธงอยู่ 10 ผืน สีแดง 3 ผืน สีน้ำเงิน 2 ผืน สีดำ 4 ผืน และสีขาว 1 ผืน

$$\begin{aligned}\text{จัดเรียงสัญญาณได้} \quad \frac{10!}{3!2!4!1!} &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} \\ &= 12,600 \text{ สัญญาณ}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1

1. ให้ $A = \{a, b, c\}$ จงเขียนการเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิกของเซต A
2. จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
3. จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ที่ลงท้ายด้วย a
4. ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - 4.1 จงเขียนแจกแจงการเรียงสับเปลี่ยนที่มีสมาชิก 3 ตัวที่ได้จาก S
 - 4.2 จงเขียนแจกแจงการจัดหมู่ที่มีสมาชิก 3 ตัวที่ได้จาก S
5. จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้

5.1 $P(6, 3)$	5.2 $P(6, 5)$	5.3 $P(8, 1)$
5.4 $P(8, 5)$	5.5 $P(8, 8)$	5.6 $P(10, 9)$
6. จงหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่มีสมาชิก 5 ตัว จากเซตที่มีสมาชิก 11 ตัว
7. นักศึกษาคนหนึ่งเป็นนักศึกษาชาย n คนและนักศึกษาหญิง n คน จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงนักศึกษาชายและหญิงสลับกัน
8. จงหาจำนวนวิธีในการเลือกตัวอักษร 5 ตัว จากพยัญชนะภาษาอังกฤษ 26 ตัว
9. จงหาจำนวนเซตย่อยที่มีสมาชิกมากกว่า 2 ตัว จากเซตที่มีสมาชิก 100 ตัว
10. จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงตัวเลขโดดในระบบฐานสอง ความยาว 10
 - 10.1 ที่มี 0 เพียง 3 ตัว
 - 10.2 มี 1 อย่างน้อย 7 ตัว
 - 10.3 มี 1 อย่างน้อย 3 ตัว

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง การจัดหมู่และทฤษฎีบททวินาม

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายพร้อมยกตัวอย่างการจัดหมู่ได้
2. ใช้การจัดหมู่ในการหาคำตอบเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันได้
3. ใช้ทฤษฎีบททวินามหาพจน์ใด ๆ ของการกระจาย $(x + y)^n$
4. ใช้ทฤษฎีบททวินามหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ต้องการได้

สาระสำคัญ

1. การจัดหมู่
2. ทฤษฎีบททวินาม

สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารการเรียนรู้เรื่องการจัดหมู่ และทฤษฎีบททวินาม

ยุทธวิธีการจัดการเรียนรู้

1. นำเสนอสถานการณ์ปัญหา

ผู้สอนนำเสนอสถานการณ์ปัญหาที่ 1 “ต้องการจัดตัวแทน 3 คน จากทั้งหมด 4 คน จะสามารถจัดได้กี่วิธี” ถ้าจัดเรียงลำดับจะจัดได้ $P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

แต่ถ้าไม่สนใจลำดับที่ จะจัดได้กี่วิธี โดยให้นักศึกษาทดลองจัดกลุ่มจากสมาชิก 4 คน เมื่อนักศึกษาแต่ละกลุ่มได้จำนวนวิธีการจัดกลุ่มแล้วตรวจสอบคำตอบของแต่ละกลุ่มว่าเท่ากันหรือไม่ ถ้าไม่เท่ากัน มีวิธีใดเหมือนกันบ้าง

2. กิจกรรมการเรียนรู้

- 1) ให้นักศึกษาลองจัดกลุ่มของสิ่งของ 3 สิ่ง ให้เป็น A, B และ C โดยจัดที่ละ 1 สิ่ง 2 สิ่ง และ 3 สิ่ง
- 2) ให้นักศึกษาแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน แล้วให้พิจารณาการจัดกลุ่มตัวแทน 3 คน จากทั้งหมด 4 คน คือ A, B, C และ D แล้วให้สรุปผลการจัดกลุ่มจากข้อ 1) และ 2) เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปของบทนิยามการจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของ n สิ่ง
- 3) ให้นักศึกษาเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ พร้อมฝึกหาจำนวนวิธีการจัดหมู่ของสิ่งของตามเงื่อนไขที่กำหนด
- 4) ให้นักศึกษาฝึกตั้งโจทย์เกี่ยวกับการจัดหมู่ตามเงื่อนไขที่กำหนด
- 5) ยกตัวอย่างการหาผลคูณของ $(a+b)^n$ โดยเริ่มจาก $n = 1, 2, 3$ แล้วนำไปคาดการณ์ผลคูณของ $(a+b)^n$ เมื่อ $n = 4, 5, \dots$ นำไปสู่การหาผลคูณของ $(a+b)^n$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

5) ให้นักศึกษาสังเกตสัมประสิทธิ์และตัวแปรของการกระจาย $(a+b)^n$ เชื่อมโยงกับทฤษฎีบทของทฤษฎีการจัดหมู่ เพื่อนำไปสู่การได้มาของ สัมประสิทธิ์ของการกระจาย

7) จากการกระจาย $(a+b)^n$ ให้นักศึกษาสังเกตพจน์ที่ k ของการกระจาย เมื่อ $n \geq k$ แล้วอธิบายความสัมพันธ์ที่พบ แล้วให้นักศึกษาหาพจน์ที่ k โดยใช้ความสัมพันธ์ที่ได้จากข้อก่อนหน้านี้

3. ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาสรุปแนวคิดของการจัดหมู่และทฤษฎีบททวินาม พร้อมอธิบายถึงประโยชน์ของการจัดหมู่และทฤษฎีบททวินาม

งานที่มอบหมาย

ให้นักศึกษาฝึกทำโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการจัดหมู่และทฤษฎีบททวินาม ทำเอกสารการเรียนรู้ นอกเหนือจากการเรียนในชั้นเรียนปกติ

การวัดและประเมินผล

1) สังเกตการร่วมมือ การอภิปราย การแสดงความคิดเห็นและการชี้แจงเหตุผลในการหาคำตอบของปัญหา(ใช้แบบสังเกต)

2) การตรวจผลงานการแก้ปัญหาในเอกสารการเรียนรู้ โดยพิจารณาความถูกต้อง ความสมบูรณ์ของแนวคิดของการเชื่อมโยงความรู้ ความเหมาะสมในการแสดงเหตุผลในการคิด และเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาในแต่ละขั้นตอนของการหาคำตอบ

เอกสารการเรียนรู้ 2

เรื่อง การจัดหมู่และทฤษฎีบททวินาม

ถ้ามีสิ่งของ n สิ่ง นอกจากนำมาจัดเรียงโดยยึดลำดับหรือตำแหน่งของการจัดเรียงแล้ว อาจใช้เลือกสิ่งของตามจำนวนที่กำหนดได้ ซึ่งการเลือกสิ่งของนี้จะไม่สนใจลำดับหรือตำแหน่งของสิ่ง

ที่เลือก ขอให้จำนวนตามที่กำหนดเท่านั้น เช่น ต้องการตัวแทน 3 คน จากกลุ่มของคน 5 คน ซึ่งไม่สนใจว่าใครจะได้ใครก่อนหรือหลัง เราต้องการจำนวนคนที่ครบตามกำหนดเท่านั้น ถ้าให้กลุ่มของคน 5 คน เป็น $\{A, B, C, D, E\}$ ตัวแทนอาจเป็น $\{A, B, C\}$ หรือ $\{A, C, E\}$ หรือ $\{B, D, E\}$ ก็ได้ แต่ถ้าตัวแทนเป็น $\{A, C, E\}$ กับ $\{C, E, A\}$ จะถือว่าเป็นคนชุดเดียวกัน จะนับเป็นเพียง 1 วิธี การเลือกเช่นนี้จะเรียกว่า **การจัดหมู่ (combination)**

บทนิยาม 2.1 การจัดสิ่งของ r สิ่ง จากทั้งหมด n สิ่ง โดยไม่คำนึงถึงลำดับก่อนหลัง

จะเรียกว่า **การจัดหมู่** การจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง จากทั้งหมด n สิ่ง เขียนแทนด้วย

$$C(n, r) \text{ โดยที่ } C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

หมายเหตุ $C(n, r)$ บางครั้งอาจแทนด้วย nC_r หรือ $\binom{n}{r}$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาจำนวนวิธีการจัดหมู่ของ 3 สิ่ง โดยเลือกทีละ 1 สิ่ง 2 สิ่ง และ 3 สิ่ง
วิธีทำ ให้ของ 3 สิ่งนั้นเป็น $\{a, b, c\}$ จะมีจำนวนวิธีการจัดหมู่ ดังตาราง

เลือกทีละ 1 สิ่ง ($r=1$)	เลือกทีละ 2 สิ่ง ($r=2$)	เลือกทีละ 3 สิ่ง ($r=3$)
$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$
$\{b\}$	$\{a, c\}$	
$\{c\}$	$\{b, c\}$	

ผลการจัดหมู่สิ่งของดังกล่าวสอดคล้องกับบทนิยาม ต่อไปนี้

จัดทีละ 1 สิ่ง จะจัดได้ 3 วิธี คือ $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

จัดทีละ 2 สิ่ง จะจัดได้ 3 วิธี คือ $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$

จัดทีละ 3 สิ่ง จะจัดได้ 1 วิธี คือ $\{a, b, c\}$

ตัวอย่าง 2.2 จงหาจำนวนวิธีในการเลือกตัวอักษร 3 ตัว จากตัวอักษร 5 ตัว

วิธีทำ พิจารณาโดยใช้บทนิยาม จะเป็นการเลือกสิ่งของ 3 สิ่งจากสิ่งของ 5 สิ่ง

$$\begin{aligned}
 \text{จะเลือกได้ } C(5, 3) &= \frac{5!}{(5-3)!3!} \\
 &= \frac{5!}{2!3!} \\
 &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

นั่นคือ จะมีวิธีเลือกตัวอักษร 3 ตัว จากตัวอักษร 5 ตัวได้ 10 วิธี

เมื่อพิจารณากรณีที่เป็นไปได้ในการเลือกตัวอักษร 3 ตัว จากตัวอักษร 5 ตัว คือ $\{A,B,C,D,E\}$ จะสามารถจัดได้เป็น $\{A,B,C\}$ $\{A,B,D\}$ $\{A,B,E\}$ $\{A,C,D\}$ $\{A,C,E\}$ $\{A,D,E\}$ $\{B,C,D\}$ $\{B,C,E\}$ $\{B,D,E\}$ และ $\{C,D,E\}$ ซึ่งมีอยู่ 10 วิธี จะเห็นว่าผลของการจัดตัวอักษร 3 ตัวจากตัวอักษร 5 ตัว ก็คือการหาเซตย่อยที่มีสมาชิก 3 ตัว จากเซตที่มีสมาชิก 5 ตัว ดังนั้น ถ้าต้องการจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง จึงเป็นการพิจารณาเซตย่อยที่มีสมาชิก r ตัว จากเซตที่มีสมาชิก n ตัว นั่นเอง

ตัวอย่าง 2.3 จงหาจำนวนวิธีในการเลือกตัวแทนเข้าแข่งขันเล่นเกมชนิดหนึ่ง จำนวน 5 คน จากผู้สมัคร 10 คน

วิธีทำ การเลือกตัวแทน 5 คน จากผู้สมัคร 10 คน

$$\begin{aligned}\text{สามารถเลือกได้ } C(10,5) &= \frac{10!}{(10-5)!5!} \\ &= \frac{(10)(9)(8)(7)(6)(5)!}{5!5!} \\ &= 252\end{aligned}$$

ดังนั้น สามารถเลือกตัวแทนเข้าแข่งขันได้ 252 วิธี

ตัวอย่าง 2.4 ในการจัดการแข่งขันฟุตบอลมีสโมสรส่งเข้าแข่งขันทั้งหมด 8 สโมสร โดยจัดการแข่งขันแบบพบกันหมด จงหาว่าคณะกรรมการจะต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดกี่ครั้ง

วิธีทำ มีสโมสรส่งเข้าแข่งขันทั้งหมด 8 สโมสร แข่งขันแบบพบกันหมด

$$\begin{aligned}\text{จะมีจำนวนการแข่งขันทั้งหมด } C(8,2) &= \frac{8!}{(8-2)!2!} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2!} \\ &= 28\end{aligned}$$

นั่นคือ จะต้องมีการจัดการแข่งขันทั้งหมด 28 ครั้ง

ตัวอย่าง 2.5 จงหาจำนวนวิธีในการเลือกตัวแทนจากสาขาวิชาคณิตศาสตร์จำนวน 3 คน จากทั้งหมด 9 คน และเลือกตัวแทนจากสาขาวิชาภาษาอังกฤษ จำนวน 4 คน จากทั้งหมด 10 เพื่อเป็นกรรมการในการพัฒนารายวิชาภาษาอังกฤษสำหรับคณิตศาสตร์

วิธีทำ เนื่องจากการเลือกกรรมการครั้งนี้เป็นการเลือกกรรมการ 2 ชุด ชุดแรกเป็นกรรมการจากสาขาวิชาคณิตศาสตร์ และชุดที่สองเป็นกรรมการจากสาขาวิชาภาษาอังกฤษ จึงเป็นการเลือก 2 ขั้นตอน จึงต้องใช้กฎการคูณ

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } C(9,3) \cdot C(10,4) &= \frac{9!}{(9-3)!3!} \cdot \frac{10!}{(10-4)!4!} \\ &= \frac{9!}{6!3!} \cdot \frac{10!}{6!4!}\end{aligned}$$

$$= (84)(330)$$

$$= 27,720$$

ดังนั้น สามารถเลือกตัวแทนเป็นกรรมการพัฒนารายวิชาได้ 27,720 วิธี

ทฤษฎีบททวินาม (The Binomial Theorem)

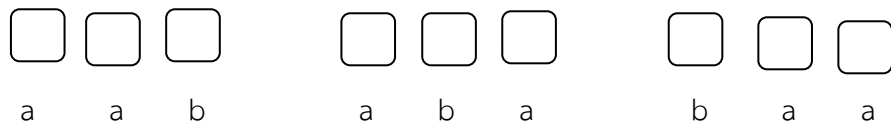
ทฤษฎีบททวินาม นำมาใช้ในการแสดงการกระจาย $(a+b)^n$ ซึ่งใช้ความรู้เกี่ยวกับการจัดหมู่ในการหาจำนวนสัมประสิทธิ์ของการกระจาย ก่อนจะกล่าวถึงทฤษฎีบททวินาม จะเริ่มทำความเข้าใจเกี่ยวกับการจัดเรียงตัวอักษร (bit strings) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.6 จงหาจำนวนค่าที่เกิดจากการใช้ตัวอักษร a และ b ตามเงื่อนไข

1. จัดตัวอักษร a สองตัวและ b หนึ่งตัว
2. จัดตัวอักษร a สองตัวและ b สามตัว
3. จัดตัวอักษร a สี่ตัวและไม่ใช่ตัวอักษร b

วิธีทำ 1. จัดตัวอักษร a สองตัว และ b หนึ่งตัว

แสดงว่าค่าที่จะสร้างมีขนาด 3 ตัวอักษร จะได้



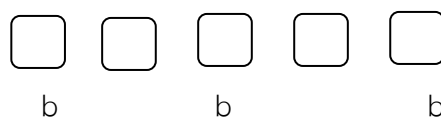
จะได้ชุดของตัวอักษร คือ aab, aba, baa

ซึ่งมีค่าเท่ากับ การจัดหมู่ของตัวอักษร 3 ตัว โดยใช้ตัวอักษร b เพียง 1 ตัว

$$\begin{aligned} \text{จะจัดได้ } C(3,1) &= \frac{3!}{(3-1)!1!} \\ &= 3 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

2. จัดตัวอักษร a สองตัว และ b สามตัว

แสดงว่าชุดของตัวอักษรมีขนาด 5 ตัวอักษร



เป็นการจัดตัวอักษรทั้งหมด 5 ตัวอักษร โดยใช้ตัวอักษร b สาม

$$\begin{aligned} \text{จะจัดได้ } C(5,3) &= \frac{5!}{(5-3)!3!} \\ &= 10 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ประกอบด้วย bbbba, bbaba, bbaab, babab, baabb, ababb, aabbb, babba, abbbba, abbab

3. จัดตัวอักษร a สี่ตัวอักษร ไม่ใช่ตัวอักษร b

$$\begin{aligned} \text{จัดได้ } C(4,4) &= \frac{4!}{(4-4)!4!} \\ &= 1 \text{ วิธี คือ aaaa} \end{aligned}$$

พิจารณา $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

$$\text{จะได้ } (a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$= aa+ab+ba+bb$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb$$

จะสังเกตเห็นได้ว่า $(a+b)^1$ เป็นผลรวมของการเรียงตัวอักษรขนาด 1 ตัว จากตัวอักษร a และ b ส่วน $(a+b)^2$ เป็นผลรวมของการเรียงตัวอักษรขนาด 2 ตัว จากตัวอักษร a และ b จะจัดเรียงได้ aa, ab, ba และ bb และ $(a+b)^3$ เป็นผลรวมของการเรียงตัวอักษรขนาด 3 ตัว จากตัวอักษร a และ b การเรียงตัวอักษรที่มีจำนวนตัวอักษรเท่ากัน เช่น ab และ ba รวมกันได้เป็น $2ab$ หรือ $abb+bab+bba=3ab^2$ อาศัยแนวคิดนี้แสดงการกระจาย $(a+b)^4$ ซึ่งประกอบด้วย ผลรวมของการเรียงตัวอักษรที่มีขนาด 4 ตัว โดยใช้ a และ b ซึ่งจะได้ ผลการเรียงตัวอักษร คือ $aaaa, aaab, aaba, abaa, baaa, aabb, abab, baab, baba, bbaa, abba, abbb, babb, bbab, bbba, bbbb$ จะได้ว่า ในการจัดตัวอักษร 4 ตัว

กรณีแรก จัด a ทั้ง 4 ตัวหรือ $C(4,0)$ จะมี 1 กรณี คือ $aaaa$ หรือ a^4

กรณีที่สอง จัด a สามตัวและ b หนึ่งตัวหรือ $C(4,1)$ จะมี 4 กรณี คือ $aaab, aaba, abaa, baaa$ หรือ $4a^3b$

กรณีที่สาม จัด a สองตัวและ b สองตัว หรือ $C(4,2)$ จะมี 6 กรณี คือ $aabb, abab, baab, baba, bbaa, abba$ หรือ $6a^2b^2$

กรณีที่สี่ จัด a หนึ่งตัวและ b สามตัว หรือ $C(4,3)$ จะมี 4 กรณี คือ $abbb, babb, bbab, bbba$ หรือ $4ab^3$

กรณีที่ห้า จัด b ทั้งสี่ตัว หรือ $C(4,4)$ จะมี 1 กรณี คือ $bbbb$ หรือ b^4

$$\text{ดังนั้น } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

หรืออาจเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่ง คือ

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$$

ผลของการกระจายดังกล่าวข้างต้น เป็นไปตามทฤษฎีบท ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 (The Binomial Theorem)

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ a และ b เป็นตัวแปร จะได้

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

จากทฤษฎีบท จะได้ พจน์ที่ 1 คือ $C(n,0)a^n b^0$

พจน์ที่ 2 คือ $C(n,1)a^{n-1}b$

พจน์ที่ 3 คือ $C(n,2)a^{n-2}b^2$

⋮
⋮
⋮

พจน์ที่ r คือ $C(n,r-1)a^{n-(r-1)}b^{r-1}$

พจน์ที่ n คือ $C(n,n)a^0b^n$

จากทฤษฎีบทหาต้องการหาพจน์ที่ r โดยที่ $r \leq n$ จะได้ พจน์ที่ r คือ $C(n,r-1)a^{n-(r-1)}b^{r-1}$

ตัวอย่าง 2.7 จงแสดงการกระจาย $(x+y)^5$

วิธีทำ จากทฤษฎีบททวินาม จะได้

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= C(5,0)x^5 + C(5,1)x^4y + C(5,2)x^3y^2 + C(5,3)x^2y^3 + C(5,4)xy^4 + C(5,5)y^5 \\ &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.8 จงหาพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 8 ของการกระจาย $(x+y)^{12}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ พจน์ที่ 5 ของการกระจาย } (x+y)^{12} \text{ คือ } C(12,4)x^{12-4}y^4 &= \frac{12!}{(12-4)!4!}x^8y^4 \\ &= \frac{(12)(11)(10)(9)(8!)}{8!4!}x^8y^4 \\ &= (11)(45)x^8y^4 \\ &= 495x^8y^4\end{aligned}$$

พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(x+y)^{12}$ คือ $495x^8y^4$

$$\begin{aligned}\text{พจน์ที่ 8 ของการกระจาย } (x+y)^{12} \text{ คือ } C(12,7)x^{12-7}y^7 &= \frac{12!}{(12-7)!7!}x^5y^7 \\ &= \frac{(12)(11)(10)(9)(8)(7!)}{5!7!}x^5y^7 \\ &= (11)(72)x^5y^7 \\ &= 792x^5y^7\end{aligned}$$

พจน์ที่ 8 ของการกระจาย $(x+y)^{12}$ คือ $792x^5y^7$

จากทฤษฎีบท 2.1 หากต้องการหาพจน์ที่ r โดยที่ $r \leq n$ จะได้ พจน์ที่ r คือ $C(n,r-1)a^{n-(r-1)}b^{r-1}$

จาก $(a+b)^n$ สำหรับจำนวนเต็มบวก ใด ๆ จะได้ผลดังนี้

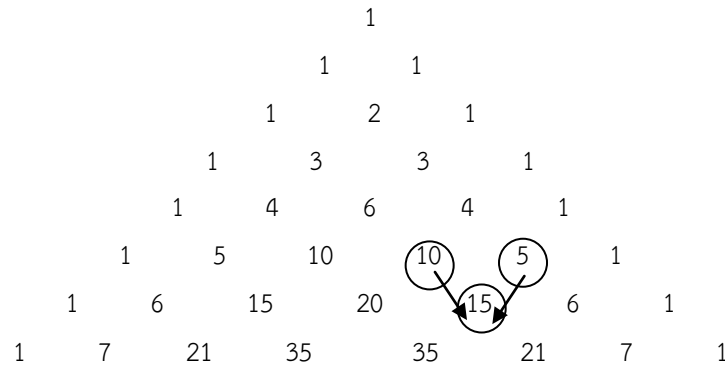
$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= 1a+1b \\ (a+b)^2 &= 1a^2+2ab+1b^2\end{aligned}$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

เมื่อเขียนเฉพาะสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ จะได้เป็น



ลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมของตัวเลขที่เป็นสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ จะเรียกรูปสามเหลี่ยมของตัวเลขนี้ว่า **สามเหลี่ยมปาสคาล** (Pascal's Triangle)

ตัวอย่าง 2.9 จงกระจาย โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

$$1. (2x+1)^5$$

$$2. (3x-y)^3$$

วิธีทำ $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

$$1. (a+b)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4(1) + \binom{5}{2}(2x)^3(1)^2 + \binom{5}{3}(2x)^2(1)^3 + \binom{5}{4}(2x)(1)^4 + \binom{5}{5}1^5$$

$$= 1 \cdot 32x^5 + 5 \cdot 16x^4 + 10 \cdot 8x^3 + 10 \cdot 4x^2 + 5 \cdot 2x + 1$$

$$= 32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$$

$$2. (3x-y)^3 = (3x+(-y))^3$$

$$= \binom{3}{0}(3x)^3 + \binom{3}{1}(3x)^2(-y) + \binom{3}{2}(3x)(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3$$

$$= 1 \cdot 27x^3 + 3 \cdot 9x^2(-y) + 3(3x)y^2 + 1(-y)^3$$

$$= 27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$$

ตัวอย่าง 2.10 จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ $x^{12}y^{13}$ จากการกระจาย $(x+y)^{25}$

วิธีทำ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม จะได้ $C(25,13) = \frac{25!}{13!12!}$

$$= 5,200,300$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของพจน์ $x^{12}y^{13}$ จากการกระจาย $(x+y)^{25}$ คือ 5,200,300

ตัวอย่าง 2.11 จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ $x^{12}y^{13}$ จากการกระจาย $(2x-3y)^{25}$

วิธีทำ จาก $(2x-3y)^{25} = (2x+(-3y))^{25}$

$$\text{โดยทฤษฎีบททวินาม จะได้ } (2x+(-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25} C(25, j)(2x)^{25-j}(-3y)^j$$

เนื่องจากพจน์ที่ $x^{12}y^{13}$ ในการกระจาย จะทำให้ได้ $j = 13$

$$\text{ดังนั้น } C(25, 13)2^{12}(-3)^{13} = \frac{25!}{13!12!} \cdot 2^{12}3^{13}$$

$$\text{นั่นคือ สัมประสิทธิ์ของพจน์ } x^{12}y^{13} \text{ จากการกระจาย } (x+y)^{25} \text{ คือ } \frac{25!}{13!12!} \cdot 2^{12}3^{13}$$

นักคณิตศาสตร์ชาว ชื่อ ปาสกาล (Pascal) ได้พบสมบัติข้อหนึ่งที่ช่วยให้สามารถหาสัมประสิทธิ์ทวินามได้รวดเร็วขึ้น สมบัติที่ว่าคือ $C(n+1, r) = C(n, r-1) + C(n, r)$ ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} C(n, r-1) + C(n, r) &= \frac{n!}{(n-r+1)(n-r)!} + \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{n!}{(n-r+1)(n-r)!(r-1)!} + \frac{n!}{(n-r)!r(r-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \left(\frac{1}{n-r+1} + \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \cdot \frac{r+n-r+1}{(n-r+1)r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-r+1)r} \\ &= \frac{(n+1)n!}{(n-r+1)(n-r)!r(r-1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!r!} \\ &= C(n+1, r) \end{aligned}$$

$$C(n+1, r) = C(n, r-1) + C(n, r)$$

ทฤษฎีบท 2.2 เอกลักษณ์ปาสกาล(Pascal's Identity)

ให้ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $n \geq k$ แล้ว $C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$

พิสูจน์ ให้ T เป็นเซตที่มีสมาชิก $n+1$ ตัว

ให้ a เป็นสมาชิกใน T และ $S = T - \{a\}$

จะมี $C(n+1, k)$ เซตย่อยของ T ที่มีสมาชิก k ตัว

เซตย่อยของ T ที่มีสมาชิก k ตัว จะมี a รวมกับ $k-1$ สมาชิกของ S

หรือ $k-1$ สมาชิกของ S จะมี $C(n, k-1)$ เซตย่อยของ k สมาชิกของ T ที่มี a อยู่

และมี $C(n, k)$ เซตย่อยของ k สมาชิกของ T ที่ไม่มี a อยู่ เนื่องจากมี $C(n, k)$ เซตย่อยของ k สมาชิกของ S

ดังนั้น $C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$

เอกลักษณ์ปาสคาล เป็นพื้นฐานของการจัดเชิงรูปธรรมของสัมประสิทธิ์ทวินาม ในรูปสามเหลี่ยม ซึ่งนิยมเรียกว่า สามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal Triangle) ดังรูป

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
1		4		6		4		1	
1	5		10		10		5		1
1	6	15		20		15	6		1

จากรูป จะเห็นว่า

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4} \quad \text{ซึ่งก็คือ} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\sum_{k=0}^n C(n,k) = 2^n$

พิสูจน์ เนื่องจากเซตที่มีสมาชิก n ตัวจะมีเซตย่อยทั้งหมด 2^n เซต

ซึ่งแต่ละเซตย่อยจะมีสมาชิก 0 ตัว 1 ตัว 2 ตัว ... n ตัว หรือ $C(n,0)$ เซตย่อยที่มีสมาชิก 0 ตัว $C(n,1)$ เซตย่อยที่มีสมาชิก 1 ตัว $C(n,2)$ เซตย่อยที่มีสมาชิก 2 ตัว ... $C(n,n)$ เซตย่อยที่มีสมาชิก n ตัว

ดังนั้น $\sum_{k=0}^n C(n,k)$ เป็นจำนวนเซตย่อยของเซตที่มีสมาชิก n ตัว

จะได้ $\sum_{k=0}^n C(n,k) = 2^n$

ทฤษฎีบท 2.4 (VANDERMONDE'S IDENTITY)

ให้ m, n และ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $r \leq m, n$

แล้ว $C(m+n,r) = \sum_{k=0}^r C(m,r-k)C(n,k)$

แบบฝึกหัด 2

1. จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $C(5,1)$

1.2 $C(5,3)$

1.3 $C(8,4)$

- 1.4 $C(8,0)$ 1.5 $C(8,8)$ 1.6 $C(12,6)$
2. จงหาจำนวนวิธีในการเลือกตัวอักษร 5 ตัว จากพยัญชนะภาษาอังกฤษ 26 ตัว
3. จงหาจำนวนเซตย่อยที่มีสมาชิกมากกว่า 2 ตัว จากเซตที่มีสมาชิก 100 ตัว
4. จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงตัวเลขโดดในระบบฐานสอง ความยาว 10
- 4.1 ที่มี 0 เพียง 3 ตัว
- 4.2 มี 1 อย่างน้อย 7 ตัว
- 4.3 มี 1 อย่างน้อย 3 ตัว
5. ชุมชนคณิตศาสตร์ มีสมาชิก 25 คน
- 5.1 จะเลือกตัวแทนชุมชน 4 คน จาก 25 คน ได้กี่วิธี
- 5.2 จะเลือกประธาน รองประธาน เลขานุการและเหรัญญิก ได้กี่วิธี
6. พยัญชนะภาษาอังกฤษ 21 ตัว และสระภาษาอังกฤษ 5 ตัว จงหาจำนวนวิธีในการเรียงพยัญชนะ 6 ตัว และ
- 6.1 มีสระเพียงตัวเดียว 6.2 มีสระเพียง 2 ตัว
- 6.3 มีสระอย่างน้อย 1 ตัว 6.4 มีสระอย่างน้อย 2 ตัว
7. จงหาจำนวนวิธีการเรียงพยัญชนะ 6 ตัว และ
- 7.1 พยัญชนะ a 7.2 พยัญชนะ a และ b
- 7.3 พยัญชนะ a และ b อยู่ติดกัน โดยที่ a มาก่อน b และทุกตัวแตกต่างกัน
- 7.4 พยัญชนะ a และ b โดยที่ a อยู่ทางด้านซ้ายของ b และทุกตัวแตกต่างกัน
8. พนักงานบริษัทแห่งหนึ่งมีพนักงานชาย 10 คน หญิง 15 คน
- 8.1 จงหาจำนวนวิธีการเลือกตัวแทน 6 คน เป็นชาย 3 คน และหญิง 3 คน
- 8.2 จงหาจำนวนวิธีการเลือกตัวแทน 6 คน ที่เป็นหญิงมากกว่าชาย
9. จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงตัวเลขโดดในระบบฐานสอง ความยาว 10 ที่มี 1 อย่างน้อย 3 ตัว และมี 0 อย่างน้อย 3 ตัว
10. จงหาจำนวน license ที่ประกอบด้วยตัวอักษร 3 ตัว ตามด้วยตัวเลข 3 หลัก โดยที่ไม่ใช้ตัวอักษรและตัวเลขซ้ำกัน
11. จงแสดงว่า “ถ้า n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $C(n+1, k) = \frac{(n+1)C(n, k-1)}{k}$ ”
12. จงหาผลการกระจาย $(x+y)^5$
13. จงหาสัมประสิทธิ์ของ $x^5 y^8$ ของการกระจาย $(x+y)^{13}$
14. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^7 ของการกระจาย $(1+x)^7$
15. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^9 ของการกระจาย $(2-x)^{19}$
16. จงหาสัมประสิทธิ์ของ $x^8 y^9$ ของการกระจาย $(3x+2y)^{17}$
17. จงหาสัมประสิทธิ์ของ $x^{101} y^{99}$ ของการกระจาย $(2x-3y)^{200}$
18. จงพิสูจน์ว่า $\sum_{k=0}^r C(n+k, r) = C(n+r-1, r)$ โดยที่ n และ r เป็นจำนวนเต็มบวก
- 18.1 โดยใช้การจัดหมู่ 18.2 โดยใช้เอกลักษณ์ปาสกาล
19. จงพิสูจน์ทฤษฎีบททวินาม โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
20. จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงเลขโดดในระบบฐานสาม ความยาว 10 ที่ประกอบด้วยตัวเลข

- 0, 1, 2 ซึ่งประกอบด้วย 0 เพียง 2 ตัว 1 เพียง 3 ตัว และ 2 เพียง 5 ตัว
21. จงหาจำนวนวิธีการจัดเรียงเลขโดดในระบบฐานสิบ ความยาว 20 ที่ประกอบด้วยตัวเลข 0, 1, 2, ..., 9 ซึ่งประกอบด้วย 0 เพียง 2 ตัว 1 เพียง 4 ตัว 2 เพียง 3 ตัว 3 เพียง 1 ตัว 4 เพียง 2 ตัว 5 เพียง 3 ตัว 7 เพียง 2 ตัว และ 9 เพียง 3 ตัว
22. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1,000,000 ที่ผลรวมของเลขโดดเท่ากับ 19
23. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1,000,000 ที่มีหนึ่งหลักเท่ากับ 9 และผลรวมเท่ากับ 13
24. ข้อสอบคณิตศาสตร์เต็มหน่วย จำนวน 10 ข้อ จงหาจำนวนวิธีที่จะให้คะแนน ถ้าผลรวมของคะแนนเท่ากับ 100 และแต่ละข้อมีคะแนนอย่างน้อย 5 คะแนน
25. จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันของการเรียงตัวอักษรจากคำว่า MISSISSIPPI
26. จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันของการเรียงตัวอักษรจากคำว่า ABRACADABRA
27. จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันของการเรียงตัวอักษรจากคำว่า AARDVARK โดยที่ A อยู่ติดกัน

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง ความน่าจะเป็น

จุดประสงค์การเรียนรู้

- อธิบายแนวคิดของความน่าจะเป็นได้
- หาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ได้
- ตรวจสอบความเป็นอิสระของเหตุการณ์ได้

สาระสำคัญ

- เหตุการณ์ การทดลองสุ่ม ปริภูมิตัวอย่าง ความน่าจะเป็น
- ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

สื่อการเรียนรู้

- เอกสารการเรียนรู้เรื่องความน่าจะเป็น และความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ยุทธวิธีการจัดการเรียนรู้

- นำเสนอสถานการณ์ปัญหา

1. สนทนากับนักศึกษาเกี่ยวกับโอกาสการเกิดเหตุการณ์ต่าง ๆ ว่า เหตุการณ์ใดมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยกว่ากันบ้าง พร้อมอธิบายเหตุผล

- กิจกรรมการเรียนรู้

2. ซักถามว่าเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่สนใจเกิดขึ้นได้อย่างไร(จากการทดลอง จากการกระทำ) และจะพิจารณาว่าเหตุการณ์ใดมีโอกาสเกิดขึ้นมาน้อยกว่ากัน จะพิจารณาบนพื้นฐานอะไร(ทุกเหตุการณ์มีโอกาสเกิดเท่า ๆ กัน (equally likely))

3. ซักถามนักศึกษาต่อไปว่า โอกาสของการเกิดเหตุการณ์จะพิจารณาจากอะไร แล้วจึงเสนอตัวอย่างการทดลองสุ่ม เช่น การโยนเหรียญ การทอดลูกเต๋า . . . จากนั้นจึงให้ความหมายของการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เป็นบทนิยาม

4. ยกตัวอย่างเหตุการณ์ พร้อมหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจ อภิปรายถึงค่าความน่าจะเป็นที่แตกต่างกัน เช่น $P(E) = 0.9$ จะหมายความว่าอย่างไร $P(E) = 0.3$ จะหมายความว่าอย่างไร และเปรียบเทียบโอกาสของการเกิดของเหตุการณ์กันระหว่าง ค่าความน่าจะเป็น 0.9 และ 0.3

5. ให้นักศึกษาฝึกหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดกลุ่มละ 2 - 3 เหตุการณ์ แล้วนำเสนอผลการหาค่าความน่าจะเป็นกลุ่มละ 1 เหตุการณ์ที่ไม่ซ้ำกัน

6. ผู้สอนนำเสนอการหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เมื่อกำหนดเงื่อนไขบางอย่างเพิ่มเติม ซึ่งความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีเงื่อนไขเพิ่มเติมนี้จะเรียกว่า ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

7. ให้นักศึกษาวิเคราะห์ถึงความแตกต่างระหว่างความน่าจะเป็นและความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

8. ให้นักศึกษาฝึกหาค่าความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขเพิ่มเติม

3. ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาสรุปแนวคิดของความน่าจะเป็นและความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข พร้อมอธิบายถึงประโยชน์ของความน่าจะเป็น

งานที่มอบหมาย

ให้นักศึกษาฝึกทำโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าความน่าจะเป็นและความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข นอกเหนือจากการเรียนในชั้นเรียนปกติ

การวัดและประเมินผล

1) สังเกตการร่วมมือ การอภิปราย การแสดงความคิดเห็นและการชี้แจงเหตุผลในการหาคำตอบของปัญหา(ใช้แบบสังเกต)

2) การตรวจผลงานการแก้ปัญหาในเอกสารการเรียนรู้ โดยพิจารณาความถูกต้อง ความสมบูรณ์ของแนวคิดของการเชื่อมโยงความรู้ ความเหมาะสมในการแสดงเหตุผลในการคิด และเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาในแต่ละขั้นตอนของการหาคำตอบ

เอกสารการเรียนรู้ 3

เรื่อง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ก่อนที่จะให้ความหมายของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ จำเป็นต้องทำความเข้าใจความหมายของข้อความต่าง ๆ ที่นำไปสู่การให้ความหมายของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ โดยเริ่มจากคำว่า การทดลองสุ่ม ปริภูมิตัวอย่างหรือแซมเปิลสเปซและเหตุการณ์ ดังนี้

3.1 การทดลองสุ่ม

การทดลองสุ่ม (random experiment) หมายถึง การทดลองที่ทราบว่าจะเกิดอะไรขึ้นบ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่าผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไร เช่น การโยนเหรียญ 1 เหรียญขึ้นไปในอากาศแล้วปล่อยให้ตกลงมา เราทราบว่าเหรียญจะหงายด้านหัวหรือไม่ก็หงายด้านก้อย แต่เราไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่าเหรียญนั้นจะหงายด้านหัวหรือด้านก้อย จึงกล่าวได้ว่าการโยนเหรียญเป็นการทดลองสุ่ม ตัวอย่างการทดลองสุ่มอื่นๆ เช่น ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เพศของทารกที่เกิดใหม่

3.2 ปริภูมิตัวอย่างหรือแซมเปิลสเปซ

ปริภูมิตัวอย่างหรือแซมเปิลสเปซ (sample space) หมายถึง ผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่มใด ๆ แทนแซมเปิลสเปซด้วยสัญลักษณ์ S เช่น ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง ผลที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือการหงายด้านหัวหรือการหงายด้านก้อย เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทนแซมเปิลสเปซในรูปเซต ดังนี้

ถ้าให้ H แทน การหงายด้านหัว

T แทน การหงายด้านก้อย

S แทน แซมเปิลสเปซ

เขียนแทนแซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้งในรูปเซตได้ดังนี้

$$S = \{H, T\}$$

ตัวอย่าง 3.1 ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างแซมเปิลสเปซ

1) ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เพื่อดูแต้มที่ปรากฏบนหน้าลูกเต๋า

$$\text{จะได้ } S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2) ในการโยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง เพื่อดูด้านที่เหรียญหงายขึ้น

$$\text{จะได้ } S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

3) ในการโยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง เพื่อดูด้านที่เหรียญหงายขึ้น

$$\text{จะได้ } S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

แต่ถ้าเราสนใจจำนวนเหรียญที่หงายด้านหัวซึ่งแต่ละค่ามีโอกาสเกิดไม่เท่ากัน จะได้แซมเปิลสเปซ คือ $S = \{3, 2, 1, 0\}$

บางครั้งเราอาจไม่สนใจผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด แต่สนใจส่วนย่อยของแซมเปิลสเปซ ซึ่งส่วนย่อยของแซมเปิลสเปซนี้ จะเรียกว่าเหตุการณ์

3.3 เหตุการณ์

เหตุการณ์ (event) หมายถึง ผลที่สนใจบางส่วนที่ได้จากผลทั้งหมดที่เกิดจากการทดลองสุ่ม หรืออาจกล่าวได้ว่า เหตุการณ์ คือเซตย่อยของแซมเปิลสเปซ เขียนแทนเหตุการณ์ด้วยสัญลักษณ์ E, A, B

ข้อสังเกต เนื่องจาก $S \subseteq S$ และ $\emptyset \subset S$ จึงได้ แซมเปิลสเปซเป็นเหตุการณ์ และ $\emptyset$ ก็เป็นเหตุการณ์ด้วยเช่นกัน

ตัวอย่าง 3.2 ในการโยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง

จะได้ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ถ้าให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านหัวอย่างน้อย 1 เหรียญ

จะได้ $E_1 = \{HH, HT, TH\}$

ถ้าให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านก้อยทั้งสองเหรียญ

จะได้ $E_2 = \{TT\}$

3.4 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ในการทดลองสุ่มใด ๆ ผลที่อาจเกิดขึ้นได้จากการทดลองแต่ละอย่างนั้นมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน (equally likely) ตัวเลขที่บอกถึงเหตุการณ์ต่าง ๆ ว่ามีโอกาสเกิดขึ้นมากหรือน้อยเพียงใด จะเรียกว่าค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นั้น ๆ

ถ้าให้ E เป็นเหตุการณ์ที่สนใจ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วย $P(E)$ ซึ่ง $P(E)$ หาได้จากอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E ต่อจำนวนสมาชิกของผลที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด S โดยที่ S เป็นเซตจำกัดและสมาชิกของ S มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน นั่นคือ

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

เมื่อ $n(E)$ แทนจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E และ

$n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของผลที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด S

ความน่าจะเป็นตามความหมายนี้เรียกว่า **ความน่าจะเป็นแบบฉบับ (classical probability)**

ตัวอย่าง 3.3 โยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะหงายด้านหัว

วิธีทำ โยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้งเป็นการทดลองสุ่ม

จะได้ $S = \{H, T\}$ และ $n(S) = 2$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่เหรียญจะหงายด้านหัว จะได้

$E = \{H\}$ และ $n(E) = 1$

$$\text{จาก } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{1}{2}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะหงายด้านหัว เท่ากับ $\frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 3.4 โยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะหงายด้านหัว อย่างน้อยหนึ่งเหรียญ

วิธีทำ ในการโยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง เป็นการทดลองสุ่ม จะได้

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านหัวอย่างน้อย 1 เหรียญ จะได้

$$E = \{HH, HT, TH\}$$

$$\text{จาก } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \text{ จะได้ } P(E) = \frac{3}{4}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่เหรียญหงายด้านหัวอย่างน้อย 1 เหรียญ เท่ากับ $\frac{3}{4}$

ตัวอย่าง 3.5 จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าคือแต้มเกิน 4 จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

วิธีทำ ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เป็นการทดลองสุ่ม

$$\text{จะได้ } S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าคือแต้มเกิน 4 จะได้

$$E = \{5, 6\}$$

$$\text{จาก } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \text{ จะได้ } P(E) = \frac{2}{6} \text{ หรือ } \frac{1}{3}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าคือแต้มเกิน 4 เท่ากับ $\frac{1}{3}$

หมายเหตุ ค่าความน่าจะเป็นนิยมเขียนในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ หรืออาจเขียนแทนในรูปทศนิยม

ตัวอย่าง 3.6 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนหน้า ลูกเต๋ามากกว่า 10

วิธีทำ ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง เป็นการทดลองสุ่ม จะได้

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$$

$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)$$

$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)$$

$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

นั่นคือ ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จะได้ $n(S) = 36$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 10

$$\text{จะได้ } E = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \text{ นั่นคือ } n(E) = 3$$

$$\text{จาก } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \text{ จะได้ } P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 10 เท่ากับ $\frac{1}{12}$

สมบัติของความน่าจะเป็น

ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซ

- 1) ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ จะได้ $0 \leq P(E) \leq 1$
- 2) ถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นแน่นอนหรือ $E = \phi$
จะได้ $P(E) = 0$
- 3) ถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วย $E_1, E_2, \dots, E_n$ ซึ่งไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive events) หรือ $E_i \cap E_j = \phi$ และ $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S$ จะได้
 $P(E) = 1$
- 4) ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ และ E' เป็นส่วนเติมเต็มหรือคอมพลีเมนต์ของ E
จะได้ $P(E) + P(E') = 1$ หรือ $P(E) = 1 - P(E')$
- 5) ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์จะได้
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 6) ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ซึ่งไม่เกิดร่วมกัน หรือ $A \cap B = \phi$ จะได้
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ในกรณีที่แซมเปิลสเปซหรือเหตุการณ์มีสมาชิกจำนวนมาก ๆ ไม่จำเป็นต้องเขียนแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของแซมเปิลสเปซ นิยมใช้วิธีการคำนวณหาจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซหรือเหตุการณ์ โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับกฎการนับเบื้องต้น การเรียงสับเปลี่ยนหรือการจัดหมู่ ซึ่งจะไม่นำเสนอในที่นี้ ผู้อ่านสามารถศึกษาได้จากหนังสือเกี่ยวกับความน่าจะเป็น ตัวอย่าง 3.7 โยนเหรียญ 10 เหรียญ 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1. เหรียญหงายด้านหัวทั้งหมด
2. เหรียญหงายด้านก้อยตั้งแต่ 2 เหรียญขึ้นไป

วิธีทำ โยนเหรียญ 10 เหรียญ 1 ครั้ง จะได้ $n(S) = 2^{10} = 1,024$

1. ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านหัวทั้งหมด

จะได้ $E_1 = \{HHHHHHHHHH\}$

ความน่าจะเป็นที่เหรียญหงายด้านหัวทั้งหมด คือ

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{1,024}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่เหรียญหงายด้านหัวทั้งหมดเท่ากับ $\frac{1}{1,024}$

2. ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านก้อยตั้งแต่ 2 เหรียญขึ้นไป

การหา $n(E_2)$ จะยุ่งยากมาก เพราะต้องหาลายกรณี ในการหาคำตอบของปัญหาข้อนี้ จะพิจารณาจาก $P(E_2) = 1 - P(E_2')$ ดังนี้

ให้ E_2' แทนเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านก้อยน้อยกว่า 2 เหรียญ

จะได้ E'_2 ประกอบด้วยเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านก้อย 1 เหรียญ มีทั้งหมด 10 กรณี คือ HHHHHHHHHT , HHHHHHHHTH , HHHHHHHHTH , . . . , THHHHHHHHH และเหตุการณ์ที่เหรียญไม่หงายด้านก้อยเลยอีก 1 กรณี นั่นคือ $n(E'_2) = 11$ จะได้

$$P(E'_2) = \frac{11}{1,024}$$

จาก $P(E_2) = 1 - P(E'_2)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(E_2) &= 1 - \frac{11}{1,024} \\ &= \frac{1013}{1,024} \end{aligned}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่เหรียญหงายด้านหัวตั้งแต่ 2 เหรียญขึ้นไป เท่ากับ $\frac{1013}{1,024}$

ตัวอย่าง 3.8 ความน่าจะเป็นที่รัฐพงษ์จะชนะการแข่งขันว่ายน้ำแบบฟรีสไตล์เท่ากับ $\frac{1}{5}$

ความน่าจะเป็นที่เขาจะชนะการแข่งขันว่ายน้ำแบบผีเสื้อเท่ากับ $\frac{3}{7}$

ความน่าจะเป็นที่เขาจะชนะทั้งสองประเภทเท่ากับ $\frac{2}{5}$ จงหาความน่าจะเป็น

ที่รัฐพงษ์จะชนะการแข่งขันว่ายน้ำอย่างน้อย 1 ประเภท จาก 2 ประเภท ดังกล่าว

วิธีทำ ให้ A แทนเหตุการณ์ที่รัฐพงษ์ชนะการแข่งขันว่ายน้ำแบบฟรีสไตล์

B แทนเหตุการณ์ที่รัฐพงษ์ชนะการแข่งขันว่ายน้ำแบบผีเสื้อ

$$\text{จะได้ } P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{3}{7} \text{ และ } P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

$$\text{จาก } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(A \cup B) &= \frac{1}{5} + \frac{3}{7} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{8}{35} \end{aligned}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่รัฐพงษ์จะชนะการแข่งขันว่ายน้ำอย่างน้อย 1 ประเภท เท่ากับ $\frac{8}{35}$

ตัวอย่าง 3.9 ทอดลูกเต๋า 1 ลูกครั้งหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ลูกเต๋ารับแต้ม 2 หรือ 5

2. ลูกเต๋ารับแต้ม 1 หรือ 3 หรือ 6

วิธีทำ 1. ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง จะได้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ นั่นคือ $n(S) = 6$

$$\text{ให้ } A : \text{เหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้ม 2} \text{ จะได้ } P(A) = \frac{1}{6}$$

$$B : \text{เหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้ม 5} \text{ จะได้ } P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\text{และ } A \cap B = \emptyset \text{ จะได้ } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{2}{6} \text{ หรือ } \frac{1}{3}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารับแต้ม 2 หรือ 5 เท่ากับ $\frac{1}{3}$

$$2. \text{ ให้ } A_1 \text{ เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้ม 1} \text{ จะได้ } P(A_1) = \frac{1}{6}$$

$$\text{ให้ } A_2 \text{ เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้ม 3} \text{ จะได้ } P(A_2) = \frac{1}{6}$$

$$\text{ให้ } A_3 \text{ เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้ม 6} \text{ จะได้ } P(A_3) = \frac{1}{6}$$

$$\text{และ } A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$$

$$\text{จาก } P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{6} \text{ หรือ } \frac{1}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารั้งขึ้นแต้ม 1 หรือ 3 หรือ 6 เท่ากับ $\frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 3.10 ดึงไฟโบหนึ่งออกจากสำหรับ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ไฟโพดำหรือไฟโพแดง

$$\text{วิธีทำ ให้ } A \text{ เป็นเหตุการณ์ที่ได้ไฟโพดำ จะได้ } P(A) = \frac{13}{52}$$

$$B \text{ เป็นเหตุการณ์ที่ได้ไฟโพแดง จะได้ } P(B) = \frac{4}{52}$$

จะเห็นว่าไฟโบ 1 อยู่ใบบนไฟที่เป็นโพดำที่อยู่ทั้งใน A และ B

ดังนั้น $P(A \cap B)$ คือ ความน่าจะเป็นที่จะได้ไฟโพดำและแดง เท่ากับ $\frac{1}{52}$

ความน่าจะเป็นที่จะได้ไฟโพดำหรือไฟโพแดง คือ $P(A \cup B)$

$$\text{จาก } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(A \cup B) &= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} \\ &= \frac{16}{52} \text{ หรือ } \frac{4}{13} \end{aligned}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะได้ไฟโพดำหรือไฟโพแดง เท่ากับ $\frac{4}{13}$

ตัวอย่าง 3.11 ทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. ลูกเต๋ารั้งขึ้นแต้มหนึ่งอย่างน้อย 1 ลูก

ข. ลูกเต๋ารั้งขึ้นแต้มหนึ่งเลยแม้แต่ลูกเดียว

วิธีทำ ก. ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารั้งขึ้นแต้มหนึ่งอย่างน้อย 1 ลูก

$$\text{จะได้ } A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$$

$$\text{นั่นคือ } n(A) = 11 \text{ และ } n(S) = 36$$

$$\text{จาก } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \text{ จะได้ } P(A) = \frac{11}{36}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารั้งขึ้นแต้มหนึ่งอย่างน้อย 1 ลูก เท่ากับ $\frac{11}{36}$

ข. ลูกเต๋ารั้งขึ้นแต้มหนึ่งเลยแม้แต่ลูกเดียว

เหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารั้งขึ้นแต้มหนึ่งเลย เป็นเหตุการณ์ที่เป็นส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A

$$\text{จาก } P(A) + P(A') = 1$$

$$\text{จะได้ } P(A') = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{11}{36}$$

$$= \frac{25}{36}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ามีแต้มหนึ่งเลยแม้แต่ลูกเดียว เท่ากับ $\frac{25}{36}$

3.5 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขบางอย่างเพิ่มเติม ค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อาจแตกต่างกันไปได้ เช่น การทอดลูกเต๋าคู่ 1 ลูก 1 ครั้ง ถ้ากำหนดเงื่อนไขว่า “สนใจเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งแต้ม 3 เมื่อลูกเต๋าทิ้งแต้มคี่” เป็นการกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมจากเดิม การคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ต้องคำนวณเทียบกับแซมเปิลสเปซใหม่ คือ เมื่อลูกเต๋าทิ้งแต้มคี่ ซึ่งแซมเปิลสเปซใหม่ ในที่นี้ให้เป็น $S_1 = \{1, 3, 5\}$ เรียกแซมเปิลสเปซใหม่ว่า **แซมเปิลสเปซลดรูป** (reduced sample space) นั่นคือ ถ้าให้ E แทนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งแต้ม 3 เมื่อลูกเต๋าทิ้งแต้มคี่ จะได้ $n(E) = 1$ $n(S_1) = 3$

$$\text{จาก } P(E) = \frac{n(E)}{n(S_1)}$$

$$\text{จะได้ } P(E) = \frac{1}{3}$$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เกิดขึ้นเมื่อทราบว่าเหตุการณ์ใน S_1 ได้เกิดขึ้นแล้ว จะเรียกความน่าจะเป็นลักษณะนี้ว่า **ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข** การหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขสามารถคำนวณโดยเทียบกับแซมเปิลสเปซ S ได้โดยใช้บทนิยาม ต่อไปนี้

บทนิยาม 4.2.1 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในแซมเปิลสเปซ S ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

(conditional probability) ของเหตุการณ์ A เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ B เกิดขึ้นแล้ว

$$\text{เขียนแทนด้วย } P(A/B) \text{ โดยที่ } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ เมื่อ } P(B) > 0 \text{ และ } A \cap B$$

คือ การเกิดเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B

ตัวอย่าง 3.12 ในการทอดลูกเต๋าคู่ 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าคู่จะน้อยกว่า 5 เมื่อลูกเต๋าทิ้งแต้มไม่เท่ากัน

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งแต้มไม่เท่ากัน จะได้

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

$$\text{จาก } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\text{จะได้ } P(A) = \frac{30}{36}$$

$$= \frac{5}{6}$$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าน้อยกว่า 5

จะได้ B = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)}

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{n(B)}{n(S)} \\ &= \frac{6}{36} \text{ หรือ } \frac{1}{6} \end{aligned}$$

การหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าน้อยกว่า 5 เมื่อกำหนดว่าลูกเต๋าทิ้งฝ่ายแต้มไม่เท่ากัน คือ การหา $P(B/A)$ พิจารณาได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 พิจารณาเทียบกับแซมเปิลสเปซใหม่ คือ เหตุการณ์ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งฝ่ายแต้มไม่เท่ากันซึ่งมี 30 วิธี เป็นแซมเปิลสเปซใหม่

จากนั้นพิจารณาเหตุการณ์ B จากเหตุการณ์ A จะได้

$$B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } P(B/A) &= \frac{n(B)}{n(A)} \\ &= \frac{4}{30} \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 คำนวณหาความน่าจะเป็นโดยใช้ทฤษฎีบท

$$\text{เนื่องจาก } A \cap B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\} \text{ นั่นคือ } P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } P(B/A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{6}} \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าน้อยกว่า 5 เมื่อลูกเต๋าทิ้งฝ่ายแต้ม

$$\text{ไม่เท่ากัน เท่ากับ } \frac{2}{15}$$

ตัวอย่าง 3.13 หยิบไพ่ 2 ครั้ง ๆ ละ 1 ใบ จากไพ่ทั้งสำรับที่มี 52 ใบ โดยไม่ใส่คืนไพ่ใบแรกกลับ

เข้าไปในสำรับก่อนหยิบไพ่ครั้งที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้โพดำทั้ง 2 ครั้ง

วิธีทำ ให้ A แทนการหยิบไพ่ครั้งแรกได้โพดำ

$$\text{จะได้ } P(A) = \frac{13}{52}$$

B แทนการหยิบไฟครั้งที่สองได้ไฟดำหลังจากหยิบครั้งแรกแล้ว

$$\text{จะได้ } P(B) = \frac{12}{51}$$

$$\text{จากบทนิยาม } P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B/A) \\ &= \left(\frac{13}{52}\right) \left(\frac{12}{51}\right) \\ &= \frac{1}{17} \end{aligned}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะได้ไฟดำทั้ง 2 ครั้ง เท่ากับ $\frac{1}{17}$

ทฤษฎีบท 4.2.1 ถ้า $A_1, A_2, A_3, \dots$ เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองหนึ่ง ในแซมเปิลสเปซ S แล้ว $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots$

ตัวอย่าง 3.14 ในกล่องใบหนึ่งมีหลอดไฟอยู่ 30 หลอด และมีหลอดเสียปนอยู่ด้วย 5 หลอด ถ้าสุ่มหยิบมา 3 หลอด โดยหยิบทีละหลอดแบบไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้หลอดเสียในการหยิบครั้งแรกและครั้งที่สอง และหยิบได้หลอดดีในครั้งที่สาม

วิธีทำ ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้หลอดเสียในการหยิบครั้งแรก

A_2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้หลอดเสียในการหยิบครั้งที่สอง

A_3 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้หลอดดีในการหยิบครั้งที่สาม

ต้องการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2) \\ &= \left(\frac{5}{30}\right) \left(\frac{4}{29}\right) \left(\frac{25}{28}\right) \\ &= \frac{25}{1,218} \end{aligned}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นของที่จะหยิบได้หลอดเสียในการหยิบครั้งแรกและครั้งที่สองและ

หยิบได้หลอดดีในการหยิบครั้งที่สาม เท่ากับ $\frac{25}{1,218}$

ตัวอย่าง 4.2.4 ในการสอบถามความคิดเห็นของนักศึกษาชายและหญิงเกี่ยวกับการเข้าค่ายคุณธรรม จำนวน 210 คน ปรากฏผลดังตาราง

เพศ	ความคิดเห็น			รวม
	เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย	

าย	40	25	69	134
หญิง	25	20	31	76
วม	65	45	100	210

จงหา ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขแต่ละเหตุการณ์ ต่อไปนี้

ก. ถ้าทราบว่านักศึกษาที่ถูกเลือกเป็นชาย จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีความคิดเห็นเป็น

1. เห็นด้วย
2. ไม่แน่ใจ
3. ไม่เห็นด้วย

ข. ถ้าทราบว่านักศึกษาที่ถูกเลือกเป็นหญิง จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีความคิดเห็นเป็น

1. เห็นด้วย
2. ไม่แน่ใจ
3. ไม่เห็นด้วย

วิธีทำ ให้ A_1 แทนเพศชาย

A_2 แทนเพศหญิง

B_1 แทนความคิดเห็นของนักศึกษาที่เห็นด้วย

B_2 แทนความคิดเห็นของนักศึกษาที่ไม่แน่ใจ

B_3 แทนความคิดเห็นของนักศึกษาที่ไม่เห็นด้วย

จากข้อมูลข้างต้น คำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{จากตารางข้างต้นจะได้ } P(A_1) &= \frac{134}{210} = 0.638 & P(A_2) &= \frac{76}{210} = 0.362 \\
 P(B_1) &= \frac{65}{210} = 0.310 & P(B_2) &= \frac{45}{210} = 0.214 \\
 P(B_3) &= \frac{100}{210} = 0.476 & P(A_1 \cap B_1) &= \frac{40}{210} = 0.190 \\
 P(A_1 \cap B_2) &= \frac{25}{210} = 0.119 & P(A_1 \cap B_3) &= \frac{69}{210} = 0.329 \\
 P(A_2 \cap B_1) &= \frac{25}{210} = 0.119 & P(A_2 \cap B_2) &= \frac{20}{210} = 0.095 \\
 P(A_2 \cap B_3) &= \frac{31}{210} = 0.148
 \end{aligned}$$

ค่าความน่าจะเป็นข้างต้นเป็นดังนี้

เพศ	ความคิดเห็น			รวม
	เห็นด้วย B_1	ไม่แน่ใจ B_2	ไม่เห็นด้วย B_3	
าย A_1	0.190	0.119	0.329	0.638
หญิง A_2	0.119	0.095	0.148	0.362
วม	0.309	0.214	0.477	1.00

ก. (1) ถ้าทราบว่า นักศึกษาที่ถูกเลือกเป็นชาย ความน่าจะเป็นที่เห็นด้วย คือ

$$P(B_1 / A_1) = \frac{P(B_1 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{0.190}{0.638} = 0.2978$$

(2) ถ้าทราบว่า นักศึกษาที่ถูกเลือกเป็นชาย ความน่าจะเป็นที่ไม่แน่ใจ คือ

$$P(B_2 / A_1) = \frac{P(B_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{0.119}{0.638} = 0.1865$$

(3) ถ้าทราบว่า นักศึกษาที่ถูกเลือกเป็นชาย ความน่าจะเป็นที่ไม่เห็นด้วย คือ

$$P(B_3 / A_1) = \frac{P(B_3 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{0.329}{0.638} = 0.5156$$

ข. (1) ถ้าทราบว่า นักศึกษาที่ถูกเลือกเป็นหญิง ความน่าจะเป็นที่เห็นด้วย คือ

$$P(B_1 / A_2) = \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.119}{0.362} = 0.3287$$

(2) ถ้าทราบว่า นักศึกษาที่ถูกเลือกเป็นหญิง ความน่าจะเป็นที่ไม่แน่ใจ คือ

$$P(B_2 / A_2) = \frac{P(B_2 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.095}{0.362} = 0.2624$$

(3) ถ้าทราบว่า นักศึกษาที่ถูกเลือกเป็นหญิง ความน่าจะเป็นที่ไม่เห็นด้วย คือ

$$P(B_3 / A_2) = \frac{P(B_3 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.148}{0.362} = 0.4088$$

บทสรุป

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เป็นการบอกถึงโอกาสที่เหตุการณ์นั้นจะมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด ถ้าค่าความน่าจะเป็นมีค่ามากแสดงว่าเหตุการณ์นั้นมีโอกาสเกิดขึ้นมาก แต่ถ้าค่าความน่าจะเป็นมีค่าน้อยแสดงว่าเหตุการณ์นั้นมีโอกาสเกิดขึ้นน้อย

การทดลองสุ่ม เป็นการทดลองที่ทราบว่าจะเกิดอะไรขึ้นบ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่าจะเกิดอะไร

ปริภูมิตัวอย่างหรือแซมเปิลสเปซ เป็นผลที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดจากการทดลองสุ่มเหตุการณ์ เป็นส่วนหนึ่งของแซมเปิลสเปซ

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E แทนด้วย $P(E)$ โดยที่ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข เป็นการพิจารณาถึงโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ หลังจากเกิดเหตุการณ์หนึ่ง ๆ ขึ้นแล้ว การหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข อาจหาเทียบกับแซมเปิลสเปซใหม่หรืออาจหาได้จากบทนิยาม

แบบฝึกหัด 3

1. ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง แล้วเขียนแซมเปิลสเปซ
 - 1.1 จงหาความน่าจะเป็นที่แต้มรวมของลูกเต๋ามากกว่า 10
 - 1.2 จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 3
 - 1.3 จงหาความน่าจะเป็นที่แต้มรวมน้อยกว่า 6

2. บนชั้นหนังสือมีหนังสือภาษาอังกฤษ 3 เล่ม วิทยาศาสตร์ 1 เล่ม และคณิตศาสตร์ 4 เล่ม แตกต่างกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้
 - 2.1 หนังสือวิทยาศาสตร์
 - 2.2 หนังสือคณิตศาสตร์ 2 เล่ม และภาษาอังกฤษ 1 เล่ม
3. นักแม่นปืนคนหนึ่งยิงปืนเข้าเป้าตรงกลาง 50% ของจำนวนครั้งที่ยิง จงหาความน่าจะเป็นที่นักแม่นปืนคนนี้จะยิงปืนเข้าเป้า 3 ครั้งในการยิง 4 ครั้ง
4. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นพร้อมกัน โดยที่ $P(A) = 0.42$ และ $P(B) = 0.49$ จงหา
 - 4.1 $P(A \cup B)$
 - 4.2 $P(A')$
 - 4.3 $P(A' \cap B)$
5. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ โดยที่ $P(A \cup B) = 0.75$ $P(A') = 0.67$ และ $P(A \cap B) = 0.25$ จงหา $P(B)$
6. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ โดยที่ $P(A) = 0.38$ $P(B) = 0.5$ และ $P(A \cap B) = 0.25$ จงหา $P(B \cap A')$
7. ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง ถ้าทราบมาก่อนว่า ลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 1 จงหาความน่าจะเป็นที่
 - 7.1 อีกลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 6
 - 7.2 ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าททั้งสองมากกว่า 4
8. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง
 - ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านหัวในการโยนครั้งแรก
 - B เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านก้อยอย่างน้อย 2 ครั้ง
 - C เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านหัว 1 ครั้งหรือเหรียญหงายด้านก้อยและหัว
 จงตรวจสอบว่า
 - 8.1 เหตุการณ์ A, B และ C เป็นอิสระต่อกันทีละคู่หรือไม่
 - 8.2 $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ หรือไม่
9. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้า โดยใช้เครื่องจักร 3 เครื่อง เครื่องจักรเครื่องที่หนึ่งผลิตสินค้าได้ 20% เครื่องที่สองผลิตได้ 30% และเครื่องที่สามผลิตได้ 50% ของผลผลิตทั้งหมด และพบว่าสินค้าที่ชำรุดที่ผลิตจากเครื่องจักรคิดเป็นร้อยละ 5, 10 และ 15 ตามลำดับ สุ่มหยิบสินค้ามา 1 ชิ้น จงหา
 - 9.1 ความน่าจะเป็นที่จะได้สินค้าที่ชำรุด
 - 9.2 ถ้าพบว่าสินค้าชำรุด จงหาความน่าจะเป็นที่สินค้าชิ้นดังกล่าวผลิตจากเครื่องจักรเครื่องที่หนึ่ง
10. สมมติว่าลูกแก้วสีต่าง ๆ แยกใส่ไว้ในกล่อง ดังนี้

	กล่องที่ 1	กล่องที่ 2	กล่องที่ 3
สีแดง	2	4	3
สีขาว	3	1	4
สีน้ำเงิน	5	3	3

เลือกกล่องมา 1 ใบ แล้วสุ่มเลือกลูกแก้วมา 1 ลูก ถ้าพบว่าเป็นลูกแก้วสีแดง จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นลูกแก้วที่เลือกจากกล่องที่ 3

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง เหตุการณ์ที่เป็นอิสระและทฤษฎีบทของเบส์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายแนวคิดของความเป็นอิสระและตรวจสอบความเป็นอิสระของเหตุการณ์ได้
2. อธิบายแนวคิดของทฤษฎีบทของเบส์
3. ทฤษฎีบทของเบส์หาค่าความน่าจะเป็นที่กำหนดให้ได้

สาระสำคัญ

1. เหตุการณ์ที่เป็นอิสระ
2. ทฤษฎีบทของเบส์

สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารการเรียนรู้เรื่องเหตุการณ์ที่เป็นอิสระและทฤษฎีบทของเบส์

ยุทธวิธีการจัดการเรียนรู้

1. นำเสนอสถานการณ์ปัญหา

1. นำเสนอเหตุการณ์ต่าง ๆ แล้วให้นักศึกษาพิจารณาว่าเหตุการณ์ที่กำหนดนั้นเหตุการณ์ใดเกี่ยวข้องหรือไม่เกี่ยวข้องกัน เพราะเหตุใด

2. กิจกรรมการเรียนรู้

2. ให้ความหมายของเหตุการณ์ที่เป็นอิสระ พร้อมยกตัวอย่างเหตุการณ์ที่เป็นอิสระและเหตุการณ์ที่ไม่เป็นอิสระ

3. ยกตัวอย่างเหตุการณ์ E_1 , E_2 , E_3 ให้นักศึกษาพิจารณาว่าเหตุการณ์ทั้งสาม เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่ คูใดบ้างที่เป็นอิสระต่อกัน เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปว่าเหตุการณ์จะเป็นอิสระต่อกันเมื่อเหตุการณ์นั้นเป็นอิสระต่อกันเป็นคู่ ๆ

4. นำเสนอแซมเปิลสเปซซึ่งสามารถแบ่งเป็นเหตุการณ์ย่อย ๆ และแต่ละเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกัน จะเรียกเหตุการณ์ย่อย ๆ เหล่านี้ว่าผลแบ่งกัน (Partition) ของแซมเปิลสเปซ เพื่อนำไปสู่การให้ความหมายของทฤษฎีบทความน่าจะเป็นทั้งหมด

5. ให้นักศึกษาฝึกหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์โดยใช้ทฤษฎีบทความน่าจะเป็นทั้งหมด

6. ผู้สอนนำเสนอปัญหาที่แตกต่างจากปัญหาที่หาคำตอบได้โดยใช้ทฤษฎีบทความน่าจะเป็นทั้งหมด ให้นักศึกษาคิดหาคำตอบ ซึ่งจะพบว่าไม่สามารถหาคำตอบได้โดยใช้ทฤษฎีบทความน่าจะเป็นทั้งหมด (เพราะเหตุใด ขาดเงื่อนไขใด)

7. ผู้สอนนำเสนอสถานการณ์ที่ไม่สามารถหาคำตอบได้โดยใช้เพียงทฤษฎีความน่าจะเป็นทั้งหมด ก่อนนำเสนอทฤษฎีบทของเบส์ จากนั้นจึงนำเสนอทฤษฎีบทของเบส์ พร้อมแสดงวิธีการหา

ค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ จากนั้นให้นักศึกษาวิเคราะห์ถึงความแตกต่างระหว่างทฤษฎีบทความน่าจะเป็นทั้งหมดและทฤษฎีบทของเบส์

8. ให้นักศึกษาฝึกหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์โดยใช้ทฤษฎีบทของเบส์

3. ขั้นสรุป

ให้นักศึกษาสรุปแนวคิดของทฤษฎีบทความน่าจะเป็นทั้งหมดและทฤษฎีบทของเบส์ พร้อมอธิบายถึงประโยชน์ของทฤษฎีบทความน่าจะเป็นทั้งหมดและทฤษฎีบทของเบส์

งานที่มอบหมาย

ให้นักศึกษาฝึกทำโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์โดยใช้ทฤษฎีบทความน่าจะเป็นทั้งหมดและทฤษฎีบทของเบส์ นอกเหนือจากการเรียนในชั้นเรียนปกติ

การวัดและประเมินผล

1) สังเกตการร่วมมือ การอภิปราย การแสดงความคิดเห็นและการชี้แจงเหตุผลในการหาคำตอบของปัญหา(ใช้แบบสังเกต)

2) การตรวจผลงานการแก้ปัญหาในเอกสารการเรียนรู้ โดยพิจารณาความถูกต้อง ความสมบูรณ์ของแนวคิดของการเชื่อมโยงความรู้ ความเหมาะสมในการแสดงเหตุผลในการคิด และเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาในแต่ละขั้นตอนของการหาคำตอบ

เอกสารการเรียนรู้ 4

เรื่อง เหตุการณ์ที่เป็นอิสระและทฤษฎีบทของเบส์

สำหรับเหตุการณ์ใด ๆ สองเหตุการณ์ ถ้าการเกิดของเหตุการณ์หนึ่งไม่มีผลทำให้โอกาสของการเกิดของอีกเหตุการณ์หนึ่งเปลี่ยนไป จะกล่าวว่าเหตุการณ์ทั้งสองเป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน เช่น การทอดลูกเต๋าสองลูก

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกที่หนึ่งขึ้นแต้มต่าง ๆ

B แทนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกที่สองขึ้นแต้มต่าง ๆ

จะพบว่า การที่ลูกเต๋แต่ละลูกจะขึ้นแต้มต่าง ๆ กันนั้นไม่ได้ขึ้นอยู่กับกัน เช่น การที่ลูกเต๋าลูกแรกขึ้นแต้ม 5 จะไม่มีผลต่อการที่ลูกเต๋าลูกที่สองจะขึ้นแต้มใด ๆ เหตุการณ์ดังกล่าวนี้ถือว่า เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน ให้ความหมายของเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน ได้ดังนี้

4.1 เหตุการณ์ ที่เป็นอิสระต่อกัน

บทนิยาม 4.1 เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน (independent events) ก็ต่อเมื่อ

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ตัวอย่าง 4.1 ในการแข่งขันยิงปืน ความน่าจะเป็นที่นาย ก. จะยิงถูกเป้าในแต่ละนัดเท่ากับ $\frac{1}{3}$

ถ้านาย ก. ยิงปืน 3 นัด จงหาความน่าจะเป็นที่นาย ก. จะยิงถูกเป้าทั้ง 3 นัด

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่นาย ก. ยิงปืนถูกเป้านัดแรก

B เป็นเหตุการณ์ที่นาย ก. ยิงปืนถูกเป้านัดที่สอง

C เป็นเหตุการณ์ที่นาย ก. ยิงปืนถูกเป้านัดที่สาม

เนื่องจากเหตุการณ์ที่นาย ก. จะยิงปืนถูกเป้าแต่ละนัดเท่ากับ $\frac{1}{3}$ และเหตุการณ์

ทั้งสามต่างเป็นอิสระต่อกัน

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่นาย ก. จะยิงถูกเป้าทั้ง 3 นัด เท่ากับ $\frac{1}{27}$

ตัวอย่าง 4.2 ในการทอดลูกเต๋ 2 ลูก 1 ครั้ง

A เป็นเหตุการณ์ที่แต้มรวมของลูกเต๋ เท่ากับ 6

B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ขึ้นแต้มเท่ากัน

จงตรวจสอบว่า เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

$$\text{จะได้ } P(A) = \frac{5}{36}$$

$$\text{และ } B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$\text{จะได้ } P(B) = \frac{6}{36}$$

$$\text{พิจารณา } P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{5}{36}\right) \left(\frac{6}{36}\right) = \frac{30}{1296} = 0.023$$

$$\text{แต่ } A \cap B = \{(3, 3)\}$$

$$\text{จะได้ } P(A \cap B) = \frac{1}{6} = 0.166$$

เนื่องจาก $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
 ดังนั้น เหตุการณ์ A และ B ไม่เป็นอิสระต่อกัน

บทนิยาม 4.2 เหตุการณ์ E_1, E_2 และ E_3 เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน (mutually independent events) ก็ต่อเมื่อมีสมบัติ 2 ข้อต่อไปนี้

1. เป็นอิสระต่อกันเป็นคู่ ๆ (pairwise independence) นั่นคือ

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

$$P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3)$$

$$P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$$

2. $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$

ตัวอย่าง 4.3 โยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง ให้ E_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ เป็นเหตุการณ์ที่ครั้งที่ i เหรียญหงาย
 ด้านหัว จงแสดงว่า E_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

วิธีทำ โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง จะได้

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ให้ E_1 แทน เหตุการณ์ที่โยนเหรียญครั้งที่ 1 แล้วเหรียญหงายด้านหัว
 จะได้ $E_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$$\text{และ } P(E_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

E_2 แทน เหตุการณ์ที่โยนเหรียญครั้งที่ 2 แล้วเหรียญหงายด้านหัว
 จะได้ $E_2 = \{HHH, HHT, THH, THT\}$

$$\text{และ } P(E_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

E_3 แทน เหตุการณ์ที่โยนเหรียญครั้งที่ 3 แล้วเหรียญหงายด้านหัว
 จะได้ $E_3 = \{HHH, HTH, THH, TTH\}$

$$\text{และ } P(E_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

นั่นคือ $P(E_i) = \frac{1}{2}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$

เนื่องจาก $E_1 \cap E_2 = \{HHH, HHT\}$

$$\text{จะได้ } P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

$$E_1 \cap E_3 = \{HHH, HTH\}$$

$$\text{จะได้ } P(E_1 \cap E_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(E_1) \cdot P(E_3)$$

$$E_2 \cap E_3 = \{HHH, THH\}$$

$$\text{จะได้ } P(E_2 \cap E_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(E_2) \cdot P(E_3)$$

เนื่องจาก $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{HHH\}$

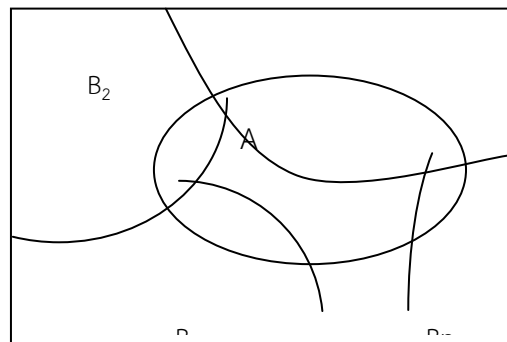
$$\text{จะได้ } P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{8} \text{ และ } P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\text{นั่นคือ } P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$$

แสดงว่า E_1, E_2 และ E_3 เป็นอิสระต่อกัน

4.2 ทฤษฎีบทของเบส์

สมมติให้ $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive events) และ $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = S$ (S แทนแซมเปิลสเปซ) ถ้า A เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซที่เกิดร่วมกับเหตุการณ์ $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ เหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งหรือหลายเหตุการณ์ ดังภาพ



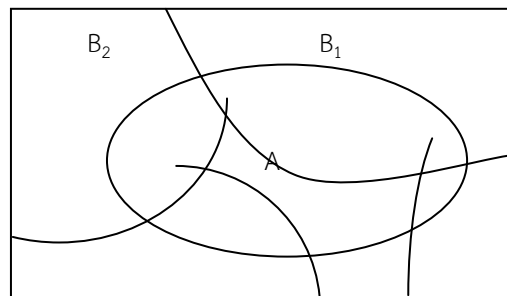
รูปที่ 4.1 A เป็นเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกับ $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ ซึ่งไม่เกิดร่วมกัน

บทนิยาม 4.3 เหตุการณ์ $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ เป็นผลแบ่งกัน (partition) ของแซมเปิลสเปซ S

$$\text{ถ้า } 1. B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = S$$

$$2. B_i \cap B_j = \emptyset \text{ สำหรับทุกค่าของ } i \neq j$$

$$3. P(B_i) > 0 ; \text{ สำหรับทุกค่าของ } i = 1, 2, 3, \dots, n$$



รูปที่ 4.2 เหตุการณ์ $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ เป็นผลแบ่งกันของ A

จากรูป ถ้า A เป็นเหตุการณ์ซึ่งเป็นเซตย่อยของ S และ $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ เป็นผลแบ่งกันของ S แล้ว $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ เป็นผลแบ่งกันของ A ด้วย

นั่นคือ $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A) \cup \dots \cup (B_n \cap A)$

และเนื่องจาก $(B_i \cap A) \cap (B_j \cap A) = \emptyset$ สำหรับทุกค่าของ $i \neq j$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A) + \dots + P(B_n \cap A) \\ &= P(B_1) P(A/B_1) + P(B_2) P(A/B_2) + \dots + P(B_n) P(A/B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A/B_i) \end{aligned}$$

จึงได้ทฤษฎีบทซึ่งเรียกว่า ทฤษฎีความน่าจะเป็นทั้งหมด ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1 ทฤษฎีบทความน่าจะเป็นทั้งหมด (theorem of total probability)

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ซึ่งเป็นเซตย่อยของแซมเปิลสเปซ S และ $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$

เป็นผลแบ่งกันของ S แล้ว $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A/B_i)$

ตัวอย่าง 4.4 โรงงานผลิตรถยนต์แห่งหนึ่ง มีเครื่องจักร 3 เครื่อง ซึ่งสามารถผลิตรถยนต์ได้ 60% 30% และ 10% ของจำนวนยางรถยนต์ที่ผลิตจากโรงงานแห่งนี้ ยางรถยนต์ที่ผลิตจากเครื่องจักรทั้ง 3 เครื่องมีข้อบกพร่อง 2% 3% และ 4% ตามลำดับ ถ้าเลือกยางรถยนต์มาหนึ่งเส้นโดยการสุ่มเพื่อตรวจสอบ จงหาความน่าจะเป็นที่ยางรถยนต์เส้นนี้จะมีข้อบกพร่อง

วิธีทำ ให้ A แทนเหตุการณ์ที่เลือกได้ยางรถยนต์ที่บกพร่อง

B_1 แทนเหตุการณ์ที่เลือกได้ยางรถยนต์ที่ผลิตจากเครื่องจักรเครื่องที่ 1

B_2 แทนเหตุการณ์ที่เลือกได้ยางรถยนต์ที่ผลิตจากเครื่องจักรเครื่องที่ 2

B_3 แทนเหตุการณ์ที่เลือกได้ยางรถยนต์ที่ผลิตจากเครื่องจักรเครื่องที่ 3

จะได้

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) P(A/B_1) + P(B_2) P(A/B_2) + P(B_3) P(A/B_3) \\ &= (0.60)(0.02) + (0.30)(0.03) + (0.10)(0.04) \\ &= 0.012 + 0.009 + 0.004 \\ &= 0.025 \end{aligned}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ยางรถยนต์เส้นนี้将有ความบกพร่อง เท่ากับ 0.025

ทฤษฎีบท 4.2 ทฤษฎีบทของเบส์ (Bayes' theorem)

เหตุการณ์ $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ เป็นผลแบ่งกันของแซมเปิลสเปซ S และ A เป็นเหตุการณ์ซึ่งเป็นเซตย่อยของ S โดย $P(A) > 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} P(B_k/A) &= \frac{P(B_k)P(A/B_k)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_k)P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)} \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } k = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.5 โรงงานแห่งหนึ่งมีเครื่องจักรผลิตหลอดไฟฟ้า 3 เครื่อง เครื่องที่ 1 ผลิตหลอดไฟฟ้าได้

60% เครื่องที่ 2 ผลิตหลอดไฟฟ้าได้ 25% เครื่องที่ 3 ผลิตหลอดไฟฟ้าได้ 15% ของผลผลิตทั้งหมด และผลผลิตของเครื่องจักรทั้งสามมีหลอดชำรุด 2% 3% และ 5% ตามลำดับ ถ้าสุ่มหลอดไฟฟ้าที่ผลิตจากโรงงานนี้มาหนึ่งหลอด ปรากฏว่าหลอดชำรุด ความน่าจะเป็นที่หลอดชำรุดนี้ผลิตมาจากเครื่องจักรที่ 2 เป็นเท่าใด

วิธีทำ ให้ B แทนเหตุการณ์ที่สุ่มแล้วได้หลอดไฟฟ้าชำรุด

A_1 แทนเหตุการณ์ที่สุ่มแล้วได้หลอดไฟฟ้าจากเครื่องจักรที่ 1

A_2 แทนเหตุการณ์ที่สุ่มแล้วได้หลอดไฟฟ้าจากเครื่องจักรที่ 2

A_3 แทนเหตุการณ์ที่สุ่มแล้วได้หลอดไฟฟ้าจากเครื่องจักรที่ 3

ต้องการหาความน่าจะเป็นของการสุ่มได้หลอดไฟฟ้าที่ชำรุดที่ผลิตมาจากเครื่องจักรที่ 2 ตามทฤษฎีบทของเบส์ จะได้

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)}$$

$$\text{ในที่นี้ } P(A_1) = 0.60 \quad P(A_2) = 0.25 \quad P(A_3) = 0.15$$

$$P(B/A_1) = 0.02 \quad P(B/A_2) = 0.03 \quad P(B/A_3) = 0.05$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } P(A_2/B) &= \frac{(0.25)(0.03)}{(0.60)(0.02) + (0.25)(0.03) + (0.15)(0.05)} \\ &= \frac{0.0075}{0.027} \\ &= 0.278 \end{aligned}$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าที่สุ่มมานั้นเป็นหลอดที่ชำรุดที่ผลิตจากเครื่องจักรเครื่องที่ 2 เท่ากับ 0.278

บทสรุป

เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ ที่การเกิดเหตุการณ์หนึ่งไม่ส่งผลต่อการเกิดอีกเหตุการณ์หนึ่ง จะเรียกเหตุการณ์ทั้งสองว่า **เป็นอิสระต่อกัน**

ทฤษฎีบทของเบส์ เป็นการหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ที่แซมเปิลสเปซถูกแบ่งออกเป็นส่วน ๆ ที่ไม่เกิดร่วมกัน และสนใจความน่าจะเป็นที่เป็นส่วนย่อยของแซมเปิลสเปซนั้น

แบบฝึกหัด 4

1. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านหัวในการโยนครั้งแรก

B เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านก้อยอย่างน้อย 2 ครั้ง

C เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายด้านหัว 1 ครั้งหรือเหรียญหงายด้านก้อยและหัว

จงตรวจสอบว่า

1.1 เหตุการณ์ A, B และ C เป็นอิสระต่อกันทีละคู่หรือไม่

1.2 $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ หรือไม่

2. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้า โดยใช้เครื่องจักร 3 เครื่อง เครื่องจักรเครื่องที่หนึ่งผลิตสินค้าได้ 20% เครื่องที่สองผลิตได้ 30% และเครื่องที่สามผลิตได้ 50% ของผลผลิตทั้งหมด และพบว่าสินค้าที่ชำรุดที่ผลิตจากเครื่องจักรคิดเป็นร้อยละ 5, 10 และ 15 ตามลำดับ สุ่มหยิบสินค้ามา 1 ชิ้น จงหา

2.1 ความน่าจะเป็นที่จะได้สินค้าที่ชำรุด

2.2 ถ้าพบว่าสินค้าชำรุด จงหาความน่าจะเป็นที่สินค้าชิ้นดังกล่าวผลิตจากเครื่องจักรเครื่องที่หนึ่ง

3. สมมติว่าลูกแก้วสีต่าง ๆ แยกใส่ไว้ในกล่อง ดังนี้

	กล่องที่ 1	กล่องที่ 2	กล่องที่ 3
สีแดง	2	4	3
สีขาว	3	1	4
สีน้ำเงิน	5	3	3

เลือกกล่องมา 1 ใบ แล้วสุ่มเลือกลูกแก้วมา 1 ลูก ถ้าพบว่าเป็นลูกแก้วสีแดง จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นลูกแก้วที่เลือกจากกล่องที่ 3