บทที่ 4
ตัวกรองคาลมานและอัลกอริทึมของการปรับแก้ค่าความผิดพลาดจาก GPS

ในการวัดปริมาณทุกชนิดย่อมต้องมีความคลาดเคลื่อนรวมอยู่ ขนาดของความคลาดเคลื่อนจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับอุปกรณ์ วิธีการ และสภาพแวดล้อมในขณะทำการวัด เมื่อจะนำค่าที่วัดได้มาใช้เราจำเป็นต้องกำจัดความคลาดเคลื่อนเหล่านี้ให้หมดไปหรือลดเหลือน้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้ในงานรังวัดดาวเทียมความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นอาจพิจารณาแยกได้เป็น 3 ประเภท คือ ประเภทที่เกี่ยวข้องกับดาวเทียม ได้แก่ ความคลาดเคลื่อนวงโคจรและความคลาดเคลื่อนนาฬิกาดาวเทียม ประเภทที่เกี่ยวข้องกับการแพร่กระจายของสัญญาณได้แก่ ความคลาดเคลื่อนของการหักเหในชั้นบรรยากาศและการเกิดคลื่นสะท้อน ประเภทสุดท้าย เกี่ยวข้องกับเครื่องรับสัญญาณ เช่น นาฬิกาเครื่องรับ เป็นต้น

วิทยานิพนธ์เรื่องนี้จะทำการสร้างแบบจำลองของเครื่องรับ GPS จากนั้นใช้ตัวกรองคาลมานในการทำนายค่าความผิดพลาดของเครื่องรับ GPS ที่เกิดขึ้นใหม่โดยใช้ค่าเดิม และนำค่าที่ได้มาปรับแก้ค่าพิกัดตำแหน่งในโปรแกรมแสดงเส้นทางยานพาหนะ ซึ่งสามารถลดค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้โดยไม่จำเป็นต้องสำรวจเพื่อเก็บข้อมูลเส้นทางจำนวนมาก

4.1 แบบจำลองความผิดพลาดของความเฉื่อยสำหรับระบบนำทาง

ความเฉื่อยของระบบนำทางหรือเรียกว่า INS (Inertial Navigation System) เป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้เครื่องรับสัญญาณดาวเทียม GPS สามารถรับสัญญาณได้อย่างเร็วหรือช้าในพื้นที่ต่างๆ กัน ดังนี้เครื่องรับสัญญาณ GPS ที่มีราคาแพงจะมีความเฉื่อยน้อย ทำให้สามารถรับสัญญาณได้ดี

ส่วนประกอบพื้นฐานของ INS ประกอบด้วยตัวตรวจวัด 2 ตัว คือ ไจโรสโคป (Gyroscope) และ เครื่องวัดความเร่ง (Accelerometer) ตัวตรวจวัดไจโรจะทำหน้าที่วัดอัตราการหมุนหรือความเร็วเชิงมุม ซึ่งสามารถใช้สมการคณิตศาสตร์อินทิเกรทเทียบกับเวลาจะได้เป็นค่าความสูงของดาวเทียมเทียบกับพื้นโลก ในส่วนของเครื่องวัดความเร่งจะทำการวัดความเร่งซึ่งเราสามารถเปลี่ยนเป็นค่าความเร็วได้โดยใช้การอินทิเกรทเทียบกับเวลาหรือทำการอินทิเกรทครั้งที่สองเพื่อเปลี่ยนเป็นค่าของตำแหน่งได้ โดย INS จะเก็บค่าความสูง ตำแหน่ง และความเร็ว ซึ่งความถูกต้องของค่าทั้ง 3 ขึ้นอยู่ปัจจัยอื่นๆด้วย อย่างไรก็ตามปกติในการอินทิเกรทจะทำให้เกิดความผิดพลาดของข้อมูล ความสูง ตำแหน่ง และความเร็ว ซึ่งทำให้ระบบมีเสถียรภาพน้อยลง ความผิดพลาดจะเพิ่มมาก ขึ้นอยู่กับตัวตรวจวัดที่ใช้ ดังนั้นในการสร้างแบบจำลองความผิดพลาดจำเป็นต้องพิจารณาส่วนประกอบและโครงสร้างของตัวตรวจวัดด้วย

4.1.1 แบบจำลองความผิดพลาดความเฉื่อยแบบแกนเดียว (Single – Axis Inertial Error Model)

พิจารณาลักษณะของแบบจำลองพื้นฐานใน 1 แกน ซึ่งมีความสัมพันธ์ระหว่างตัวตรวจวัดไจโรและ ตัวตรวจวัดความเร่ง ดังนี้

Δx = ความผิดพลาดของตำแหน่ง (m)

$\Delta\dot{x}$ = ความผิดพลาดของความเร็ว (m/s)

$\Delta\ddot{x}$ = ความผิดพลาดของความเร่ง (m/s^2)

ϕ = ความผิดพลาดของความสูงจากพื้นโลก (m)

g = แรงโน้มถ่วงของโลก (m/s^2)

R_e = รัศมีของโลก (km)

a = ความเร่งของสัญญาณรบกวน (m/s^2)

ε = อัตราเร็วเชิงมุมของสัญญาณรบกวนสำหรับตัวตรวจวัดไจโร (degree/ s^2)

แบบจำลองแบบ 1 แกนเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง ตัวตรวจวัดความเร่งและตัวตรวจวัดไจโร โดยการตรวจวัดของทั้งสองจะมีคุณสมบัติของความเฉื่อยดังนี้ คือ ความเร่งและความเร่งเชิงมุมมีการเปลี่ยนแปลงแบบเป็นเชิงเส้น ซึ่งสามารถอธิบายด้วยสมการต่อไปนี้

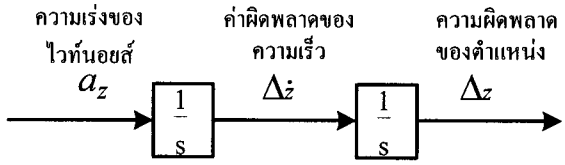
$$\Delta\ddot{x} = a - g\phi \tag{4.1}$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{R_e}\Delta\dot{x} + \varepsilon \tag{4.2}$$

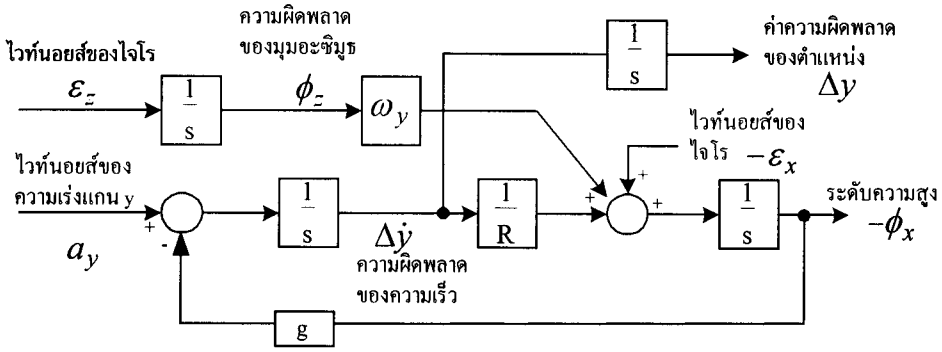
สมการที่ (4.1) คือสมการความผิดพลาดของความเร่งซึ่งเกิดจากสัญญาณรบกวนของตัวตรวจวัดความเร่งและแรงโน้มถ่วงของโลกทำให้เกิดความผิดพลาดของความสูง โดยอัตราการเปลี่ยนแปลงของความผิดพลาดของความสูงสามารถอธิบายได้ตามสมการที่ (4.2) ซึ่งเป็นผลการจากสัญญาณรบกวนของตัวตรวจวัดไจโรและความผิดพลาดของความเร็ว สำหรับความผิดพลาดของความเร่งสามารถอินทิเกรทหาค่าความผิดพลาดของความเร็วได้ โดยค่าความผิดพลาดของความเร่งจะเพิ่มขึ้นตามความโค้งของผิวโลก พิจารณาผลของความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในแนวนอนเทียบกับผลของความผิดพลาดของการวัดความเร่งในตอนเริ่มต้น ผลของการออสซิเลทที่เกิดขึ้นเรียกว่า Schuler Oscillation ซึ่งจะทำให้ค่าความผิดพลาดในแนวนอนมีเสถียรภาพมากขึ้น โดยให้ค่า g เป็นค่าแรงดึงดูดของโลกมีค่าคงที่ ทำให้แบบจำลองนี้มีการเปลี่ยนแปลงได้น้อย

4.1.2 แบบจำลองความผิดพลาดของความเฉื่อยแบบ 3 แกน (Three – Axes Inertial Error Model)

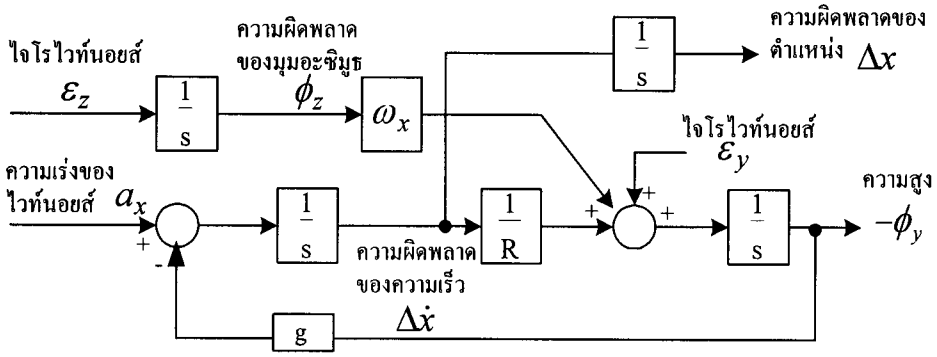
ทำการสร้างแบบจำลองแบบ 3 แกน จากแบบจำลอง 1 แกน โดยมีตัวตรวจวัด 3 คู่ โดยตัวตรวจวัดคู่ที่ 1 จะอยู่ในแนวดิ่ง – มุมอะซิมูธ ดังภาพที่ (4.1) ตัวตรวจวัดคู่ที่ 2 วางในแนวทิศเหนือ-ทิศใต้ ดังภาพที่ (4.2) บล็อกไดอะแกรมทรานซเฟอร์ฟังก์ชันของทิศเหนือ และ ตัวตรวจวัดคู่ที่ 3 อยู่ในแนวทิศตะวันออก-ทิศตะวันตก ดังภาพที่ (4.3) บล็อกไดอะแกรมทรานซเฟอร์ฟังก์ชันแบบจำลองของทิศตะวันออก ดังนั้นทั้งแบบจำลองความผิดพลาดแบบ 1 แกน และ 3 แกน เป็นแบบจำลองที่มีการเปลี่ยนแปลงที่ช้า สมการทั้งสองมี ทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่แตกต่างกันดังแสดงในภาพที่ (4.2) และ (4.3) เมื่อ $\Delta\omega$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุม , ϕ คือ ความผิดพลาดของความเร็วเชิงมุม , x คือ ทิศตะวันออก , y คือ ทิศเหนือ, z คือ ความสูง, และ $\Delta\omega_y$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมในแนวแกน y



ภาพที่ 4.1 แบบจำลองความผิดพลาดในแนวดิ่ง



ภาพที่ 4.2 แบบจำลองความผิดพลาดของทิศเหนือ



ภาพที่ 4.3 แบบจำลองความผิดพลาดในทิศตะวันออก

ค่าความผิดพลาดในแนวทิศเหนือถูกกำหนดโดยสมการ

$$\Delta\ddot{y} = a_y - g(-\phi_x) \tag{4.3}$$

$$-\dot{\phi}_x = \frac{1}{R_e}\Delta\dot{y} + \omega_y\phi_z - \varepsilon_x \tag{4.4}$$

ค่าความผิดพลาดในแนวทิศตะวันออกถูกกำหนดโดยสมการ

$$\Delta\ddot{x} = a_x - g\phi_y \tag{4.5}$$

$$-\dot{\phi}_y = \frac{1}{R_e}\Delta\dot{x} + \omega_x\phi_z - \varepsilon_y \tag{4.6}$$

ค่าความผิดพลาดในแนวตั้งถูกกำหนดโดยสมการ

$$\Delta\ddot{z} = a_z \tag{4.7}$$

ค่าความผิดพลาดของมุมอะซิมูธถูกกำหนดโดยสมการ

$$\dot{\phi}_z = \varepsilon_z \tag{4.8}$$

สมการสเตทที่ใช้สำหรับการเปลี่ยนแปลงพื้นฐานของแบบจำลองใช้ตัวแปร 9 ตัวแปร ในการพิจารณา จะใช้ตัวกรองแบบคาลมานในการแก้ปัญหาแบบจำลองของ INS ซึ่งมีตัวแปรดังต่อไปนี้

$x_1 = x$ = ค่าความผิดพลาดของตำแหน่งในทิศตะวันออก (m)

$x_2 = \dot{x}$ = ค่าความผิดพลาดของความเร็วในทิศตะวันออก (m/sec)

$x_3 = \phi_y$ = ค่าความผิดพลาดของความเร็วเชิงมุมในแนวแกน y (rad)

$x_4 = y$ = ความผิดพลาดของตำแหน่งในทิศเหนือ (m)

$x_5 = \dot{y}$ = ความผิดพลาดของความเร็วในทิศเหนือ (m/sec)

$x_6 = \phi_x$ = ค่าความผิดพลาดของความเร็วเชิงมุมในแนวแกน -x (rad)

$x_7 = z$ = ความผิดพลาดของตำแหน่งในแนวตั้ง (m)

$x_8 = \dot{z}$ = ความผิดพลาดของความเร็วในแนวตั้ง (m/sec)

$x_9 = \dot{\phi}_x$ = ความผิดพลาดของมุม azimuth (rad)

$U_{ax} = a_x$ = ความเร่งของสัญญาณรบกวนในแนวแกน x (m/s^2)

$U_{ay} = a_y$ = ความเร่งของสัญญาณรบกวนในแนวแกน y (m/s^2)

$U_{az} = a_z$ = ความเร่งของสัญญาณรบกวนในแนวแกน z (m/s^2)

$U_{gx} = g_x$ = แรงโน้มถ่วงของโลกในแนวแกน x (m/s^2)

$U_{gy} = g_y$ = แรงโน้มถ่วงของโลกในแนวแกน y (m/s^2)

$U_{gz} = g_z$ = แรงโน้มถ่วงของโลกในแนวแกน z (m/s^2)

ตามสมการที่ (4.3) ถึง สมการที่ (4.8) เราสามารถเขียนสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งซึ่งเป็นสมการแบบคงที่ของกระบวนการสำหรับระบบขนาด 9 X 9 ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\\ \dot{x}_7\\ \dot{x}_8\\ \dot{x}_9\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{R_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_x\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_e} & 0 & 0 & 0 & \omega_y\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F_{INS}} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ u_{ax}\\ u_{gx}\\ 0\\ u_{ay}\\ u_{gy}\\ 0\\ u_{az}\\ u_{gz}\end{bmatrix} \tag{4.9}$$

ส่วนสมการกระบวนการของความผิดพลาดแบบไม่คงที่ ถูกกำหนดโดยสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\\ \dot{x}_7\\ \dot{x}_8\\ \dot{x}_9\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \rho_z & -\rho_y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\rho_z & 0 & \rho_x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \rho_x & -\rho_y & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{-g}{R_e} & 0 & 0 & 0 & C_{rz} & -C_{ry} & 0 & -a_z & a_y\\ 0 & \frac{-g}{R_e} & 0 & -C_{rz} & 0 & C_{rx} & a_z & 0 & -a_x\\ 0 & 0 & \frac{2g}{R_e} & C_{ry} & -C_{rx} & 0 & -a_y & a_x & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{rz} & S_{ry}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{rz} & 0 & -S_{rx}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{ry} & S_{rx} & 0 \end{bmatrix}}_{F_{INS}} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ u_{ax}\\ u_{gx}\\ 0\\ u_{ay}\\ u_{gy}\\ 0\\ u_{az}\\ u_{gz}\end{bmatrix} \tag{4.10}$$

โดยที่ Ω_s = sideral rate

ดังนั้น ค่า sideral rate ในแนวแกน x แกน y และ แกน z มีสมการเป็นดังต่อไปนี้

$$\Omega_x = \Omega_s.cos(lattitude).\sin(\alpha) \tag{4.11}$$

$$\Omega_y = \Omega_s.cos(lattitude).\cos(\alpha) \tag{4.12}$$

$$\Omega_z = \Omega_s.cos(lattitude) \tag{4.13}$$

และ $$\rho_x = \frac{-x_5}{R_e(1-\frac{x_3}{R_e}-\frac{1}{298}(1-3(\cos(lattitude))^2)} \quad (4.14)$$

$$\rho_y = \frac{-x_2}{R_e(1-\frac{x_3}{R_e}-\frac{1}{298}(\sin(lattitude))^2)} \quad (4.15)$$

ค่า Coriolis rates ในแนวแกน x แกน y และ แกน z

$$C_{rx} = 2\Omega_x + \rho_x \quad (4.16)$$

$$C_{ry} = 2\Omega_y + \rho_y \quad (4.17)$$

$$C_{rz} = 2\Omega_z + \rho_z \quad (4.18)$$

ในแบบจำลองกระบวนการของ INS มีตัวแปร 9 ตัวแปร คือ ตำแหน่ง , ความเร็ว และความลาดเอียงของพื้น ในทั้ง 3 แกน ซึ่งเป็นเพียงความผิดพลาดบางส่วนของของระบบที่มีตัวตรวจวัดความเร่งและตัวตรวจวัดไจโร เป็นองค์ประกอบ ซึ่งเป็นเครื่องมืออย่างง่ายในการวัดความผิดพลาดทั้งหมดและแบบจำลองของฟังก์ชัน white-noise ดังนั้นสมมติให้ค่าความผิดพลาดเชิงมุมของความสูงจากพื้นมีค่าน้อยมาก และอัตราการเปลี่ยนแปลงของการหมุนเปลี่ยนแปลงช้าๆ จนกระทั่งคงที่ สมการความเร่งสามารถแทนได้โดยใช้แบบจำลองตัวแปร 9 ตัวแปร จากสมการที่ (4.9)ใช้สำหรับระบบที่มีการเคลื่อนที่ช้าๆ โดยแบบจำลองนี้ไม่ได้พิจารณาความผิดพลาดในแนวมุมอะซิมุท ซึ่งเปลี่ยนแปลงตามการหมุนของโลก ดังนั้นสำหรับระบบที่มีการเปลี่ยนแปลงความเร็ว โดยมีการเคลื่อนที่อย่างรวดเร็วโอกาสที่ความเร่งในแนวระดับจะทำให้เกิดความผิดพลาดมีมากขึ้น ดังนั้นจำเป็นที่จะต้องลดค่าความผิดพลาดดังกล่าว ซึ่งเมื่อมีความเร่งขึ้นในแนวแกน X และ แกน Y ค่าความผิดพลาดในแนวต่างๆ เป็นดังนี้
ค่าความผิดพลาดในแนวทิศเหนือถูกกำหนดโดยสมการ

$$\Delta\ddot{y} = a_y - g(-\phi_x) - A_x\phi_z \quad (4.19)$$

$$-\dot{\phi}_x = \frac{1}{R_e}\Delta\dot{y} + \omega_y\phi_z - \varepsilon_x \quad (4.20)$$

ค่าความผิดพลาดในแนวทิศตะวันออกถูกกำหนดโดยสมการ

$$\Delta\ddot{x} = a_x - g\phi_y - A_y\phi_z \quad (4.21)$$

$$-\dot{\phi}_y = \frac{1}{R_e}\Delta\dot{x} + \omega_x\phi_z - \varepsilon_y \quad (4.22)$$

ค่าความผิดพลาดในแนวตั้งถูกกำหนดโดยสมการ

$$\Delta\ddot{z} = a_z \quad (4.23)$$

ค่าความผิดพลาดของมุมอะซิมูธถูกกำหนดโดยสมการ

$$\dot{\phi}_z = \varepsilon_z \tag{4.24}$$

4.2 แบบจำลองตัวกรองสัญญาณคาลมาน (Kalman Filter model)

สำหรับวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ตัวกรองสัญญาณแบบคาลมาน (Kalman Filter) ในการปรับแก้ค่าตำแหน่งใหม่ของเครื่องรับสัญญาณดาวเทียม GPS ซึ่งเป็นความผิดพลาดที่เกิดจากตัวเครื่องรับ GPS เนื่องจากสัญญาณที่ส่งมาจากดาวเทียมเป็นสัญญาณแบบ Pseudo Noise โดยตัวกรองสัญญาณแบบคาลมานเป็นตัวกรองที่สามารถประมาณค่าความผิดพลาดของกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุด ได้ดีสำหรับสัญญาณที่ส่งเป็นลักษณะแบบสัญญาณรบกวน

ข้อดีของตัวกรองสัญญาณแบบคาลมาน

1. มีโครงสร้างที่ทำให้ผลของการประมาณค่าเป็นค่าที่ถูกต้อง
2. รูปแบบของสมการเหมาะสำหรับกระบวนการที่มีการทำงานแบบทันท่วงที
3. มีสูตรและสมการที่เป็นพื้นฐานเหมาะในการสร้างตัวกรองสัญญาณ
4. ไม่จำเป็นต้องแปลงค่ากับสำหรับสมการที่ใช้ในการวัด

ตัวกรองสัญญาณคาลมาน เป็นสมการคณิตศาสตร์ที่ใช้สำหรับแก้ปัญหาสมการสเตท ด้วยการคำนวณซ้ำ (Recursive) หรือ นำค่าเดิมมาคำนวณหาค่าใหม่ ดังนั้นจึงมีเฉพาะค่าเดิมที่จะนำมาใช้ในการประมาณค่า ตัวกรองสัญญาณแบบคาลมานเป็นเครื่องมือที่เหมาะสมที่สุดสำหรับดิจิตอลคอมพิวเตอร์ และแบบจำลองความผิดพลาดของระบบในสมการสเตทสเปซ หลักการของตัวกรองสัญญาณคาลมานมี 2 ขั้นตอน คือ ขั้นที่ 1 การทำนาย หรือ การปรับค่าเวลาและค่าที่เกิดขึ้นก่อน X_k ส่วนในขั้นตอนที่ 2 คือ ใช้สมการเครื่องมือวัด Z_k ในการประมาณค่าที่เกิดขึ้นทีหลัง X_{k+1}

สมการของระบบแบบเวลาต่อเนื่อง มีสมการเป็นดังนี้

$$\dot{X} = FX + GU \tag{4.25}$$

โดยที่ F คือ ไดนามิคเมตริกซ์

X คือ เวคเตอร์ของตัวแปรสเตท

G คือ เมตริกซ์การออกแบบ

U คือ เวคเตอร์ของสัญญาณรบกวน

เมื่อพิจารณาสมการที่ 4.16 โดยใช้การสุ่มเวลา ที่ $t_0,t_1,\ldots\ldots t_k$ เพื่อแก้ปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเทียลจะได้สมการแบบสุ่มเวลาดังนี้ (Brown and Hwang ,1990)

$$x(t_{k+1}) = \phi(t_{k+1},t_k)x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1},\tau)G(\tau)u(\tau)d\tau \tag{4.26}$$

หรือสามารถเขียนได้เป็น

$$X_{k+1} = \phi_k X_k + W_k \tag{4.27}$$

ซึ่ง ϕ_k คือ สเตททรานซิชั่นเมตริกซ์ที่เวลา t_k ถึง t_{k+1} และ W_k คือไวท์นอยส์อินพุตในช่วงเวลา t_k ถึง t_{k+1}

$$\phi_k = [L^{-1}[(sI - F)^{-1}]]_{t=\Delta t} \tag{4.28}$$

โดยที่ L^{-1} แทน การแปลงอินเวอร์ลาปลาซทรานสฟอร์ม และ S คือ ตัวแปรการแปลงลาปลาซทรานสฟอร์ม เมื่อกำหนดช่วงเวลาในการสุ่มระหว่าง $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ ให้มีค่าน้อยมากจะได้

$$\phi_k = e^{(F\Delta t)} \approx I + F\Delta t \tag{4.29}$$

4.2.1 แบบจำลองแบบสุ่มเวลา (Discrete- time model) ของตัวกรองคาลมานถูกกำหนดด้วยสมการสเตท

สมการกระบวนการ

$$X_{k+1} = \phi_k X_k + W_k \tag{4.30}$$

$$Y_k = B_k X_k \tag{4.31}$$

$X_k = X(t_k)$ = สเตทเวคเตอร์ของกระบวนการที่เวลา t_k

ϕ_k = เมตริกซ์ของสเตททรานซิชั่นระหว่าง X_k และ X_{k+1}

W_k = ไวท์นอยส์เวคเตอร์

B_k = เมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์ของ Y_k และสเตท X_k

Q_k คือโควาเลนซ์ เมตริกซ์ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ W_k มีนิยามดังนี้

$$E[W_k W_i^T] = \begin{cases} Q_k, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} \tag{4.32}$$

สามารถเขียนสมการของ Q_k ในรูปการอินทิเกรทได้ดังต่อไปนี้ (Brown and Hwang ,1990)

$$Q_k = E[W_k W_k^T] \tag{4.33}$$

$$Q_k = E\left\{[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1},\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi][\int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1},\eta)G(\eta)u(\eta)d\eta]^T\right\} \tag{4.34}$$

$$Q_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1},\xi)G(\xi)E[u(\xi)u^T(\eta)]G^T(\eta)\phi^T(t_{k+1},\eta)d\xi d\eta \tag{4.35}$$

สมการของการวัด

$$Z_k = H_k X_k + V_k \tag{4.36}$$

ซึ่ง Z_k คือ เมตริกซ์ของค่าทำนาย ขนาด m x 1

H_k คือ เมตริกซ์ของการวัด ขนาด m x n

V_k คือ เวคเตอร์สัญญาณรบกวนของการวัด ขนาด m x 1

ในการสร้างสมการตัวกรองสัญญาณแบบคาลมานนั้นจำเป็นต้องเขียนสมการสเตทโดยวิทยานิพนธ์นี้เลือกตัวแปร 9 ตัวแปร ตามสมการ (4.9) เวคเตอร์การวัดของตัวกรองสัญญาณแบบคาลมาน ส่วนใหญ่นิยมใช้เคลตาเรนจ์เป็นตัวประมาณค่าความเร็ว ภายใต้สภาพแวดล้อมโดยทั่วไป การวัดแบบเคลตาเรนซ์จะพบได้ในการโคจรของดาวเทียมทุกประเภท ดังนั้นเวคเตอร์การวัด คือ ตัวเลขของเคลตาเรนจ์ ซึ่งเท่ากับการวัดของซูดูเรจน์ ซึ่งถูกกำหนดโดยสมการดังนี้

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \cdots\\ \rho_n\\ \delta_1\\ \delta_2\\ \cdots\\ \delta_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_2\\ \cdots\\ \hat{\rho}_1\\ \hat{\delta}_1\\ \hat{\delta}_2\\ \cdots\\ \hat{\delta}_n\end{bmatrix}}_{Z_k}=\underbrace{\begin{bmatrix} h_x^{(1)} & 0 & 0 & h_y^{(1)} & 0 & 0 & h_z^{(1)} & 0 & 0 & 1 & 0\\ h_x^{(2)} & 0 & 0 & h_y^{(2)} & 0 & 0 & h_z^{(2)} & 0 & 0 & 1 & 0\\ \cdots & & & \cdots & & & & & & & \\ h_x^{(n)} & 0 & 0 & h_y^{(n)} & 0 & 0 & h_z^{(n)} & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & h_x^{(1)} & 0 & 0 & h_y^{(1)} & 0 & 0 & h_z^{(1)} & 0 & 0 & 1\\ 0 & h_x^{(2)} & 0 & 0 & h_y^{(2)} & 0 & 0 & h_z^{(2)} & 0 & 0 & 1\\ \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & h_x^{(n)} & 0 & 0 & h_y^{(n)} & 0 & 0 & h_z^{(n)} & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{H_k}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ \cdots\\ \cdots\\ \cdots\\ x_8\\ x_9\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_{\rho 1}\\ v_{\rho 2}\\ \cdots\\ v_{\rho n}\\ v_{\delta 1}\\ v_{\delta 2}\\ \cdots\\ \cdots\\ \cdots\\ \cdots\\ v_{\delta n}\end{bmatrix} \qquad (4.37)$$

เมื่อ ρ_i = การวัดค่า Pseudo Range

$\hat{\rho}(X_0)$ = การทำนายค่า Pseudo Range

δ_i = การวัดค่า Delta Range

$\hat{\delta}(X_0)$ = การทำนายค่า Delta Range

$\left[h_x^{(i)} \quad h_y^{(i)} \quad h_z^{(i)}\right]=\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right]^T$ สำหรับ I = 1,.....,n ; n ≥ 4

$\left[x_1 \quad x_2 \quad ,\ldots\ldots, \quad x_{11}\right]^T$ = สเตทเวคเตอร์

V_{ρ_i} = ลำดับของ Pseudo Range Noise

V_{δ_i} = ลำดับของ Pseudo Range Noise

ในการวัดสัญญาณรบกวนจากตัวตรวจวัดความเฉื่อย สามารถสร้างเมตริกซ์ของสัญญาณรบกวนขนาด 2n X 2n โดยกำหนดให้ เมตริกซ์ R เป็นโควาเลนซ์เมตริกซ์ของสัญญาณรบกวน โดยทั่วไปสำหรับเครื่องรับสัญญาณดาวเทียม GPS สัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นจะอยู่ในรูปของสัญญาณรบกวนแบบ Pseudo Range และ Delta Range ดังสมการต่อไปนี้

$$R=\begin{bmatrix} r_\rho & & & & & & \\ & r_\rho & & 0 & & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & & r_\rho & & & \\ & 0 & & & r_\delta & & \\ & & & & & r_\delta & \\ & & & & & & \cdots r_\delta \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

4.2.2 การประมาณค่าความผิดพลาดของตัวกรองสัญญาณคาลมาน

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \tag{4.39}$$

เมื่อ $\hat{x}_k^-$ ค่าที่เกิดขึ้นก่อน และ x_k ค่าที่เกิดขึ้นหลัง e_k^- คือ ค่าความผิดพลาด ดังนั้นการประมาณค่าความผิดพลาดของโควาเลนซ์เมตริกซ์ ที่เกิดขึ้นก่อน P_k^- มีสมการเป็น

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] = E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T] \tag{4.40}$$

ในการสร้างตัวกรองคาลมานมี 2 ขั้นตอน คือ การปรับค่าใหม่และการทำนายค่า โดยในขั้นตอนแรก คือ การปรับค่าใหม่โดย จะนำการประมาณค่าความผิดพลาดของโควาเลนซ์เมตริกซ์มาคำนวณหาค่าอัตราขยายของคาลมาน K_k จากนั้นจึงคำนวณหาค่า $\hat{x}_k$ และ P_k ตามลำดับ

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \tag{4.41}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H_k \hat{x}_k^-) \tag{4.42}$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \tag{4.43}$$

เมื่อ H_k = เมตริกซ์ของการวัด

R_k = โควาเลนซ์เมตริกซ์ของสัญญาณรบกวน

P_k^- = ค่าความ ผิดพลาดของโควาเลนซ์เมตริกซ์ ที่เกิดขึ้นก่อน

ขั้นตอนที่ 2 การทำนายค่า คือ การนำค่าที่ได้จากการประมาณและ ค่าความผิดพลาดของโควาเลนซ์ P_k มาคำนวณหาค่า $\hat{x}_{k+1}^-$ และ P_{k+1}^-

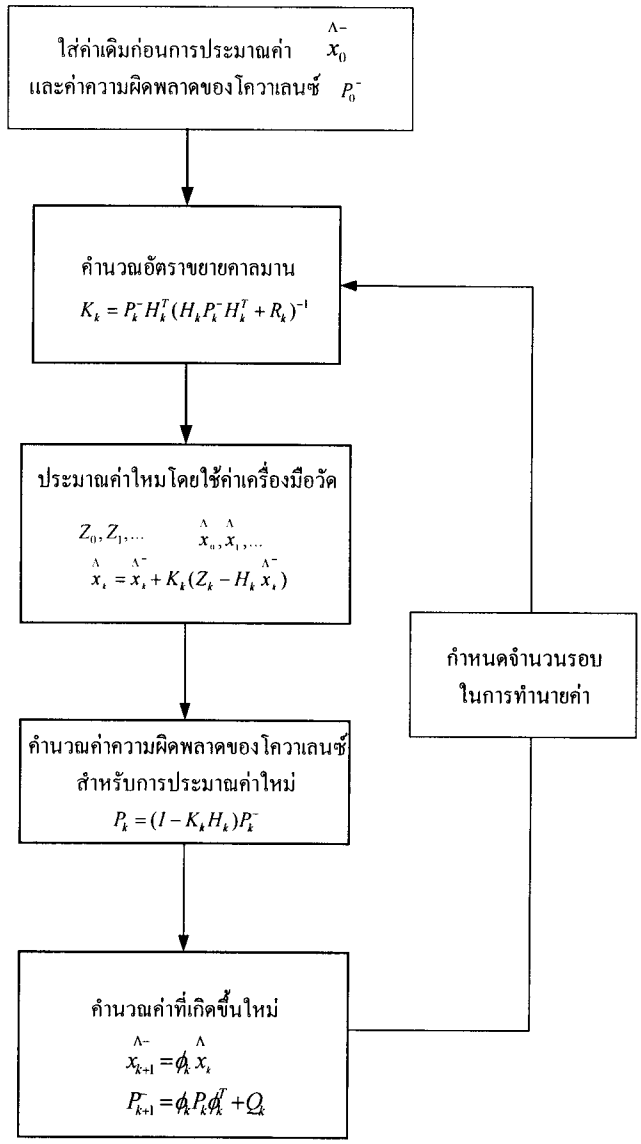
$$\hat{x}_{k+1}^- = \phi_k \hat{x}_k \tag{4.44}$$

$$P_{k+1}^- = \phi_k P_k \phi_k^T + Q_k \tag{4.45}$$

โดยที่ ϕ_k = ทรานซิชั่นเมตริกซ์

Q_k = โควาเลนซ์เมตริกซ์

4.2.3 การคำนวณค่าความผิดพลาดทางตำแหน่งของเครื่องรับ GPS

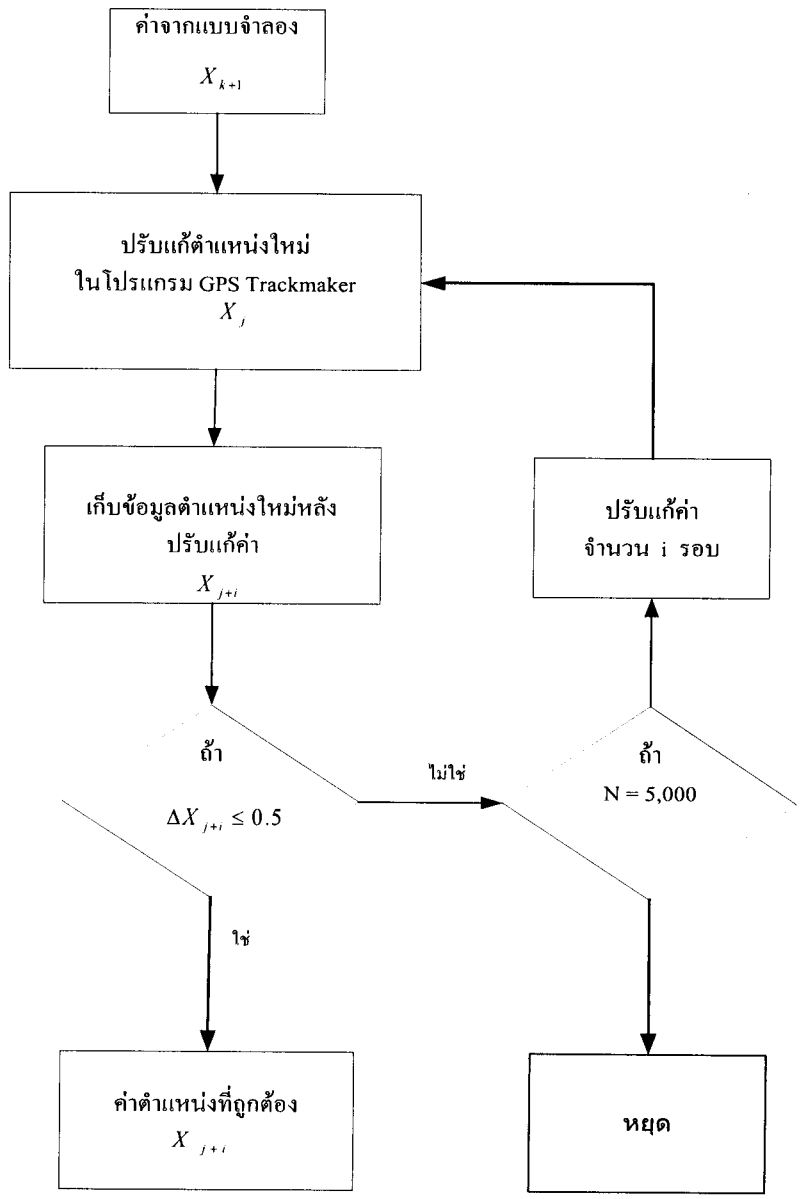


ภาพที่ 4.4 แผนผังโปรแกรมจำลองการทำงานของตัวกรองสัญญาณแบบคาลมาน

การคำนวณหาค่าความผิดพลาดทางตำแหน่งของเครื่องรับ GPS โดยใช้แบบจำลองตัวกรองคาลมาน ข้อมูลอินพุตที่ต้องการ คือ ค่าเดิมก่อนการประมาณค่าและค่าความผิดพลาดของโควาเลนซ์ $\hat{x}_0$, P_0^- คำนวณค่าอัตราขยายคาลมาน K_k ตามสมการที่ (4.41) ทำการประมาณค่าใหม่โดยสมการเครื่องมือวัดตามสมการ

ที่ (4.37) จะได้สมการ $\hat{x}_j$ คำนวณค่าโควาเลนซ์สำหรับการประมาณค่าใหม่ตามสมการที่ (4.33) นำค่าโควาเลนซ์ที่ได้มาคำนวณหาค่าที่จะเกิดขึ้นใหม่ตามสมการที่ (4.42) และ (4.43) โดยทำนายค่าจำนวน N รอบ

4.2.3 การปรับแก้ค่าตำแหน่ง



ภาพที่ 4.5 แผนผังการปรับแก้ค่าพิกัดตำแหน่ง

จากภาพที่ (4.5) นำค่าที่ได้จากการทำนายค่าในแบบจำลองคาลมาน X_{k+1} เป็นค่าตั้งต้นในการปรับแก้ค่าตำแหน่งในโปรแกรม GPS Trackmaker ปรับแก้ค่าตำแหน่งใหม่ โดยให้ตัวแปรที่ทำการปรับแก้แล้ว

คือ X_j ทำการสำรวจเส้นทางโดยเก็บข้อมูลตำแหน่งใหม่ X_{j+i} ถ้าค่าความแตกต่างของค่าความผิดพลาดที่ได้หลังการปรับแก้ตำแหน่งใหม่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.5 เป็นค่าที่ถูกต้อง แต่ถ้าค่าความแตกต่างของค่าความผิดพลาดที่ได้หลังการปรับแก้ตำแหน่งใหม่มีค่ามากกว่า 0.5 ต้องทำการปรับค่าตำแหน่งใหม่โดยใช้ค่า X_{j+i} เป็นค่าตั้งต้น

4.3 อัลกอริทึมของแบบจำลองตัวกรองคาลมาน

ลำดับอัลกอริทึมของแบบจำลองคาลมานสามารถสร้างได้โดยใช้โปรแกรม Matlab จำลองสมการสเตทตามขั้นตอนต่อไปนี้

4.3.1 อ่านค่าไฟล์ข้อมูลของตัวแปร X_2, X_5, X_7, ละติจูด และ ลองติจูด ที่ได้จากการสำรวจเส้นทาง กำหนดค่าคงที่ ได้แก่ g = 9.80665 , Sidereal rate (rad/sec): $\Omega_s = 7.2921x10^{-5}$

คำนวณค่า sideral rate ในแนวแกน x แกน y และ แกน z ตามสมการต่อไปนี้

$$\Omega_x = \Omega_s.cos(lattitude).\sin(\alpha) \tag{4.46}$$

$$\Omega_y = \Omega_s.cos(lattitude).\cos(\alpha) \tag{4.47}$$

$$\Omega_z = \Omega_s.cos(lattitude) \tag{4.48}$$

และ
$$\rho_x = \frac{-x_5}{R_e(1-\frac{x_3}{R_e}-\frac{1}{298}(1-3(\cos(lattitude))^2)} \tag{4.49}$$

$$\rho_y = \frac{-x_2}{R_e(1-\frac{x_3}{R_e}-\frac{1}{298}(\sin(lattitude))^2)} \tag{4.50}$$

ค่า Coriolis rates ในแนวแกน x แกน y และ แกน z

$$C_{rx} = 2\Omega_x + \rho_x \tag{4.51}$$

$$C_{ry} = 2\Omega_y + \rho_y \tag{4.52}$$

$$C_{rz} = 2\Omega_z + \rho_z \tag{4.53}$$

4.3.2 สร้างสมการกระบวนการ $\dot{X} = FX + GU$ ขนาด 9 x 9 ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\\ \dot{x}_7\\ \dot{x}_8\\ \dot{x}_9\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \rho_z & -\rho_y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\rho_z & 0 & \rho_x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \rho_x & -\rho_y & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{-g}{R_e} & 0 & 0 & 0 & C_{rz} & -C_{ry} & 0 & -a_z & a_y\\ 0 & \frac{-g}{R_e} & 0 & -C_{rz} & 0 & C_{rx} & a_z & 0 & -a_x\\ 0 & 0 & \frac{2g}{R_e} & C_{ry} & -C_{rx} & 0 & -a_y & a_x & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{rz} & S_{ry}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{rz} & 0 & -S_{rx}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{ry} & S_{rx} & 0 \end{bmatrix}}_{F_{INS}} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ u_{ax}\\ u_{gx}\\ 0\\ u_{ay}\\ u_{gy}\\ 0\\ u_{az}\\ u_{gz}\end{bmatrix} \tag{4.54}$$

$$F=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \rho_z & -\rho_y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_z & 0 & \rho_x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_x & -\rho_y & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-g}{R_e} & 0 & 0 & 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 & -a_z & a_y \\ 0 & \frac{-g}{R_e} & 0 & -C_{12} & 0 & C_{10} & a_z & 0 & -a_x \\ 0 & 0 & \frac{2g}{R_e} & C_{11} & -C_{10} & 0 & -a_y & a_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{12} & S_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{12} & 0 & -S_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_{11} & S_{10} & 0 \end{bmatrix}}_{F_{INS}} \quad G=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W=U=\begin{bmatrix} U_x \\ U_{ax} \\ U_{gx} \\ U_y \\ U_{ay} \\ U_{gy} \\ U_z \\ U_{az} \\ U_{gz} \end{bmatrix}$$

4.3.2 สร้างเมตริกซ์ A ขนาด 2n x 2n (โดยที่ n คือขนาดของเมตริกซ์ x) โดยใช้ค่า F ,G และ W จากสมการที่ (4.28) เพื่อใช้ในการหาค่าเมตริกซ์ B

$$A=\begin{bmatrix} -F & GWG^T \\ -- & -- \\ 0 & F^T \end{bmatrix}\Delta t \tag{4.55}$$

4.3.3 สร้างเมตริกซ์ B โดยใช้ค่าเมตริกซ์ A โดย $B=e^A$

$$B=\mathrm{e}^A \tag{4.56}$$

4.3.4 หาค่า ϕ โดยทำการทรานสโพส ส่วนด้านล่างขวาของเมตริกซ์ B

ϕ = ทรานสโพสส่วนด้านล่างขวาของเมตริกซ์ B

4.3.5 คำนวณค่า Q_k โดยใช่ค่าของส่วนบนขวาของเมตริกซ์ B

$Q_k=\phi$ *(ส่วนบนขวาของเมตริกซ์ B)

4.3.6 สร้างสมการเครื่องมือวัด $Z_k=H_kX_k+V_k$ โดยกำหนดค่า เมตริกซ์ H และ เมตริกซ์ R และ $V_k=0$

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3.7 กำหนดจำนวนรอบในการทำนายค่า N รอบ และกำหนดค่าเริ่มต้นของเมตริกซ์ P_k

$$P_k = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.4x10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.4x10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.4x10^{-3} \end{bmatrix}$$

4.3.8 ทำการคำนวณค่าอัตราขยายคาลมาน K_k , $\hat{x}_k$ และ P_k ตามสมการต่อไปนี้

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \tag{4.57}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-) \tag{4.58}$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \tag{4.59}$$

4.3.9 คำนวณค่า $\hat{x}_{k+1}^-$ และ P_{k+1}^-

$$\hat{x}_{k+1}^- = \phi_k \hat{x}_k \tag{4.60}$$

$$P_{k+1}^- = \phi_k P_k \phi_k^T + Q_k \tag{4.61}$$