วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(691) Jan-Apr, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ
The Butterfly Theorem

ภัคคินี ชิตสกุล
Pakkinee Chitsakul

Retired Associate Professor
Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Chalongkrung Rd., Bangkok, 10520

Email: jimreivat99@gmail.com

บทคัดย่อ

ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อมีวิธีการพิสูจน์ที่หลากหลาย บทความนี้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อโดยใช้สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย และ ทฤษฎีการตัดกันของคอร์ด ทำให้ได้วิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ไม่ซับซ้อน และ สามารถนำไปใช้ในการพิสูจน์บางปัญหาทางเรขาคณิตแบบยุคลิด

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ ทฤษฎีการตัดกันของคอร์ด สามเหลี่ยมคล้าย

ABSTRACT

There are many methods for solving butterfly theorem. This paper derives the butterfly theorem by using the properties of similar triangles and theorem of intersecting chords. This technique is the simple one that can be used for solving some Euclidean geometry problems.

Keywords: Butterfly theorem, Theorem of intersecting chords, Similar triangles

1. บทนำ

บทความนี้จะนำเสนอการพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมคล้ายสองรูปที่มีจุดร่วมหนึ่งจุด ซึ่งเมื่อเขียนรูปแล้วมีลักษณะคล้ายผีเสื้อ (Butterfly) ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อนี้มีวิธีการพิสูจน์ที่หลากหลาย[1] การพิสูจน์ที่จะแสดงต่อไปนี้ใช้ความรู้

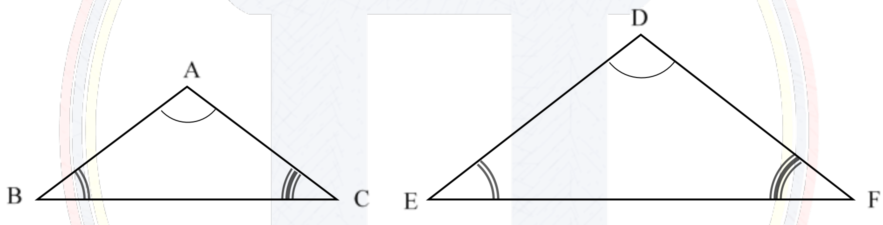
เกี่ยวกับสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย และทฤษฎีการตัดกันของคอร์ด ซึ่งเป็นวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ไม่ซับซ้อน[2] และสามารถนำไปใช้ในการพิสูจน์บางปัญหาทางเรขาคณิตแบบยุคลิด

2. สามเหลี่ยมคล้าย

<u>นิยาม 1</u> รูปสามเหลี่ยมคล้าย (Similar Triangles)

รูปสามเหลี่ยมคล้าย คือรูปสามเหลี่ยมใดๆ ที่มีมุมเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุม และอัตราส่วนความยาวของด้านที่สมนัยกันทุกคู่เป็นอัตราส่วนที่เท่ากัน

ถ้า ΔABC และ ΔDEF เป็นสามเหลี่ยมคล้ายแล้วเขียนแทนด้วย $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (รูปที่ 1) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ก็ต่อเมื่อ $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ และ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ที่มีค่ามากกว่า 0



รูปที่ 1 สามเหลี่ยมคล้าย $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

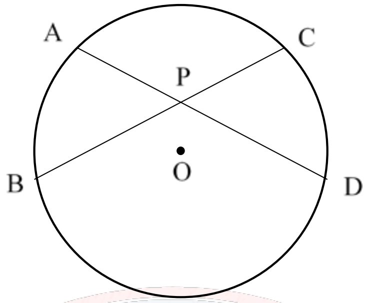
3. การตัดกันของคอร์ด

<u>ทฤษฎีบท 1</u> ทฤษฎีการตัดกันของคอร์ด (Theorem of Intersecting Cords) [3]

ให้ P เป็นจุดใดๆ ภายในวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง ถ้าคอร์ด AD และ BC ของวงกลม O ตัดกันที่ P แล้ว $AP \cdot DP = BP \cdot CP$

สิ่งที่กำหนดให้

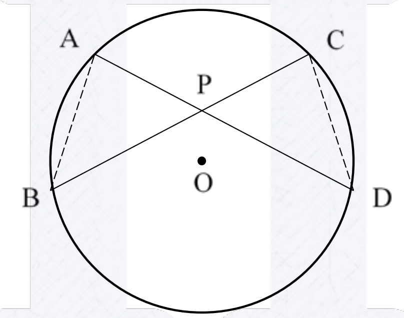
1. AD และ BC เป็นคอร์ดในวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง
2. AD และ BC ตัดกันที่จุด P ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 สิ่งที่กำหนดให้ตามทฤษฎีบท 1

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ AP • DP = BP • CP

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลาก AB และ CD ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 สร้างเพื่อการพิสูจน์สำหรับทฤษฎีบท 1

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $B\hat{A}D = D\hat{C}B$ หรือ $B\hat{A}P = D\hat{C}P$	1. มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ในเซกเมนต์เดียวกันและรองรับด้วยคอร์ดเดียวกันมีค่าเท่ากัน (คอร์ด BD)
2. $A\hat{B}C = C\hat{D}A$ หรือ $A\hat{B}P = C\hat{D}P$	2. ในทำนองเดียวกับ 1 (คอร์ด AC)

3. $A\hat{P}B = C\hat{P}D$	3. เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน (เส้นตรง AD ตัดกับเส้นตรง BC)
4. $\Delta APB \sim \Delta CPD$	4. จาก 1, 2 และ 3
5. $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{BP}{DP}$ หรือ $AP \bullet DP = BP \bullet CP$	5. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายจาก 4

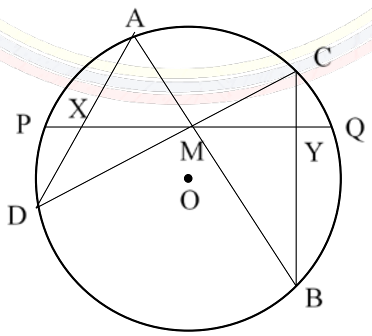
4. ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ

ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อ (Butterfly Theorem)

ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางคอร์ด PQ ของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง AB และ CD เป็นคอร์ดใด ๆ ซึ่งลากผ่านจุด M ให้คอร์ด AD และ BC ตัดคอร์ด PQ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ แล้ว M เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง XY

สิ่งที่กำหนดให้

1. ให้ PQ เป็นคอร์ดของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง
2. ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ด PQ แล้ว PM = QM
3. ให้ AB และ CD เป็นคอร์ดใด ๆ ในวงกลม O ซึ่งลากผ่านจุด M
4. ให้คอร์ด AD และ BC ตัดคอร์ด PQ ที่จุด X และ Y ตามลำดับ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 สิ่งที่กำหนดให้ตามทฤษฎีบท 2

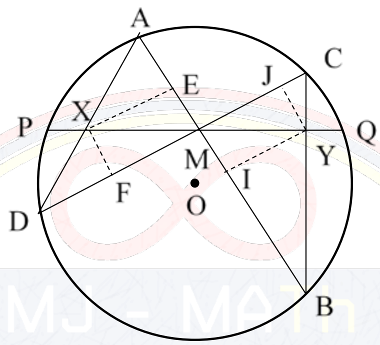
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ MX = MY

สร้างเพื่อการพิสูจน์ 1. จาก X ลาก XE // CD ตัด AB ที่ E

2. จาก X ลาก XF // AB ตัด CD ที่ F

3. จาก Y ลาก YI // CD ตัด AB ที่ I

4. จาก Y ลาก YJ // AB ตัด CD ที่ J ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 สร้างเพื่อการพิสูจน์สำหรับทฤษฎีบท 2

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $X\hat{M}E = Y\hat{M}I$	1. เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน (เส้นตรง PQ ตัดกับเส้นตรง AB)
2. $X\hat{E}M = Y\hat{I}M$	2. มุมแย้ง (XE // YI มี EI เป็นเส้นตัดขวาง)
3. $E\hat{X}M = I\hat{Y}M$	3. มุมภายในของสามเหลี่ยมรวมกันมีค่า 180° เมื่อมุมภายในของสามเหลี่ยมสองรูปมีค่าเท่ากันสองมุม มุมต่อมุม แล้วมุมที่เหลือย่อมมีค่าเท่ากันจาก 1 และ 2
4. $\Delta MEX \sim \Delta MIY$	4. จาก 1, 2 และ 3

5. $\frac{MX}{MY}=\frac{XE}{YI}$	5. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายจาก 4
6. $\Delta MFX \sim \Delta MJY$	6. ในทำนองเดียวกันกับ 4
7. $\frac{MX}{MY}=\frac{XF}{YJ}$	7. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายจาก 6
8. $D\hat{A}B = D\hat{C}B$ หรือ $X\hat{A}E = Y\hat{C}J$	8. มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ในเซกเมนต์เดียวกันและรองรับด้วยคอร์ดเดียวกันมีค่าเท่ากัน (คอร์ด DB)
9. $C\hat{J}Y = C\hat{M}B$	9. มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางเส้นคู่ขนานมีค่าเท่ากัน (JY // AB มี DC เป็นเส้นตัดขวาง)
10. $A\hat{E}X = A\hat{M}D$	10. ในทำนองเดียวกันกับ 9 (XE // DC มี AB เป็นเส้นตัดขวาง)
11. $C\hat{M}B = A\hat{M}D$	11. ในทำนองเดียวกับ 1 (เส้นตรง AB ตัดกับเส้นตรง CD)
12. $C\hat{J}Y = A\hat{E}X$	12. จาก 9, 10 และ 11
13. $A\hat{X}E = C\hat{Y}J$	13. ในทำนองเดียวกันกับ 3 เมื่อพิจารณาจาก 8 และ 12
14. $\Delta AXE \sim \Delta CYJ$	14. จาก 8, 12 และ 13
15. $\frac{AX}{CY}=\frac{XE}{YJ}$	15. สมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจาก 14
16. $\Delta DXF \sim \Delta BYI$	16. ในทำนองเดียวกับ 14
17. $\frac{DX}{BY}=\frac{XF}{YI}$	17. สมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจาก 16
18. $\frac{AX}{CY}\bullet\frac{DX}{BY}=\frac{XE}{YJ}\bullet\frac{XF}{YI}$	18. นำ 15 และ 17 คูณกัน

19. $\frac{MX}{MY}\bullet\frac{MX}{MY}=\frac{XE}{YI}\bullet\frac{XF}{YJ}$	19. นำ 5 และ 7 คูณกัน
20. $\frac{MX}{MY}\bullet\frac{MX}{MY}=\frac{AX}{CY}\bullet\frac{DX}{BY}$	20. จาก 18 และ 19
21. AX•DX = PX•QX	21. จากทฤษฎีบทการตัดกันของคอร์ด (PQ ตัดกับ AD ที่ X)
22. CY•BY = PY•QY	22. ในทำนองเดียวกับ 21 (PQ ตัดกับ BC ที่ Y)
23. PX•QX = (PM-MX)(QM+MX)	23. จากรูปที่ 5
24. PX•QX = (PM-MX)(PM+MX)	24. จากโจทย์ PM = QM
25. PY•QY = (PM+MY)(QM-MY)	25. จากรูปที่ 5
26. PY•QY = (PM+MY)(PM-MY)	26. จากโจทย์ PM = QM
27. $\frac{MX}{MY}\bullet\frac{MX}{MY}=\frac{(PM-MX)(PM+MX)}{(PM+MY)(PM-MY)}$ $\frac{(MX)^2}{(MY)^2}=\frac{(PM)^2-(MX)^2}{(PM)^2-(MY)^2}$ $\frac{(PM)^2-(MX)^2}{(MX)^2}=\frac{(PM)^2-(MY)^2}{(MY)^2}$ $\frac{(PM)^2}{(MX)^2}-1=\frac{(PM)^2}{(MY)^2}-1$ $\frac{(PM)^2}{(MX)^2}=\frac{(PM)^2}{(MY)^2}$ MX=MY	27. จาก 20, 21, 22, 24 และ 26
28. M เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง XY	28. จาก 27

5. สรุป

การพิสูจน์ทฤษฎีบทรูปผีเสื้อโดยใช้สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย และทฤษฎีการตัดกันของคอร์ด ที่ได้กล่าวมาข้างต้น สามารถนำวิธีการในทำนองเดียวกันนี้ไปใช้ในการพิสูจน์เงื่อนไขและสมบัติของคอร์ดร่วมระหว่างวงกลมสองวง

ที่ตัดกัน ถ้ากำหนดวงกลมที่มีรัศมีต่างกันสามวงตัดกันอย่างแท้จริง นั่นคือไม่มีวงกลมคู่ใดสัมผัสกันแล้วคอร์ดร่วมทั้งสามเส้นระหว่างแต่ละคู่ของวงกลมสามวงอาจตัดกันภายในวงกลม หรือ ไม่ตัดกันภายในวงกลมแต่ส่วนต่อของคอร์ดทั้งสามตัดกันภายนอกวงกลม หรือ คอร์ดร่วมทั้งสามมีจุดร่วมหนึ่งจุดในเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งขั้นตอนการพิสูจน์จะนำเสนอในโอกาสต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] Alexander Bogomolny. 2016. *The Butterfly Theorem*. Retrieved 22 November 2016 from http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml

[2] Alexander Bogomolny. 2016. *Intersecting Chord Theorem*. Retrieved 3 December 2016 from http://www.cut-the-knot.org/IntersectingChordsTheorem.shtml

[3] H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer, *Geometry Revisited*, New York, 1967.