วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(691) Jan-Apr, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

ลำดับฟีโบนักชีในรายวิชาคณิตศาสตร์

The Fibonacci Sequence in Mathematics Courses

เก่ง วิบูลย์ธัญญ์
Keng Wiboonton

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Patumwan, Bangkok, 10330, Thailand

Email: keng.w@chula.ac.th, kwiboonton@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงการหาและพิสูจน์สูตรของลำดับฟีโบนักชีด้วยวิธีต่างๆ โดยใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในระดับมัธยมและระดับปริญญาตรี ซึ่งวิธีต่างๆเหล่านี้ประกอบไปด้วยเนื้อหาในเรื่องลำดับเรขาคณิต ฟังก์ชันก่อกำเนิดและเนื้อหาในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น

คำสำคัญ: ลำดับฟีโบนักชี ลำดับเรขาคณิต ฟังก์ชันก่อกำเนิด พีชคณิตเชิงเส้น

ABSTRACT

This article gives several methods for finding and proving the well-known formula of the Fibonacci sequence. In these methods, we employ many topics ranging from high-school mathematics to university mathematics. The topics we use include geometric sequences, generating functions and some topics in linear algebra.

Keywords: Fibonacci sequence, Geometric sequences, Generating functions, Linear Algebra

1. บทนำ

บ่อยครั้งการแก้โจทย์ในวิชาคณิตศาสตร์ สามารถทำได้หลายวิธี ซึ่งแต่ละวิธีอาจใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาที่แตกต่างกัน ดังนั้น การแก้โจทย์ที่ผู้ทำสามารถทำได้หลายวิธี จะทำให้ได้เห็นมุมมองในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์หลาย ๆ สาขา ซึ่งบางครั้งทำให้ได้เห็นความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ ได้

บทความนี้ นำเสนอวิธีต่าง ๆ ในการหาสูตรของลำดับฟีโบนักชี (Fibonacci Sequence) ซึ่งเป็นลำดับเวียนเกิดที่นิยามโดยกำหนดให้

$F_1 = 1, F_2 = 1$ (เงื่อนไขเริ่มต้น)

และ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3,\ldots$ (*)

จะเห็นว่าการนิยามข้างต้นเป็นการนิยามลำดับเวียนเกิด (Recursive Sequence) กล่าวคือ ในเบื้องต้นเราทราบว่า $F_1 = F_2 = 1$ จากนั้น การหา F_3 ต้องใช้ค่าของ F_1 และ F_2 ซึ่งโดย (*) จะได้ว่า $F_3 = F_2 + F_1 = 1+1 = 2$ จากนั้น หา F_4 โดยใช้ค่าของ F_3 และ F_2 ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ โดยจะเห็นว่า การนิยามลำดับ $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ข้างต้นนั้น นิยามโดยแจ่มชัด (Well-defined) กล่าวคือ เงื่อนไขเริ่มต้น และสมการเวียนเกิด (*) สอดคล้องกันเป็นอย่างดีทำให้สามารถระบุเทอมที่ n ใด ๆ ของลำดับได้ นอกจากนี้จะเห็นว่ามีลำดับ $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ลำดับเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องทั้ง เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขเวียนเกิด (*) ข้างต้น

สูตรของบิเนต์ (Binet's Formula) สำหรับการหาพจน์ที่ n ของลำดับฟีโบนักชี คือ $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, $n = 1, 2, 3,\ldots$

โดยที่ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(สังเกตว่า $\alpha + \beta = 1,\ \alpha - \beta = \sqrt{5}$ และ $\alpha\beta = -1$)

บทความนี้นำเสนอวิธีการต่าง ๆ ในการหาสูตรของบิเนต์

<u>หมายเหตุ</u>: จากนี้เป็นต้นไป จะแทนค่าของ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ด้วย α และ β ตามลำดับ

2. นานาวิธีในการหาสูตรของบิเนต์

วิธีที่ 1 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับเรขาคณิตซึ่งเป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา

ในระดับมัธยมศึกษา ทราบว่าพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence) อยู่ในรูป $a_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3,\dots$ โดยที่ $a, r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ซึ่งลำดับเรขาคณิตนี้ สามารถเขียนได้ในรูปของลำดับเวียนเกิดได้โดยให้

$a_1 = a$ (เงื่อนไขเริ่มต้น)

และ $a_{n+1} = ra_n$, $n = 1, 2, 3,\dots$ (1)

ซึ่งจะเห็นว่าสมการเวียนเกิด (1) มีรูปของสมการที่คล้ายกับสมการเวียนเกิดฟิโบนักชี (*) ดังนั้น จึงคาดว่าจะมีลำดับเรขาคณิตที่สอดคล้องกับสมการเวียนเกิด (*)

ให้ลำดับเรขาคณิต $(ar^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ สอดคล้องกับสมการเวียนเกิด (*)

จะได้ว่า $ar^{n+1} = ar^n + ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3,\dots$

ดังนั้น $r^2 = r + 1$ นั่นคือ $r^2 - r - 1 = 0$

จะได้ว่า $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ หรือ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ นั่นคือ $r = \alpha$ หรือ β

ทำให้ได้ว่า ลำดับเรขาคณิตทั้งหมดที่สอดคล้องสมการเวียนเกิด (*) คือลำดับเรขาคณิตที่อยู่ในรูป $(a\alpha^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ และ $(b\beta^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$นอกจากนี้ สังเกตว่าผลบวกของลำดับเรขาคณิต $(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ ก็สอดคล้องกับสมการเวียนเกิดฟิโบนักชีด้วย

ดังนั้น เงื่อนไขเริ่มต้นที่ว่า $F_1 = F_2 = 1$ เป็นเงื่อนไขที่ทำให้สามารถหาค่าเฉพาะของ a และ b ได้

นั่นคือ ถ้ากำหนดให้ $F_n = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3,\dots$ แล้วจะได้ว่าเงื่อนไข $F_1 = F_2 = 1$ ทำให้ได้ระบบสมการ

$$a + b = 1$$

และ $$\alpha a + \beta b = 1$$

ซึ่งมีคำตอบเป็น $a = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ และ $b = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \frac{-\beta}{\sqrt{5}}$

จึงได้ว่า $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, n = 1, 2, 3,…

ทำให้ได้ว่าลำดับ $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)\right)_{n=1}^{\infty}$ สอดคล้องนิยามของลำดับฟีโบนักชี

เนื่องจากลำดับของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับนิยามของลำดับฟีโบนักชีมีเพียงลำดับเดียวเท่านั้น ดังนั้น สรุปได้ว่า $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ เมื่อ n = 1, 2, 3,…

วิธีที่ 2 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริภูมิย่อย (Subspaces) ในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น (Linear algebra)

แนวคิดของวิธีนี้จะเหมือนกับแนวคิดของวิธีที่ 1 เพียงแต่ว่าวิธีการให้เหตุผลของวิธีที่ 2 นั้นจะใช้ภาษาในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นที่อยู่ในรูปของปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์นั่นเอง

ให้ $\mathbb{R}^\infty$ แทนปริภูมิของลำดับของจำนวนจริงทั้งหมด จะได้ว่า $\mathbb{R}^\infty$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space) เหนือสนาม $\mathbb{R}$

พิจารณาปริภูมิ

$$\mathrm{F} = \{(x_1,\ x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \mid\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\ ,\ \ n = 1,2,3, \dots\}$$

จะได้ว่า F เป็นปริภูมิย่อย (Subspace) ของ $\mathbb{R}^\infty$

ให้ $\vec{a} = (1,0,1,1,2,3,5, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ และ $\vec{b} = (0,1,1,2,3,5, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$

สามารถพิสูจน์ได้ว่า $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ เป็นฐานของ F (ละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน)

ดังนั้น F มีมิติเท่ากับ 2

ทำนองเดียวกันกับวิธีที่ 1 สามารถแสดงได้ว่า F มีสมาชิกที่เป็นลำดับเรขาคณิตที่อยู่ในรูป $(1, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}, \dots)$ อยู่เพียงแค่สองลำดับเท่านั้นคือ $\vec{u} = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}, \dots)$ และ $\vec{v} = (1, \beta, \beta^2, \beta^3, \dots, \beta^{n-1}, \dots)$

ในขณะเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (ละไว้เป็นแบบฝึกหัด) ยิ่งไปกว่านั้น จากที่ทราบว่ามิติของ F เท่ากับ 2 ทำให้ได้ด้วย $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ เป็นฐานของ F

ให้ $\vec{f} = (1,1,2,3,5,8, \dots) \in \mathrm{F}$ นั่นคือ $\vec{f}$ เป็นลำดับฟีโบนักชี

เนื่องจาก $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ เป็นฐานของ F ดังนั้น มีจำนวนจริง $a,\ b$ ที่ทำให้ $\vec{f} = a\vec{u} + b\vec{v}$

โดยการเทียบสองพจน์แรกของสมการนี้ จะได้ระบบสมการ $a+b=1$ และ $\alpha a+\beta b=1$ ซึ่งเป็นระบบสมการเดียวกันกับระบบสมการที่ปรากฏในวิธีที่ 1

ดังนั้น จะได้ว่า $a=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ และ $b=\frac{-\beta}{\sqrt{5}}$

นั่นคือ $\vec{f}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha\alpha^{n-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta\beta^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)\right)_{n=1}^{\infty}$ นั่นเอง

#

วิธีที่ 3 : ใช้ความรู้เรื่องตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear Operators) ในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น

ให้ $D:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}^\infty$ นิยามโดย $D\big((x_1,x_2,x_3,\dots)\big)=(x_2,x_3,x_4,\dots)$
จะได้ว่า D เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบน $\mathbb{R}^\infty$
ให้ $\mathrm{F}\coloneqq\{(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots)\in\mathbb{R}^\infty \mid x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,\ n=1,2,3,\dots\}$
ให้ $T:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}^\infty$ นิยามโดย $T\coloneqq D^2-D-1$
นั่นคือ $T(\vec{x})=(D^2-D-1)(\vec{x})=D\big(D(\vec{x})\big)-D(\vec{x})-\vec{x}$ สำหรับ $\vec{x}\in\mathbb{R}^\infty$
จะได้ว่า T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบน $\mathbb{R}^\infty$

นอกจากนี้ จะได้ด้วยว่า $T=(D-\alpha)(D-\beta)=(D-\beta)(D-\alpha)$

สามารถแสดงได้ว่า $\ker T=\mathrm{F}$, $\ker(D-\alpha)\subseteq\ker T$ และ $\ker(D-\beta)\subseteq\ker T$ (ละไว้เป็นแบบฝึกหัด)

สำหรับ $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots)\in\mathbb{R}^\infty$ ซึ่ง $(D-\alpha)\vec{x}=\vec{0}$ จะได้ว่า $D\vec{x}=\alpha\vec{x}$
นั่นคือ $(x_2,x_3,\dots)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots)$ ดังนั้น เมื่อ $x_1\neq 0$ จะได้ว่า

$$\alpha=\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\frac{x_4}{x_3}=\cdots$$

นั่นคือ $\vec{x}$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่อยู่ในรูป

$$(x_1,x_1\alpha,x_1\alpha^2,x_1\alpha^3,\dots)=x_1(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots)$$

ดังนั้น $\ker(D-\alpha)\subseteq\operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots)\}$
เห็นได้ชัดว่า $\operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots)\}\subseteq\ker(D-\alpha)$

ดังนั้น $\ker(D-\alpha) = \operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\ldots)\}$

ทำนองเดียวกัน $\ker(D-\beta) = \operatorname{span}\{(1,\beta,\beta^2,\beta^3,\ldots)\}$

ให้ $\vec{y} \in \mathrm{F} = \ker T$ จะได้ว่า $(D-\beta)\big((D-\alpha)\vec{y}\big) = T(\vec{y}) = \vec{0}$

ดังนั้น $(D-\alpha)\vec{y} \in \ker(D-\beta) = \operatorname{span}\{(1,\beta,\beta^2,\beta^3,\ldots)\}$

ทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $(D-\alpha)(D-\beta) = (D-\beta)(D-\alpha)$

จะได้ด้วยว่า $(D-\beta)\vec{y} \in \ker(D-\alpha) = \operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\ldots)\}$

ดังนั้น มีจำนวนจริง $a, b \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $D\vec{y} - \alpha\vec{y} = b(1,\beta,\beta^2,\ldots)$

และ $D\vec{y} - \beta\vec{y} = a(1,\alpha,\alpha^2,\ldots)$

นำสมการแรกลบด้วยสมการที่สองข้างต้น จะได้

$$-\sqrt{5}\,\vec{y} = (\beta-\alpha)\vec{y} = b(1,\beta,\beta^2,\ldots) - a(1,\alpha,\alpha^2,\ldots)$$

$$\in \operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\ldots),(1,\beta,\beta^2,\ldots)\}$$

นั่นคือ $\vec{y} \in \operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\ldots),(1,\beta,\beta^2,\ldots)\}$

ดังนั้น $\ker T \subseteq \operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\ldots), (1,\beta,\beta^2,\ldots)\}$

เนื่องจาก $\operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\ldots),(1,\beta,\beta^2,\ldots)\} \subseteq \ker(D-\alpha) + \ker(D-\beta)$

$$\subseteq \ker T + \ker T = \ker T$$

ทำให้ได้ว่า $\mathrm{F} = \ker T = \operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\ldots),(1,\beta,\beta^2,\ldots)\}$

ให้ $\vec{f} = (1,1,2,3,5,\ldots)$ นั่นคือ $\vec{f}$ แทนลำดับฟีโบนักชี

ดังนั้น $\vec{f} \in \mathrm{F} = \operatorname{span}\{(1,\alpha,\alpha^2,\ldots),(1,\beta,\beta^2,\ldots)\}$

จะได้ว่า มีจำนวนจริง c และ d ที่ทำให้

$$(1,1,2,3,5,\ldots) = \vec{f} = c(1,\alpha,\alpha^2,\ldots) + d(1,\beta,\beta^2,\ldots)$$

ดังนั้นจะได้สมการ $c+d=1$ และ $\alpha c + \beta d = 1$

ซึ่งได้ $c = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ และ $d = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\vec{f} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)\right)_{n=1}^{\infty}$ เหมือนในวิธีที่ 2 นั่นเอง

#

วิธีที่ 4 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์ในระดับมัธยมศึกษา

ให้ $\overrightarrow{\boldsymbol{x_n}} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า ความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับฟีโบนักชีสามารถเขียนได้ในรูปของสมการเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$$A\,\vec{\boldsymbol{x}}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}_{n+1}}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

จะได้ว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n, $\vec{\boldsymbol{x}}_n$ สามารถเขียนย้อนกลับไปเรื่อยๆ จนถึงพจน์ที่มี $\vec{\boldsymbol{x}}_1$ ได้ดังนี้

$$\vec{\boldsymbol{x}}_n = A\,\vec{\boldsymbol{x}}_{n-1} = A(A\,\vec{\boldsymbol{x}}_{n-2}) = A\big(A(A\,\vec{\boldsymbol{x}}_{n-3})\big) = \cdots = A^{n-1}\,\vec{\boldsymbol{x}}_1$$

นั่นคือ ถ้าสามารถหาสูตรของ A^{n-1} ได้ ก็จะได้สูตรของลำดับฟีโบนักชี นั่นเอง ดังนั้น จะหาขั้นตอนวิธีที่ทำให้การคำนวณ A^{n-1} นั้นทำได้โดยง่าย

สังเกตว่า ถ้าสามารถหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P ที่ทำให้ $P^{-1}AP = D$ โดยที่ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม แล้ว จะได้ว่า

$$A^{n-1} = (PDP^{-1})^{n-1} = PDP^{-1}PDP^{-1}\ldots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n-1}P^{-1}$$

จะเห็นว่าการหาเมทริกซ์ D^{n-1} นั้นทำได้โดยการยกกำลัง $n-1$ ไปที่สมาชิกในแนวทแยงมุมของ D นั่นเอง ซึ่งทำให้การหา A^{n-1} ก็จะทำเพียงแค่การคำนวนผลูคณ $PD^{n-1}P^{-1}$ เท่านั้น

ดังนั้นจึงต้องการหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และ เมทริกซ์ทแยงมุม D ที่สองคล้องกับสมการ $P^{-1}AP = D$ ให้ได้นั่นเอง

สมมติว่า $P^{-1}AP = D$ ดังนั้น $AP = PD$

เขียน $P = [\overrightarrow{p_1} \quad \overrightarrow{p_2}]$ และ $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ จะได้ว่า $A\overrightarrow{p_1} = \lambda_1\overrightarrow{p_1}$ และ $A\overrightarrow{p_2} = \lambda_2\overrightarrow{p_2}$ (สังเกตว่า $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2} \neq \vec{0}$ เพราะว่า P เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ($\det P \neq 0$)) ดังนั้น $(\lambda_1 I_2 - A)\overrightarrow{p_1} = \vec{0}$ และ $(\lambda_2 I_2 - A)\overrightarrow{p_2} = \vec{0}$

ในที่นี้ $I_2 = \mathrm{diag}(1,1)$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

จะได้ว่า ถ้า $(\lambda_1 I_2 - A)$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

แล้วจะได้ว่า $\overrightarrow{p_1} = (\lambda_1 I_2 - A)^{-1}\cdot\vec{0} = \vec{0}$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\lambda_1 I_2 - A$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน นั่นคือ $\det(\lambda_1 I_2 - A) = 0$

ทำนองเดียวกัน $\det(\lambda_2 I_2 - A) = 0$

ดังนั้น ต้องการหา $\lambda \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\det(\lambda I_2 - A) = 0$

ซึ่งจะได้สมการพหุนาม $\lambda^2 - \lambda - 1 = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \det(\lambda I_2 - A) = 0$

ดังนั้น $\lambda = \alpha$ หรือ β สังเกตว่า $\alpha + \beta = 1$ และ $\alpha\beta = -1$

แทน $\lambda_1 = \alpha$ และ $\lambda_2 = \beta$ ในสมการ $(\lambda_1 I_2 - A)\overrightarrow{p_1} = \vec{0}$ และ $(\lambda_2 I_2 - A)\overrightarrow{p_2} = \vec{0}$

จะได้ $\begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha - 1 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{p_1} = \vec{0}$ และ $\begin{bmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \beta - 1 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{p_2} = \vec{0}$

ซึ่งแก้ระบบสมการเชิงเส้นหา $\overrightarrow{p_1}$ และ $\overrightarrow{p_2}$ ได้ชุดหนึ่ง คือ

$\overrightarrow{p_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{p_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}$

ดังนั้น จะได้ว่า $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$

ซึ่งทำให้หาตัวผกผันของ P ได้เป็น $P^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha}\begin{bmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & \beta^{n-1} \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\beta - \alpha}\begin{bmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}\right)$

ทำให้ได้ว่า $A^{n-1} = \frac{1}{\beta - \alpha}\begin{bmatrix} \beta\alpha^{n-1} - \alpha\beta^{n-1} & -\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \\ \beta\alpha^{n} - \alpha\beta^{n} & -\alpha^{n} + \beta^{n} \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \overrightarrow{x_n} = A^{n-1}\overrightarrow{x_1} = A^{n-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta - \alpha}\begin{bmatrix} (\beta - 1)\alpha^{n-1} + (1 - \alpha)\beta^{n-1} \\ (\beta - 1)\alpha^{n} + (1 - \alpha)\beta^{n} \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $\alpha + \beta = 1$ ดังนั้น $\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha - \beta}\begin{bmatrix} \alpha^{n} - \beta^{n} \\ \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $F_n = \frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha^n - \beta^n)$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$ นั่นเอง

#

วิธีที่ 5 : ใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด (Generating Functions)

พิจารณาฟังก์ชันก่อกำเนิดที่อยู่ในรูปอนุกรมกำลัง $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$ จะได้ว่า $xF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n$ และในทำนองเดียวกัน $x^2F(x) = \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-3} x^n$

พิจารณา

$$F(x) - xF(x) - x^2F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n - \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

$$= (F_1 x + F_2 x^2) - F_1 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) x^n$$

$$= x$$

ดังนั้น $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$

พิจารณา

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{x}{x^2-x-1} = \frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$F(x) = F\left(\frac{1}{1/x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}-\alpha\right)\left(\frac{1}{x}-\beta\right)} = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right) \quad \text{โดยการแยกเศษส่วนย่อย}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right)$$

จากนั้นใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะได้ว่า

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)x^n$$

ดังนั้น $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$ ตามต้องการ

#

3. สรุป

วิธีการหาสูตรของบิเนต์ของลำดับฟีโบนักชีโดยวิธีที่ 1, 2 และ 3 นั้นใช้แนวคิดเดียวกัน เพียงแต่ใช้ภาษาคนละแบบ กล่าวคือ วิธีที่ 1 นั้นเป็นภาษาที่อยู่ในระดับมัธยมศึกษา ในขณะที่วิธีที่ 2 และ 3 เป็นภาษาที่อยู่ในระดับมหาวิทยาลัยซึ่งเกี่ยวกับเนื้อหาในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น นอกจากนี้แนวคิดในวิธีที่ 3 สามารถประยุกต์ใช้กับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นได้ด้วย

สำหรับวิธีที่ 4 ที่ใช้ความรู้เรื่องเมทริกซ์ในระดับมัธยมศึกษานั้น จริงๆแล้วเป็นวิธีการที่เรียกว่า การทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (Diogonalization) ซึ่งเป็น

หัวข้อที่สำคัญที่สุดหัวข้อหนึ่งในวิชาพีชคณิตเชิงเส้นในระดับมหาวิทยาลัย ส่วนวิธีที่ 5 นั้นใช้เนื้อหาในวิชา วิยุตคณิต (Discrete Mathematics) ซึ่งวิธีที่ 5 นี้นักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายสามารถทำความเข้าใจได้โดยไม่ยากนัก

จริงๆ แล้วการหาสูตรของลำดับฟีโบนักชีนั้นเป็นการแก้สมการเวียนเกิดอันดับที่สอง ซึ่งแนวคิดในแต่ละวิธีข้างต้นในบทความนี้สามารถขยายไปสู่การแก้สมการเวียนเกิดอันดับใดๆ ได้ด้วย

4. แบบฝึกหัดท้ายบทความ

เหมือนกับที่ผ่านมา กำหนดให้ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ และ $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ แทนลำดับฟิโบนักชีในระบบจำนวนจริง (ยกเว้นข้อ 4)

1. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $x^2 = x + 1$
   i) จงพิสูจน์ว่า $x^n = F_n x + F_{n-1}$ ทุก $x = 2, 3, \ldots$
   ii) จงแสดงว่า $\alpha^n = F_n\alpha + F_{n-1}$ และ $\beta^n = F_n\beta + F_{n-1}$
   iii) จงใช้ ข้อ ii พิสูจน์ว่า $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad n = 1,2,3, \ldots$

(วิธีการหาสูตรของบิเนต์ของแบบฝึกหัดข้อที่ 1 คิดค้นโดย Erwin Just ซึ่งถูกตีพิมพ์ใน Mathematics Magazine, vol. 44 (1971), p. 199)

2. พิจารณาวิธีการหาสูตรของบิเนต์วิธีที่ 4 ข้างต้น
   i) จงหาสูตรของ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ ในรูปของเมทริกซ์ที่สมาชิกอยู่ในรูปของลำดับฟิโบนักชี
   ii) โดยการใส่ดีเทอร์มิแนนต์ในสูตรที่ได้จากข้อ i ทั้งสองข้าง จงแสดงว่า
   $F_n{}^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

3. บทประยุกต์ของลำดับฟิโบนักชีในวิชาการวิเคราะห์เชิงจริง
   กำหนดให้ $a_1 = 1$ และ $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$
   i) จงแสดงว่า $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ ทุก $n \geq 1$
   ii) จงพิสูจน์ว่า $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

(<u>หมายเหตุ</u>: ในวิชาการวิเคราะห์เชิงจริง การที่จะแสดงว่า $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้านั้น จะทำโดยการพิสูจน์ว่า $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชีโดยใช้อสมการ $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$ สำหรับ $n \geq 2$)

4. (ระดับมหาวิทยาลัย) กำหนดให้ K เป็นสนาม (Field) ใดๆ ซึ่งบรรจุรากทั้งหมดของพหุนาม $x^2 - x - 1$

   นิยามลำดับฟิโบนักชี $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ใน K โดยให้ $F_1 = F_2 = 1 \in K$ และ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

   จงหาสูตรบิเนต์ของลำดับ F_n

(<u>ข้อเสนอแนะ</u>: ในกรณีที่ค่าลักษณะเฉพาะ (Characteristic) ของ K เป็น 5 สูตรของบิเนต์จะแตกต่างจากกรณีอื่นๆ)

5. (โจทย์ท้าทาย) นิยามลำดับของจำนวนจริง $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ แบบเวียนเกิดดังนี้ $a_0 = 3,\ a_1 = 0,\ a_2 = 2$ และ $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

   จงแสดงว่า ถ้า n เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $n|a_n$

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความที่ตรวจทานความถูกต้องและให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ทำให้บทความนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

[1] E. Barbeau, “Fallacies, Flaws, and Flimflam,” *The College Mathematics Journal*, vol. 24, no. 1, January, pp. 63-66, 1993.

[2] E. Just, “A Note on the Nth Term of the Fibonacci Sequence,” *Mathematics Magazine*, vol. 44, pp. 199, 1971.

[3] S. R. Ghorpade and B. V., Limaye, “A Course in Calculus and Real Analysis,” Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2006.

[4] W. Watkins, “Generating Functions,” *The College Mathematics Journal*, vol. 18, no. 3, January, pp. 195-211, 1993.