โปรแกรมสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัตกับการออกแบบ
เส้นโค้งกำลังสาม

Geometer’s Sketchpad for Design Cubic Splines

* สำหรับการส่งบทความวิจัยเพื่อพิจารณา: ชื่อผู้แต่ง หน่วยงาน และ E-Mail ไม่ควรปรากฏในการนำส่งบทความวิจัย แต่ให้กรอกในใบปะหน้าแทน

- เมื่อบทความได้รับการตอบรับแล้ว จึงใส่ผู้แต่ง หน่วยงาน และ E-Mail

Abstract

In this paper we presents how parametric cubic splines curves used in designing a two – dimensional shape. A cubic splines is used to design a simple aerofoil shape. The mathematics is shown and the shape presented by Geometer’s Sketchpad. The effect of varying parameters is established in this method.

Keywords: Geometer’s Sketchpad, parametric, Cubic Splines

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาการออกแบบในสอง มิติ โดยใช้พารามิเตอร์ที่ต่างกันสำหรับเส้นโค้งกำลังสาม ในการออกแบบรูปเครื่องบิน โดยในแนวคิดทางคณิตศาสตร์และแสดงผลการออกแบบโดยใช้โปรแกรมสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ที่ต่างกันกับเส้นโค้งกำลังสาม

คำสำคัญ โปรแกรมสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต พารามิเตอร์ เส้นโค้งกำลังสาม

1. บทนำ

การวิจัยนี้เป็นการพิจารณาเส้นโค้งกำลังสามทางคณิตศาสตร์ ด้วยการออกแบบกราฟ หรือภาพจากคอมพิวเตอร์ที่เป็นกราฟเส้น ซึ่งเป็นการประยุกต์อย่างง่ายๆ ในระบบ 2 มิติ จากการประมาณค่าในช่วงกำลังสาม พบว่าในปี ค.ศ. 1959 โดยนักวิจัยคณิตศาสตร์ Paul de Casteljau และปี ค.ศ. 1962 Pierre Bezier ได้พัฒนาเส้นโค้งซึ่งประกอบในแบบออกแบบภาพด้วยคอมพิวเตอร์ หรือ CAD ของ Citroen และ Renault ซึ่งเหมือนกับโค้ง Bezier ซึ่งอาจพัฒนาจากระบบ de Casteljau ที่แสดงอนุพันธ์อันดับสามของโค้ง Bezier ต่อมาในปี ค.ศ. 2003 โดย J.A.R. Stone ได้ศึกษาเส้นโค้งกำลังสามและเส้นโค้งของ Bezier ทางคณิตศาสตร์ โดยแสดงผลด้วยกราฟจากการใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Excel ในเส้นโค้งกำลังสาม ปัญหางานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจเนื่องจากการเลือกพารามิเตอร์ที่ซับซ้อน เพื่อให้ได้มาซึ่งกราฟต่างๆที่น่าสนใจ จากการออกแบบด้วยคอมพิวเตอร์ด้วยโปรแกรมสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต

2. พารามิเตอร์เส้นโค้งกำลังสาม

พิจารณาเส้นโค้งเรียบระหว่างจุด (x_0, y_0) กับ (x_1, y_1) ในการพิจารณาพารามิเตอร์เส้นโค้งกำลังสาม
เมื่อกำหนดให้

$$x = at^3 + bt^2 + ct + d$$
$$y = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$$

โดย x, y เป็นพิกัดของจุดบนเส้นโค้ง
และ t เป็นพารามิเตอร์เวลา $(0 \le t \le 1)$
เส้นโค้งมีความต่อเนื่อง ณ จุดเริ่มต้น (x_0, y_0), $t = 0$ และจุดสิ้นสุด $(x_1, y_1), t = 1$ เมื่อค่า $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ เป็นค่าความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่ตลอดเส้นโค้งในแนวแกนนอนและแกน

ตั้ง ที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดซึ่งหาค่าได้ โดยที่ $a,b,c,d,$ α,β,γ และ δ เป็นค่าคงที่

พิจารณาตัวอย่าง การเลือกพารามิเตอร์ในการสร้างเส้นโค้งกำลังสามระหว่างจุด $(1,1)$ ถึงจุด $(4,3)$ เมื่อความชันของเส้นโค้งเป็น 0 ที่จุด $(1,1)$ และเส้นสัมผัสแกนตั้งเป็นอนันต์ที่จุด $(4,3)$ เมื่อกำหนดเส้นโค้งกำลังสามตลอดจุดสองจุด ดังนี้

$$x = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad (0 \le t \le 1)$$
$$y = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$$

ที่จุดเริ่มต้น $x=1, y=1$ และ $t=0$ แล้ว $d=\delta=1$

และ ความชันเป็น 0 เนื่องจาก $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dt}=0$ ที่ $t=0$ โดยที่ $\dfrac{dx}{dt} \ne 0$

สำหรับ $\dfrac{dx}{dt}=1$ ที่ $t=0$

อนุพันธ์ถูกกำหนดโดย

$$\frac{dx}{dt} = 3at^2 + 2bt + c$$
$$\frac{dy}{dt} = 3\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$$

เมื่อ $\dfrac{dx}{dt}=1$ ที่ $t=0$ จะได้ $c=1$

และ $\dfrac{dy}{dt}=0$ ที่ $t=0$ จะได้ $\gamma=0$

ที่จุดสิ้นสุดของส่วนโค้ง เมื่อ $x=4, y=4$ และ $t=1$ ดังนั้น

$$a+b=2 \qquad (1)$$
$$\alpha+\beta=2 \qquad (2)$$

พิจารณาที่ $\dfrac{dx}{dt}=0, \dfrac{dy}{dt}=1$ ที่ $t=1$

ซึ่ง $\dfrac{dy}{dx}=\alpha$ ที่ $t=1$ เมื่อ $\dfrac{dy}{dt}\ne 0$ แล้วเลือก

$\dfrac{dx}{dt}=0$ ที่ $t=1$

จะได้ $$3a+2b=-1 \qquad (3)$$

$\dfrac{dy}{dt}=1$ ที่ $t=1$

จะได้ $$3\alpha+2\beta=1 \qquad (4)$$

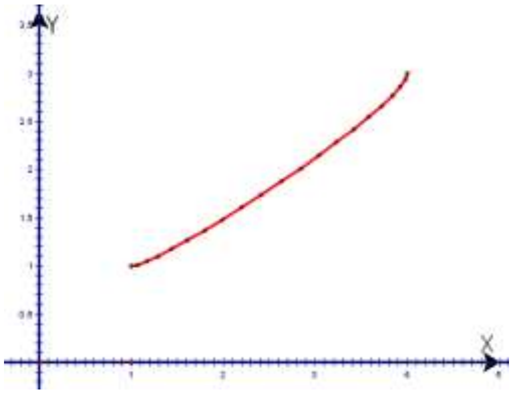
จากสมการ $(1),(2),(3)$ และ (4)

ให้ $a=-5, b=7, \alpha=-3$ และ $\beta=5$

พารามิเตอร์เส้นโค้งกำลังสาม จะได้

$$x = -5t^3 + 7t^2 + t + 1, \quad (0 \le t \le 1)$$
$$y = -3t^3 + 5t^2 + 1$$

สำหรับส่วนโค้งจาก $(1,1)$ ถึง $(4,3)$ และเส้นโค้ง แสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1

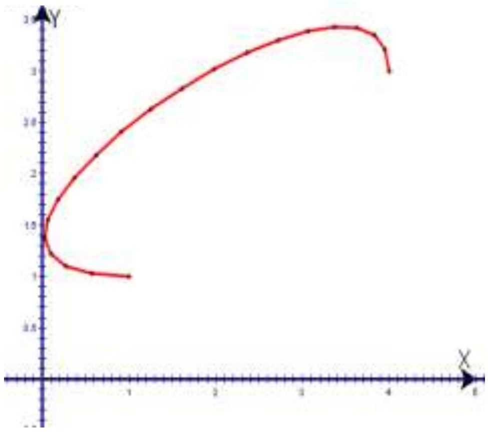
สมมติการกระทำซ้ำในตัวอย่างที่ 1

แต่ $\dfrac{dx}{dt}=-10$ ที่ $t=0$ และ $\dfrac{dy}{dt}=-5$ ที่ $t=1$

เส้นโค้งกำลังสาม แทนด้วย

$$x = -16t^3 + 29t^2 - 10t + 1, \quad (0 \le t \le 1)$$
$$y = -9t^3 + 11t^2 + 1$$

เส้นโค้งดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

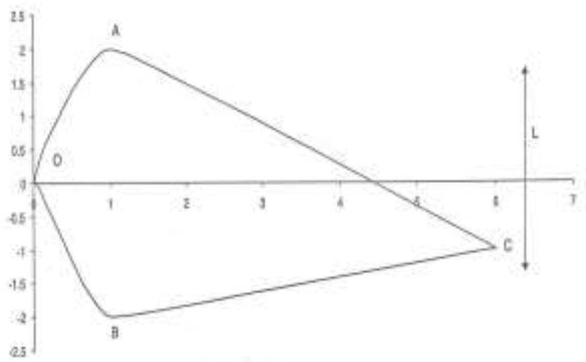
การเลือกค่าสุดท้ายของอนุพันธ์เปลี่ยนแปลงรูปของโค้ง แต่ยังผ่านไปถึงจุดสุดท้าย ซึ่งเป็นการเสนอทางที่เป็นไปได้ ของรูปการออกแบบ โดยทั่วไปพารามิเตอร์เส้นโค้งกำลังสาม การแทนที่ของเส้นโค้งร่วมระหว่างจุด (x_0, y_0) และ (x_1, y_1) ด้วย $\frac{dx}{dt} = u_0, \frac{dy}{dt} = v_0$ ที่จุด (x_0, y_0) และ $\frac{dx}{dt} = u_1, \frac{dy}{dt} = v_1$ ที่จุด (x_1, y_1) คือ

$$x = \left[2(x_0 - x_1) + u_0 + u_1\right]t^3 + \left[3(x_1 - x_0) - 2u_0 - u_1\right]t^2 u_0 t + x_0 \qquad (5)$$

$$y = \left[2(y_0 - y_1) + v_0 + v_1\right]t^3 + \left[3(y_1 - y_0) - 2v_0 - v_1\right]t^2 v_0 t + y_0 \qquad (6)$$

3. ตัวอย่างการออกแบบ

พิจารณาตัวอย่างรูปเครื่องบิน ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

กำหนดให้เส้นสัมผัสในแนวดิ่งที่จุด $O(0,0)$ และแนวนอนที่จุด A, B เส้นสัมผัส AC, BC เท่ากับ -1 ที่จุด C จุด $A(1,2), C(6,-1), B(1,2-L)$ เมื่อ L เป็นค่าผลต่างสำหรับแต่ละรูปและนิยาม ดังนี้

$L = 0.1$ [จำนวนของตัวอักษรในนามสกุล+(จำนวนวันเกิด) $\bmod 7$] $+3$

เมื่อกำหนดให้ $L = 3.6$ และ $B(2,-1.6)$

ซึ่งกำหนดให้พารามิเตอร์เส้นโค้งกำลังสามเป็น OA, AC, OB และ BC

4. การออกแบบพารามิเตอร์กำลังสาม

สมมติเส้นโค้ง ดังนี้

$OA: y = S_1(x);\ \frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = v_{10}$ ที่ O,
และ $\frac{dx}{dt} = u_{11}, \frac{dy}{dt} = 0$ ที่ $A(1,2)$

$AC: y = S_2(x);\ \frac{dx}{dt} = u_{20}, \frac{dy}{dt} = 0$ ที่ A,
และ $\frac{dx}{dt} = u_{21}, \frac{dy}{dt} = v_{21}$ ที่ C

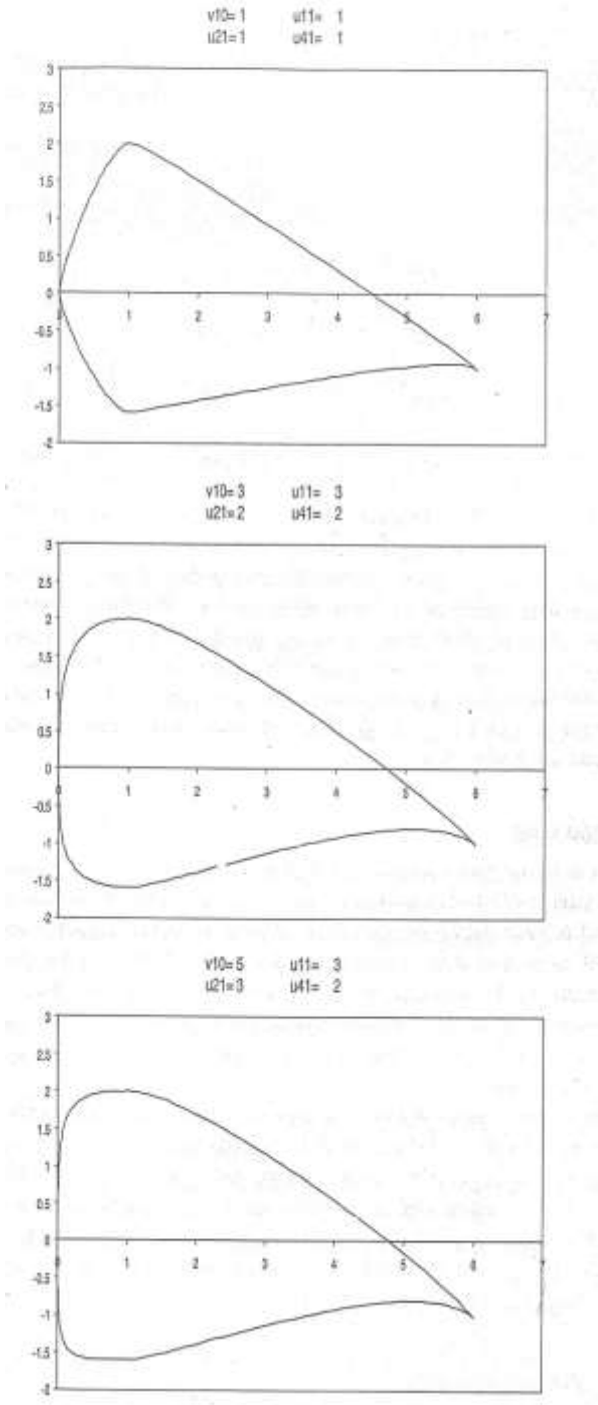
$OB: y = S_3(x);\ \frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = v_{30}$ ที่ O,
และ $\frac{dx}{dt} = u_{31}, \frac{dy}{dt} = 0$ ที่ B

$BC: y = S_4(x);\ \frac{dx}{dt} = u_{40}, \frac{dy}{dt} = 0$ ที่ B,
และ $\frac{dx}{dt} = u_{41}, \frac{dy}{dt} = v_{41}$ ที่ C

เงื่อนไขสำหรับเส้นโค้งเรียบร่วมกันของ S_1 ไป S_2 ที่ A และ S_3 ไป S_4 ที่ B โดย $u_{11} = u_{20}, u_{31} = u_{40}$ ความเหมาะสม สำหรับเส้นสัมผัสและเงื่อนไขรูปแบบที่ C โดย $u_{21} = -v_{21}, u_{41} = -v_{41}, u_{21}, v_{21} > 0$ การรับรองเส้นโค้งทางขวาที่ O กำหนดให้ $v_{10} > 0, v_{30} < 0$ และจากการพิจารณาของรูปการออกแบบ $v_{10} = -v_{30}$ ดังนั้นพารามิเตอร์ที่สำคัญทั้ง 4 ซึ่งควบคุมรูปร่าง ได้แก่ v_{10}, u_{11}, u_{21} และ u_{41} เส้นโค้งทั้ง 4 ง่ายที่จะถูกพิจารณาจากสมการ (5) และ (6) และดำเนินการแสดงกราฟด้วย GSP รูปที่ 4 แสดงบางรูปร่าง ซึ่งรูปร่างด้านหน้าถูกกำหนดด้วย v_{10} รูปด้านหลังถูกกำหนดด้วย u_{21}, u_{41} และ เชื่อมกันที่ A และ B ด้วย u_{11} เช่น ค่าพารามิเตอร์เพิ่มขึ้น ดังนั้นรูปจะได้มุมเล็ก และรูปทรงกลมใหญ่

5. ผลการทดลอง

การเลือกค่าพารามิเตอร์พบว่าน่าสนใจ สำหรับคณิตศาสตร์ในรูปภาพต่างๆที่ได้



รูปที่ 4

6. บทสรุปและข้อเสนอแนะ

กราฟจากการออกแบบด้วยคอมพิวเตอร์แสดงการประยุกต์ทางคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดีในการทดลองสำหรับตัวอย่างที่ได้ใช้การพิจารณา การดำเนินการโดยโปรแกรมสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาพลวัต (GSP) ซึ่งเน้นความสำคัญของคณิตศาสตร์และอธิบายความหมายต่างๆทางคณิตศาสตร์จากกราฟ สามารถใช้ในการออกแบบ หรือทำนาย เมื่อเลือกค่าพารามิเตอร์ที่แตกต่างกัน

7. เอกสารอ้างอิง

[1] P. Cooley, “ *The Essence of Computer Graphics”*, Prentice Hall, New Jersey, 2001.

[2] P. A. Egerton and W.S. Hall, “*Computer Graphics: Mathematical First Steps”*, Prentice Hall, New Jersey, 1998.

[3] F.S.Jr. Hill,“Computer Graphics using OpenGL”, Prentice Hall, New Jersey.

[4] A.R. Stone, “Teaching Mathematics and Its Applications”, *Journal*, 24(4), 2005, pp. 192-212.