บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 พาราามิเตอร์เส้นโค้งกำลังสาม

พิจารณาเส้นโค้งเรียบระหว่างจุด (x_0, y_0) กับ (x_1, y_1) ในการพิจารณาพาราามิเตอร์เส้นโค้งกำลังสาม

เมื่อกำหนดให้

$$x = at^3 + bt^2 + ct + d$$
$$y = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$$

โดย (x, y) เป็นพิกัดของจุดบนเส้นโค้ง

และ t เป็นตัวแปร $(0 \le t \le 1)$

เส้นโค้งมีความต่อเนื่อง ณ จุดเริ่มต้น $(x_0, y_0),\ t = 0$

และจุดสิ้นสุด $(x_1, y_1), t = 1$

เมื่อ $\frac{dx}{dt}$ เป็นค่าความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่ตลอดเส้นโค้งในแนวแกนนอน

และ $\frac{dy}{dt}$ เป็นค่าความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่ตลอดเส้นโค้งในแนวแกนตั้ง

ที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดซึ่งหาค่าได้

โดยที่ $a, b, c, d,\ \alpha, \beta, \gamma$ และ δ เป็นพาราามิเตอร์

พิจารณาตัวอย่าง

การเลือกพาราามิเตอร์ในการสร้างเส้นโค้งกำลังสามระหว่างจุด $(1,1)$ ถึงจุด $(4,3)$ เมื่อความชันของเส้นโค้งเป็น 0 ที่จุด $(1,1)$ และเส้นสัมผัสแกนตั้งเป็นอนันต์ที่จุด $(4,3)$

เมื่อกำหนดเส้นโค้งกำลังสามตลอดจุดสองจุด ดังนี้

$$x = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad (0 \le t \le 1)$$
$$y = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$$

ที่จุดเริ่มต้น $x = 1, y = 1$ และ $t = 0$

แล้ว $$d = \delta = 1$$

และ ความชันเป็น 0 เนื่องจาก

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dt}=0$ ที่ $t=0$

โดยที่ $\frac{dx}{dt}\neq 0$

เมื่อ $\frac{dx}{dt}=1$ ที่ $t=0$

อนุพันธ์ถูกกำหนดโดย

$$\frac{dx}{dt}=3at^2+2bt+c$$

$$\frac{dy}{dt}=3\alpha t^2+2\beta t+\gamma$$

เมื่อ $\frac{dx}{dt}=1$ ที่ $t=0$

จะได้ $c=1$

และ $\frac{dy}{dt}=0$ ที่ $t=0$

จะได้ $\gamma=0$

ที่จุดสิ้นสุดของส่วนโค้ง เมื่อ $x=4, y=4$ และ $t=1$

ดังนั้น

$$a+b=2 \qquad (1)$$

$$\alpha+\beta=2 \qquad (2)$$

พิจารณาที่ $\frac{dx}{dt}=0, \frac{dy}{dt}=1$ ที่ $t=1$

ซึ่ง $\frac{dy}{dx}=\alpha$ ที่ $t=1$

เมื่อ $\frac{dy}{dt}\neq 0$

แล้ว เลือก $\frac{dx}{dt}=0$ ที่ $t=1$

จะได้

$$3a+2b=-1 \qquad (3)$$

$\frac{dy}{dt}=1$ ที่ $t=1$

จะได้

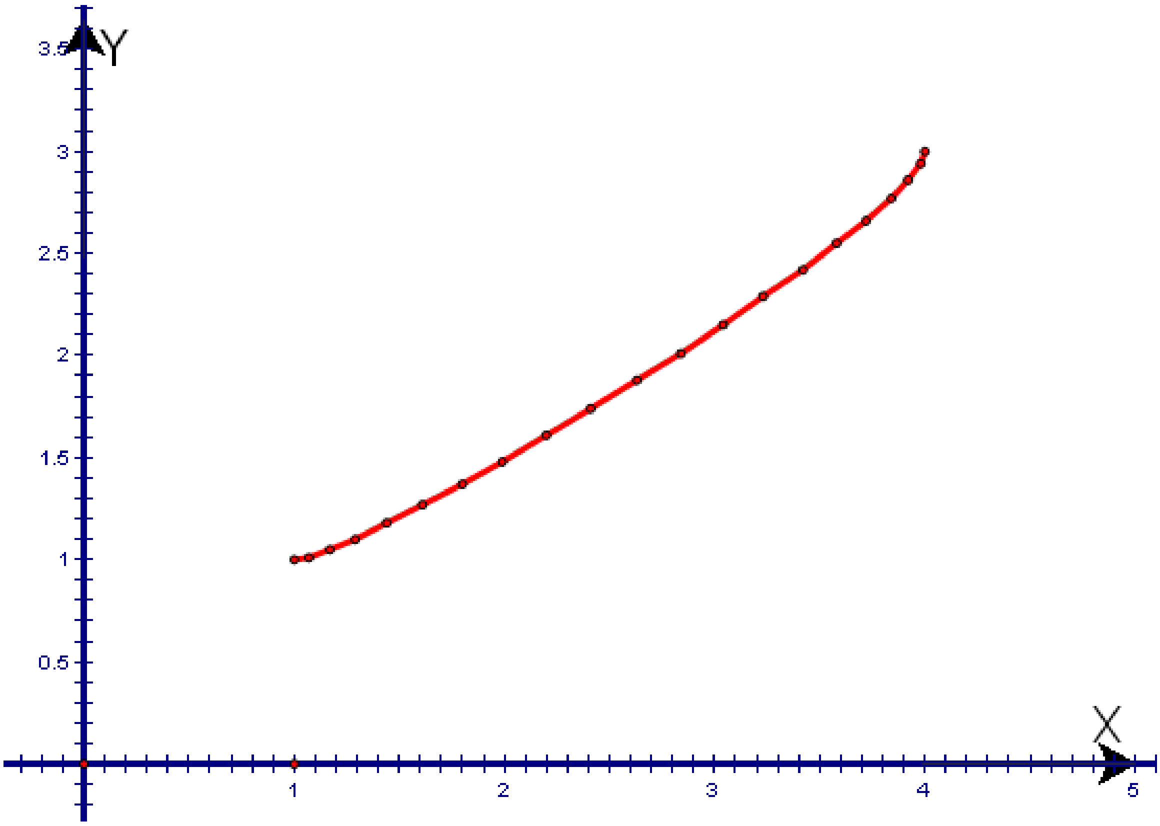
$$3\alpha+2\beta=1 \qquad (4)$$

จากสมการ $(1), (2), (3)$ และ (4)

ให้ $a=-5, b=7, \alpha=-3$ และ $\beta=5$
จะได้เส้นโค้งกำลังสามในรูป

$$x=-5t^3+7t^2+t+1, \quad (0\le t\le 1)$$
$$y=-3t^3+5t^2+1$$

สำหรับส่วนโค้งกำลังสาม จากจุด $(1,1)$ ถึง จุด $(4,3)$ แสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1

สมมติการกระทำซ้ำในตัวอย่างที่ 1

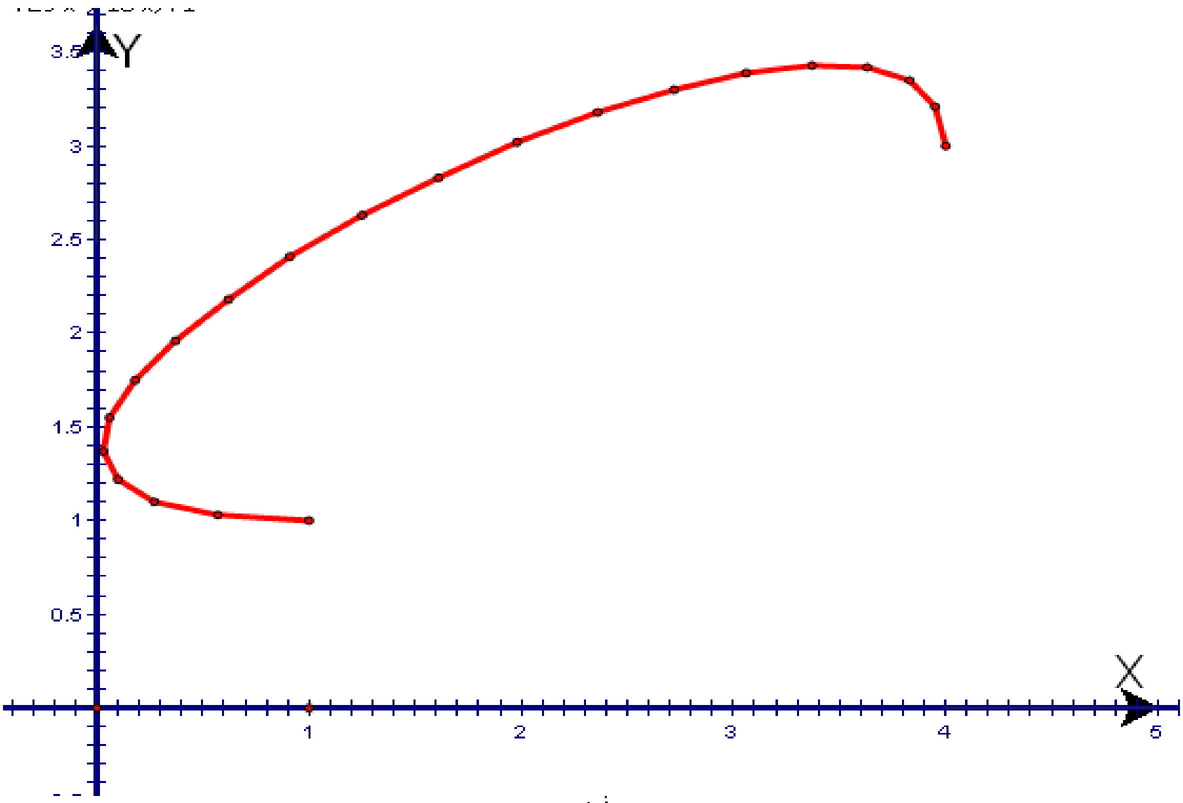
แต่ $\frac{dx}{dt}=-10$ ที่ $t=0$

และ $\frac{dy}{dt}=-5$ ที่ $t=1$

เส้นโค้งกำลังสาม แทนด้วย

$$x=-16t^3+29t^2-10t+1, \quad (0\le t\le 1)$$
$$y=-9t^3+11t^2+1$$

และเส้นโค้งกำลังสาม จาก จุด $(1,1)$ ถึง จุด $(4,3)$ แสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2

การเลือกค่าสุดท้ายของอนุพันธ์สามารถเปลี่ยนแปลงรูปของเส้นโค้งที่ลากผ่านไปถึงจุดสุดท้าย ซึ่งเป็นการเสนอทางที่เป็นไปได้ของรูปการออกแบบ โดยทั่วไปพารามิเตอร์เส้นโค้งกำลังสาม กำหนดระหว่างจุด (x_0, y_0) และ (x_1, y_1)

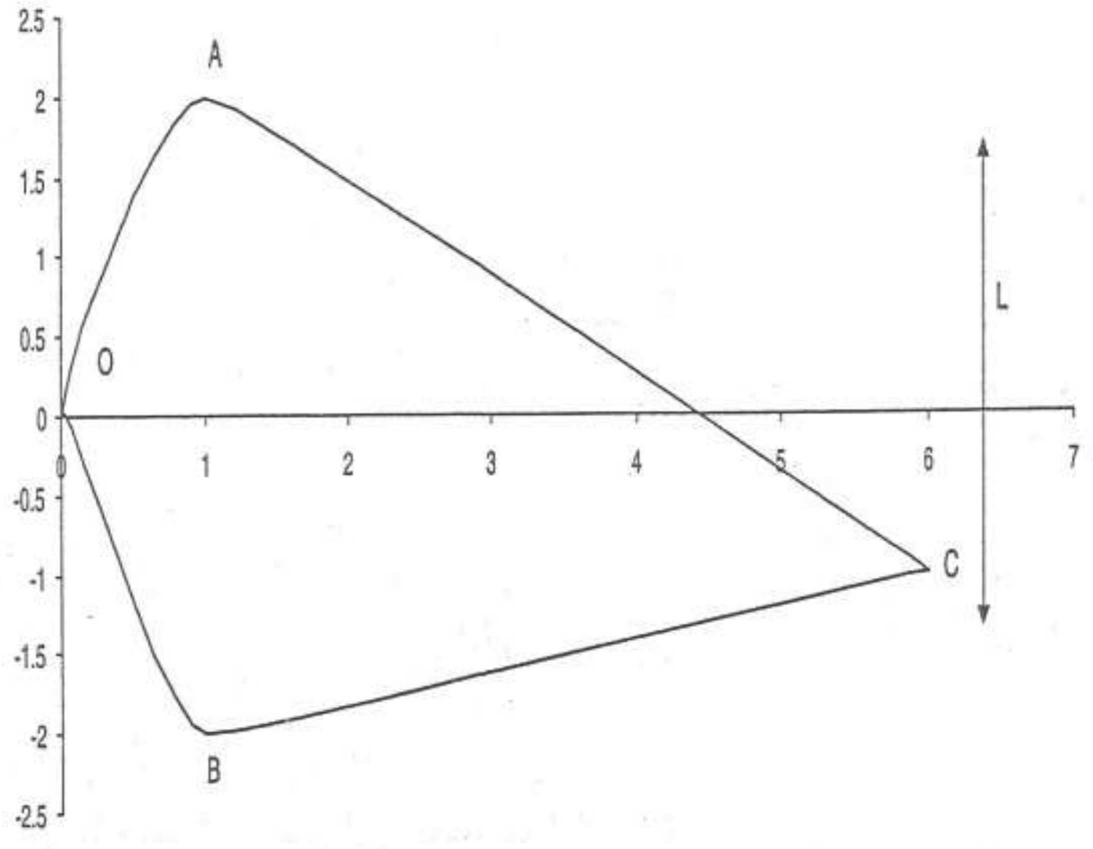
ด้วย $\dfrac{dx}{dt} = u_0, \dfrac{dy}{dt} = v_0$ ที่จุด (x_0, y_0) และ $\dfrac{dx}{dt} = u_1, \dfrac{dy}{dt} = v_1$ ที่จุด (x_1, y_1) คือ

$$x = \left[2(x_0 - x_1) + u_0 + u_1\right]t^3 + \left[3(x_1 - x_0) - 2u_0 - u_1\right]t^2 u_0 t + x_0 \qquad (5)$$

$$y = \left[2(y_0 - y_1) + v_0 + v_1\right]t^3 + \left[3(y_1 - y_0) - 2v_0 - v_1\right]t^2 v_0 t + y_0 \qquad (6)$$

3.2 ตัวอย่างการออกแบบ

พิจารณาตัวอย่างรูปเส้นโค้ง ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

กำหนดให้เส้นสัมผัสในแนวดิ่งที่จุด $O(0,0)$ และแนวนอนที่จุด A, B เส้นสัมผัส AC, BC เท่ากับ -1 ที่จุด C จุด $A(1,2), C(6,-1), B(1,2-L)$

เมื่อ L เป็นค่าระยะห่างแกน x จากจุด A, B

เมื่อกำหนดให้ $L = 3.6$ และ $B(2,-1.6)$

ซึ่งกำหนดให้ส่วนของเส้นโค้งเป็น OA, AC, OB และ BC

3.3 การออกแบบพารามิเตอร์กำลังสาม

สมมติส่วนของเส้นโค้ง ดังนี้

$$OA: y = S_1(x);\ \frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = v_{10} \text{ ที่ } O,$$

และ $\frac{dx}{dt} = u_{11}, \frac{dy}{dt} = 0$ ที่ $A(1,2)$

$$AC: y = S_2(x);\ \frac{dx}{dt} = u_{20}, \frac{dy}{dt} = 0 \text{ ที่ } A,$$

และ $\frac{dx}{dt} = u_{21}, \frac{dy}{dt} = v_{21}$ ที่ C

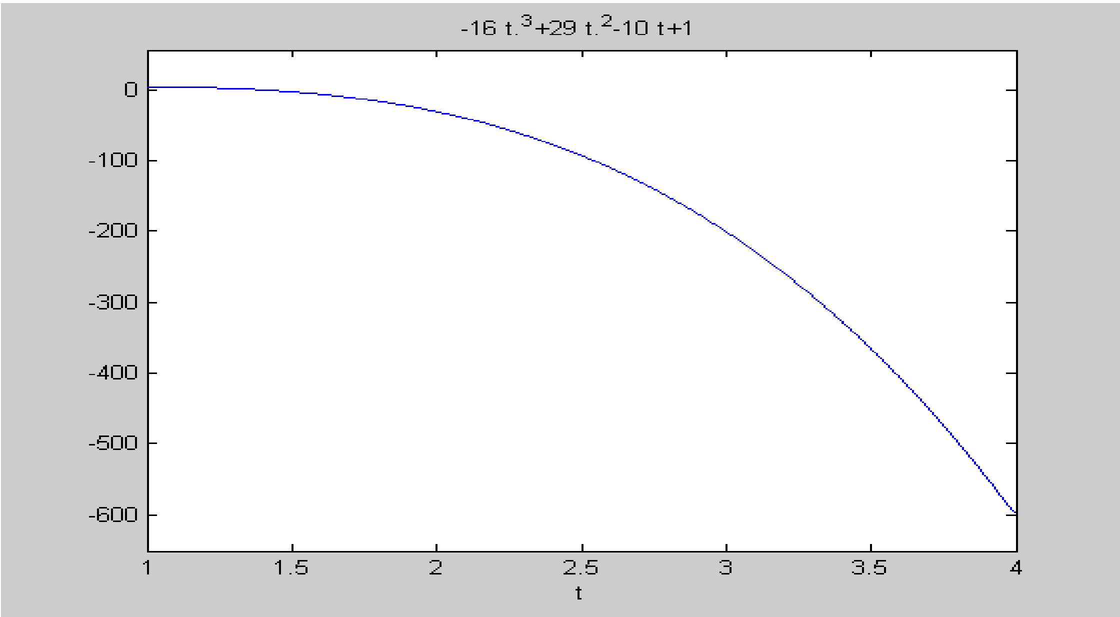
$$OB: y = S_3(x);\ \frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = v_{30} \text{ ที่ } O,$$

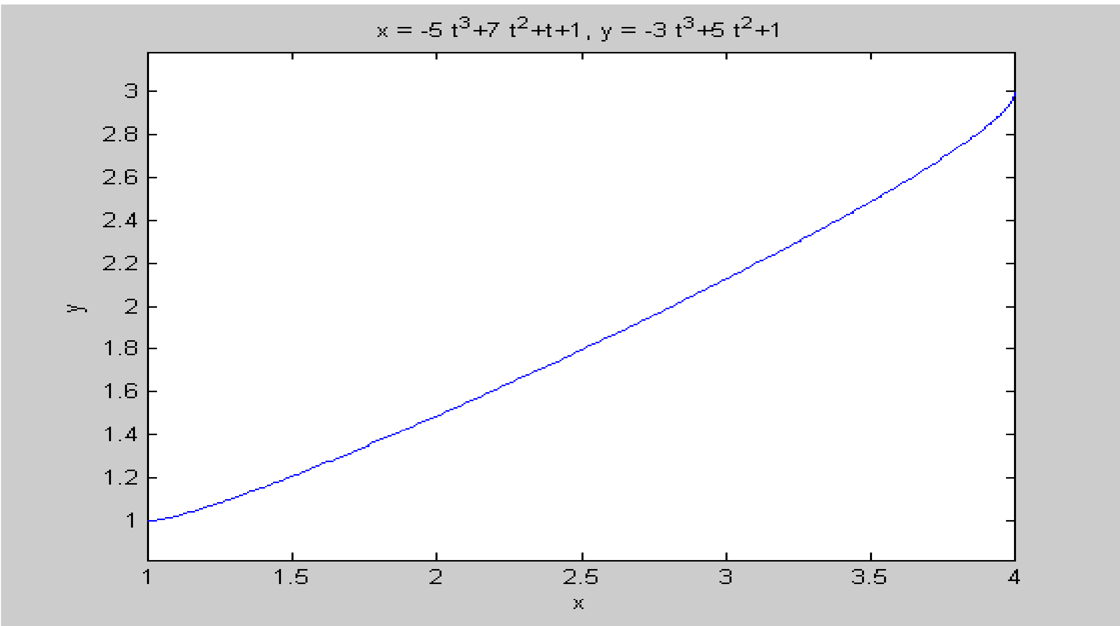
และ $\frac{dx}{dt} = u_{31}, \frac{dy}{dt} = 0$ ที่ B

$$BC: y = S_4(x);\ \frac{dx}{dt} = u_{40}, \frac{dy}{dt} = 0 \text{ ที่ } B,$$

และ $\frac{dx}{dt} = u_{41}, \frac{dy}{dt} = v_{41}$ ที่ C

ส่วนของเส้นโค้งร่วมของ S_1 ไป S_2 ที่จุด A และ S_3 ไป S_4 ที่จุด B โดย กำหนดให้ $u_{11} = u_{20}, u_{31} = u_{40}$ และที่จุด C โดย $u_{21} = -v_{21}, u_{41} = -v_{41}$ สำหรับการรองรับเส้นโค้งทางขวาของจุด O กำหนดให้ $v_{10} > 0, v_{30} < 0$ และจากการพิจารณาการออกแบบ $v_{10} = -v_{30}$ ดังนั้นพารามิเตอร์ที่สำคัญทั้ง 4 ซึ่ง ได้แก่ v_{10}, u_{11}, u_{21} และ u_{41} ถูกพิจารณาจากสมการ (5) และ (6) และแสดงผลด้วยกราฟจากการใช้โปรแกรมสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต ดังรูปที่ 4


-16 t.^3+29 t.^2-10 t+1
0
-100
-200
-300
-400
-500
-600
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
t


x = -5 t^3+7 t^2+t+1 , y = -3 t^3+5 t^2+1
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
y
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
x