บทที่ 2

ผลงานวิจัยและงานเขียนอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยนี้เป็นการศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และค่ากำลังการทดสอบของวิธีทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบ 3 วิธี คือวิธีของเดรปเปอร์และสมิทธิ์ วิธีของซูและยาง และวิธีของมิลเลอร์และนีลล์ กรณีข้อมูลไม่มีการทำซ้ำ โดยมีทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

การวิเคราะห์การถดถอย

การวิเคราะห์การถดถอยเป็นวิธีการสร้างตัวแบบถดถอยสำหรับใช้ประมาณค่าหรือพยากรณ์ตัวแปรตาม (Dependent variable or response variable) นิยมเขียนแทนด้วย Y จากตัวแปรอิสระหรือตัวแปรพยากรณ์ (Independent variable or predictor variable) นิยมเขียนแทนด้วย X ในกรณีตัวแปรอิสระมีหนึ่งตัว เรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเดียว (Simple regression) แต่ในบางกรณีตัวแปรอิสระอาจมีตั้งแต่สองตัวขึ้นไป เรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยเชิงพหุ (Multiple regression)

ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นเชิงเดียว (Simple linear regression model) เขียนได้เป็น

$$\mathsf{Y} = \beta_0 + \beta_1 \mathsf{X} + \varepsilon$$

เมื่อ Y แทน ตัวแปรตามหรือตัวแปรที่สนใจศึกษา

X แทน ตัวแปรอิสระ

β_0, β_1 แทน ค่าพารามิเตอร์

ε แทน ความคลาดเคลื่อนสุ่ม (Random error)

หรือเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

เมื่อ $\mathbf{Y}$ แทน เมทริกซ์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

$\mathbf{X}$ แทน เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $n \times (k+1)$

$\boldsymbol{\beta}$ แทน เมทริกซ์ของค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยขนาด $(k+1) \times 1$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ แทน เมทริกซ์ของความคลาดเคลื่อนสุ่มขนาด $n \times 1$

n แทน จำนวนข้อมูลที่ศึกษา

k แทน จำนวนตัวแปรอิสระ

โดย

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

โดยทั่วไปจะไม่ทราบค่า $\beta_i,\ i=0,1,\ldots,k$ จึงนิยมใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least squares method) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ เนื่องจากตัวประมาณที่ได้มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด ตัวประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีนี้ทำให้ผลรวมของกำลังสองของผลต่างระหว่างจุดต่าง ๆ ของข้อมูลกับเส้นถดถอยมีค่าน้อยที่สุด

ค่าพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ สามารถประมาณได้ด้วย $\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}$ จะได้สมการถดถอยเป็น $\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ เมื่อ $\hat{\mathbf{Y}}$ เป็นค่าพยากรณ์ของ $\mathbf{Y}$

ผลต่างระหว่าง $\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{Y}}$ เรียกว่าเรซิดวล (Residual) แทนด้วย $\mathbf{e}$ ซึ่งใช้เป็นตัวประมาณของ $\boldsymbol{\varepsilon}$

ให้ SSE คือ ผลรวมกำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าจริง $\mathbf{Y}$ กับค่าพยากรณ์ $\hat{\mathbf{Y}}$ นั่นคือ $\mathrm{SSE}=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = ee'$

ให้ MSE คือ ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Mean square error)

$$\mathrm{MSE} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1} = \frac{ee'}{n-k-1}$$

MSE เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของความแปรปรวน

โดยที่ n แทน จำนวนข้อมูลที่ศึกษา

k แทน จำนวนตัวแปรอิสระ

ในการวิเคราะห์การถดถอยจะมีข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อนสุ่ม ดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนสุ่ม (ε_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 นั่นคือ

$$E(\varepsilon_i)=0 \quad , \quad V(\varepsilon_i)=\sigma^2$$

2. ความคลาดเคลื่อนสุ่มไม่มีความสัมพันธ์กัน (Uncorrelated) นั่นคือ

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 \text{ เมื่อ } i \neq j \;;\; i,j=1,2,\ldots,n$$

ขั้นตอนการวิเคราะห์การถดถอยมีดังนี้

1. นำข้อมูลตัวแปรอิสระ X และตัวแปรตาม Y แต่ละตัว มาเขียนแผนภาพกระจาย (Scatter plot) เพื่อดูรูปแบบความสัมพันธ์อย่างคร่าว ๆ

2. หาสมการถดถอยที่เหมาะสมกับความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง

3. ตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ได้จากข้อ 2 ถ้าพบว่าตัวแบบไม่เหมาะสมต้องหาตัวแบบใหม่ที่เหมาะสมกับข้อมูล

4. นำสมการที่ได้ไปใช้ในการพยากรณ์

การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ

การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบอาจแบ่งได้เป็น 3 กรณี คือ

1. ในกรณีที่ทราบค่า σ^2 การตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบสามารถทำได้โดยการเปรียบเทียบค่า MSE กับ σ^2 ถ้า $MSE > \sigma^2$ อย่างมีนัยสำคัญแสดงว่าตัวแบบที่กำหนดน่าจะไม่ถูกต้อง ควรพิจารณาตัวแบบใหม่

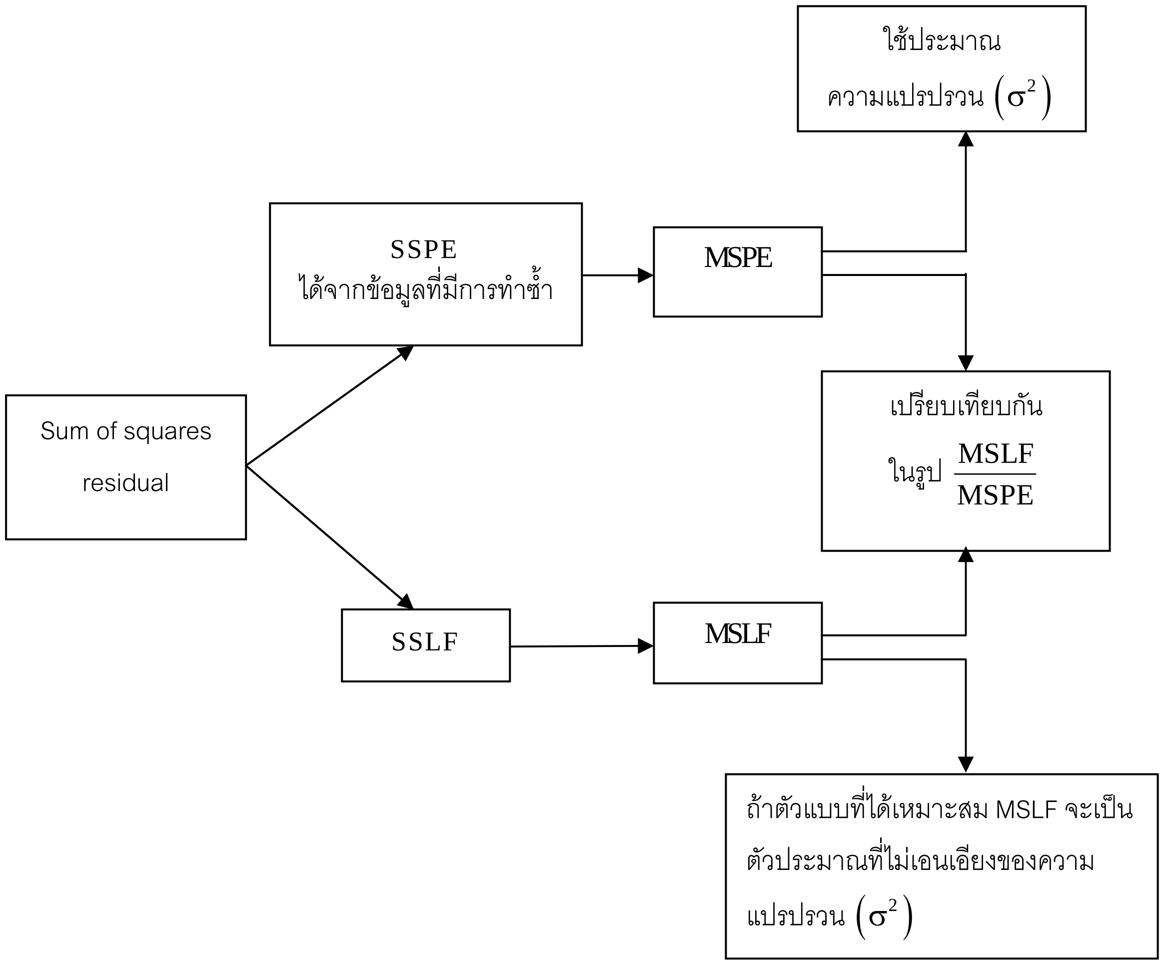
2. ในกรณีที่ไม่ทราบค่า σ^2 แต่ข้อมูลมีการทำซ้ำ นั่นคือตัวแปรอิสระ X ค่าหนึ่งๆ มีค่า Y หลายค่า นิยมใช้วิธีของเดรปเปอร์และสมิทธิ์ในการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ เนื่องจากวิธีนี้ใช้หลักการว่า ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนประกอบไปด้วย 2 ส่วนคือ

2.1 ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่แท้จริง (Sum of squares pure error – $SSPE$) โดยถ้าค่าสังเกตของ Y 2 ค่า ที่สังเกตที่ X ระดับเดียวกันแล้วมีค่าต่างกัน แสดงว่าความแตกต่างดังกล่าวเกิดจากความคลาดเคลื่อนสุ่ม ความแตกต่างนี้สามารถใช้ประมาณ σ^2 ได้ (Draper and Smith,1981)

2.2 ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเนื่องจากตัวแบบที่ใช้ไม่เหมาะสม (Sum of squares lack of fit – SSLF) เกิดจากการกำหนดตัวแบบผิดไปจากที่ควรจะเป็น ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

ภาพที่ 2.1

แสดงการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบในกรณีที่ไม่ทราบค่า σ^2 แต่ข้อมูลมีการทำซ้ำ



ตารางที่ 2.1

ข้อมูลของตัวแปร X และ Y และสัญลักษณ์ในกรณีข้อมูลมีการทำซ้ำ

X_i	Y	$\bar{Y}_i$	$\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_i)^2$	DF
X_1	$Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1n_1}$	$\bar{Y}_1$	$\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{1j}-\bar{Y}_1)^2$	n_1-1
X_2	$Y_{21}, Y_{22}, \ldots, Y_{2n_2}$	$\bar{Y}_2$	$\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{2j}-\bar{Y}_2)^2$	n_2-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_c	$Y_{c1}, Y_{c2}, \ldots, Y_{cn_c}$	$\bar{Y}_c$	$\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{cj}-\bar{Y}_c)^2$	n_c-1
			$\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_i)^2$	$\sum_{i=1}^{c}n_i-c$

ให้ $$\bar{Y}_i = \frac{Y_{i1}+Y_{i2}+\ \ldots +Y_{in_i}}{n_i}$$

จากตารางเป็นลักษณะข้อมูลของตัวแปร X ที่มีค่าสังเกต Y หลายค่า โดย X มีค่าต่างๆ กัน c ค่า และแทนค่าที่ i ของ c ค่านี้ด้วย X_i , $i=1,2,...,c$ ถ้าที่ค่า X_i มีสังเกตของ Y จำนวน n_i ค่า แทนค่าสังเกตเหล่านี้ด้วย Y_{ij} เมื่อ $j=1,2,...,n_i$

จำนวนข้อมูลทั้งหมด $n=\sum_{i=1}^{c}n_i$

ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน ณ แต่ละค่าของ X_i มีค่าเท่ากับ

$$\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_i)^2 \qquad \text{มีองศาเสรี } n_i-1$$

เมื่อรวมผลบวกกำลังสองนี้ทุกค่าของ X จะได้ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่แท้จริง แทนด้วย SSPE

$$\text{SSPE} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_i)^2 \qquad \text{มีองศาเสรี } \sum_{i=1}^{c}n_i-c$$

นั่นคือ $$\text{MSPE} = \frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{c} n_i - c}$$

MSPE สามารถใช้ประมาณ σ^2 ไม่ว่าตัวแบบที่กำหนดจะถูกต้องหรือไม่ก็ตาม (Draper and Smith,1981)

ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเนื่องจากตัวแบบที่ใช้ไม่เหมาะสม แทนด้วย SSLF

$$\text{SSLF} = \sum_{i=1}^{c} n_i(\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2$$ มีองศาเสรี $m-k-1$

นั่นคือ $$\text{MSLF} = \frac{\sum_{i=1}^{c} n_i(\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2}{c-k-1}$$ k คือ จำนวนตัวแปรอิสระ

$\hat{Y}_i$ เป็นค่าพยากรณ์ของค่าคาดหมาย Y_i

การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบเกิดจากการแบ่งผลบวกกำลังสองของเรซิดวล (Residual) ออกเป็น 2 ส่วนคือ

$$\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{c} n_i(\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2$$

$$\text{SSE} = \text{SSPE} + \text{SSLF}$$

จากสมการข้างต้นสามารถสร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ ดังนี้

ตารางที่ 2.2

ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนที่แสดงผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนแท้และความคลาดเคลื่อนเนื่องจากตัวแบบไม่เหมาะสม

Source	Sum of square	Degree of freedom	Mean of square	ค่า F
Regression	SSR	k	MSR	
Residual	SSE	n -k-1	MSE	
Lack of fit	SSLF	c-k-1	MSLF	MSLF / MSPE
Pure error	SSPE	n-c	MSPE	
Total	SST	n-1		

โดย $n = \sum_{i=1}^{c} n_i$

จากตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน จะใช้สถิติ $F = \frac{MSLF}{MSPE}$ เปรียบเทียบกับค่า $F_{(c-k-1, n-c)}$ ที่เปิดจากตาราง ถ้า F ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่า F จากตาราง แสดงว่าตัวแบบที่กำหนดนั้นไม่เหมาะสม

โดยปกติวิธีของเดรปเปอร์และสมิทธิ์ใช้กับกรณีข้อมูลมีการทำซ้ำ แต่เนื่องจากการศึกษานี้ได้มีการแบ่งข้อมูลออกเป็นกลุ่ม ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำวิธีของเดรปเปอร์และสมิทธิ์มาปรับใช้กับกรณีข้อมูลไม่มีการทำซ้ำ โดยแทนที่ X ด้วยค่าเฉลี่ยของ X ที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันก็จะสามารถหาค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่แท้จริงได้

3. ในกรณีที่ไม่ทราบค่า σ^2 แต่ข้อมูลไม่มีการทำซ้ำ คือ ในตัวแปรอิสระหนึ่งค่า จะมีตัวแปรตาม Y เพียง 1 ค่า เราไม่สามารถหาค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่แท้จริงได้ จึงมีผู้คิดหาวิธีตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบไว้หลายท่าน เช่น กรีน, โจลีกา, ชิลลิงตัน, ออกซอน, ซูและยาง, มิลเลอร์และนีลล์ เป็นต้น

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

กรีน (Green, 1971) ได้สร้างแบบทดสอบที่ใช้ในการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ใช้ตัวแปรอิสระเพียง 1 ตัว แต่สามารถพัฒนาให้ใช้ได้กับตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว สมมติฐานว่างที่กรีนใช้คือ $E(Y) = X\beta$ ข้อมูลที่มีค่า X ใกล้เคียงกันจะถูกจัดให้อยู่กลุ่มเดียวกัน M กลุ่ม เพื่อใช้ประมาณความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในแต่ละกลุ่มที่แบ่งนั้น แล้วเพิ่มพหุนามกำลัง q ของค่า X เข้าไปในตัวแบบของกลุ่ม และสมมติให้ตัวแบบที่มีพหุนามของค่า X เพิ่มขึ้นนี้เป็นตัวแบบที่ถูกต้อง วิธีของกรีนจะต้องมีการกำหนด M และ q ซึ่งทำได้ยาก และถ้ามีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว วิธีของกรีนต้องใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่

ชิลลิงตัน (Shillington, 1979) ได้เสนอแบบทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบ โดยแบ่งข้อมูลที่ใช้ในการสร้างตัวแบบตามสมมติฐานว่าง (H_0) ออกเป็นกลุ่ม ๆ M กลุ่ม แล้วสร้างสมการเส้นถดถอย 2 เส้น ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ดังนี้

1. สมการถดถอยบนค่าเฉลี่ยของกลุ่ม (Regression on the group mean) โดยแทนที่ค่าของตัวแปรอิสระ X แต่ละตัว ด้วยค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระ X ภายในกลุ่มเดียวกัน สำหรับตัวแปรตาม Y แต่ละตัว แทนที่ด้วยค่าเฉลี่ยของตัวแปร Y ภายในกลุ่มเดียวกัน แล้วคำนวณค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (MSE_B) จาก

$$\mathrm{SSE_B} = \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{c}}' \left\{ \mathbf{D}_{\mathbf{B}}^{-1} - \mathbf{D}_{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{X}_{\mathbf{c}} \left(\mathbf{X}_{\mathbf{c}}{}' \mathbf{D}_{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{X}_{\mathbf{c}} \right)^{-1} \mathbf{X}_{\mathbf{c}}{}' \mathbf{D}_{\mathbf{B}}^{-1} \right\} \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{c}}$$

$$\mathrm{MSE_B} = \mathrm{SSE_B} / (\mathrm{M} - \mathrm{p})$$

ให้ $\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{c}}$ แทน เวคเตอร์ขนาด $\mathrm{M} \times 1$ ที่มีสมาชิกตัวที่ j มีค่าเท่ากับ ค่าเฉลี่ยของค่าตัวแปรตาม Y ที่อยู่ในกลุ่มที่ j $(j = 1, 2, 3, \ldots, M)$

$\mathbf{X}_{\mathbf{c}}$ แทน เมทริกซ์ขนาด $\mathrm{M} \times (\mathrm{k}+1)$ ที่มีสมาชิกในแถวที่ j มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของ n_j แถวของ X ซึ่งสอดคล้องกับกลุ่มที่ j

$\mathbf{D}_{\mathbf{B}}$ แทน เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal matrix) ขนาด $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ ที่อยู่ในรูป $\mathrm{diag}\left[1/n_1, 1/n_2, \ldots, 1/n_M\right]$

M แทน จำนวนกลุ่ม

p แทน จำนวนพารามิเตอร์

ถ้า สมมติฐานว่าง (H_0) จริง $\mathrm{MSE_B}$ จะมีคุณสมบัติไม่เอนเอียง (Unbiased)

2. สมการถดถอยบนส่วนเบี่ยงเบนภายในกลุ่ม (Regression on within cell deviations) โดยแทนที่ค่าของตัวแปรอิสระ X แต่ละตัว ด้วยส่วนเบี่ยงเบนที่เกิดขึ้นระหว่างค่าของข้อมูลกับค่าเฉลี่ยภายในกลุ่มของตัวแปรอิสระ X สำหรับตัวแปรตาม Y แต่ละตัว แทนที่ด้วยส่วนเบี่ยงเบนที่เกิดขึ้นระหว่างค่าของข้อมูลกับค่าเฉลี่ยภายในกลุ่มของตัวแปรอิสระ Y แล้วคำนวณค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน $(\mathrm{MSE_W})$ จาก

$$\mathrm{SSE_W} = \mathbf{W}' \left\{ \mathbf{I_N} - \mathbf{X_{within}} \left(\mathbf{X}'_{\mathbf{within}} \mathbf{X_{within}} \right)^{-1} \mathbf{X}'_{\mathbf{within}} \right\} \mathbf{W}$$

$$\mathrm{MSE_W} = \mathrm{SSE_W} / (\mathrm{N} - \mathrm{M} - \mathrm{r})$$

ให้ $\mathbf{W}$ แทน เวคเตอร์ขนาด $\mathrm{N} \times 1$ ที่มีสมาชิกตัวที่ i มีค่าเท่ากับ ผลต่างระหว่างค่าของข้อมูลตัวที่ i กับค่าเฉลี่ยข้อมูลภายในกลุ่มเดียวกัน นั่นคือ $\mathsf{W}_{i(j)} = \mathsf{Y}_i - \bar{\mathsf{Y}}_{.j}$ $(i = 1, 2, \ldots, N\ ; j = 1, 2, 3, \ldots, M)$

$\mathbf{I_N}$ แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) ขนาด $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$

$\mathbf{X_{within}}$ แทน เมทริกซ์ขนาด $\mathrm{N} \times \mathrm{p}$ ที่มีสมาชิกในแถวที่ i มีค่าเท่ากับ ผลต่างระหว่างค่าของ X ในแถวที่ i และค่าของ $\mathbf{X_C}$ ที่สอดคล้องกับกลุ่มที่ i

N แทน ขนาดตัวอย่าง

M แทน จำนวนกลุ่ม

r แทน rank ของ $\mathbf{X_{within}}$

ถ้า สมมติฐานว่าง (H_0) จริง MSE_W จะมีคุณสมบัติไม่เอนเอียง (Unbiased)

จะได้ สถิติทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบของชิลลิงตันเมื่อทั้ง MSE_B และ MSE_W อิสระต่อกัน(Independent) และเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ σ^2 ดังนั้น

$$F_1 = \frac{MSE_B}{MSE_W} \quad \sim F_{M-p,N-M-r}$$

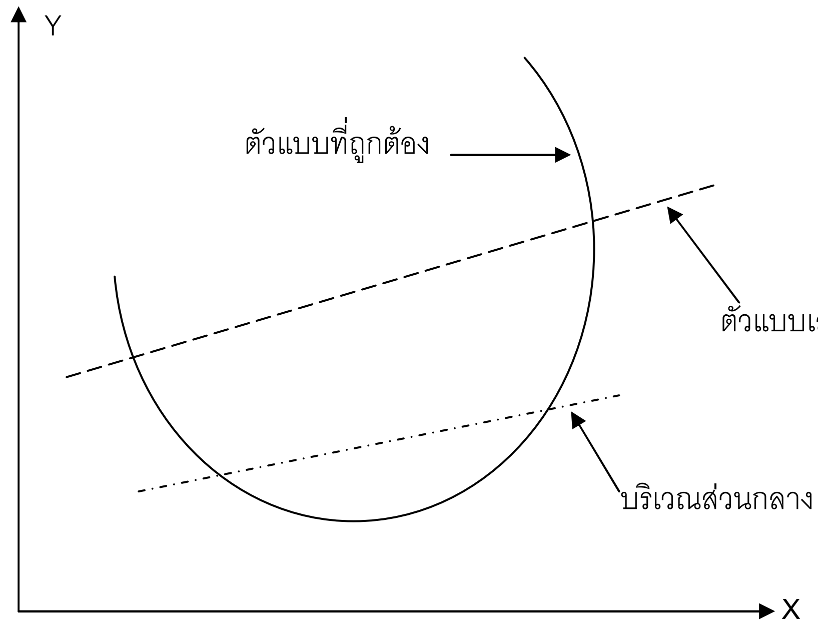
ถ้าข้อมูลมีการทำซ้ำแบบทดสอบนี้จะเหมือนกับแบบทดสอบที่ใช้ทั่วไป(Classical lack of fit test)

อัทส์(Utts,1982) ได้เสนอวิธีเรนโบว์สำหรับทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบซึ่งเป็นวิธีที่สามารถใช้ได้กับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวขึ้นไป กรณีข้อมูลไม่มีการทำซ้ำ วิธีนี้ใช้ได้ทั้งกับการถดถอยเชิงเดียวหรือการถดถอยเชิงพหุ แนวคิดของวิธีเรนโบว์ คือ ทำการเปรียบเทียบตัวแบบที่ได้จากการใช้เฉพาะจุดที่มีอิทธิพลต่ำ(Low leverage points) กับตัวแบบที่ได้จากการใช้ข้อมูลทั้งชุด โดยจุดที่มีอิทธิพลต่ำ คือจุดในบริเวณส่วนกลางของข้อมูล ดังแผนภาพ

ภาพที่ 2.2

เส้นถดถอย กรณีใช้ข้อมูลบริเวณส่วนกลางและกรณีใช้ข้อมูลทั้งหมด

เมื่อตัวแบบที่ถูกต้องคือตัวแบบกำลังสอง



อัตราส่วนของตัวประมาณความแปรปรวนจากสองตัวแบบที่ได้จะเป็นตัวชี้ความไม่เหมาะสมของตัวแบบ โดยตัวประมาณความแปรผันจากการใช้ตัวแบบที่สร้างขึ้นโดยบริเวณส่วนกลางของข้อมูล จะเป็นตัวหารของตัวสถิติทดสอบ ส่วนตัวตั้งของตัวสถิติทดสอบ ได้จากผลต่างของตัวประมาณความคลาดเคลื่อนเมื่อสร้างตัวแบบเส้นตรงจากข้อมูลทั้งหมดกับตัวประมาณความคลาดเคลื่อนเมื่อสร้างตัวแบบเส้นตรงโดยใช้บริเวณส่วนกลางของข้อมูล จะได้สถิติทดสอบคือ

$$F = \frac{SSE_N / n_2}{SSE_D / (n_1 - k)}$$

เมื่อ SSE แทน ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนกรณีที่ใช้ข้อมูลทั้งหมด

SSE_D แทน ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนกรณีที่ได้จากการใช้บริเวณส่วนกลางของข้อมูล

SSE_N แทน ผลต่างของผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนของตัวแบบที่ใช้ข้อมูลทั้งหมดกับตัวแบบที่ใช้เฉพาะบริเวณส่วนกลาง นั่นคือ $SSE_N = SSE - SSE_D$

n แทน จำนวนค่าสังเกตทั้งหมด

n_1 แทน จำนวนค่าสังเกตที่เลือกเป็นบริเวณส่วนกลาง

n_2 แทน ผลต่างของจำนวนค่าสังเกตทั้งหมดกับจำนวนค่าสังเกตที่เลือกเป็นบริเวณส่วนกลาง นั่นคือ $n_2 = n - n_1$

k แทน จำนวนตัวแปรอิสระ

ถ้าค่าสถิติทดสอบ F ที่คำนวณมีค่ามากกว่า $F_{(n_2, n_1 - k)}$ แสดงว่า ตัวแบบที่กำหนดนั้นไม่เหมาะสม

นีลและจอห์นสัน(Neill and Johnson,1985) ได้สร้างตัวสถิติเพื่อใช้ตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบด้วยการหาตัวประมาณค่าความแปรปรวนที่มีคุณสมบัติคงเส้นคงวา(Consistent) เสมอไม่ว่าตัวแบบจะเหมาะสมหรือไม่ ตัวสถิติที่ได้จากวิธีนี้จะเทียบเท่ากับตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบเมื่อข้อมูลมีการทำซ้ำ แต่ในการทดสอบต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยก่อนการทดสอบแล้วจึงแบ่งกลุ่มข้อมูล

ออกซอน(Ochshorn,1986) ได้เสนอวิธีสไปลน์ซึ่งเป็นวิธีการทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบ โดยใช้กับกรณีข้อมูลไม่มีการทำซ้ำ ซึ่งใช้ทั้งวิธีขยายตัวแบบและการแบ่งข้อมูลที่มีค่าใกล้เคียงกันอยู่ในกลุ่มเดียวกัน แล้วคำนวณสมการถดถอยในแต่ละกลุ่ม วิธีที่ออกซอนพัฒนาขึ้นสามารถใช้กับฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องได้และสามารถใช้ได้กับตัวอย่างที่มีขนาดเล็ก

โจลีกา(Joglekar,1989) ได้นำแบบทดสอบ 2 แบบ คือ แบบทดสอบของชิลลิงตัน (F_1) และแบบทดสอบที่คิดค้นโดยโจลีกา (F_2) ที่ได้จากการพัฒนาแบบทดสอบของชิลลิงตันโดยปรับค่า MSE_W ใหม่คือ $MSE_{W_{JG}}$

ข้อมูล N ค่าที่ได้แบ่งกลุ่มเป็น M กลุ่ม ซึ่งกลุ่มที่ j มีข้อมูล n_j จำนวน $(j = 1, 2, ..., M)$ และ $\sum_{j=1}^{M} n_j = N$

$$MSE_{W_{JG}} = \left(\sum_{j=1}^{M} SSE_j \right) \Big/ (N - r)$$

เมื่อ SSE_j แทน ความคลาดเคลื่อนกำลังสองของเรซิดวลในกลุ่มที่ j ซึ่งสร้างตัวแบบภายใต้ สมมติฐานว่าง (H_0) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

r แทน rank ของ $\mathbf{X}_{\mathbf{w_j}}$

$\mathbf{X}_{\mathbf{w_j}}$ แทน เมทริกซ์ขนาด $n_j \times p$ ที่สมาชิกในแถวที่ i มีค่าเท่ากับผลต่างระหว่างแถวที่ i ของ X และแถวของ $\mathbf{X_C}$ ที่สอดคล้องกับกลุ่มที่ j ที่มีค่าตัวแปรอิสระ X ตัวที่ i อยู่

ในขณะที่ MSE_B คำนวณค่าเช่นเดียวกับวิธีของชิลลิงตัน จะได้ว่าแบบทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุงโดยโจลีกา คือ

$$F_2 = \frac{MSE_B}{MSE_{W_{JG}}} \sim F_{M-p, N-r}$$

ถ้า สมมติฐานว่าง (H_0) จริง ทั้ง MSE_B และ $MSE_{W_{JG}}$ อิสระต่อกัน (Independent) และเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ σ^2

โจลีกาได้พิจารณาข้อมูล 2 ชุด ทำการแบ่งกลุ่มข้อมูลหลายๆ แบบ พบว่าแบบทดสอบที่ปรับปรุง (F_2) ดีกว่าแบบทดสอบของชิลลิงตัน (F_1) นอกจากนี้ยังนำข้อมูล 1 ชุดมาแบ่งกลุ่มโดยพิจารณาความชันของกราฟเปรียบเทียบกับการแบ่งกลุ่มอย่างไม่มีหลักเกณฑ์ใช้สถิติทดสอบ 4 แบบ พบว่าการแบ่งกลุ่มโดยพิจารณาความชันของกราฟให้ผลดีกว่า และได้เสนอแนะให้แบ่งกลุ่มของข้อมูลด้วยวิธีของไบร์เมนและมิเชล

คริสเตนเซน (Christensen,1989,1991) ในปีค.ศ.1989 คริสเตนเซนได้เสนอแบบทดสอบที่ใช้ในการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ปรับปรุงมาจากแบบทดสอบของนีลล์และจอห์นสัน (1985) โดยได้มีการกำหนดเมทริกซ์เพื่อใช้ในการแบ่งกลุ่มข้อมูล แทนด้วยเมทริกซ์ **Z** สถิติทดสอบ F ที่ได้มีความเที่ยงตรงมากขึ้น แบบทดสอบของคริสเตนเซนมีคุณสมบัติคงเส้นคงวา (Consistent) และเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย(Uniformly most powerful invariant) แบบทดสอบของคริสเตนเซนสามารถตรวจสอบความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดภายในกลุ่ม (Within – Cluster lack of fit) และความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดระหว่างกลุ่ม (Between – Cluster lack of fit)

ความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดระหว่างกลุ่มจะคล้ายกับความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่ตรวจสอบได้กรณีข้อมูลซ้ำและใช้ความคลาดเคลื่อนแท้ทดสอบ ในกรณีนี้จะสมมติว่าค่าสังเกตที่อยู่กลุ่มเดียวกันมีค่าเฉลี่ยเท่ากัน และใช้ตัวแบบที่กำหนดอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม ถ้าตัวแบบที่กำหนดไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวแปรอิสระและตัวแปรตามของกลุ่มได้เพียงพอ อาจกล่าวว่ามีความไม่เหมาะสมของตัวแบบเกิดขึ้นระหว่างกลุ่ม ในกรณีข้อมูลซ้ำเป็นการสมมติว่าค่าสังเกตของ Y ที่วัด X ค่าเดียวกันมีค่าเฉลี่ยเท่ากัน ซึ่งก็คือการที่สมมติว่าความไม่เหมาะสมของตัวแบบไม่เกิดภายในกลุ่มนั่นเอง การทดสอบความไม่เหมาะสมของตัวแบบกรณีข้อมูลใกล้ซ้ำก็เช่นเดียวกัน ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบส่วนใหญ่ถือว่าค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตที่อยู่ภายในกลุ่มเดียวกันมีค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้นตัวสถิติ F ที่ใช้ทดสอบจะมีค่ามากเมื่อความไม่เหมาะสมของตัวแบบเกิดขึ้นระหว่างกลุ่ม และตัวสถิติ Fจะมีค่าน้อยเมื่อความไม่เหมาะสมของตัวแบบเกิดภายในกลุ่ม ถ้าความไม่เหมาะสมของตัวแบบเกิดขึ้นทั้งระหว่างกลุ่มและภายในกลุ่ม ค่าของสถิติ F จะขึ้นอยู่กับว่าความไม่เหมาะสมของตัวแบบเกิดขึ้นในที่ใดมากกว่ากัน ถ้าความไม่เหมาะสมของตัวแบบเกิดขึ้นระหว่างกลุ่มและภายในกลุ่มเท่าๆ กันผลจะหักล้างกันไป ทำให้ไม่สามารถใช้ค่าของตัวสถิติ F ตรวจสอบความไม่เหมาะสมของตัวแบบได้ คริสเตนเซน(1989) จึงได้ปรับปรุงตัวสถิติทดสอบของนีลล์และจอห์นสัน (1985) โดยแบ่งปริภูมิของความไม่เหมาะสมของตัวแบบ (Lack of fit space) ออกเป็นปริภูมิย่อยที่แทนความไม่เหมาะสมของตัวแบบระหว่างกลุ่มและความไม่เหมาะสมของตัวแบบภายในกลุ่มที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และตัวสถิติทดสอบที่ปรับปรุงใหม่นี้สามารถตรวจสอบความไม่เหมาะสมของตัวแบบได้ทั้งส่วนที่เกิดระหว่างกลุ่มและส่วนที่เกิดภายในกลุ่ม

อย่างไรก็ตาม คุณสมบัติของตัวสถิติทดสอบของคริสเตนเซน(1989) ขึ้นอยู่กับการเลือกแบ่งข้อมูลเป็นอย่างมาก ต่อมาในปี ค.ศ1991 คริสเตนเซนได้นำแบบทดสอบที่เสนอนี้เปรียบเทียบกับแบบทดสอบอื่น 5 ชนิด โดยใช้ค่ากำลังการทดสอบ (Power of the test) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ พบว่าไม่สามารถระบุได้ว่าแบบทดสอบใดดีที่สุด ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับการเลือกวิธีการแบ่งกลุ่มของข้อมูล

ซูและยาง (Su and Yang, 2006) ได้เสนอแบบทดสอบที่สามารถพบความไม่เหมาะสมของตัวแบบ เมื่อข้อมูลที่ศึกษาเกิดความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดระหว่างกลุ่มและภายในกลุ่ม พร้อมทั้งเปรียบเทียบกับตัวสถิติ 6 ชนิด โดยสมการที่เกิดขึ้นจริงมีตัวแบบคือ $Y = X_1\boldsymbol{\beta}_1 + \sin\left(4X_1\right)\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}$ เมื่อกำหนดให้ความคลาดเคลื่อนสุ่มมีการแจกแจงแบบปกติ ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ 1 มีสัมประสิทธิ์การถดถอย β_1 เท่ากับ 1 β_2 เท่ากับ 0, 0.8, 1.6, 2.4, 3.2 ส่วนค่าของตัวแปรอิสระ X มีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 8.8 ตัวแบบเพื่อคำนวณค่าสถิติทดสอบของซูและยาง $\left(F_{SY}\right)$ มีดังนี้

ตัวแบบที่ 1 $\qquad \mathbf{E(Y) = X\boldsymbol{\beta}} \qquad (1)$

เมื่อ $\mathbf{Y}$ แทน เมทริกซ์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

$\mathbf{X}$ แทน เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $n \times k$

$\boldsymbol{\beta}$ แทน เมทริกซ์ของค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยขนาด $(k \times 1)$

n แทน ขนาดตัวอย่าง

k แทน จำนวนตัวแปรอิสระ

ค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากตัวแบบ(1) แทนด้วย SSE_x

$$SSE_x = \mathbf{Y}'\left\{\mathbf{I_n} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\right\}\mathbf{Y}$$

ให้ $\mathbf{Y}$ แทน เมทริกซ์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

$\mathbf{X}$ แทน เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $n \times k$

$\mathbf{I_n}$ แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) ขนาด $n \times n$

โดยตัวอย่างของเมทริกซ์ $\mathbf{Y}$ และ $\mathbf{X}$ เมื่อn = 9, c = 3 กลุ่มที่ 1 มีจำนวนค่าสังเกตเท่ากับ 4 กลุ่มที่ 2 มีจำนวนค่าสังเกตเท่ากับ 3 กลุ่มที่ 3 มีจำนวนค่าสังเกตเท่ากับ 2

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_\mathbf{n} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} \\ \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{13} \\ \mathbf{X}_{14} \\ \mathbf{X}_{21} \\ \mathbf{X}_{22} \\ \mathbf{X}_{23} \\ \mathbf{X}_{31} \\ \mathbf{X}_{32} \end{bmatrix}$$

สมาชิกในเมทริกซ์ $\mathbf{Y}$ คือ $\mathbf{Y}_\mathbf{m}$, $\mathbf{m} = 1, 2, 3, \ldots, \mathbf{n}$

สมาชิกในเมทริกซ์ $\mathbf{X}$ คือ $\mathbf{X}_{\mathbf{ij}}$, $\mathtt{i} = 1, 2, \ldots, c$, $\mathtt{j} = 1, 2, \ldots, n_i$

ตัวแบบที่ 2 $$\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}\boldsymbol{\alpha} \qquad (2)$$

เมื่อ $\mathbf{Y}$ แทน เมทริกซ์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

$\mathbf{X}$ แทน เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $n \times k$

$\boldsymbol{\beta}$ แทน เมทริกซ์ของค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยขนาด $k \times 1$

$\mathbf{W}$ แทน เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นเทอมกำลังหนึ่งและเทอมกำลังสองของตัวแปรอิสระ X

$\boldsymbol{\alpha}$ แทน เมทริกซ์ของค่าพารามิเตอร์ของเทอมกำลังหนึ่งและเทอมกำลังสอง ที่เพิ่มมาเพื่อใช้ในการคำนวณสถิติตามวิธีของซูและยางขนาด $q \times 1$

n แทน ขนาดตัวอย่าง

k แทน จำนวนตัวแปรอิสระ

ค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากตัวแบบ (2) แทนด้วย $\mathrm{SSE}_{\mathrm{XW}}$

$$\mathrm{SSE}_{\mathrm{XW}} = \mathbf{Y}'\left\{\mathbf{I}_\mathbf{n} - \mathbf{X}_\mathbf{W}\left(\mathbf{X}'_\mathbf{W}\mathbf{X}_\mathbf{W}\right)^{-1}\mathbf{X}'_\mathbf{W}\right\}\mathbf{Y}$$

ให้ $\mathbf{Y}$ แทน เมทริกซ์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

$\mathbf{X}_\mathbf{W}$ แทน เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นเทอมกำลังหนึ่งและเทอมกำลังสองของตัวแปรอิสระ X ขนาด $n \times (k + q)$

$\mathbf{I_n}$ แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) ขนาด $n \times n$

จากตัวอย่างเมทริกซ์ $\mathbf{X}$ ที่กล่าวในตัวแบบที่ 1 $\mathbf{X_w}$ ในวิจัยนี้จะเพิ่มเทอมกำลังสองในการคำนวณ SSE_{XW} สำหรับสมการถดถอยเชิงเส้นเชิงเดียว สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{X_w} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11} & 1 & \mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{x}_{12} & 1 & \mathbf{x}_{12} & \mathbf{x}_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{x}_{13} & 1 & \mathbf{x}_{13} & \mathbf{x}_{13}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{x}_{14} & 1 & \mathbf{x}_{14} & \mathbf{x}_{14}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{21} & 1 & \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{21}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{21} & 1 & \mathbf{x}_{22} & \mathbf{x}_{22}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{21} & 1 & \mathbf{x}_{23} & \mathbf{x}_{23}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{21} & 1 & \mathbf{x}_{31} & \mathbf{x}_{31}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x}_{21} & 1 & \mathbf{x}_{32} & \mathbf{x}_{32}^2 \end{bmatrix}$$

แบบทดสอบที่ใช้ตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบโดยรวม(The overall lack of fit test) คือ

$$F_{SY} = \frac{SSE_x - SSE_{xw} \big/ (r_x - r_{xw})}{SSE_{xw} \big/ (n - r_{xw})}$$

เมื่อ n คือ ขนาดตัวอย่าง

r_X คือ rank ของเมทริกซ์ $\mathbf{X}$

r_{XW} คือ rank ของเมทริกซ์ $\mathbf{X_w}$

จะปฏิเสธสมติฐานว่าง$\left(H_0\right)$ เมื่อ F_{SY} ที่คำนวณมีค่ามากกว่า $F_{r_X - r_{XW}, n - r_{XW}}$

เทอมเศษ คือ ค่ากำลังสองเฉลี่ยเนื่องจากการสร้างสมการถดถอยที่มีรูปแบบไม่เหมาะสม เขียนแทนด้วย $MSLF_{SY}$

เทอมส่วน คือ ค่ากำลังสองเฉลี่ยเนื่องจากความคลาดเคลื่อนที่แท้จริง (Pure error) ซึ่งเป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจริงในการทดลอง เขียนแทนด้วย $MSPE_{SY}$

มิลเลอร์และนีลล์ (Miller and Neill :2008) ได้เสนอการทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นในกรณีข้อมูลมีการทำซ้ำ และไม่มีการทำซ้ำ มิลเลอร์และนีลล์ใช้กระบวนการ Multiple testing ทำให้ได้ค่าสถิติทดสอบหลายค่า โดยสถิติทดสอบที่ได้หลายค่าเกิดจากการแบ่งค่าสังเกตในแต่ละกลุ่มเป็น 2, 3,4 และ5 เป็นต้น เมทริกซ์ที่ใช้ในการแบ่งกลุ่มคือ เมทริกซ์ $\mathbf{Z}$ โดยในแต่ละกลุ่มจะมีการแบ่งออกจากกันอย่างชัดเจน ซึ่งภายในเมทริกซ์ $\mathbf{Z}$ จะเป็นตัวแปรบอกตำแหน่งมีรูปแบบเหมือนเมทริกซ์ $\mathbf{Z}$ ที่เสนอโดยคริสเตนเซน (1989,1991) หากในการทดสอบมีการปฏิเสธสมมติฐานว่างอย่างน้อย 1 ครั้ง ในการแบ่งค่าสังเกตในแต่ละกลุ่มเป็น 2, 3, 4 และ5 แสดงว่า ตัวแบบถดถอยเชิงเส้นไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้พยากรณ์ตัวแปร

แบบทดสอบของมิลเลอร์และนีลล์จะแบ่งปริภูมิของความไม่เหมาะสมของตัวแบบออกเป็นปริภูมิย่อย 3 ปริภูมิย่อย ดังนี้ ปริภูมิย่อยของความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดระหว่างกลุ่ม ปริภูมิย่อยของความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดภายในกลุ่ม ปริภูมิย่อยของความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดระหว่างกลุ่มและภายในกลุ่ม สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\mathbf{C}(\mathbf{X})^{\perp} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{W} \oplus \mathbf{S}$$

$\mathbf{B}$ คือ ปริภูมิย่อยของความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดระหว่างกลุ่ม

$\mathbf{W}$ คือ ปริภูมิย่อยของความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดภายในกลุ่ม

$\mathbf{S}$ คือ ปริภูมิย่อยของความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดระหว่างกลุ่มและภายในกลุ่ม

เมื่อ $\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{X})^{\perp} \cap \mathbf{C}(\mathbf{Z})$, $\mathbf{W} = \mathbf{C}(\mathbf{X})^{\perp} \cap \mathbf{C}(\mathbf{Z})^{\perp}$, $\mathbf{S} = \left(\mathbf{B} \oplus \mathbf{W}\right)^{\perp}_{\mathbf{C}(\mathbf{X})^{\perp}}$

ตัวแบบสำหรับสมมติฐานว่างที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$\mathrm{H}_0 : \mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

ตัวแบบเต็มรูป (Full model) สองตัวแบบสำหรับสมมติฐานแย้งคือ

$$\mathrm{H}_a^{\mathrm{B}} : \mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{Q}_{\mathbf{B}}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\mathrm{H}_a^{\mathrm{W_E}} : \mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{Q}_{\mathbf{W_E}}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

เมื่อ $\mathbf{W_E} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{S}$ คือ ส่วนขยายของปริภูมิย่อยของความไม่เหมาะสมของตัวแบบที่เกิดภายในกลุ่ม

$\mathbf{Q_B}$ คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกของ $\mathbf{Q_B} = \mathbf{B}$ เมื่อ $\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{X})^{\perp} \cap \mathbf{C}(\mathbf{Z})$

$\mathbf{Q}_{\mathbf{W_E}}$ คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกของ $\mathbf{Q}_{\mathbf{W_E}} = \mathbf{W_E}$ เมื่อ $\mathbf{W_E} = \mathbf{C}(\mathbf{X})^{\perp} \cap \mathbf{C}(\mathbf{Z})^{\perp}$

สถิติทดสอบ คือ

$$F_B = \frac{\| P_B\ y \|^2 \big/ \dim B}{\| P_{W_E} y \|^2 \big/ \dim W_E}$$

เมื่อ $\| P_B\ y \|^2$ คือ ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นระหว่างกลุ่ม

$\| P_{W_E} y \|^2$ คือ ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นภายในกลุ่ม

$\dim B$ คือ rank ของเมทริกซ์ $\| P_B\ y \|^2$

$\dim W_E$ คือ rank ของเมทริกซ์ $\| P_{W_E} y \|^2$

จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง (H_0) เมื่อ $F_B > F_{\dim B\ ,\dim W_E(1-\alpha)}$ หรือส่วนกลับของสถิติทดสอบ $F_{W_E} = \frac{1}{F_B} > F_{\dim W_E,\dim B\ (1-\alpha)}$

กระบวนการ Multiple testing ทำให้ได้ค่าสถิติทดสอบหลายค่า โดยสถิติทดสอบที่ได้หลายค่าเกิดจากการแบ่งค่าสังเกตในแต่ละกลุ่มเป็น 2, 3, 4 และ5 ค่า เป็นต้น กำหนดให้ $\mathbf{G}$ คือ ขนาดของค่าสังเกตในแต่ละกลุ่ม ในการวิจัยนี้จะกำหนดให้เท่ากับ 2, 3, 4 และ5 ให้ปริภูมิย่อยของความไม่เหมาะสมของตัวแบบ 2 ปริภูมิย่อยแทนด้วย $S^* = \{\mathbf{B}, \mathbf{W} : \mathbf{Z} \in \mathbf{G}\}$ ให้ $S^* = \{\mathbf{S_m} : \mathbf{m} \in \mathbf{M}\}$ เมื่อ $\mathbf{S_m}$ คือ $\mathbf{B}$ หรือ $\mathbf{W}$ สำหรับ $\mathbf{Z} \in \mathbf{G}$ ให้ $V_m = \mathbf{C(X)} \oplus \mathbf{S_m}$

$$T_a = \sup_{m \in M} \left(\frac{\| P_{S_m} Y \|^2 \big/ D_m}{\| I - P_{V_m} Y \|^2 \big/ N_m} - \bar{F}^{-1}_{D_m,N_m}(a_m) \right)$$

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $T_a > 0$ เมื่อ D_m = rank ของ S_m , N_m = rank ของ V_m และ $\{\mathbf{a_m} : \mathbf{m} \in \mathbf{M}\}$ ในแต่ละขนาดของค่าสังเกตในแต่ละกลุ่ม ดังนั้น $Pr_{H_0}(T_a > 0) \leq \mathbf{a}$ นอกจากนี้ ถ้า $e \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ กระบวนการ multiple testingจะเพียงพอที่จะปฏิเสธ H_0 ถ้า สถิติทดสอบ F สำหรับทดสอบ H_0 กับ $H_{a,m} : E(Y) \in V_m$ โดยระดับนัยสำคัญเท่ากับ $\mathbf{a_m}$ ในแต่ละ $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ จะได้ว่าถ้า $\mathbf{a_n}$ มาจากควอไทล์ $\mathbf{a}$ ของตัวอย่างสุ่ม

$$T_a = \inf_{m \in M} \bar{F}^{-1}_{D_m,N_m}(R_m)$$

เมื่อ $$R_m = \left(\frac{\| P_{S_m} e \|^2 \big/ D_m}{\| e - P_{V_m} e \|^2 \big/ N_m} \right.$$

ดังนั้น $\mathbf{a_m} = \mathbf{a_n}$ สำหรับ $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ ทำให้มั่นใจได้ว่า $Pr_{H_0}(T_a > 0) \leq \mathbf{a}$