

ภาคผนวก ข

ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแกมมากับการแจกแจงไคกำลังสอง

$$\text{ถ้าตัวแปรสุ่ม } X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \text{ แล้วตัวแปรสุ่ม } Y = \frac{2X}{\beta} \sim \chi_{2\alpha}^2$$

พิสูจน์ โดยใช้เทคนิคการแปลงตัวแปร พิจารณาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ Y

$$\text{โดย } g(y) = f_x(h^{-1}(y)) |J|$$

$$\text{เนื่องจาก } X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

$$\text{จะได้ } f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \quad x > 0, \alpha, \beta > 0$$

$$\text{จาก } y = \frac{2x}{\beta}$$

$$\text{ดังนั้น } h^{-1}(y) = x = \frac{\beta y}{2} \quad J = \frac{d}{dy} h^{-1}(y) = \frac{\beta}{2}$$

$$g(y) = f_x(h^{-1}(y)) |J|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left(\frac{\beta y}{2}\right)^{\alpha-1} e^{-y/2} \frac{\beta}{2}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left(\frac{\beta}{2}\right)^\alpha y^{\alpha-1} e^{-y/2}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)2^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-y/2} \quad y > 0, \alpha, \beta > 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น ตัวแปรสุ่ม } Y = \frac{2X}{\beta} \sim \chi_{2\alpha}^2$$

ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงเอฟกับการแจกแจงบีต้า

$$\text{ถ้าตัวแปรสุ่ม } X \sim F(m, n) \text{ แล้วตัวแปรสุ่ม } Y = \frac{n}{n+mX} \sim \text{Beta}\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$$

พิสูจน์

โดยใช้เทคนิคการแปลงตัวแปร พิจารณาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ Y

$$\text{โดย } g(y) = f_x(h^{-1}(y)) |J|$$

$$\text{เนื่องจาก } X \sim F(m, n)$$

$$\text{จะได้ } f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}}, x > 0$$

$$\text{จาก } y = \frac{n}{n+mX}$$

$$\text{ดังนั้น } h^{-1}(y) = x = \frac{n-ny}{my} \quad J = \frac{d}{dy} h^{-1}(y) = -\frac{n}{my^2}$$

$$g(y) = f_x(h^{-1}(y)) |J|$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{n-ny}{my}\right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\left[\frac{n-ny}{my}\right]\right)^{\frac{m+n}{2}}} \frac{n}{my^2}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{n(1-y)}{my}\right)^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{m+n}{2}} \frac{n}{my^2}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} m^{\frac{m}{2}-\frac{m}{2}+1-1} n^{-\frac{m}{2}+\frac{m}{2}-1+1} y^{-\left(\frac{m}{2}-1\right)+\frac{m+n}{2}-2} (1-y)^{\frac{m}{2}-1}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} (1-y)^{\frac{m}{2}-1} \quad 0 < y < 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น ตัวแปรสุ่ม } Y = \frac{n}{n+mX} \sim \text{Beta}\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$$