

บทที่ 2

ทฤษฎีที่ใช้ในการออกแบบการตรวจสอบข้อบกพร่อง บนภาพถ่ายของพื้นผิวที่มีลวดลายด้วยแบบจำลองทางสถิติ

งานวิจัยนี้เป็นการประยุกต์ความรู้ทางด้านระบบคอมพิวเตอร์วิชั้นกับงานตรวจสอบหาข้อบกพร่องบนพื้นผิวที่มีลวดลาย เพื่อแยกแยะให้ได้ว่าสิ่งใดคือข้อบกพร่องหรือลวดลายของพื้นผิว โดยการเปรียบเทียบภาพอ้างอิงกับภาพทดสอบ การเปรียบเทียบภาพสองภาพนั้น มีวิธีที่ง่ายที่สุดก็คือเปรียบเทียบพิกเซลต่อพิกเซลว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่ แต่ในความเป็นจริงแล้ววิธีการดังกล่าวเป็นวิธีการที่แทบจะไม่มี ความถูกต้องเลย ถ้าภาพของวัตถุสองภาพที่เหมือนกัน (ภาพที่หนึ่งลบภาพที่สองเท่ากับศูนย์) ถูกถ่ายที่ตำแหน่งต่างกัน ภาพสองภาพที่เหมือนกันก็อาจจะต่างกันโดยสิ้นเชิงก็เป็นได้ วิทยานิพนธ์นี้จึงประยุกต์ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์และสถิติเพื่อสร้างวิธีการที่สามารถจะแก้ปัญหาดังกล่าวให้ได้ ในงานวิจัยนี้ได้ใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับแบบจำลองทางสถิติแบบตัวแปรเดียวและแบบหลายตัวแปร วิธีการเปรียบเทียบแบบจำลองทางสถิติสองแบบด้วย Kullback-Leibler distance รายละเอียดของวิธีการและทฤษฎีที่กล่าวมาทั้งหมดถูกแสดงดังต่อไปนี้

2.1 แบบจำลองทางสถิติแบบตัวแปรเดียวและหลายตัวแปร (Univariate and Multivariate Statistical Models)

วิทยานิพนธ์นี้ใช้แบบจำลองทางสถิติในการจำลองพิกเซลที่เป็นลวดลายของพื้นผิว เพื่อนำไปเปรียบเทียบกันว่าพิกเซลดังกล่าวเป็นข้อบกพร่องหรือไม่ โดยวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการเปรียบเทียบแบบจำลองทางสถิติสามแบบจำลอง โดยแบ่งเป็นการแจกแจงแบบตัวแปรเดียวและแบบหลายตัวแปร สำหรับการแจกแจงแบบตัวแปรเดียว ได้แก่ การแจกแจงแบบเกาส์เซียน (Gaussian distribution) การแจกแจงแบบเกาส์เซียนแบบทั่วไป (generalized Gaussian distribution) และการแจกแจงแบบแอลฟา-สเตเบิลที่สมมาตร (symmetric α -stable distribution) สำหรับการแจกแจงแบบหลายตัวแปร ได้แก่ การแจกแจงแบบเกาส์เซียนหลายตัวแปร (multivariate Gaussian distribution) การแจกแจงแบบเกาส์เซียนทั่วไปหลายตัวแปร (multivariate generalized Gaussian distribution) และการแจกแจงแบบแอลฟา-สเตเบิลที่สมมาตรหลายตัวแปร (multivariate symmetric α -stable distribution)

2.1.1 การแจกแจงแบบเกาส์เซียน (Gaussian distribution)

การแจกแจงแบบเกาส์เซียน (GD) เป็นการแจกแจงที่มีลักษณะระฆังคว่ำ เป็นที่นิยมในการนำไปประยุกต์ใช้สำหรับจำลองสัญญาณและสัญญาณรบกวนในงานหลายประเภท [13]-[15] ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $f(x; \mu, \sigma)$ จะเป็นดังนี้

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (2.1)$$

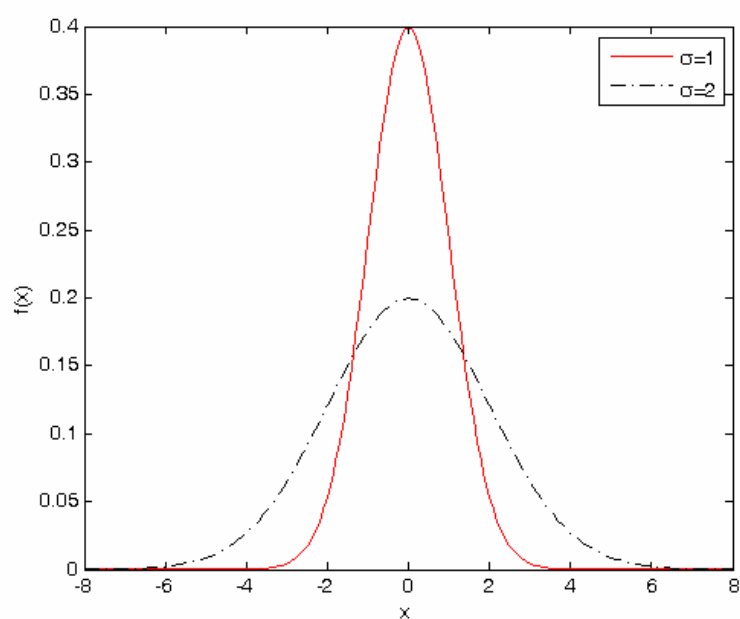
โดยที่ x คือตัวแปรสุ่ม μ คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูล (mean) และ σ เรียกว่าค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) เป็นค่าการกระจายของข้อมูลและ σ^2 คือ ค่าความแปรปรวนของข้อมูล (variance) โดยกราฟแสดงการแจกแจงแบบเกาส์เซียน และสัญญาณแบบเกาส์เซียนทางเวลาที่มีค่า μ เท่ากับศูนย์และ σ เท่ากับหนึ่งและสองดังรูปที่ 2.1

งานวิจัยนี้ประมาณค่าเฉลี่ย μ และค่าความแปรปรวน σ^2 ด้วยวิธีการ maximum likelihood [15] ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนถูกประมาณจากกลุ่มตัวอย่าง (sample) จำนวน K ตัวอย่าง

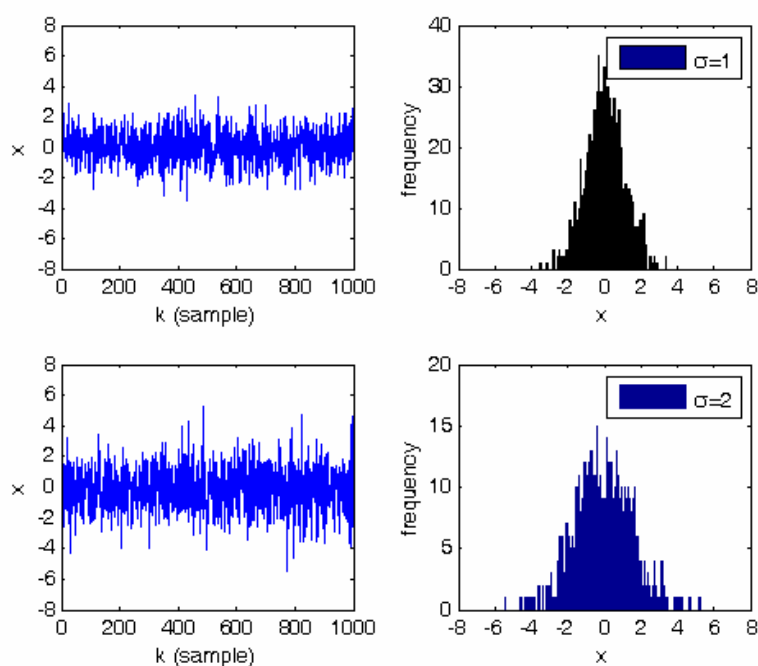
$$\hat{\mu} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k \quad (2.2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (x_k - \hat{\mu})^2 \quad (2.3)$$

ซึ่งพารามิเตอร์ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}^2$ จะนำไปใช้ในการถอดลักษณะเด่น (feature extraction) และเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างภาพสองภาพ (similarity measurement) ในบทที่ 3 เรื่องวิธีการออกแบบระบบการตรวจสอบภาพถ่ายที่มีลวดลายด้วยแบบจำลองทางสถิติ



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.1 ลักษณะของสัญญาณแบบเกาส์เซียน (ก) การแจกแจงแบบเกาส์เซียน ที่มี σ เท่ากับ 1 และ 2 ที่มี $\mu = 0$ (ข) ตัวอย่างฮิสโตแกรมของสัญญาณแบบเกาส์เซียนในลักษณะตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ที่มี $\mu = 0$ และ σ เท่ากับ 1 และ 2 และกราฟแสดงลักษณะสัญญาณทางเวลา

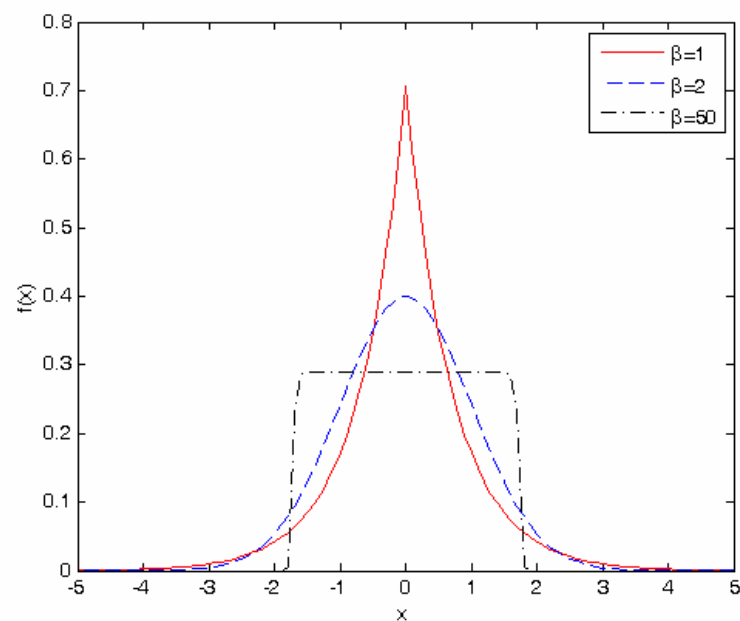
2.1.2 การแจกแจงแบบเกาส์เซียนแบบทั่วไป (Generalized Gaussian distribution)

ถึงแม้ว่าการแจกแจงเกาส์เซียนจะเป็นที่นิยมทางด้านวิศวกรรมและ วิทยาศาสตร์ อื่น ๆ แต่อย่างไรก็ตามมีงานทางด้านวิศวกรรมบางประเภทที่การแจกแจงแบบเกาส์เซียนไม่สามารถจำลองได้ดีเพราะไม่สามารถจำลองข้อมูลได้เหมาะสม ตัวอย่างเช่น ตัวอย่างการแจกแจงแบบเกาส์เซียนทั่วไปที่จะนิยมใช้สำหรับสัญญาณรบกวนในสัญญาณภาพ [16] และสัญญาณเสียงที่นิยมจำลองด้วยการแจกแจงแบบลาปลาซ [17] และ สัญญาณข้อมูลที่มีลักษณะเปลี่ยนแปลงฉับพลัน (impulsive data) เป็นต้น ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $f(x; \mu, \lambda, \beta)$ [16]-[21] จะเป็นดังนี้

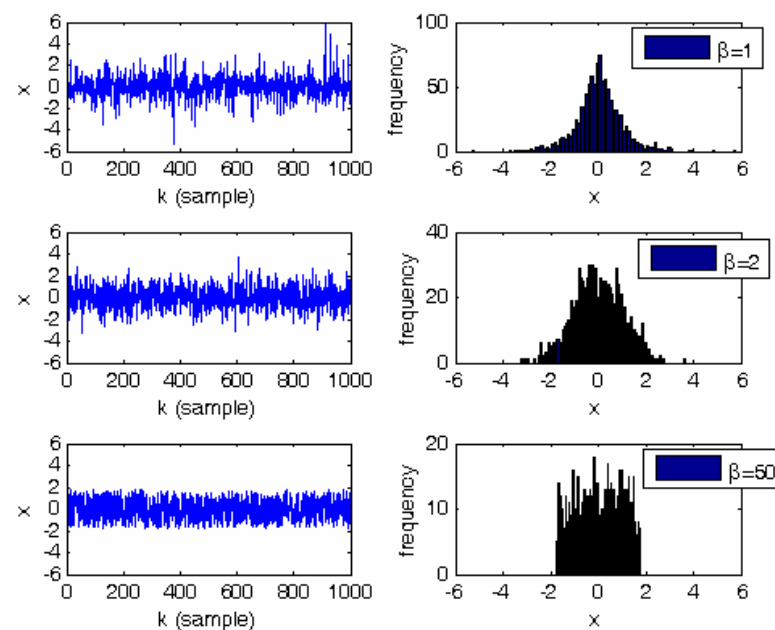
$$f(x; \mu, \sigma, \beta, \lambda) = c \exp \left(-\frac{1}{\lambda} \left(\frac{|x - \mu|}{\sigma} \right)^\beta \right) \quad (2.4)$$

โดยที่ x คือตัวแปรสุ่ม μ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม β คือรูปร่างการแจกแจงความน่าจะเป็น $\lambda = \left(\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(3/\beta)} \right)^{\beta/2}$ และ $c = \frac{\beta}{2\lambda^{1/\beta}\sigma\Gamma(1/\beta)}$ คือส่วนที่ทำให้ผลรวมของการแจกแจงความน่าจะเป็น

หนึ่ง (normalized constant) $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ เป็นฟังก์ชันแกมมา เมื่อการแจกแจงแบบ GGD มีค่า $\beta=1$ จะเป็นการแจกแจงแบบลาปลาซ $\beta=2$ จะเป็นการแจกแจงแบบเกาส์เซียน และเมื่อ $\beta \rightarrow +\infty$ จะเข้าสู่การแจกแจงแบบ uniform $(\mu - \sqrt{3}\sigma, \mu + \sqrt{3}\sigma)$ เช่น ถ้ามี $\mu=0$ และมี $\sigma=1$ จะได้ uniform ที่มีขอบเขต $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ดังรูปที่ 2.2 (ก) และสำหรับ $\beta \rightarrow 0^+$ การแจกแจงจะเป็น impulse ที่ $x = \mu$



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.2 ลักษณะของสัญญาณแบบเกาส์เซียนทั่วไป (ก) การแจกแจงแบบเกาส์เซียนทั่วไป ที่มีค่า $\mu=0$ และ $\sigma=1$ โดยมี β เท่ากับ 1, 2 และ 50 (ข) กราฟแสดงการเปรียบเทียบลักษณะสัญญาณทางเวลา ที่มีค่า β เท่ากับ 1, 2 และ 50 และตัวอย่างฮิสโตแกรมของสัญญาณแบบเกาส์เซียนทั่วไปที่มีค่า $\mu=0$ และ $\sigma=1$ โดยมีค่า β เท่ากับ 1, 2 และ 50

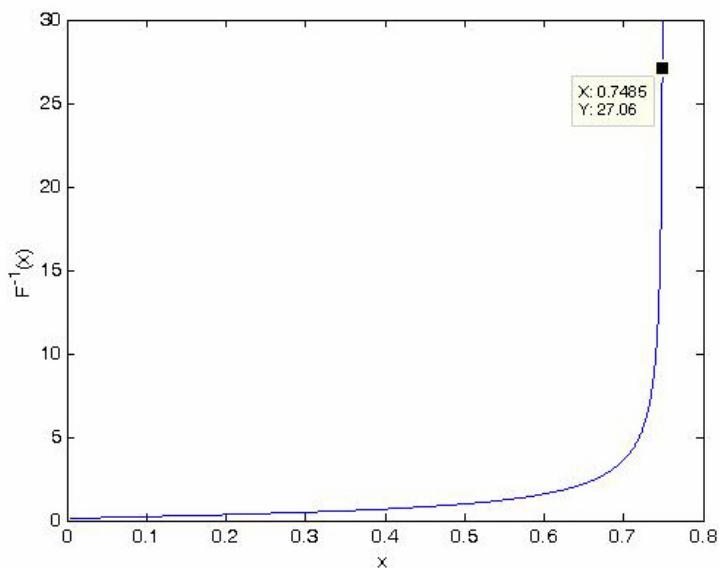
วิธีที่ใช้ในการประมาณค่า β นั้นเราจะใช้วิธีการ method of moment estimator (MME) [10], [19]-[20] โดยค่า $\hat{\mu}$ ประมาณจากกลุ่มตัวอย่าง (sample) ในลักษณะเดียวกับการประมาณจากการแจกแจงแบบเกาส์เซียนดังสมการที่ (2.2)

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |x_k - \hat{\mu}| \quad (2.5)$$

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |x_k - \hat{\mu}|^2 \quad (2.6)$$

$$\hat{\beta} = F^{-1} \left(\frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2} \right) \quad (2.7)$$

โดยฟังก์ชัน $F(x) = \frac{\Gamma^2(2/x)}{\Gamma(3/x)\Gamma(1/x)}$ เรียกว่าฟังก์ชันอัตราส่วนของการแจกแจงแบบเกาส์เซียนทั่วไป (sampled generalized Gaussian function ratio) และ $F^{-1}(x)$ เป็นอินเวอร์สของ $F(x)$ โดยมี $F^{-1}(x)$ ดังรูปที่ 2.3

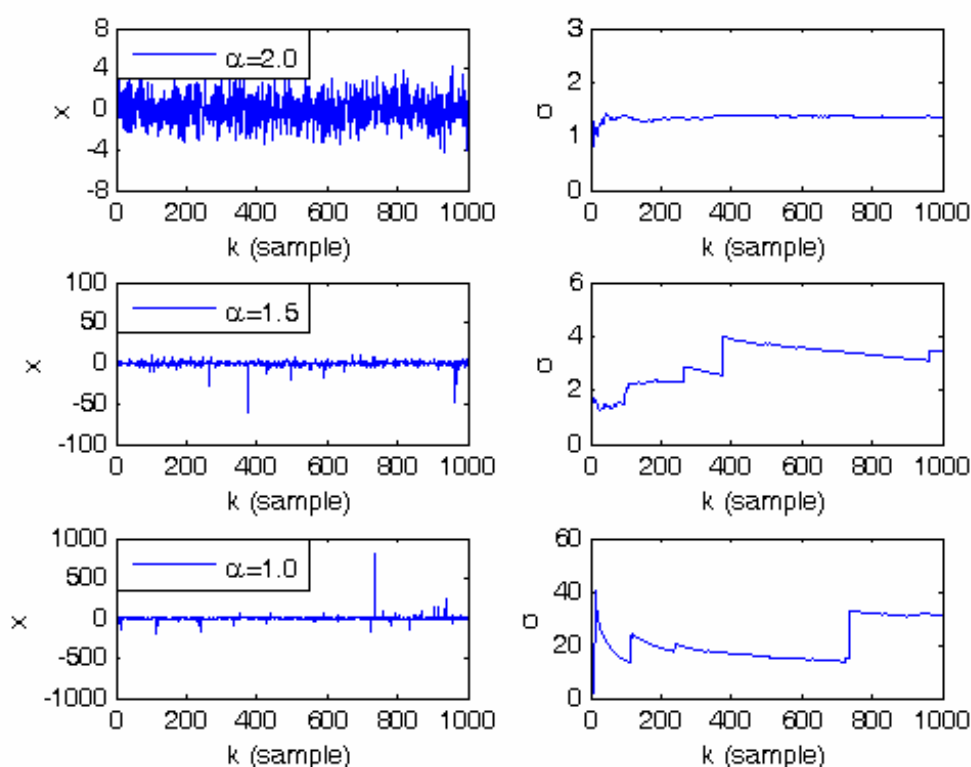


รูปที่ 2.3 กราฟแสดงลักษณะของ $F^{-1}(x)$

เมื่อ $F^{-1}(x)$ เท่ากับ β และ x เท่ากับ $\frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2}$ โดยค่า $\frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2}$ จะมีค่าอยู่ในช่วง $(0, 0.75)$ สำหรับ $\beta > 10$ กราฟจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงซึ่งการประมาณค่าจะมีความผิดพลาดสูง ดูที่มาจากผลการทดลองในภาคผนวก ก.

2.1.3 การแจกแจงแบบแอลฟาสเตเบิลที่สมมาตร (Symmetric α -stable distribution)

ในปัจจุบันนี้การแจกแจงแบบแอลฟาสเตเบิล (α -Stable) เป็นแบบจำลองทางสถิติที่นิยมในการนำไปใช้งานอย่างมาก เหมาะสำหรับการจำลองข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงฉับพลัน (impulsive data) ในงานวิจัยเรื่องการติดต่อสื่อสาร ภาพ เสียง และการประมวลสัญญาณ [22]-[26] เนื่องจากถ้าจำลองข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงฉับพลันด้วยแบบจำลองเกาส์เซียน จะทำให้ไม่สามารถหาค่าเฉลี่ยที่มีความแน่นอนของสัญญาณได้เพราะถูกข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงฉับพลันทำให้ค่าเฉลี่ยมีค่าที่ไม่แน่นอนตามสัญญาณที่มีการเปลี่ยนแปลงฉับพลัน และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลที่มี $\alpha \neq 2$ จะมีความไม่แน่นอน ดังนั้นการแจกแจงแบบเกาส์เซียนจึงไม่สามารถที่จะจำลองสัญญาณลักษณะนี้ได้เหมาะสม เมื่อตัวกำหนดว่าสัญญาณมีการเปลี่ยนแปลงฉับพลันมากหรือน้อยคือค่าแอลฟา โดยถ้าค่าแอลฟามีค่าน้อย แสดงว่าสัญญาณที่มีการเปลี่ยนแปลงฉับพลันสูงกว่าค่าที่มีค่าแอลฟามาก ดังรูปที่ 2.4 แสดงสัญญาณที่มีค่าแอลฟาเท่ากับ 2, 1.5 และ 1.0 ตามลำดับ



รูปที่ 2.4 แสดงกราฟของ σ ของสัญญาณแอลฟาสเตเบิลที่มีค่า $\alpha = 2, 1.5$ และ 1.0

ฟังก์ชันการแจกแจงแบบแอลฟาจะอยู่ในรูปการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (characteristic function) ดังสมการ [22]

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-jxt} dt \quad (2.8)$$

เมื่อ $\varphi(t)$ คือ ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะโดยมีสมการดังนี้ [22]-[25]

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\left(i\delta t - \gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\varepsilon(\text{sign } t) \tan \frac{\pi\alpha}{2})\right), & \alpha \neq 1 \\ \exp\left(i\delta t - \gamma |t| \left(1 + i\varepsilon \frac{2}{\pi} (\text{sign } t) \ln |t|\right)\right), & \alpha = 1 \end{cases}; \quad (2.9)$$

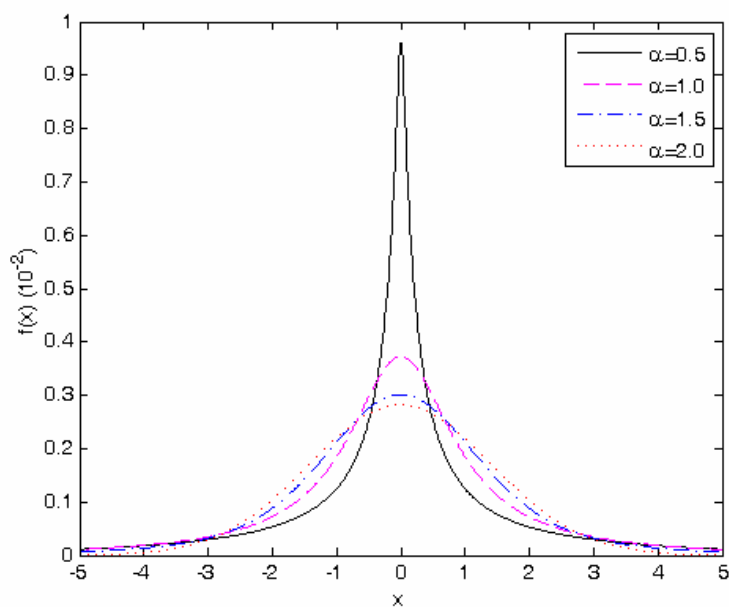
$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

โดยการแจกแจงแบบแอลฟาเสเตเบิล (α -Stable) จะมีพารามิเตอร์อยู่สี่พารามิเตอร์ที่สำคัญ ได้แก่ α คือแอลฟา (characteristic exponent) มีค่าอยู่ในช่วง $\alpha \in (0, 2]$ โดยค่าแอลฟาถูกเรียกว่าเป็นรูปร่างของการแจกแจงและเป็นตัวบอกความหนาของหางการแจกแจง δ เดลต้า (location parameter) มีค่าอยู่ในช่วง $\delta \in (-\infty, \infty)$ เปรียบเสมือนค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบเกาส์เซียน γ คือการกระจายของข้อมูล (dispersion) มีค่ามากกว่าศูนย์ ($\gamma > 0$) เป็นตัวบอกว่าข้อมูลกระจายมากหรือน้อยเปรียบเสมือนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงแบบเกาส์เซียน และ ε เป็นตัวบอกลักษณะการเบ้ของข้อมูล มีค่าอยู่ในช่วง $\varepsilon \in [-1, 1]$ โดยมีสัญลักษณ์ตัวแปรสุ่มของการแจกแจงแบบแอลฟาเสเตเบิลเป็น $X \sim S_\alpha(\gamma, \varepsilon, \delta)$

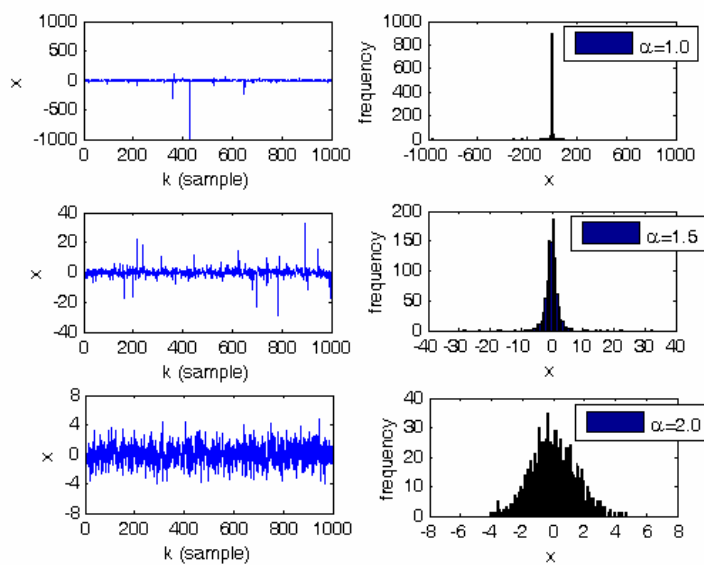
การแจกแจงแบบแอลฟาเสเตเบิลที่มีค่า $\varepsilon = \delta = 0$ จะเรียกว่าแอลฟาเสเตเบิลที่สมมาตร symmetric α -Stable (S α S) เมื่อ $\gamma = 1$ จะเรียกว่าเป็นแอลฟาเสเตเบิลที่สมมาตรแบบปกติ โดยมีฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ [22] ดังนี้

$$\varphi(t) = \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha) \quad (2.9)$$

เมื่อแอลฟาเท่ากับสอง ($\alpha = 2$) จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงแบบเกาส์เซียน และแอลฟาเท่ากับหนึ่ง ($\alpha = 1$) จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงแบบคอชี (Cauchy distribution) ดังรูปที่ 2.5



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.5 ลักษณะสัญญาณแบบแอลฟาสเตเบิลที่สมมาตร (ก) กราฟแสดงการแจกแจงแบบแอลฟาสเตเบิลที่สมมาตร ที่มีค่าแอลฟาเท่ากับ 0.5, 1.0, 1.5 และ 2.0 (ข) กราฟแสดงลักษณะ

สัญญาณทางเวลาและ ตัวอย่างฮิสโตแกรมของสัญญาณแบบแอลฟาสเตเบิล ที่มี α เท่ากับ 1.0, 1.5 และ 2

การแจกแจงแบบแอลฟาสเตเบิลที่สมมาตร เป็นที่นิยมใช้เพราะมีพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์เพียงสองพารามิเตอร์ นั่นคือ α และ γ ในงานวิจัยนี้ก็จะใช้การแจกแจงแบบแอลฟาสเตเบิลในการจำลองข้อมูลด้วยวิธีการประมาณค่าดังต่อไปนี้ [22], [25] และ [26]

$$\text{กำหนดให้} \quad \hat{\phi}(t) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \exp(itx_k) \quad (2.10)$$

เมื่อ x_k เป็นตัวอย่างข้อมูล $k=1,2,\dots,K$ โดยที่ K เป็นจำนวนตัวอย่างข้อมูล และ t เป็นพารามิเตอร์ของฟังก์ชันคาแรกเทอริสติกส์ หลังจากนั้นใช้วิธี method of moment ในการประมาณค่า α และ γ

$$\log\left(-\log|\phi(t)|^2\right) = \alpha \log|t| + \log(2\gamma) \quad (2.11)$$

และจากสมการเส้นตรง

$$y_k = \alpha w_k + \eta \quad (2.12)$$

จากการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ระหว่างสมการ (2.11) กับ สมการ (2.12) จะได้ว่า $y_k = \log\left(-\log|\phi(t_k)|^2\right)$, $\eta = \log(2\gamma)$, $w_k = \log|t_k|$ และใช้ linear least square ในการประมาณค่า $\hat{\alpha}$ และ $\hat{\gamma}$

$$\hat{\alpha} = \frac{K \sum_{i=1}^K w_i y_i + \sum_{i=1}^K w_i \sum_{i=1}^K y_i}{K \sum_{i=1}^K w_i^2 - \left(\sum_{i=1}^K w_i\right)^2} \quad (2.13)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{K} \left(\sum_{i=1}^K y_i - \alpha \sum_{i=1}^K w_i\right)\right) \quad (2.14)$$

2.1.4 การแจกแจงแบบเกาส์เซียนหลายตัวแปร (Multivariate Gaussian distribution)

สำหรับการแจกแจงแบบเกาส์เซียนตัวแปรเดียวนั้น (GD) เป็นการจำลองข้อมูลตัวเดียว (หนึ่งมิติ) แต่สำหรับข้อมูลที่มีตัวแปรตั้งแต่สองตัวแปรขึ้นไปการจำลองข้อมูลนั้นก็จะไม่สามารถจำลองได้ด้วยแบบจำลอง GD ได้ แต่ต้องจำลองด้วยแบบจำลองเกาส์เซียนหลายตัวแปร (MGD) เพราะแบบจำลอง MGD จะมีการคิดความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล (correlation) ด้วย ทำให้แบบจำลองมีความถูกต้องเหมาะสมมากกว่าแบบจำลอง GD [27]-[29] สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเกาส์เซียนหลายตัวแปร $f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ จะเป็นดังนี้

$$f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\right) \quad (2.15)$$

เมื่อ $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรสุ่ม N เป็นจำนวนตัวแปรสุ่ม (dimension) $\boldsymbol{\mu}$ เป็นเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม และ Σ เป็นเมทริกซ์ค่าความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล (covariance Matrix) มีขนาด $N \times N$ ถ้า Σ เป็นไม่เป็นเอกฐาน (non-singular) จะสามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ได้ $|\Sigma|$ เมื่อ $N=1$ สมการ (2.15) จะเป็นการแจกแจงแบบเกาส์เซียนตัวแปรเดียวดังสมการที่ (2.1) และถ้า $N=2$ จะเรียกว่า Bivariate Gaussian distribution [27]

สำหรับการประมาณพารามิเตอร์เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}$ และ เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล Σ นั้น ในงานวิจัยนี้จะใช้ maximum-likelihood estimator [29]

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = [\hat{\mu}_1 \quad \hat{\mu}_2 \quad \dots \quad \hat{\mu}_N]^T \quad (2.17)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T \quad (2.18)$$

เมื่อ K คือจำนวนตัวอย่างข้อมูล การประมาณค่าสำหรับ $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ จะใช้สมการ (2.2)

2.1.5 การแจกแจงแบบเกาส์เซียนทั่วไปหลายตัวแปร (Multivariate generalized Gaussian distribution)

การแจกแจงแบบเกาส์เซียนทั่วไปหลายตัวแปรมีลักษณะคล้ายกับ GGD หนึ่งตัวแปร แต่เพิ่มการพิจารณาเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล (covariance matrix) การแจกแจงแบบเกาส์เซียนทั่วไปหลายตัวแปร (MGGD) มีการใช้งานเกี่ยวกับงานทางด้านการประมวลผลภาพ เช่น ลดสัญญาณรบกวนในภาพ [30] การค้นหาภาพจากฐานข้อมูลรูปภาพ [31] เป็นต้น สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเกาส์เซียนทั่วไปหลายตัวแปร $f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ จะเป็นดังนี้

$$f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \beta) = C \exp \left(-\frac{1}{\lambda} \left((\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \right)^{\beta/2} \right) \quad (2.19)$$

เมื่อ $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรสุ่ม, N เป็นจำนวนตัวแปรสุ่ม (dimension) $\boldsymbol{\mu}$ เป็นเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม, Σ เป็นเมทริกซ์ค่าความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเรียกว่า (covariance Matrix) มีขนาด $N \times N$ สำหรับ β คือรูปร่างการแจกแจงความน่าจะเป็น

$$\lambda = \left(\frac{\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(3/\beta)} \right)^{\beta/2} \text{ และ } C = \frac{1}{\left(2 \frac{\lambda^{\frac{1}{\beta}}}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \right)^N |\Sigma|^{1/2}} \quad \text{คือส่วนที่ทำให้ผลรวมของปริมาตรเป็น}$$

หนึ่ง การประมาณค่า β จะใช้สมการ (2.7) และการประมาณค่าสำหรับ $\boldsymbol{\mu}$ และ Σ จะใช้สมการ (2.16) และ (2.17)

2.1.6 การแจกแจงแบบแอลฟาเสเตเบิลที่สมมาตรหลายตัวแปร (Multivariate symmetric α - alpha stable)

ในงานวิจัยนี้จะใช้การแจกแจงแบบเกาส์เซียนย่อย (sub-Gaussian distribution) เป็นแบบจำลองข้อมูลหลายตัว ซึ่งอยู่ในกลุ่มการแจกแจงแบบแอลฟาเสเตเบิลที่สมมาตรหลายตัวแปร [22], [32] การแจกแจงแบบเกาส์เซียนย่อยมีการใช้งานอย่างแพร่หลาย ได้แก่ ระบบการมองเห็น

ของมนุษย์ [33] การประมวลผลสัญญาณเสียง [34]-[35] การค้นหาภาพจากฐานข้อมูลรูปภาพ [36] เป็นต้น โดยมีฟังก์ชันลักษณะเฉพาะดังนี้

$$\varphi(t) = \exp\left(-\left(\frac{1}{2}(t^T \Sigma t)^{\alpha/2}\right)\right) \quad (2.20)$$

เมื่อ α คือแอลฟามีค่าอยู่ในช่วง $(1, 2]$ และ Σ เป็นเมทริกซ์ค่าความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล เรียกว่า covariance matrix สมมติให้ S เป็นการแจกแจงแบบแอลฟาสเตเบิลที่สมมาตรตัวแปรเดียวที่มีค่าแอลฟาเป็น $\alpha/2$ มีการเบี่ยง $\varepsilon = 1$ และมีการกระจายข้อมูลเป็น $\gamma = \cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right)$ และ Y เป็นการแจกแจงแบบเกาส์เซียนหลายตัวแปรและเป็นอิสระกับ S จะได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเกาส์เซียนย่อยดังนี้ [22], [35]

$$X = S^{1/2}Y \quad (2.21)$$

สำหรับในการประมาณค่า α จะใช้สมการที่ (2.10) - (2.13) และ Σ จะใช้สมการที่ (2.17) และในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ฟังก์ชันการแจกแจงลักษณะเฉพาะของแอลฟาสเตเบิลที่มีผลรวมของปริมาตรเป็นหนึ่งดังสมการ (2.22)

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) \quad (2.22)$$

เมื่อ $A = \frac{\alpha^N |\Sigma|}{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^N}$ เป็นค่าที่ทำให้ปริมาตรของการแจกแจงเป็นหนึ่ง

2.2 Kullback-Leibler divergence (KLD)

KLD เป็นการเปรียบเทียบการแจกแจงความน่าจะเป็นสองฟังก์ชันว่ามีความเหมือนหรือแตกต่างกัน (ความสัมพันธ์ระหว่างเอ็นโทรปี) [37], [38] เป็นที่นิยมในการนำไปใช้งาน ได้แก่ การ

ประมวลผลสัญญาณเสียง [17] การค้นหาภาพจากฐานข้อมูลรูปภาพ [36] เป็นต้น เนื่องจาก KLD ไม่มีคุณสมบัติสมมาตร จึงเรียกว่า divergence แทน distance [37]

โดยทั่วไป f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่องที่ต้องการเปรียบเทียบกัน สำหรับ KLD แบบตัวแปรเดียวจะมีรูปแบบดังสมการ (2.23) และแบบหลายตัวแปรจะมีรูปแบบดังสมการ (2.24) ดังนี้ [37]

$$KL(f_1(x) \| f_2(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \ln \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx \quad (2.23)$$

$$KL(f_1(\mathbf{X}) \| f_2(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\mathbf{x}) \ln \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_2(\mathbf{x})} dx_1 \cdots dx_N \quad (2.24)$$

สำหรับ KLD ของการแจกแจงแบบแอลฟาสเตเบิลที่สมมาตรแบบตัวแปรเดียวและแบบหลายตัวแปร จะเป็นรูปสมการของฟังก์ชันคาแรกเทอริสติกส์ต่อเนื่องซึ่งมีรูปสมการดังนี้ [38]

$$KL(\phi'_1(t) \| \phi'_2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'_1(t) \ln \frac{\phi'_1(t)}{\phi'_2(t)} dt \quad (2.25)$$

$$KL(\phi'_1(t) \| \phi'_2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \phi'_1(t) \ln \frac{\phi'_1(t)}{\phi'_2(t)} dt_1 \cdots dt_N \quad (2.26)$$

ในงานวิจัยนี้นิยามฟังก์ชันใหม่ที่เป็น distance สำหรับ GD, GGD, MGD และ MGGD ที่มีคุณสมบัติสมมาตรดังสมการนี้

$$D_{KL} = \frac{KL(f_1 \| f_2) + KL(f_2 \| f_1)}{2} \quad (2.27)$$

และ distance สำหรับ $S\alpha S$, $MS\alpha S$ สมการดังนี้

$$D_{KL} = \frac{KL(\phi'_1 \| \phi'_2) + KL(\phi'_2 \| \phi'_1)}{2} \quad (2.28)$$

สมการ (2.27) - (2.28) จะมีคุณสมบัติสมมาตรและมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์