

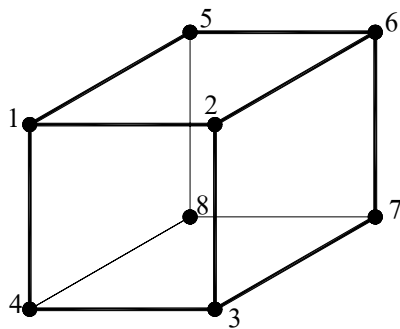
บทที่ 3

การพัฒนาโปรแกรม

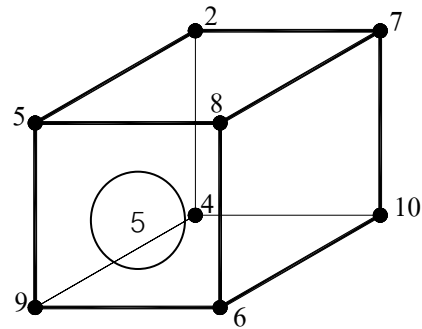
3.1 ส่วนขั้นตอนก่อนการวิเคราะห์ (Pre-Processing)

ส่วนขั้นตอนก่อนการวิเคราะห์ (Preprocessing) เป็นส่วนการเตรียมข้อมูลก่อนการวิเคราะห์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. ข้อมูลหมายเลขจุดต่อในแต่ละเอลิเมนต์ (Node Number per Element) ดังแสดงในรูปที่ 6 ดังนี้



(Local Element)



(Global Element)

รูปที่ 6 แสดงหมายเลขจุดต่อของเอลิเมนต์

การเก็บข้อมูลหมายเลขจุดต่อจะเก็บโดยเรียงลำดับหมายเลขจุดต่อตามเอลิเมนต์เฉพาะที่ (Local Element) ซึ่งจากรูปที่ 6 ได้หมายเลขจุดต่อ (Node) ของเอลิเมนต์ที่ 5 ดังนี้

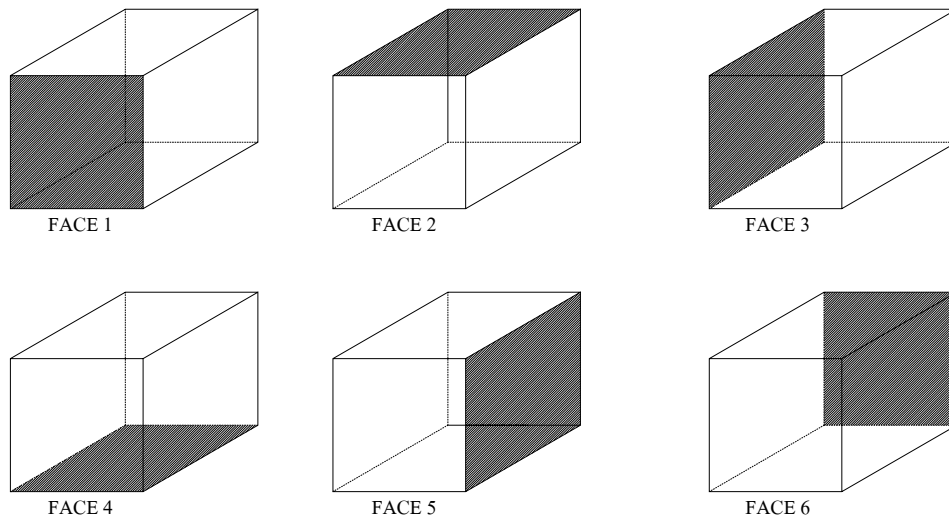
Element No.	Node Number							
Local Element=	1	2	3	4	5	6	7	8
5	5	8	6	9	2	7	10	4

2. ข้อมูลหมายเลขพิกัดของจุดต่อในแต่ละเอลิเมนต์ (Node Coordinates Number per Element) โดยแสดงหมายเลขจุดต่อและพิกัดในระนาบแกน X,Y,Z ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Node No.	Node Coordinate	X	Y	Z
1		10	-15	5
2		5	20	-10

3. ข้อมูลค่าระดับของการแบ่งเอลิเมนต์ (Degree of Refinement) ดังแสดงในรูปที่ 4 ดังนี้ เอลิเมนต์ A มีค่าระดับของการแบ่งเอลิเมนต์เท่ากับ 1, เอลิเมนต์ iv มีค่าระดับของการแบ่งเอลิเมนต์เท่ากับ 2 และเอลิเมนต์ Z มีค่าระดับของการแบ่งเอลิเมนต์เท่ากับ 3

4. ข้อมูลหมายเลขเอลิเมนต์ข้างเคียงในแต่ละหน้า (Face) ในแต่ละเอลิเมนต์ (Neighbors Element) โดยเอลิเมนต์หนึ่งเอลิเมนต์จะมีจำนวนหน้าอยู่ 6 หน้า ดังแสดงในรูปที่ 7 โดยเอลิเมนต์ที่ไม่มีเอลิเมนต์ข้างเคียงจะกำหนดให้เป็น 0 ดังแสดงต่อไปนี้

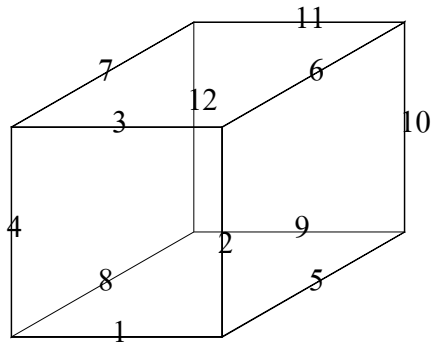


รูปที่ 7 จำนวนหน้า (Face) ในแต่ละเอลิเมนต์

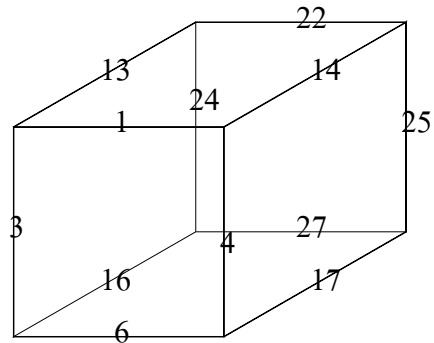
Element No.	Neighbors Element					
	Face= 1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	3	2	5
2	0	2	3	0	0	8

5. ข้อมูลหมายเลขขอบของเอลิเมนต์ (Edge Number of Element) โดยเอลิเมนต์หนึ่งๆ จะมีจำนวนขอบ (Edge) 12 ขอบ ดังแสดงในรูปที่ 8 และจะทำการรับค่าหมายเลขขอบ (Edge) โดยหมายเลขขอบนี้จะเป็นหมายเลขขอบโดยรวม (Global Edge Number) ดังต่อไปนี้

Element No.	Edge Number of Element												
	Edge=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		6	4	1	3	17	14	13	16	27	25	22	24
2		7	5	2	4	18	15	14	17	28	26	23	25



Local Edge Numbers



Global Edge Numbers

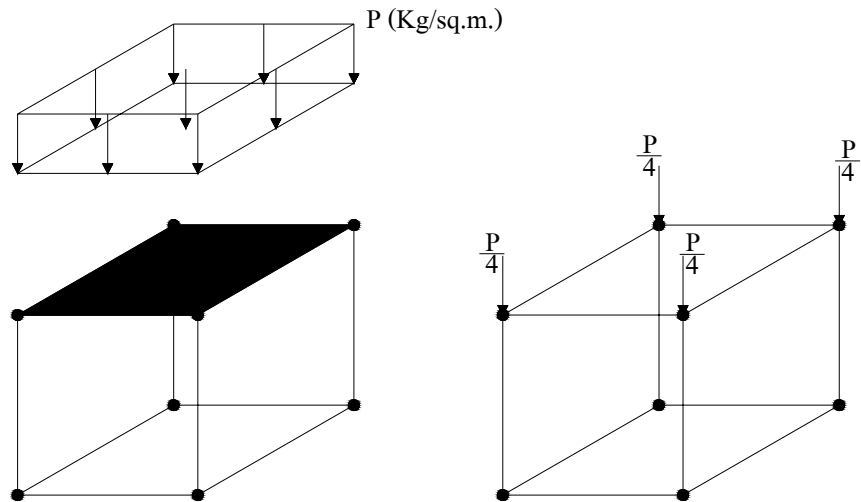
รูปที่ 8 หมายเลขขอบเฉพาะที่ (Local Edge Numbers) และหมายเลขขอบโดยรวม (Global Edge Numbers)

6. ข้อมูลการเคลื่อนตัวของจุดต่อบนขอบเขต (Node Displacement Boundary Condition or Degree of Freedom) เพื่อไม่ให้มีการเคลื่อนตัวในทิศทางใดๆ ที่จุดต่อ โดยต้องระบุจุดต่อที่ต้องการและกำหนดทิศทางที่ต้องการไม่ให้เกิดการเคลื่อนตัว โดยทิศทางที่อิสระกำหนดให้เป็น 1 และทิศทางที่ต้องการจำกัดการเคลื่อนตัวกำหนดเป็น 0 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

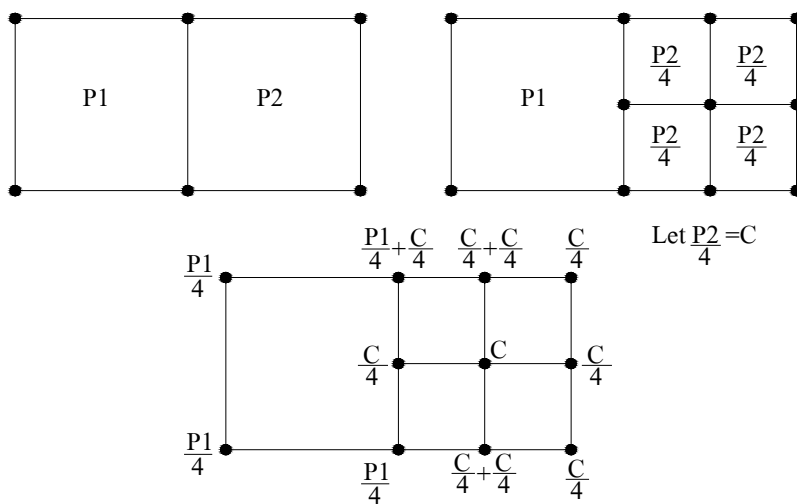
Node No.	X	Y	Z
1	0	1	0
2	1	0	1

7. ข้อมูลแรงกระทำภายนอก (External Load Data) เนื่องจากการงานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลจากการแบ่งเอลิเมนต์ให้ละเอียด ทำให้การที่จะกำหนดแรงกระทำที่จุดต่อหลังจากแบ่งเอลิเมนต์แล้วมีความยุ่งยาก จึงทำการป้อนแรงกระทำเป็นพื้นที่บนหน้า (Face) ของเอลิเมนต์ แล้วจึงทำการกระจายแรงกระทำกระทำที่จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 9,10 และการกำหนดแรงกระทำทำได้โดยกำหนดเฉพาะเอลิเมนต์ที่มีแรงมากระทำเท่านั้น ดังแสดงต่อไปนี้

Element No.	หน้า(Face) ที่แรงกระทำ	ขนาดแรงกระทำ
1	2	-100
2	2	-100



รูปที่ 9 การป้อนข้อมูลแรงกระทำภายนอก



รูปที่ 10 ข้อมูลแรงกระทำภายนอกกรณีที่เอลิเมนต์ได้รับการแบ่ง (Refinement)

8. ข้อมูลคุณสมบัติของเอลิเมนต์ (Element Material Data) จะทำการกำหนดคุณสมบัติต่างกันไปในแต่ละเอลิเมนต์ โดยกำหนดหมายเลขแสดงชนิดของเอลิเมนต์ (Element Type Number) และข้อมูลคุณสมบัติของเอลิเมนต์ เช่น ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น(E), อัตราส่วนปัวซอง (v) ดังแสดงต่อไปนี้

Element Type No.	E	v
1	3000	0.3
2	400	0.5

Element No.	1	2	3	4	5	6
Element Type No.	1	1	2	1	1	2

9. ข้อมูลจำนวนเอลิเมนต์เริ่มต้นทั้งหมด (Total Initial Element), จำนวนจุดต่อเอลิเมนต์เริ่มต้นทั้งหมด (Total Node) และจำนวนหมายเลขขอบโดยรวมเริ่มต้นทั้งหมด (Total Initial Global Edge Numbers)

10. ข้อมูลหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนขอบของปัญหา (Node on Edge Problem) และข้อมูลหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนผิวของปัญหา (Node Surface) เพื่อใช้เป็นข้อมูลประกอบในการตรวจสอบจุดต่อแบบถูกบังคับ (Constained Node) รายละเอียดจะกล่าวในเรื่องการตรวจสอบจุดต่อแบบถูกบังคับ โดยหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนขอบของปัญหากำหนดให้เป็น 1 แต่ถ้าหากจุดต่อไม่ใช่จุดต่อที่อยู่บนขอบกำหนดให้เป็น 0 ดังแสดงต่อไปนี้

Node No.	Node on Edge/Nodesurface
1	0
2	1

11. ข้อมูลหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนขอบเอลิเมนต์ (Node on Edge Element) ทั้ง 12 ขอบ เป็นข้อมูลที่จำเป็นต้องมีแต่ไม่ต้องเตรียมค่าข้อมูล เนื่องจากได้ทำการเขียนโปรแกรมให้คำนวณหาหมายเลขจุดต่อเอลิเมนต์อัตโนมัติ จากรูปที่ 6,8 มีวิธีการวิเคราะห์หาจุดต่อบนขอบดังนี้

จากรูปที่ 8 ตำแหน่งที่หมายเลขขอบเฉพาะที่ (Local Edge Numbers) ลำดับที่ 1 เมื่อดูจากรูปที่ 6 ที่ขอบลำดับที่ 1 นี้ จะมีลำดับหมายเลขจุดต่อเฉพาะที่ (Local Node) คือลำดับที่ 4,3 และจะมีหมายเลขจุดต่อโดยรวมจากรูปที่ 6 คือ 9,6 และขอบที่ 2 ถึง 12 สามารถวิเคราะห์ได้ดังที่กล่าวมา ได้ดังตัวอย่างดังต่อไปนี้

Element No.5				
Edge	Sequence Node		Node on Edge (Global Node)	
1	3	4	6	9
2	2	3	8	6
3	1	2	5	8
4	1	4	5	9
5	3	7	6	10
6	2	6	8	7
7	1	5	5	2

8	4	8	9	4
9	7	8	10	4
10	6	7	7	10
11	5	6	2	7
12	5	8	2	4

12. ข้อมูลหมายเลขจุดที่อยู่บนหน้าเอลิเมนต์ (Node on Face Element) เป็นข้อมูลที่โปรแกรมคำนวณให้โดยอัตโนมัติเหมือนกับข้อมูลหมายเลขจุดที่อยู่บนขอบ และหลักการวิเคราะห์ก็คล้ายกันโดย หมายเลขจุดของหน้า

Element No.5								
Face	Sequence Node				Node on Face (Global Node)			
1	1	2	3	4	5	8	6	9
2	1	2	5	6	5	8	2	7
3	1	4	5	8	5	9	2	4
4	3	4	7	8	6	9	10	4
5	2	3	6	7	8	6	7	10
6	5	6	7	8	2	7	10	4

3.2 ส่วนวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM Analysis)

เป็นขั้นตอนของการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้วนำผลเฉลยที่ได้สู่ขั้นตอนหลังการวิเคราะห์ต่อไป

3.3 ส่วนขั้นตอนหลังการวิเคราะห์ (Post-Processing)

เป็นส่วนวิเคราะห์ข้อมูลเพิ่มเติมที่ได้จากการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ และนำเสนอข้อมูลต่างๆในรูปแบบที่เหมาะสม

1. การนำเสนอข้อมูลโครงข่ายเอลิเมนต์
2. การนำเสนอข้อมูลการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ
3. การนำเสนอข้อมูลหน่วยแรงที่จุดต่อ
4. ขั้นตอนการประมาณค่าความคลาดเคลื่อน (Error Estimation) หลังจากได้ผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในระบบชิ้นส่วนที่มีลักษณะหยาบซึ่งเป็นระบบเริ่มต้น แล้วจึงประมาณค่าความคลาดเคลื่อนในตำแหน่งต่างๆของปัญหาจากผลเฉลยที่ได้ โดยทำการประมาณค่าทั้งในส่วนเฉพาะที่

(Local) และโดยรวม (Global) แล้วทำการตรวจสอบค่าคลาดเคลื่อนที่ได้ในแต่ละเอลิเมนต์ว่าเอลิเมนต์ใดบ้างที่มีค่าคลาดเคลื่อนเกินกว่าที่ยอมให้หรือไม่ หากค่าความคลาดเคลื่อนเกินกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ ก็ทำการส่งข้อมูลสู่ขั้นตอนอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป ซึ่งในส่วนพัฒนาโปรแกรมประกอบไปด้วย

- พัฒนาโปรแกรมในการสร้างหน่วยแรงปรับเรียบในระดับเอลิเมนต์ และหาค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงที่จุดต่อของเอลิเมนต์
- คำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนในระดับเอลิเมนต์ โดยใช้นิยามจากสมการที่ 38 ดังนี้

$$\|e_\sigma^*\|_2 = \left(\int_\Omega e_\sigma^{*T} e_\sigma^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

โดยที่ $\|e_\sigma^*\|_2$ = นอร์มพลังงานความคลาดเคลื่อน
 e_σ^* = เวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง
 D = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด $\sigma = D\varepsilon$
 Ω = โดเมนที่พิจารณา เช่น เฉพาะที่ (local) หรือ โดยรวม (Global)

- คำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในระดับทั่วไป (Global) โดยใช้นิยามจากสมการที่ 39 ดังนี้

$$\eta \approx \eta^* = \frac{\|e_\sigma^*\|_2}{\sqrt{\|U^*\|_2^2 + \|e_\sigma^*\|_2^2}} \quad (39)$$

โดยที่ η^* = ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error)
 $\|U^*\|_2$ = แอลทูนอร์มของหน่วยแรงที่ได้จาก SPR
 $\|U\|_2$ = แอลทูนอร์มของหน่วยแรงที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำ

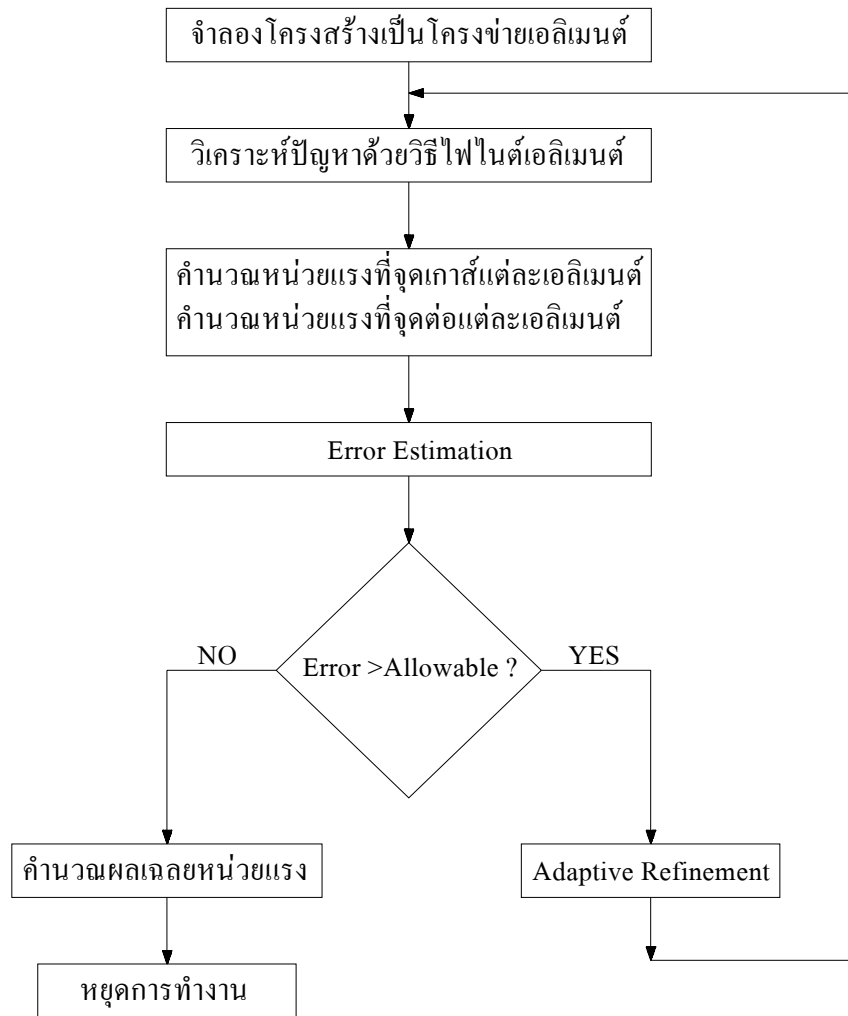
- ตรวจสอบค่าคลาดเคลื่อนที่ได้กับค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ และจะทำการเพิ่มความละเอียดให้กับเอลิเมนต์ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนระดับเอลิเมนต์สูงสุด 10 % ของจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด โดยจะทำการส่งข้อมูลสู่ขั้นตอนอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

3.4 ส่วนอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (Adaptive Finite Element)

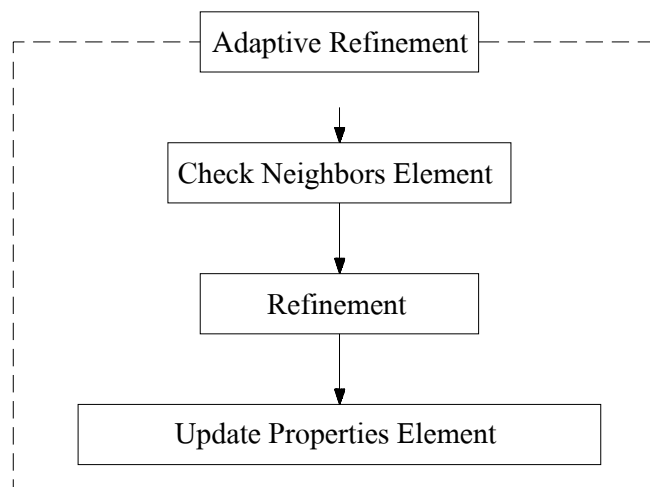
เป็นส่วนโปรแกรมที่ทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์มีความละเอียดขึ้น โดยทำการแบ่งเอลิเมนต์ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนมากเกินกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้นั้น หลังจากที่ทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้นแล้วก็จะทำการส่งข้อมูลไปคำนวณตามวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อีกครั้ง เพื่อหาผลเฉลย และตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนอีกครั้ง และทำการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดอีกหากผลเฉลยยังมีค่าความคลาดเคลื่อนมากเกินกว่าค่าที่ยอมรับได้ ซึ่งก็จะกระทำซ้ำๆ ไปเรื่อยๆ จนกว่าได้ค่าความคลาดเคลื่อนอยู่ในเกณฑ์ที่พอใจ การทำงานของอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้แสดงดังรูปที่ 11 – 18 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. การตรวจสอบระดับของการแบ่งเอลิเมนต์เทียบกับเอลิเมนต์ข้างเคียง ซึ่งแผนภูมิการทำงานได้แสดงในรูปที่ 13 โดยวิธีการตรวจสอบจะรับค่าเอลิเมนต์ที่ต้องการแบ่งให้ละเอียดเนื่องจากมีค่าความคลาดเคลื่อนเกินกว่าที่ยอมรับได้มาตรวจสอบระดับการแบ่ง (Degree of Refinement) เทียบกับเอลิเมนต์ข้างเคียงในทุกๆ หน้า (Face) หากระดับการแบ่งของเอลิเมนต์ข้างเคียงน้อยกว่าก็ต้องทำการแบ่งเอลิเมนต์ข้างเคียงนั้นด้วย โดยที่ไม่ต้องพิจารณาว่าค่าความคลาดเคลื่อนเกินกว่าค่าที่ยอมรับหรือไม่ และต้องตรวจสอบเอลิเมนต์ข้างเคียงนั้นด้วยว่ามีค่าระดับการแบ่งน้อยกว่าเอลิเมนต์ข้างเคียงนั้นหรือไม่ หากน้อยกว่าก็ต้องทำการแบ่งเอลิเมนต์ข้างเคียงนั้นๆ ต่อไป กระทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะครบทุกเอลิเมนต์ที่ต้องทำการแบ่งเพิ่มความละเอียด

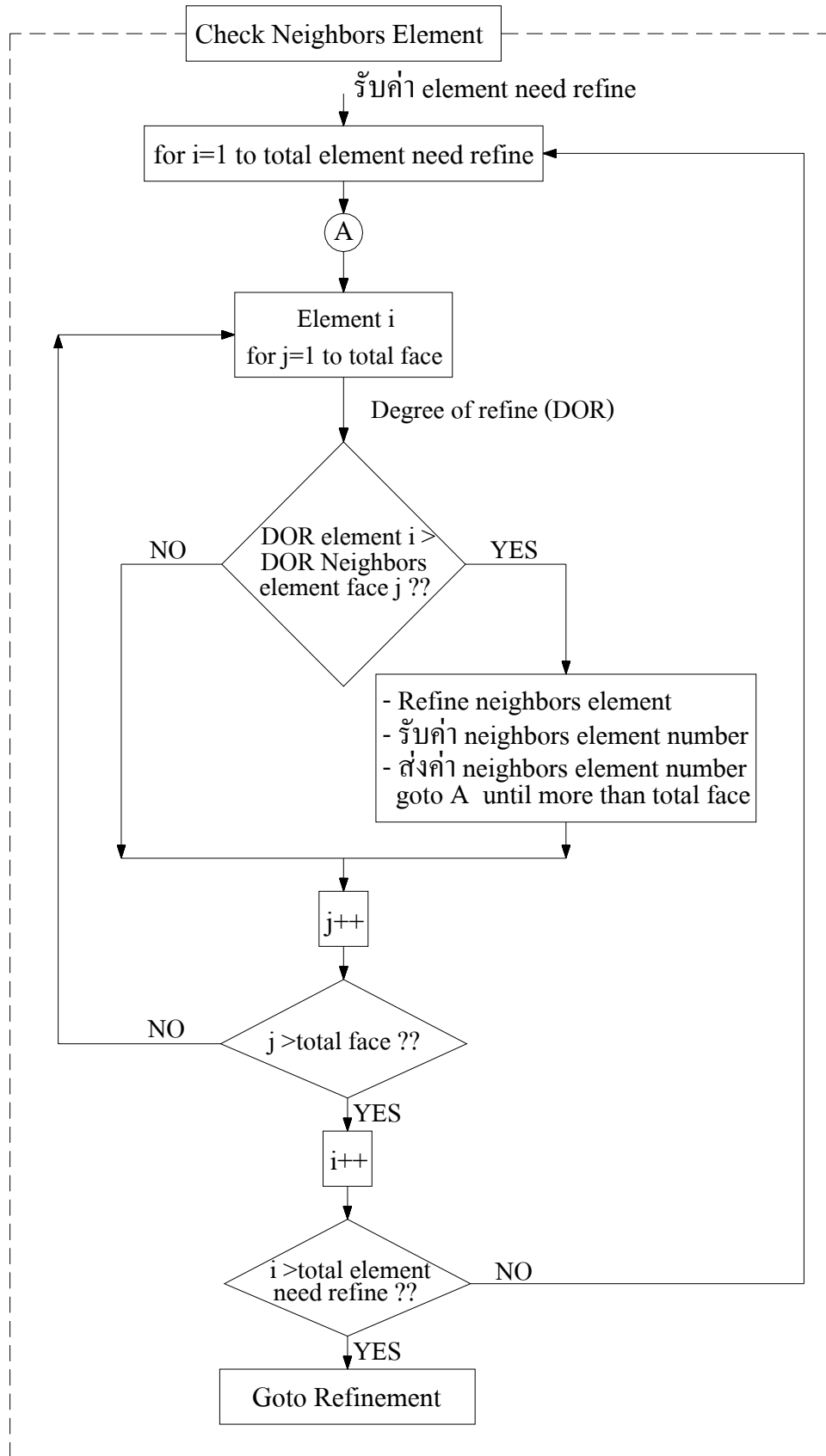
ซึ่งในขณะที่มีการตรวจสอบเอลิเมนต์กับเอลิเมนต์ข้างเคียง ทำให้มีการต้องแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มเติมจากกรณีที่ค่าระดับการแบ่งน้อยกว่าเอลิเมนต์ข้างเคียง ก็จะทำการเก็บข้อมูลเอลิเมนต์ที่ต้องแบ่งเพิ่ม และเตรียมข้อมูลเอลิเมนต์ที่จะแบ่งเพื่อเพิ่มความละเอียดส่งให้ขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์ (Refinement) ต่อไป



รูปที่ 11 แสดงแผนภูมิการทำงานของอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์

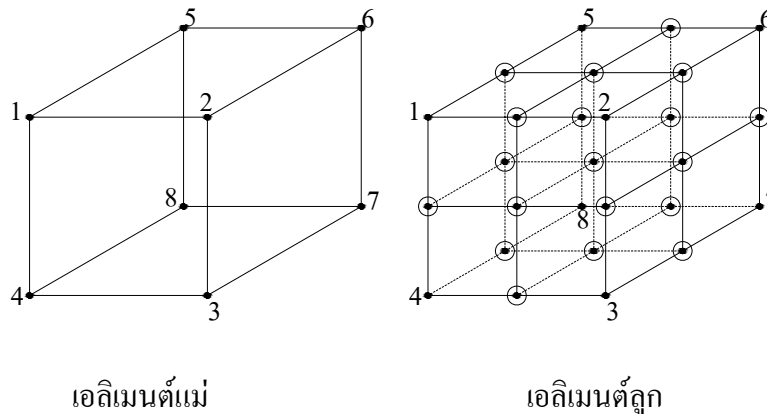


รูปที่ 12 แสดงแผนภูมิการทำงานของอะแดปทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์



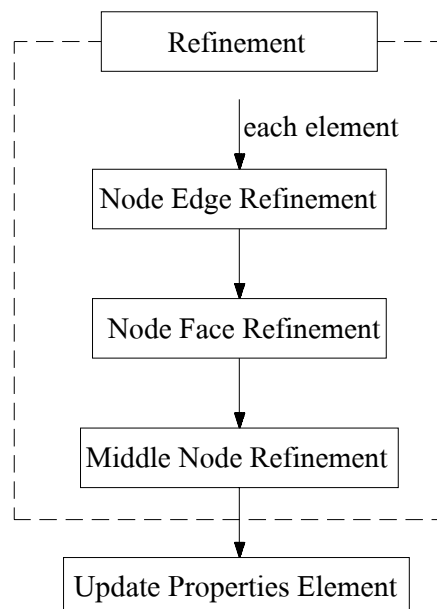
รูปที่ 13 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการตรวจสอบระดับการแบ่งเอลิเมนต์ของเอลิเมนต์ที่พิจารณาเทียบกับเอลิเมนต์ข้างเคียง

2. การแบ่งเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความละเอียดให้กับเอลิเมนต์ โดยในขั้นตอนการแบ่งนี้จะทำการแบ่งเอลิเมนต์ทีละเอลิเมนต์ ในการแบ่งเอลิเมนต์จะเรียกเอลิเมนต์ก่อนที่จะทำการแบ่งว่าเอลิเมนต์แม่ (Mother Element) และเรียกเอลิเมนต์หลังจากการแบ่งแล้วว่าเอลิเมนต์ลูก (Son of Element) ในเอลิเมนต์ลูกที่เกิดขึ้นก็จะเกิดจุดต่อใหม่ มากที่สุดรวมทั้งหมด 27 จุดต่อการแบ่งในหนึ่งเอลิเมนต์ และในจุดต่อ (Node) ที่เกิดขึ้นมีทั้งจุดต่อที่ขอบ (Node on Edge), จุดต่อที่หน้า (Node on Face) ,และจุดต่อที่กลางเอลิเมนต์แม่ (Node in Middle Mother Element) ดังแสดงในรูปที่ 14



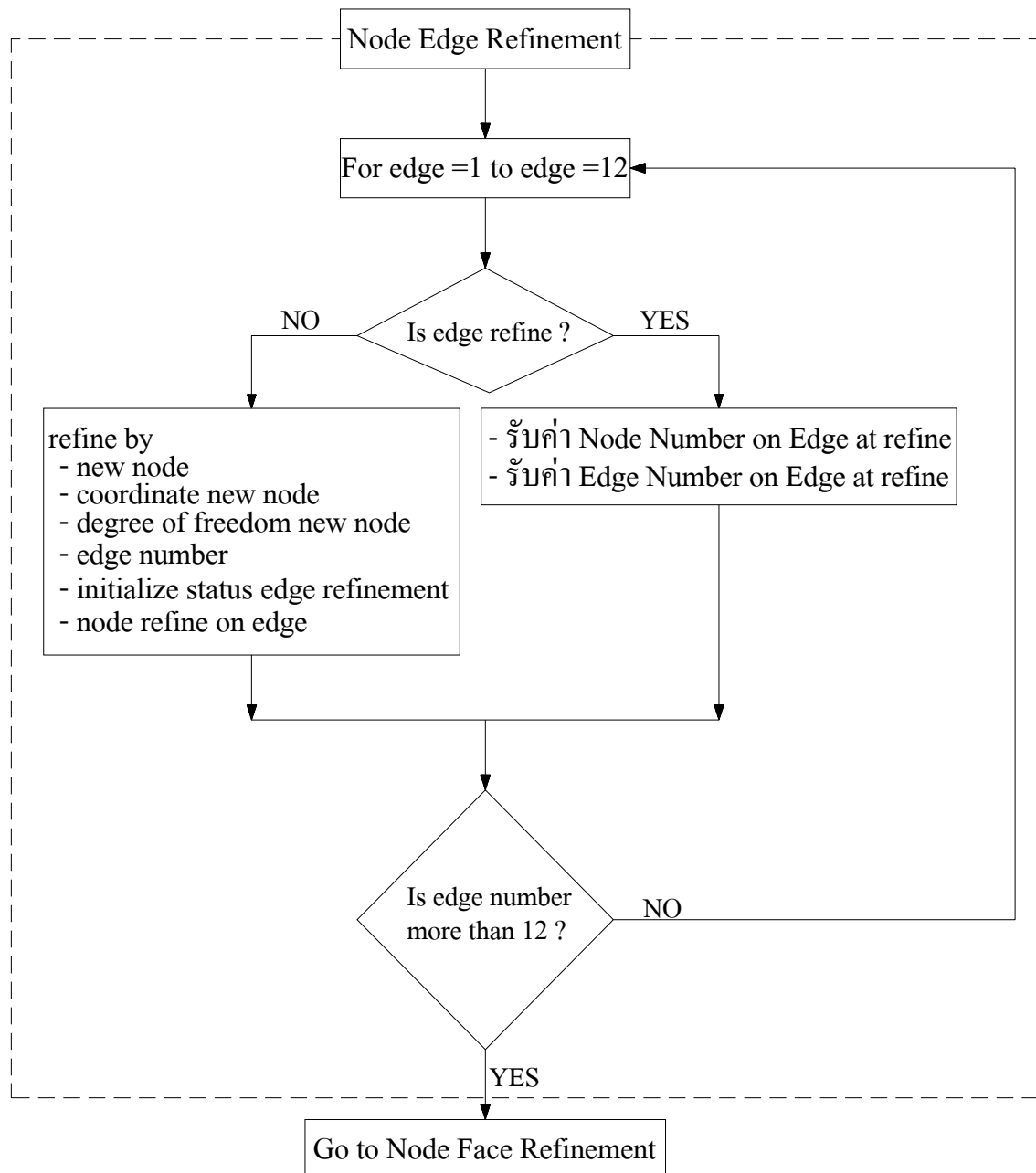
รูปที่ 14 แสดงจุดต่อที่เกิดจากการแบ่งเอลิเมนต์แม่เพื่อให้เอลิเมนต์มีความละเอียดขึ้น

ดังนั้นเพื่อให้มีความง่ายและเป็นระบบระเบียบในการแบ่งเอลิเมนต์จึงแบ่งเป็น 3 ส่วนดังแสดงในรูปที่ 15 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

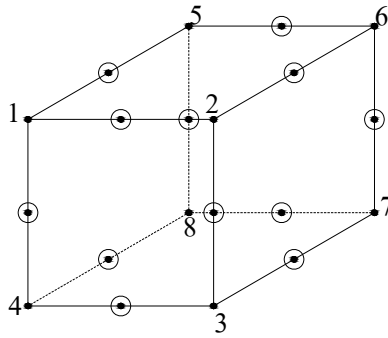


รูปที่ 15 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งเอลิเมนต์เพื่อให้เอลิเมนต์มีความละเอียดขึ้น

- การแบ่งจุดต่อเอลิเมนต์ที่ขอบ (Node on Edge Refinement) สามารถแสดงดังในรูปที่ 15 เอลิเมนต์ในแต่ละเอลิเมนต์จะมีขอบอยู่ 12 ขอบ ดังนั้นการแบ่งจะเกิดจุดต่อ 12 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 16

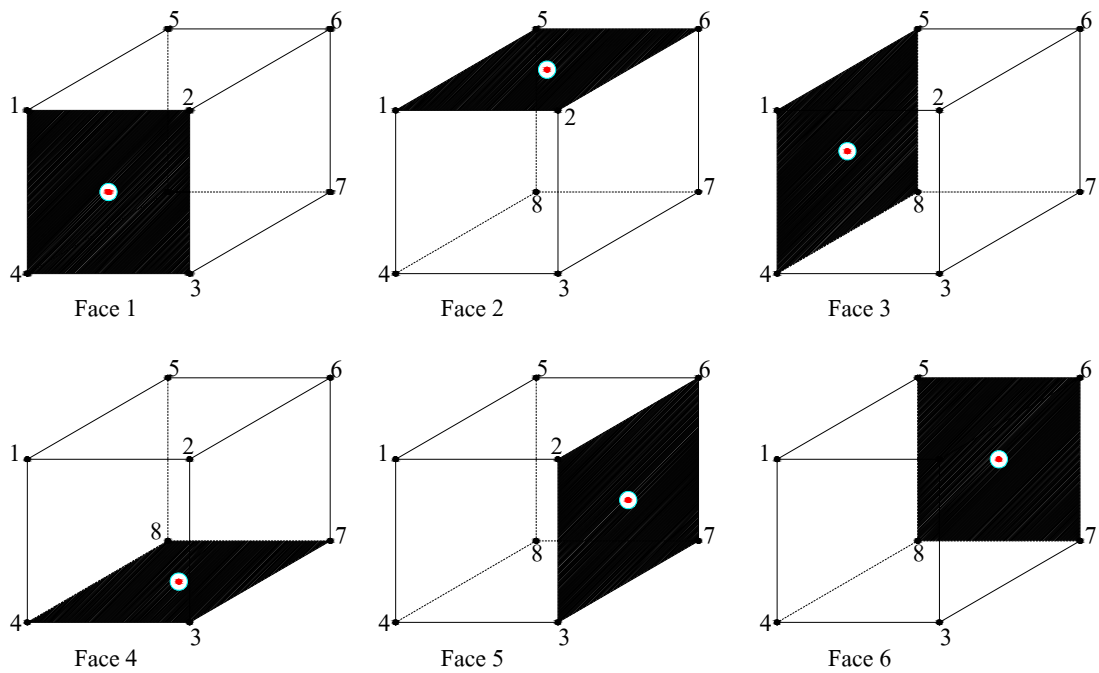


รูปที่ 16 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งขอบของเอลิเมนต์ (Edge Refinement)

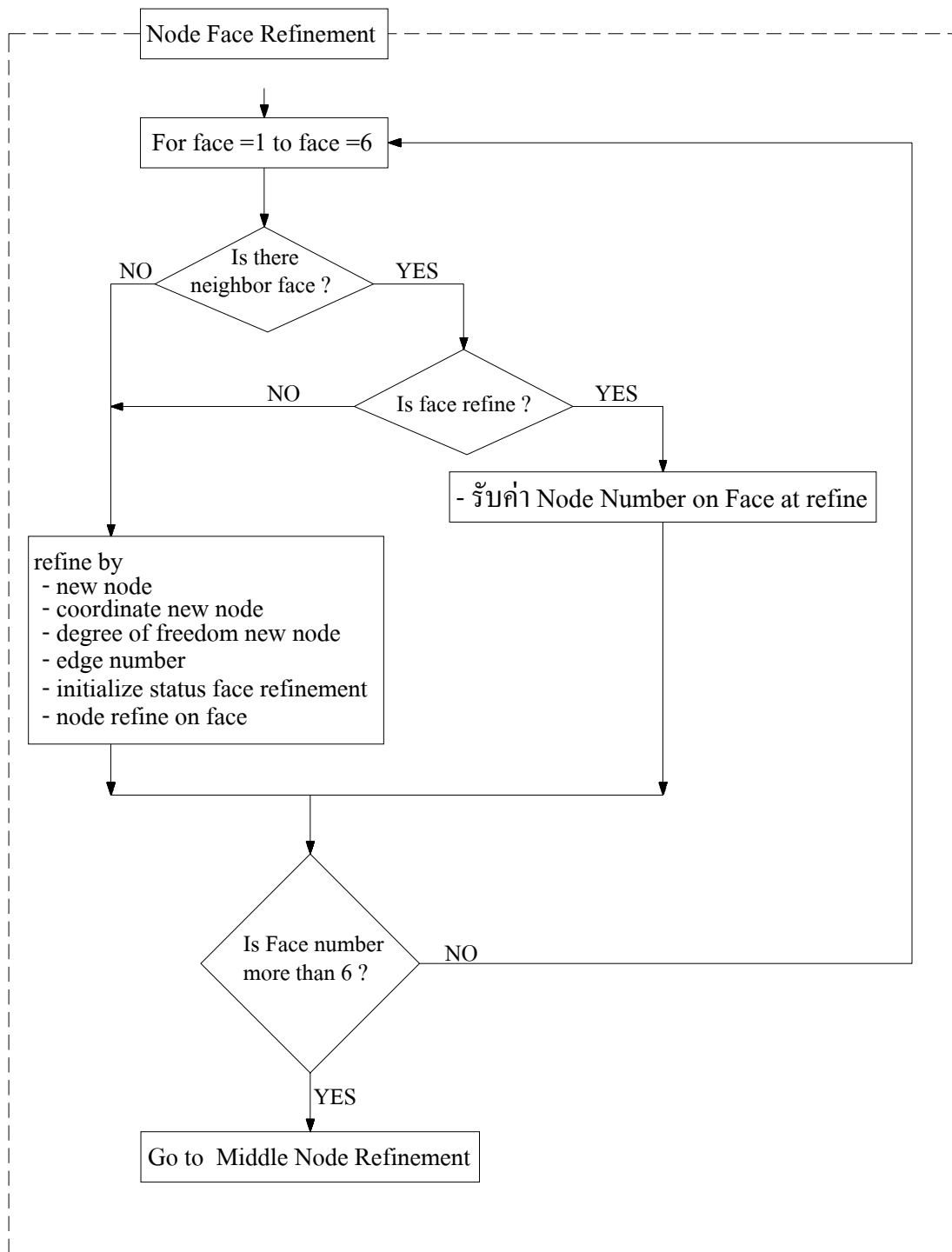


รูปที่ 17 แสดงจำนวนจุดต่อที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแบ่งขอบของเอลิเมนต์ (Edge Refinement)

- การแบ่งจุดต่อเอลิเมนต์ที่หน้า (Node on Face Refinement) สามารถแสดงดังในรูปที่ 19 เอลิเมนต์ในแต่ละเอลิเมนต์จะมีจำนวนหน้าอยู่ 6 หน้า ดังนั้นการแบ่งจะเกิดจุดต่อ 6 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 18

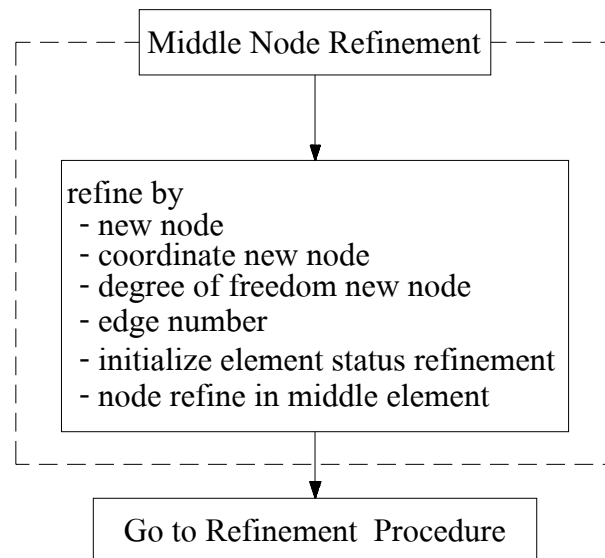


รูปที่ 18 แสดงจำนวนจุดต่อที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแบ่งหน้าของเอลิเมนต์ (Face Refinement)



รูปที่ 19 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งหน้าของเอลิเมนต์ (Face Refinement)

- การแบ่งจุดต่อเอลิเมนต์ที่กลางเอลิเมนต์ (Middle Node Refinement) การแบ่งจุดต่อที่กลางเอลิเมนต์จะไม่มีควมยุ่งยากซับซ้อน เนื่องจากไม่ต้องทำการตรวจสอบการแบ่งว่าได้รับการแบ่งหรือยัง เพราะจุดต่อที่กลางเอลิเมนต์จะยังไม่ได้รับการแบ่งเสมอ สามารถแบ่งได้เลย ทำให้เกิดจุดต่อใหม่ขึ้นมา 1 จุดต่อ ซึ่งแผนภูมิการทำงานได้แสดงในรูปที่ 20

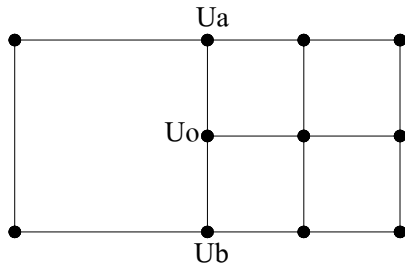


รูปที่ 20 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการแบ่งจุดต่อกลางของเอลิเมนต์ (Middle Node Refinement)

หลังจากที่ทำการแบ่งเอลิเมนต์จนครบทั้ง 3 ส่วนและทุกเอลิเมนต์ที่ต้องทำการแบ่งเพื่อเพิ่มความละเอียดให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ นั่นคือสิ้นสุดขบวนการแบ่งเอลิเมนต์ และขั้นตอนต่อไปคือการอัปเดตข้อมูลใหม่เพื่อการคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

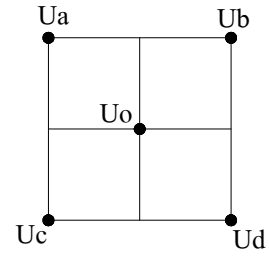
3.การอัปเดตข้อมูล (Update Data) เพื่อการเตรียมข้อมูลให้กับขบวนการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งรายละเอียดในวิธีการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

- พิกัดจุดต่อของเอลิเมนต์ใหม่ (Coordinate of New Node) และจุดต่อที่ควบคุมจุดต่อใหม่ (Control New Node) จากการแบ่งเอลิเมนต์เฉพาะเอลิเมนต์ที่มีความความคลาดเคลื่อนสูง ทำให้มีโอกาสที่จะเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับ(Constrained Node) ดังนั้นในการที่จะกำหนดค่าพิกัดจุดต่อใหม่จึงต้องมีการเก็บข้อมูลจุดต่อที่ควบคุมจุดต่อใหม่ โดยวิธีการหาค่าพิกัดและจุดต่อที่ควบคุมจุดต่อใหม่แบ่งเป็น 3 ส่วน โดยแต่ละส่วนแยกในแต่ละแกน X,Y,Z สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 21



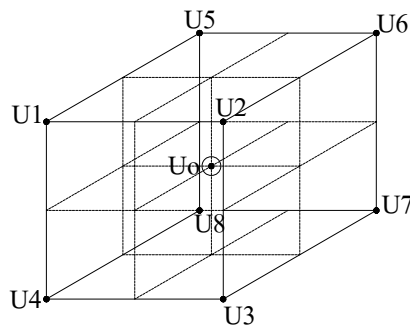
(1) ขอบ (Edge)

$$U_o = \frac{U_a + U_b}{2}$$



(2) หน้า (Face)

$$U_o = \frac{U_a + U_b + U_c + U_d}{4}$$



(3) จุดต่อกลางของเอลิเมนต์แม่ (Middle Node)

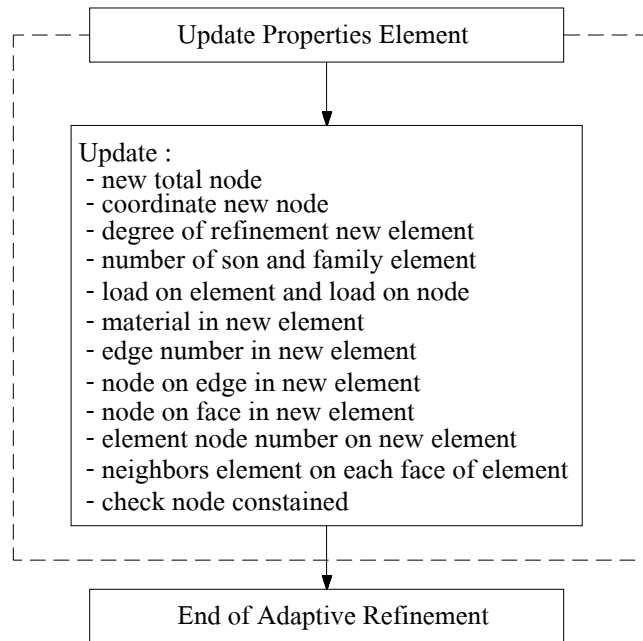
$$U_o = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8}{8}$$

รูปที่ 21 แสดงพิกัดจุดต่อของเอลิเมนต์ใหม่ (Coordinate of New Node) และจุดต่อที่ควบคุมจุดต่อใหม่
(Control New Node)

โดยที่ U_a, U_b, U_c, U_d = จุดต่อที่ควบคุมจุดต่อเอลิเมนต์ลูกบนขอบและบนหน้าเอลิเมนต์แม่

U_o = จุดต่อแบบถูกบังคับ (Constained Node)

$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8$ = จุดต่อที่ควบคุมจุดต่อเอลิเมนต์ลูกของเอลิเมนต์แม่



รูปที่ 22 แสดงแผนภูมิการทำงานของโปรแกรมการเก็บข้อมูลใหม่ของเอลิเมนต์

- หมายเลขเอลิเมนต์ลูกและเอลิเมนต์แม่ โดยในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจะทำการบันทึกคำว่าเอลิเมนต์นี้มีเอลิเมนต์ลูกใดบ้างหรือเอลิเมนต์นี้เป็นเอลิเมนต์แม่ของเอลิเมนต์ใด ซึ่งเอลิเมนต์แม่ที่ได้รับการแบ่งเพื่อเพิ่มความละเอียดจะมีเอลิเมนต์ลูกอยู่ 8 ตัว

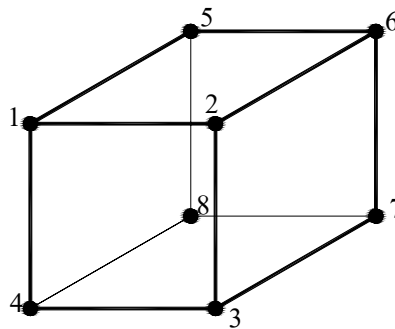
- แรงกระทำบนเอลิเมนต์และแรงกระทำบนจุดต่อ (Load on Element and Load on Node) ได้อธิบายในหัวข้อขั้นตอนก่อนการวิเคราะห์ ในที่นี้จึงไม่อธิบายต่อ

- คุณสมบัติของเอลิเมนต์ (Material Element) ในโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนี้ได้สร้างคุณสมบัติของเอลิเมนต์ใหม่ให้มีค่าเหมือนกับเอลิเมนต์แม่

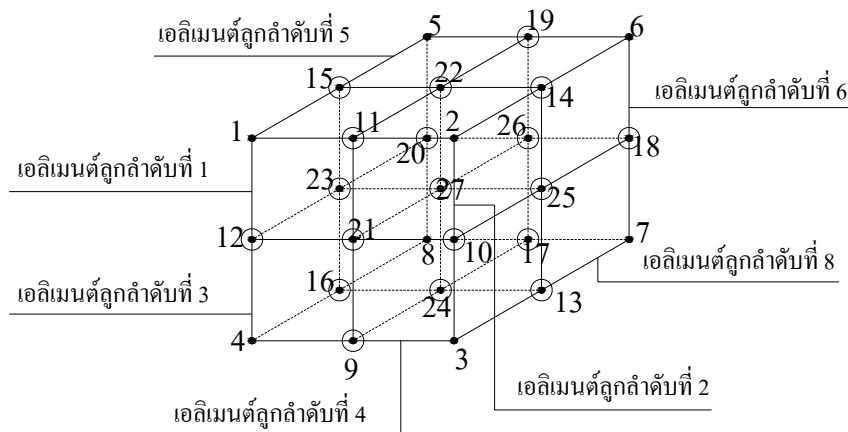
- หมายเลขจุดต่อเอลิเมนต์ใหม่ (New Element Node Number) การที่จะทำการเก็บข้อมูลนี้ได้ ในขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์ต้องมีข้อมูลลำดับของจุดต่อที่แบ่งและลำดับของเอลิเมนต์ลูก และในข้อมูลของลำดับจุดต่อเอลิเมนต์จะเก็บข้อมูลหมายเลขจุดต่อของเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 23 และวิธีการเก็บข้อมูลสามารถแสดงได้ดังนี้

เอลิเมนต์ลูกลำดับที่	ลำดับหมายเลขจุดต่อ
1	1 11 21 12 15 22 27 23
2	11 2 10 21 22 14 25 27
3	12 21 9 4 23 27 24 16
4	21 10 3 9 27 25 13 24
5	15 22 27 23 5 19 26 20

6	22	14	25	27	19	6	18	26
7	23	27	24	16	20	26	17	8
8	27	25	13	24	26	18	7	17



Before Refinement



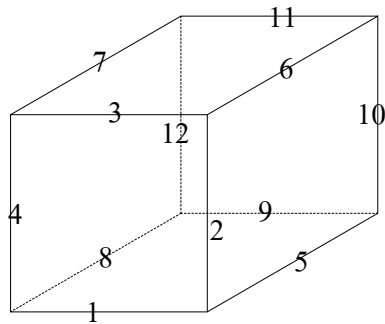
After Refinement

รูปที่ 23 แสดงลำดับของจุดต่อเอลิเมนต์และลำดับของเอลิเมนต์ลูกทั้งก่อนแบ่งและหลังแบ่งเอลิเมนต์

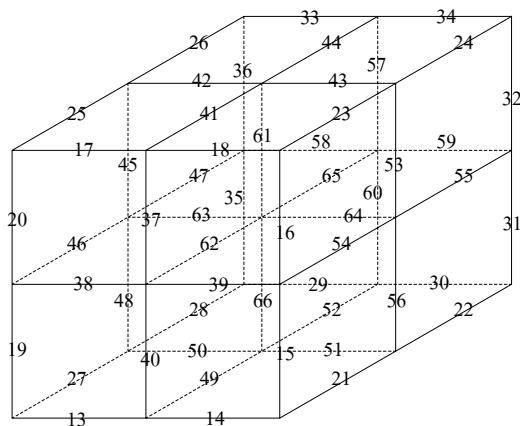
- หมายเลขขอบของเอลิเมนต์ใหม่ (Edge Number of New Element) โดยในการเก็บข้อมูลนี้จะต้องมีลำดับของหมายเลขขอบเอลิเมนต์เฉพาะที่ก่อนแบ่งและลำดับของหมายเลขขอบเอลิเมนต์เฉพาะที่หลังแบ่ง ดังแสดงในรูปที่ 24 และในข้อมูลลำดับขอบของเอลิเมนต์จะเก็บข้อมูลหมายเลขขอบโดยรวมของเอลิเมนต์ลูก ดังต่อไปนี้

เอลิเมนต์ลูกลำดับที่	ลำดับหมายเลขขอบเอลิเมนต์ลูก
1	38 37 17 20 62 41 25 46 63 61 42 45
2	39 16 18 37 54 23 41 62 64 53 43 61
3	13 40 38 19 49 62 46 27 50 66 63 48

4	14	15	39	40	21	54	62	49	51	56	64	66
5	63	61	42	45	65	44	26	47	58	57	33	36
6	64	53	43	61	55	24	44	65	59	32	34	57
7	50	66	63	48	52	65	47	28	29	60	58	35
8	51	56	64	66	22	55	65	52	30	31	59	60



Before Refinement



After Refinement

รูปที่ 24 แสดงลำดับหมายเลขขอบเอลิเมนต์แม่และลำดับขอบเอลิเมนต์ลูกทั้งก่อนแบ่งและหลังแบ่ง

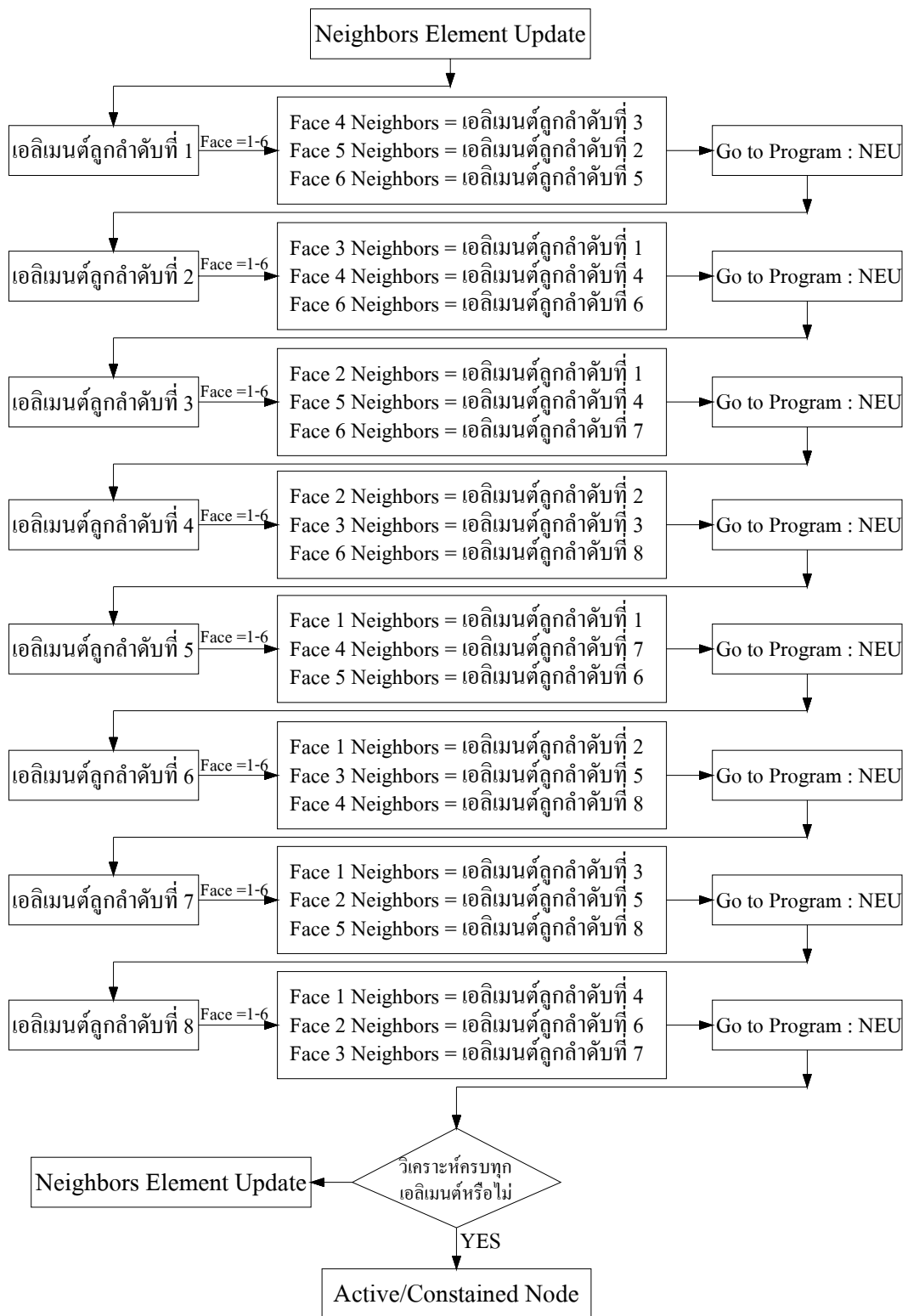
- หมายเลขจุดต่อบนขอบของเอลิเมนต์ใหม่ (Node on Edge of New Element) จากรูปที่ 23 และ 24 สามารถนำมาพิจารณาหาหมายเลขจุดต่อบนขอบของเอลิเมนต์ ได้ดังนี้ (เนื่องจากข้อมูลมีมากจึงยกตัวอย่างเพียง 1 ตัวอย่าง)

เอลิเมนต์ลูกลำดับที่ 1		
ลำดับขอบเอลิเมนต์	ลำดับหมายเลขจุดต่อเอลิเมนต์บนขอบ	
38	21	12
37	11	21
17	1	11
20	1	12
62	21	27
41	11	22
25	1	15
46	12	23
63	27	23
61	22	27
42	15	22
45	15	23

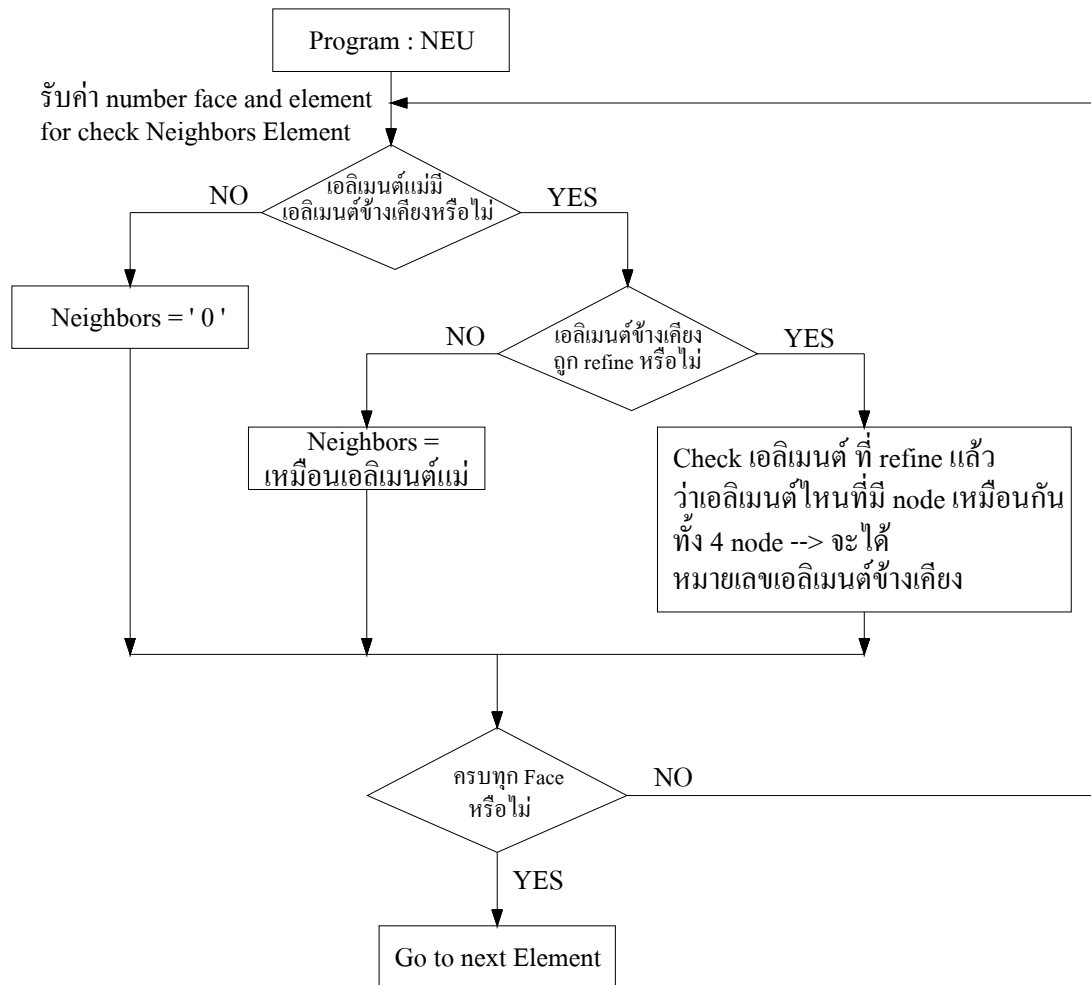
- หมายเลขจุดต่อบนหน้าของเอลิเมนต์ใหม่ (Node on Face of New Element) จากรูปที่ 23 และ 24 สามารถนำมาพิจารณาหาหมายเลขจุดต่อบนหน้าของเอลิเมนต์ ได้ดังนี้ (เนื่องจากข้อมูลมีมากจึงยกตัวอย่างเพียง 1 ตัวอย่าง)

เอลิเมนต์ลูกลำดับที่ 1				
หน้า(Face)เอลิเมนต์ที่	ลำดับหมายเลขจุดต่อเอลิเมนต์บนหน้า			
1	1	11	21	12
2	1	11	15	22
3	1	12	15	23
4	21	12	27	23
5	11	21	22	27
6	15	22	27	23

- หมายเลขเอลิเมนต์ข้างเคียง (Neighbor Element) หลักการวิเคราะห์เพื่อหาเอลิเมนต์ข้างเคียงหลังจากมีการแบ่งเอลิเมนต์ สามารถดูได้จากรูปที่ 25 และ 26 ดังแสดงดังต่อไปนี้



รูปที่ 25 แผนภูมิการอัปเดตข้อมูลหมายเลขเอลิเมนต์ข้างเคียง (Neighbors Element)



รูปที่ 26 แผนภูมิการอัปเดตข้อมูลหมายเลขเอลิเมนต์ข้างเคียง (Neighbors Element) (ต่อ)

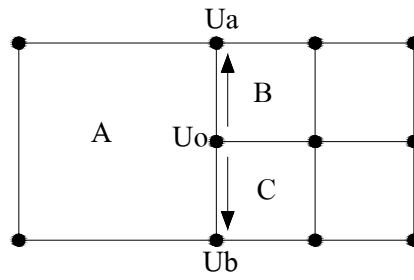
- หมายเลขจุดต่อที่ถูกบังคับ (Constained Node) และการจัดการจุดต่อที่ถูกบังคับ เนื่องจากวิธีเอชอะแดพทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ ต้องทำการแบ่ง(Refine) เฉพาะเอลิเมนต์ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนสูงเท่านั้น ทำให้เอลิเมนต์หลังการแบ่งแล้วจะเกิดสภาพ Nonconformimg mesh เป็นผลทำให้เกิดความไม่ต่อเนื่องของหน่วยแรง ดังนั้นจึงต้องมีวิธีการจัดการความต่อเนื่องของหน่วยแรงดังนี้

1. กรณีเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับที่ขอบ (Constained Node on Edge) ดังแสดงในรูปที่ 27 หน่วยแรงที่จุดต่อ 0 ของเอลิเมนต์ A จะถูกกระจายหน่วยแรงไปยังจุด a,b ของเอลิเมนต์ A ดังนี้

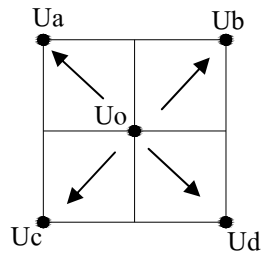
$$\text{หน่วยแรงที่จุด (a,b)} = (\text{หน่วยแรงที่จุด O})/2$$

2. กรณีเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับที่หน้า (Constained Node on Face) ดังแสดงในรูปที่ 28 หน่วยแรงที่จุดต่อ 0 ของหน้าเอลิเมนต์ A จะถูกกระจายหน่วยแรงไปยังจุด a,b,c,d ของเอลิเมนต์ A ดังนี้

$$\text{หน่วยแรงที่จุด (a,b,c,d)} = (\text{หน่วยแรงที่จุด O})/4$$

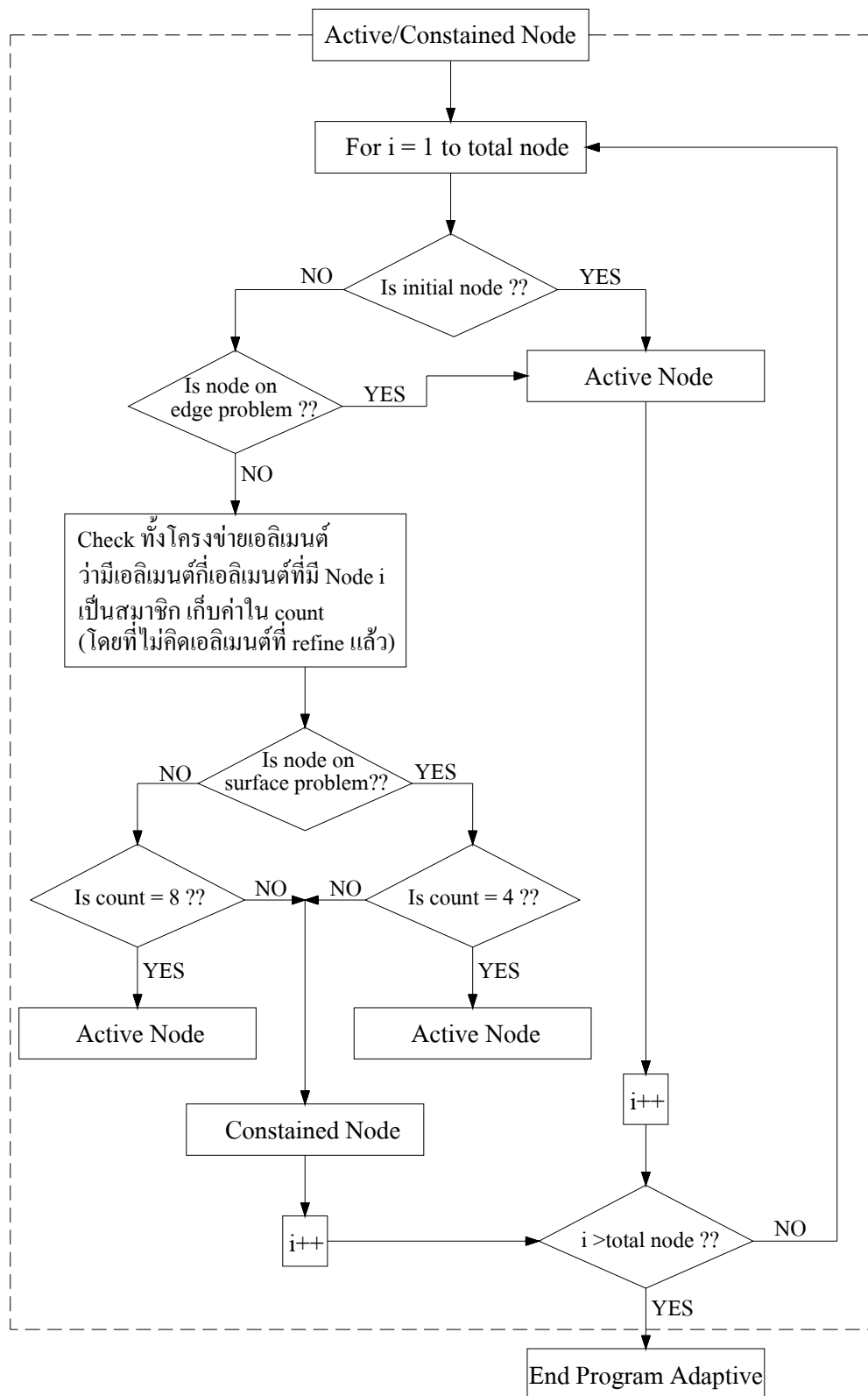


รูปที่ 27 การจัดการจุดต่อกรณีเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับที่ขอบ (Constained Node on Edge)



รูปที่ 28 การจัดการจุดต่อกรณีเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับที่หน้า (Constained Node on Face)

สำหรับการวิเคราะห์เพื่อหาจุดต่อแบบถูกบังคับ (Constained Node) หลังจากมีการแบ่งเอลิเมนต์ สามารถดูได้จากรูปที่ 29 ดังแสดงดังต่อไปนี้



รูปที่ 29 แผนภูมิการวิเคราะห์จุดต่อที่ถูกบังคับ (Constained Node)