บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์พื้นฐาน

สมการพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์กลศาสตร์ของชิ้นส่วนต่อเนื่อง (Continuum Mechanic) ประกอบด้วยสมการหลัก 3 สมการดังนี้

1. สมการสมดุลทางสถิตยศาสตร์ (Static Equilibrium Equation) ประกอบด้วย
   - สมการสมดุล (Equilibrium Equation) : $\left[\sigma_{ij,j} + h_i = 0\right]$
   - สมการจำกัดเขตของหน่วยแรง (Stress Boundary) : $\left[T_{ij} = \sigma_{ij} n_j\right]$

โดยสามารถสรุปความสัมพันธ์ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[A]^T [\sigma] = [f] \tag{1}$$

โดยที่ $[\sigma]$ = เมตริกซ์ของความเค้น

$[f]$ = เมตริกซ์ของแรงภายนอก (External Force)

2. สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัว (Compatibility Equation) แสดงได้ดังสมการที่ 2 ดังนี้

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)}{2} \tag{2}$$

โดยสามารถแสดงในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[\varepsilon] = [B][U] \tag{3}$$

โดยที่ $\left[\varepsilon\right]$ = เมตริกซ์ความเครียด

$[U]$ = เมตริกซ์ของการเคลื่อนตัว

$[B]$ = เมตริกซ์ความเครียด – การเคลื่อนตัว (Strain – Displacement Matrix)

3. สมการความสัมพันธ์ระหว่างเค้น - ความเครียด (Constitutive Equation) สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบอีลาสติกเชิงเส้น (Linear Elastic) และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทุกทาง (Isotropic Property) แสดงได้ดังสมการที่ 4 ดังนี้

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{4}$$

โดยสามารถแสดงในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \tag{5}$$

โดยที่ $[D]$ = เมตริกซ์ความเค้น – ความเครียด (Constitutive Matrix)

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาใน 3 มิติ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \tag{6}$$

เมื่อ

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

จากการพิสูจน์ด้วยหลักการงานเสมือน (Principal of Virtual Work) สามารถพิสูจน์ได้ว่า $A^T = B^T$ ดังนั้นจากสมการ 1,3 และ 5 จะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นที่จุดใดๆ ภายในชิ้นส่วน ดังนี้

$$[B]^T [D][B] dv \{U\} = \{F_n\} \tag{8}$$

โดยที่ $[B]$ = เมตริกซ์ความเครียดและการเคลื่อนตัว (Strain–Displacement Matrix)

$[D]$ = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ความเค้น–ความเครียด (Constitutive Matrix)

v = ปริมาตรของชิ้นส่วน

$\{U\}$ = เวคเตอร์แสดงการเคลื่อนตัวที่เพิ่มขึ้นของจุดต่อ ในทิศทาง x,y และ z

$\{F_n\}$ = แรงกระทำที่เพิ่มขึ้นที่จุดต่อ

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย คือ

$$[K]\{U\} = \{F\} \tag{9}$$

โดยที่ $[K]$ = สติฟเนสเมตริกซ์ (Stiffness Matrix)

= $[B]^T [D][B]$

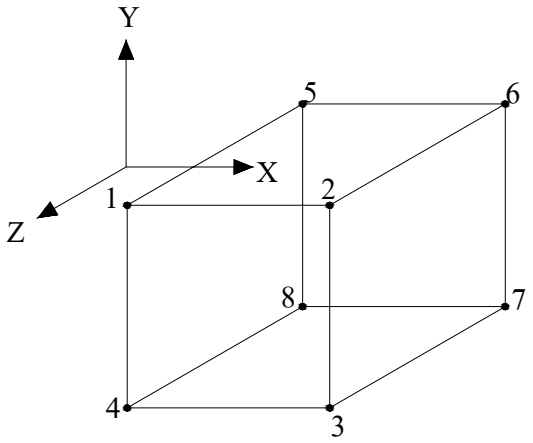
$\{F\}$ = เวคเตอร์ของแรงกระทำ (Load Vector)

2.2 ระบบพิกัด (Coordinate System)

ชิ้นส่วนย่อย (Element) ที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้คือ ชิ้นส่วนเฮกซะฮีดรอน (Hexahedron) ชนิด 8 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่1 โดยระบบพิกัดทั่วไป (Global Coordinate) ที่ใช้คือพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian) x-y-z ขณะที่ระบบพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinate) ที่ใช้คือระบบพิกัดฉาก $\xi - \eta - \zeta$ ที่ปรับขนาดให้ใช้ขอบเขตเดียวกันทุกชิ้นส่วน ค่าพิกัดที่จุดต่อได้แสดงในตารางที่ 1

2.3 ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function)

ในขั้นตอนการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องสร้างแบบจำลองเพื่อการประมาณค่าของตัวแปรพื้นฐานในแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาหน่วยแรงและการเคลื่อนตัว (Stress – Deformation Analysis) มีตัวแปรดังกล่าวคือ ค่าการเคลื่อนตัวที่จุดใดๆ (Displacement)



รูปที่ 1 แสดงระบบพิกัดและการจัดเรียงจุดต่อของชิ้นส่วนย่อยชนิด เฮกซะฮีดรอน

Node	ξ	η	ζ
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	+1
3	+1	-1	+1
4	+1	-1	-1
5	-1	+1	-1
6	-1	+1	+1
7	+1	+1	+1
8	+1	+1	-1

ตารางที่ 1 พิกัดของจุดต่อของชิ้นส่วน ในระบบพิกัดเฉพาะที่

การประมาณค่าการกระจายของการเคลื่อนตัวภายในชิ้นส่วนย่อย จะใช้ฟังก์ชันการประมาณในช่วง (Interpolating Function) หรือฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ซึ่งกำหนดโดยสมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$u = [N]\{U\}$$
$$v = [N]\{V\} \quad (10)$$
$$w = [N]\{W\}$$

โดยที่ u, v, w = ค่าการเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งใดๆ ภายในชิ้นส่วนตามแนวแกน x,y และ z ตามลำดับ

$\{U\}, \{V\}, \{W\}$ = ค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อของชิ้นส่วน ตามแนวแกน x,y และ z ตามลำดับ

$[N]$ = ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ซึ่งกำหนดโดยพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinate) ที่ตำแหน่งใดๆ ภายในชิ้นส่วนโดย $N = f(\xi, \eta, \zeta)$

นอกจากนี้สำหรับในกรณีที่ชิ้นส่วนมีคุณสมบัติเป็นไอโซพาราเมตริก (Isopalametric) จะสามารถใช้ฟังก์ชันรูปร่าง ในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั่วไปและพิกัดเฉพาะที่ได้ดังสมการ 11 และฟังก์ชันรูปร่างสำหรับชิ้นส่วนที่ใช้ในงานวิจัยสามารถแสดงได้ดังสมการที่ 14

$$x = [N]\{X\}$$
$$y = [N]\{Y\} \quad (11)$$
$$z = [N]\{Z\}$$

โดยที่ x, y, z = พิกัดทั่วไป (Global Coordinate) ที่จุดใดๆ ภายในชิ้นส่วนซึ่งกำหนดโดยพิกัดเฉพาะที่ผ่านทางฟังก์ชันรูปร่าง

$\{X\}, \{Y\}, \{Z\}$ = พิกัดทั่วไปที่จุดต่อทุกจุดของชิ้นส่วน ตามแนวแกน x,y และ z ตามลำดับ

2.4 การวิเคราะห์ค่าเมตริกซ์ความเครียด – การเคลื่อนตัว (Strain – Displacement Matrix)

ค่าของเมตริกซ์ความเครียด – การเคลื่อนตัว หรือเมตริกซ์ B คำนวณได้จากสมการที่ 12 และ 13 ดังนี้

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)}{2} \quad (12)$$

หรือ $$[\varepsilon] = [A][e] \quad (13)$$

$$[N]=\begin{bmatrix}\frac{(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8}\\ \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8}\\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8}\\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8}\\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8}\\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8}\\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8}\\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8}\end{bmatrix}^T \tag{14}$$

ในกรณีของการวิเคราะห์ปัญหา 3 มิติ สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ดังกล่าวในรูปเมตริกซ์โดยความเค้นเฉือนแสดงในรูปของ Engineering Shear Strain (γ) ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \\ & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix} \tag{15}$$

โดยที่ u, v และ w คือการเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งใดๆ ในชิ้นส่วนตามแนวแกน x,y และ z จากการใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ทำให้สามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนตัวที่จุดต่อของชิ้นส่วนกับความเครียด ซึ่งแสดงโดยสมการ $[\varepsilon = BU]$ ได้ดังนี้จากสมการ 15 เมื่อพิจารณาเฉพาะ ε_x จะได้ว่า

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{16}$$

จากสมการที่ 10 คือ $u = [N]\{U\}$ จะได้ว่า

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}[N]\{U\} \tag{17}$$

สำหรับในกรณีที่เป็นชิ้นส่วนแบบเฮกซะฮีดรอน (Hexahedron) ชนิด 8 จุดต่อ เขียนได้ดังสมการที่ 18 ดังนี้

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial x} & \frac{\partial N_7}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณเป็นฟังก์ชันพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinate) ξ, η, ζ ดังนั้นการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณในพิกัดทั่วไป (Global Coordinate) ซึ่งจำเป็นในการหาค่าเมตริก B จึงต้องใช้กฎลูกโซ่ (Chain Rule) ดังแสดงในสมการที่ 19 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi}[N_1 & N_2 & \dots & N_8] \\ \frac{\partial}{\partial \eta}[N_1 & N_2 & \dots & N_8] \\ \frac{\partial}{\partial \zeta}[N_1 & N_2 & \dots & N_8] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}[N_1 & N_2 & \dots & N_8] \\ \frac{\partial}{\partial y}[N_1 & N_2 & \dots & N_8] \\ \frac{\partial}{\partial z}[N_1 & N_2 & \dots & N_8] \end{bmatrix} \tag{19}$$

จากสมการของฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) หาได้จากการใช้เมตริกซ์ผกผัน (Inverse) ของเมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian Matrix) ซึ่งกำหนดโดยสมการที่ 20 ดังนี้

$$\text{Jacobian Matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{20}$$

ค่าของเมตริกซ์จาโคเบียนสามารถหาได้โดยใช้คุณสมบัติของการประมาณ ในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั่วไปกับพิกัดเฉพาะที่ ดังแสดงในสมการที่ 21 ดังนี้

$$\text{Jacobian Matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi}[N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_8] \\ \frac{\partial}{\partial \eta}[N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_8] \\ \frac{\partial}{\partial \zeta}[N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_8] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

2.5 การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration)

ขั้นตอนการอินทิเกรตที่ใช้ในการหาค่าสติฟเนสเมตริกซ์ ซึ่งเป็นการอินทิเกรตเชิงปริมาตร ในงานวิจัยนี้จะใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยวิธีของ Gauss ซึ่งหาค่าของฟังก์ชันที่จุดใดๆ ที่กำหนดภายในชิ้นส่วน ซึ่งเรียกว่าจุดเกาส์ (Gauss Point) หรือจุดอินทิเกรต (Integration Point) คูณกับแฟคเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (Weighting Factor) และหาผลการอินทิเกรตโดยการรวมผลคูณของแต่ละจุด ค่าแฟคเตอร์ถ่วงน้ำหนักจะขึ้นกับตำแหน่ง และจำนวนของจุดเกาส์ที่เลือกใช้ แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\iiint [B]^T [D][B]\,dv = \sum_{i=1}^{n} [B_i]^T [D_i][B_i] \det|J_i| w_{1i} w_{2i} w_{3i} \tag{22}$$

โดยที่ i = จุดเกาส์ (Gauss Point)

n = จำนวนทั้งหมดของจุดเกาส์ (Gauss Point) ภายในชิ้นส่วน

$\det|J_i|$ = ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกจาโคเบียน

$w_{1i} w_{2i} w_{3i}$ = แฟคเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (Weighting Factor)

2.6 การประมาณค่าผลเฉลยจากผลของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การประมาณค่าความคลาดเคลื่อน จะประมาณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เทียบกับผลเฉลยที่แม่นยำกว่า ซึ่งในหัวข้อต่อไปนี้จะได้กล่าวถึงรายละเอียดในการประมาณค่าหน่วยแรงให้มีความแม่นยำยิ่งขึ้นโดยวิธี Superconvergence Patch Recovery (SPR) เพื่อใช้เปรียบเทียบหาความคลาดเคลื่อน

โดยธรรมชาติของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หน่วยแรงที่ได้จะมีความคลาดเคลื่อนแตกต่างกันไปในแต่ละส่วนของชิ้นส่วน โดยที่ที่ตำแหน่งเกาส์ (Gauss Point) จะมีค่าหน่วยแรงแม่นยำกว่าในตำแหน่งอื่นๆ ดังนั้นเราจึงสามารถประมาณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อได้แม่นยำขึ้น โดยประมาณจากหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์รอบจุดต่อนั้น ดังแสดงในรูปที่ 2 สำหรับวิธีที่ใช้ในการประมาณค่านั้นทำได้หลายวิธี แต่ที่ค่อนข้างยืดหยุ่นและได้ค่าที่แม่นยำคือวิธีกำลังสองน้อยที่สุดดังรายละเอียดดังต่อไปนี้

สมมติให้หน่วยแรงโดยประมาณ (σ^*) เป็นหน่วยที่ได้จากการประมาณค่าจากตำแหน่งเกาส์ซึ่งอยู่ในรูปของพหุนาม สำหรับกรณี 1 มิติจะมีลักษณะเป็นเส้นดังแสดงในรูปที่ 3 และลักษณะของเส้นจะขึ้นอยู่กับกำลังและค่าคงตัวของพหุนาม สำหรับกรณี 2 มิติหน่วยแรงโดยประมาณมีลักษณะเป็นพื้นผิว มีค่าดังสมการ 23.1 หรือในรูปเมตริกซ์ ดังแสดงในสมการ 23.2

$$\sigma^* = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + \ldots \qquad (23.1)$$

$$\sigma^* = [p]\{a\} \qquad (23.2)$$

โดยที่ $[p]$ = ฟังก์ชันฐาน (Base Function) อยู่ในรูปตัวแปรของพหุนาม [1 x y z xy xz zy xyz]

$\{a\}$ = ค่าคงตัวของพหุนามซึ่งเป็นตัวไม่รู้ค่าที่ต้องคำนวณหา $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

หลักของวิธีกำลังสองน้อยสุดคือต้องหาค่าคงตัว {a} ให้หน่วยแรงโดยประมาณมีความแตกต่างจากจุดที่ประมาณมาน้อยที่สุด ในกรณี 2 มิติเศษตกค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างหน่วยแรงโดยประมาณและหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์สามารถแสดงได้ดังสมการ 24

$$R(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma^*(x_i, y_i, z_i) - \sigma_h(x_i, y_i, z_i) \right)^2 \qquad (24.1)$$

$$R(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma^*(x_i, y_i, z_i) - [p(x_i, y_i, z_i)][a] \right)^2 \qquad (24.2)$$

โดยที่ $R(a)$ = เศษตกค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างหน่วยแรง

σ^* = หน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์

σ_h = หน่วยแรงจากไฟไนต์เอลิเมนต์

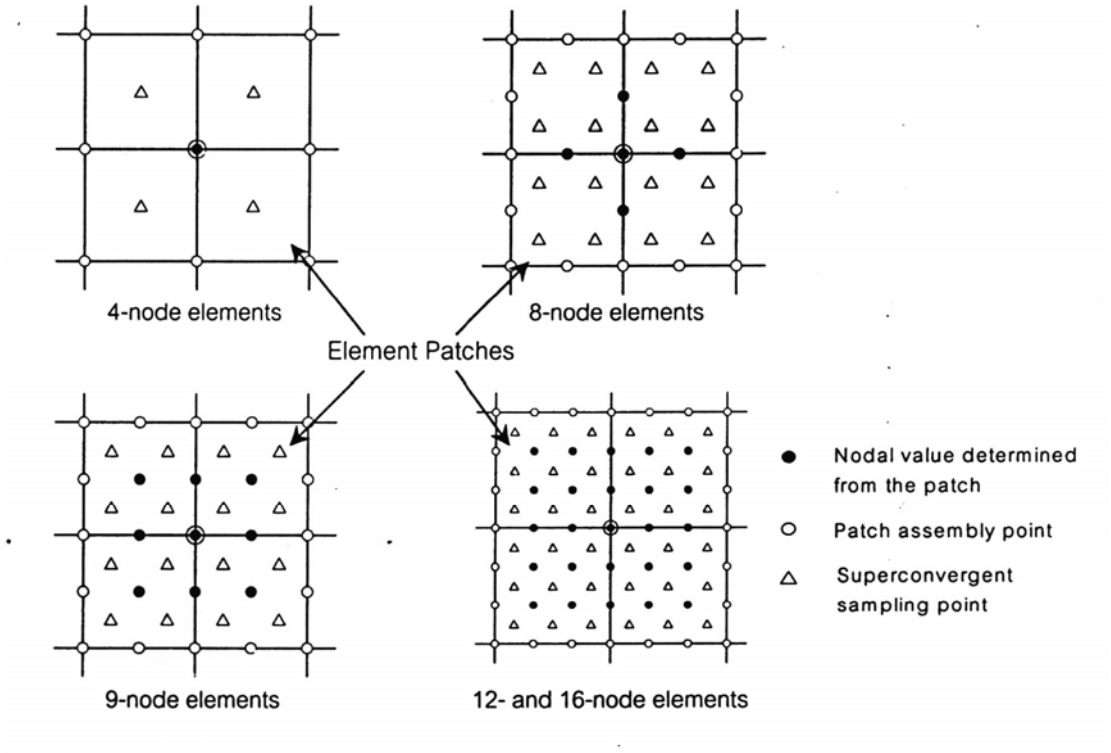
n = จำนวนตำแหน่งเกาส์ทั้งหมด

ในการหาค่าคงตัวเพื่อให้ได้เศษตกค้างต่ำสุด ทำได้โดยกำหนดค่าอนุพันธ์ของเศษตกค้างให้เท่ากับศูนย์ โดยหาอนุพันธ์เทียบกับค่าคงตัวแต่ละตัว จะได้สมการซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนของค่าคงตัวดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n}\left[p(x_i,y_i,z_i)\right]^T\left[p(x_i,y_i,z_i)\right]\{a\}=\sum_{i=1}^{n}\sigma^*(x_i,y_i,z_i)\left[p(x_i,y_i,z_i)\right]^T \quad (25)$$

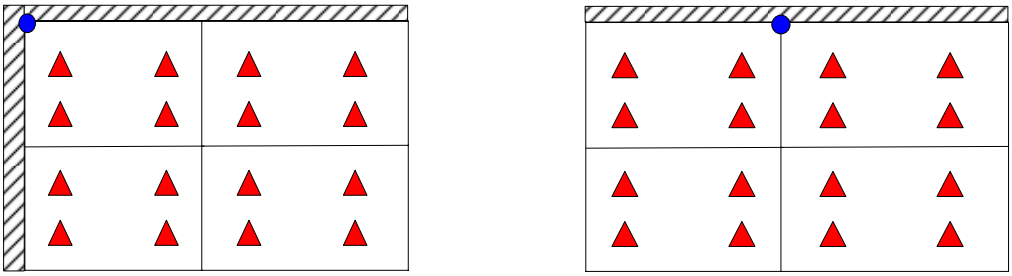
หรือ $[A]\{a\}=\{b\}$ (26)

$\{a\}=[A]^{-1}\{b\}$ (27)

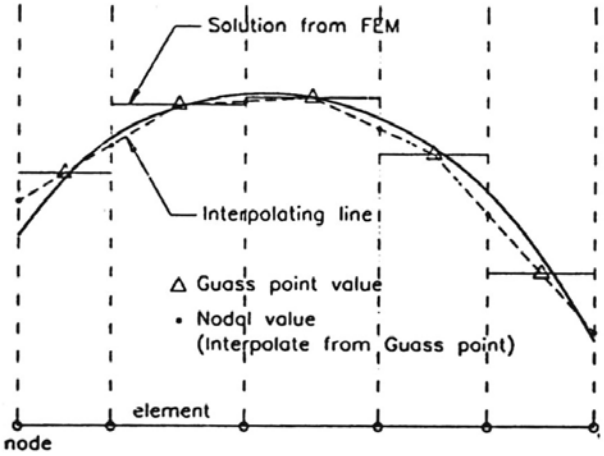


รูปที่ 2 ตำแหน่งเกาส์ในหย่อมของจุดต่อที่ต้องการประมาณค่า

สำหรับจุดต่อที่อยู่บนขอบเขตของปัญหา จำนวนจุดเกาส์ที่อยู่รอบๆ จุดต่อไม่เพียงพอในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนาม {a} จึงจำเป็นต้องขยายขอบเขตออกไปดังแสดงในรูปที่ 3 และในกรณีที่ระนาบของวัสดุต่างชนิดกัน การพิจารณาหน่วยแรงที่จุดเกาส์ก็จะทำการขยายขอบเขตจุดเกาส์ออกไปเช่นเดียวกัน



(ก) (ข)



(ค)

รูปที่ 3 การประมาณค่าคำตอบจากตำแหน่งเกาส์

2.7 การประมาณความคลาดเคลื่อน (Error Estimation)

ในการปรับขนาดของชิ้นส่วนให้มีความสอดคล้องกับปัญหาใดๆ นั้นมีขั้นตอนใหญ่ๆ ตามลำดับดังต่อไปนี้ หลังจากได้ผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในระบบชิ้นส่วนที่มีลักษณะหยาบซึ่งเป็นระบบเริ่มต้น แล้วจึงประมาณค่าคลาดเคลื่อนในตำแหน่งต่างๆของปัญหาจากผลเฉลยที่ได้ จากนั้นคำนวณหาขนาดชิ้นส่วนที่เหมาะสมกับความคลาดเคลื่อนพร้อมทั้งสร้างชิ้นส่วนขึ้นใหม่ตาม ขนาดที่คำนวณได้ แล้วจึงสร้างสติฟเนสเมตริกซ์เพื่อคำนวณหาผลเฉลยต่อไป กระทำซ้ำตามขั้นตอนที่กล่าวมาจนกระทั่งค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยมีขนาดอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ จึงใช้ผลเฉลยสุดท้ายนั้นเป็นผลเฉลยของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ประโยชน์ต่อไป

โดยปกติการคำนวณความคลาดเคลื่อนของวิธีการใดๆ ก็ตามจะทำได้โดยการเทียบคำตอบที่ได้จากวิธีการนั้นๆ กับผลเฉลยแม่นตรง เช่น

$$e = u - u_h \tag{28.1}$$

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \tag{28.2}$$

โดยที่ e = ค่าความคลาดเคลื่อนของการกระจัด

u = ค่าการกระจัดแม่นตรง

u_h = ค่าการกระจัดที่ได้จากการวิเคราะห์

e_σ = ค่าความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง

σ = ค่าหน่วยแรงแม่นตรง

σ_h = ค่าหน่วยแรงที่ได้จากการวิเคราะห์

แต่ในกระบวนการปรับขนาดของชิ้นส่วนนั้น เราไม่ทราบผลเฉลยแม่นตรงของปัญหา จึงไม่สามารถหาความคลาดเคลื่อนตามสมการ (28) ได้ ต้องประมาณจากการเปรียบเทียบกับผลเฉลยอื่นที่มีความถูกต้องกว่าผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังแสดงในสมการที่ (29) สำหรับการคำนวณหาผลเฉลยที่ดีขึ้นนี้เราจะได้กล่าวถึงโดยละเอียดในหัวข้อถัดไป

$$e^* = u^* - u_h \tag{29.1}$$

$$e^*_\sigma = \sigma^* - \sigma_h \tag{29.2}$$

โดยที่ e^* = ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของการกระจัด

u^* = ค่าการกระจัดที่มีความถูกต้องกว่าผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

u_h = ค่าการกระจัดที่ได้จากวิเคราะห์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

e^*_σ = ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง

σ^* = ค่าหน่วยแรงที่มีความถูกต้องกว่าผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

σ_h = ค่าหน่วยแรงที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากสมการ 28 และ 29 จะเห็นว่าเราวัดความคลาดเคลื่อนเป็นสเกลาร์ในขณะคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มีลักษณะเป็นเวคเตอร์ ซึ่งมีความไม่สะดวกในการนำมาใช้งาน ดังนั้นจึงต้องมีการนำรูปแบบอื่นที่มีลักษณะเป็นสเกลาร์มาใช้แทนเวคเตอร์ของความคลาดเคลื่อน เช่นในรูปแบบพลังงานความคลาดเคลื่อนดังแสดงในสมการที่ 30

$$\left\| e^*_\sigma \right\| = \left(\int_\Omega e^{*T}_\sigma D^{-1} e^*_\sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \tag{30}$$

โดยที่ $\left\| e^*_\sigma \right\|$ = นอร์มพลังงานความคลาดเคลื่อน

e_σ = เวคเตอร์ความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง

D = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด $\sigma = D\varepsilon$

Ω = โดเมนที่พิจารณา เช่น เฉพาะที่ (local) หรือ โดยรวม (Global)

นอกจากการแสดงผลในรูปของนอร์มพลังงานแล้วอาจใช้นอร์มในรูปแบบอื่นแทนได้ เช่น แอลทูนอร์ม (L_2 Norm) ซึ่งมีรูปแบบในลักษณะเดียวกับนอร์มพลังงาน แต่ไม่มีพจน์ของเมตริกซ์ความสัมพันธ์ (D) ทำให้ปริมาณการคำนวณลดลง ค่านอร์มต่างๆ ในสมการที่ 30 สามารถเขียนอยู่ในรูปของแอลทูนอร์มได้ดังสมการที่ 31 ถึง 35 ดังนี้

$$\left\| e^*_{\sigma} \right\|_2 = \left(\int_{\Omega} e^{*T}_{\sigma} e^*_{\sigma} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \tag{31}$$

$$\left\| U^* \right\|_2 = \left(\int_{\Omega} \sigma^{*T} \sigma^* d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

$$\left\| U \right\|_2 \approx \sqrt{\left\| U^* \right\|_2^2 + \left\| e_{\sigma}^* \right\|_2^2} \tag{33}$$

$$\eta = \frac{\left\| e_{\sigma} \right\|_2}{\left\| U \right\|_2} \tag{34}$$

$$\eta \approx \eta^* = \frac{\left\| e^* \right\|_2}{\sqrt{\left\| U^* \right\|_2^2 + \left\| e^* \right\|_2^2}} \tag{35}$$

โดยที่ η^* = ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error)

$\left\| U^* \right\|_2$ = แอลทูนอร์มของหน่วยแรงที่ได้จาก SPR

$\left\| U \right\|_2$ = แอลทูนอร์มของหน่วยแรงที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง

เมื่อได้ค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม แล้วนำไปเปรียบเทียบกับความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ถ้ามีความคลาดเคลื่อนมากกว่าก็คำนวณหาขนาดของชิ้นส่วนที่สอดคล้องกับความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ในแต่ละส่วนต่อไป

2.8 อะแดฟทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (Adaptive Finite Element)

อะแดฟทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นแนวทางในการปรับปรุงผลเฉลยจากการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งในปัจจุบันได้มีการกระทำกันในสองแนวทางคือ

1) การนำเอาโครงข่ายเอลิเมนต์เริ่มต้นที่ใช้มาปรับปรุงให้ละเอียดขึ้น (Mesh Refinement) โดยยังคงเค้าโครงเดิมไว้ ทำเพียงแต่เพิ่มความละเอียดให้กับเอลิเมนต์ที่เหมาะสม

2) การปรับเปลี่ยนโครงข่ายเอลิเมนต์ใหม่ (Remeshing) โดยไม่มีเค้าโครงเดิม คือสร้างโครงข่ายเอลิเมนต์ใหม่ ที่มีความละเอียดมากขึ้น โดยไม่อาศัยโครงข่ายเอลิเมนต์เดิม

จะเห็นได้ว่าวิธีที่สอง (Remeshing) ต้องอาศัยความชำนาญในการสร้างโครงข่ายเอลิเมนต์ ซึ่งเป็นวิธีที่มีความยากและซับซ้อน เพราะฉะนั้นในงานวิจัยนี้จะขอกล่าวถึงเพียง การทำงานของขบวนการอะแดฟทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ตามวิธีที่ 1 (Mesh Refinement) เท่านั้นดังต่อไปนี้

2.8.1 การทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้น (Mesh Refinement)

ขบวนการเพิ่มระดับความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ หรือที่เรียกว่าการทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้น (Mesh Refinement) หมายถึง การจัดการกับระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) ให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ของปัญหาที่จำลองมาให้มีจำนวนเพิ่มขึ้นจากเดิมที่ได้จากโครงข่ายเอลิเมนต์เริ่มต้น เพื่อให้แบบจำลองโครงข่ายเอลิเมนต์นั้น มีพฤติกรรมใกล้เคียงพฤติกรรมของโครงสร้างปัญหาจริงที่มีระดับขั้นความเสรีเป็นจำนวนนับไม่ได้ โดยมีแนวทางในการเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ไว้ 3 แนวทางคือ

1) การเพิ่มระดับขั้นความเสรี โดยการแบ่งเอลิเมนต์ในโครงข่ายเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กลง เพื่อเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ให้มีมากขึ้น โดยที่เอลิเมนต์ที่ใช้ยังคงใช้ชนิดเดิมเหมือนกันทั้งหมดวิธีนี้เรียกว่าขบวนการเพิ่มระดับขั้นความเสรีแบบ h-Refinement

2) การเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ ด้วยวิธีการเพิ่มระดับขั้นพหุนาม (Polynomial Degree) ในฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง (Interpolation Function) โดยที่ไม่เปลี่ยนแปลงขนาดและจำนวนเอลิเมนต์ในโครงข่ายเอลิเมนต์เดิม การทำเช่นนี้เป็นการเพิ่มระดับขั้นความเสรีอีกแนวทางหนึ่ง ซึ่งเรียกวิธีนี้ว่า ขบวนการเพิ่มระดับขั้นความเสรีแบบ p-Refinement

3) การเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ ด้วยวิธีผสมทั้งสองวิธีข้างต้น ซึ่งเรียกวิธีนี้ว่า ขบวนการเพิ่มระดับขั้นความเสรีแบบ h-p Refinement

สำหรับเทคนิคการเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ อาจจำแนกได้สองรูปแบบคือ

1) การทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้นแบบสม่ำเสมอ (Uniform Mesh Refinement) หมายถึงการเพิ่มระดับความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ ทุกเอลิเมนต์พร้อมกันในโครงข่ายเอลิเมนต์

2) การทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้นแบบอะแดฟทีฟ (Adaptive Mesh Refinement) หมายถึง การเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับเอลิเมนต์ในโครงข่ายเอลิเมนต์ โดยเลือกเพิ่มให้เฉพาะเอลิเมนต์ที่มีความคลาดเคลื่อนมากกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้เท่านั้น ดังนั้นจะเห็นได้ว่าประสิทธิภาพของวิธีนี้จะดีกว่าวิธีแรก แต่ขั้นตอนการวิเคราะห์จะมีความซับซ้อนมากขึ้น ทฤษฎีการลู่เข้าสามารถนำมาใช้ในการหาค่าความคลาดเคลื่อนขั้นตอนต้นได้

2.8.2 วิธีเอชอะแดฟทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (h-Adaptive Finite Element Method)

วิธีเอชอะแดฟทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (h-Adaptive Finite Element Method) เป็นกระบวนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และมีการควบคุมค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย โดยการแบ่งเอลิเมนต์เดิมในโครงข่ายเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กลง เพื่อเป็นการเพิ่มระดับความเสรี โดยเอลิเมนต์ใหม่ที่เกิดขึ้นจะมีชนิดเดียวกับเอลิเมนต์เดิม การที่จะรู้ว่าควรแบ่งเอลิเมนต์ใด ก็ทำโดยตรวจสอบค่าคลาดเคลื่อนแต่ละเอลิเมนต์ เอลิเมนต์ใดมีความคลาดเคลื่อนมากเกินกว่าค่าที่ยอมให้ ก็จะแบ่งเอลิเมนต์นั้น การทำเช่นนี้จะทำให้ได้โครงข่ายเอลิเมนต์ที่เหมาะสม เพราะเป็นการเพิ่มระดับขั้นความเสรีให้กับโครงข่ายเอลิเมนต์ตรงตำแหน่งที่มีค่าความคลาดเคลื่อนมาก ทำให้ประหยัดจำนวนระดับขั้นความเสรี และทำให้ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาที่วิเคราะห์ได้ มีค่าเข้าสู่ผลเฉลยที่แม่นตรงด้วยอัตราที่เร็ว ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญของขบวนการอะแดฟทีฟ ซึ่งมีงานวิจัยที่เสนอวิธีเอชอะแดฟทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาลักษณะต่างๆ ที่ประสบผลสำเร็จแสดงให้เห็นว่าวิธีนี้สามารถควบคุมค่าคลาดเคลื่อนได้ในเกณฑ์ที่น่าพอใจคือประมาณร้อยละ 5

วิธีเอชอะแดฟทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์ (h-Adaptive Finite Element Method) มีผู้นำไปใช้อย่างแพร่หลายทำให้เป็นที่นิยมในงานวิจัยและงานทางวิศวกรรมต่างๆ ซึ่งสามารถสรุปวิธีการได้ดังนี้

- หลังจากวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ก็จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ (u_h) แล้วนำตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อน
- กำหนดค่าที่ยอมให้ในรูปของสัดส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนต่อผลเฉลย เช่น กำหนดค่าที่ยอมให้ ($\overline{\eta}$) เท่ากับ ร้อยละ 10
- คำนวณค่า η จากสัดส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนโดยประมาณต่อผลเฉลยโดยประมาณที่รวมกับค่าความคลาดเคลื่อนโดยประมาณ ดังแสดงในสมการที่ 36

$$\eta \approx \eta^* = \left(\frac{\left\| e_\sigma{}^* \right\|_2^2}{\left(\left\| U^* \right\|_2^2 + \left\| e_\sigma{}^* \right\|_2^2 \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{36}$$

โดยที่ η = ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยประมาณ

$\overline{\eta}$ = ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้

$\left\| e^* \right\|_2^2$ = กำลังสองของนอร์มพลังงานของค่าความคลาดเคลื่อนโดยประมาณของการเปลี่ยนตำแหน่งแบบวงกว้าง (Global)

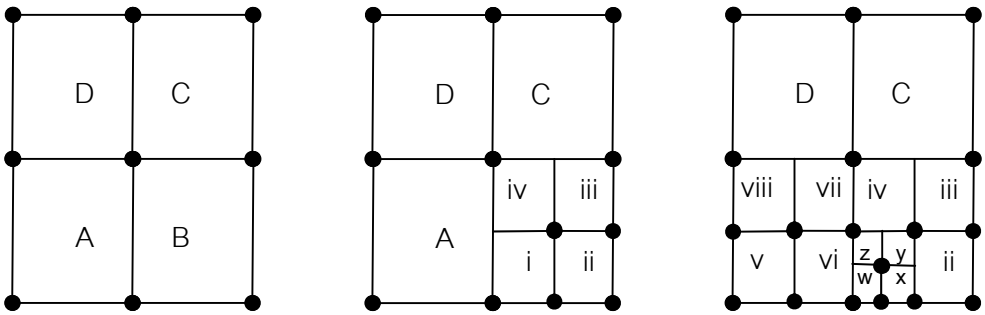
$\|u^*\|_2^2$ = กำลังสองของนอร์มพลังงานของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งแบบวงกว้าง (Global)

เปรียบเทียบ η กับ $\bar{\eta}$ ถ้าหาก $\eta > \bar{\eta}$ ก็แสดงให้เห็นว่า ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยนั้นยังค่ามากกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ดังนั้นจึลต้องมีการปรับปรุงโครงข่ายเอลิเมนต์ โดยทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้น ซึ่งทำได้โดยการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กลงเพื่อเพิ่มจำนวนมากขึ้น ต่อจากนั้นก็กลับไปวิเคราะห์หาผลเฉลยใหม่อีกครั้ง และทำซ้ำจนกว่าจะได้ $\eta < \bar{\eta}$ แสดงว่าความถูกต้องของผลเฉลยที่อยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้แล้ว จากขบวนการที่สรุปข้างต้นนี้ จะพบว่าวิธีเอชอะแดฟทีฟไฟไนต์เอลิเมนต์มีการคำนวณที่เป็นระเบียบ ไม่ซับซ้อนและสามารถกระทำในระดับเอลิเมนต์ได้

สำหรับผลงานวิจัยที่เสนอเกี่ยวกับเทคนิคการสร้างรหัสโปรแกรมการทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้นในวิธีเอช (h – Adaptive) มีผู้เสนอไว้ดังนี้

Devloo, Oden และ Strouboulis (1987) ได้เสนอเทคนิคการจัดสร้างรหัสโปรแกรม สำหรับการทำให้โครงข่ายเอลิเมนต์ละเอียดขึ้นด้วยการแบ่งเอลิเมนต์เดิมให้มีขนาดเล็กลง โดยเสนอเฉพาะกรณีสี่เหลี่ยม การแบ่งเอลิเมนต์จะแบ่งจากหนึ่งเอลิเมนต์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยสี่เอลิเมนต์ และได้เสนอเทคนิดการแบ่งเอลิเมนต์ให้เป็นไปตามกฎที่เรียกว่า กฎหนึ่งระดับ (1 – Level Rule) หมายถึงเอลิเมนต์ที่ติดกันจะต้องมีความแตกต่างของระดับการแบ่งมากที่สุดเท่ากับหนึ่ง ซึ่งจะทำให้เอลิเมนต์ใดๆ มีเอลิเมนต์ที่ติดกับแต่ละด้านได้สูงสุดด้านละสองเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 4 เดิมมี 4 เอลิเมนต์(A,B,C,D) เมื่อต้องการแบ่งเอลิเมนต์ B ก็จะทำการแบ่งครึ่งด้านทั้งสี่ได้เอลิเมนต์ย่อย 4 ตัวคือ i,ii,iii,iv สังเกตว่าจะเกิดจุดต่อบนด้านเอลิเมนต์ A และ C ซึ่งจะถูกสร้างเป็นจุดต่อที่มีระดับขั้นความเสรีแบบไม่ปกติ (Irregular Node) หรือเรียกว่าจุดต่อแบบถูกบังคับ (Constrained Node) ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความต่อเนื่องของค่าเปลี่ยนตำแหน่งระหว่างเอลิเมนต์ และหากต้องการที่จะมีการแบ่งเอลิเมนต์ i จากกฎหนึ่งระดับจะไม่สามารถแบ่งได้ทันที จะต้องทำการ

แบ่งเอลิเมนต์ A เพื่อให้ได้เอลิเมนต์ v,vi,vii,viii เสียก่อน จึงจะสามารถแบ่งเอลิเมนต์ i ได้ ดังนั้นจุดต่อบนด้าน A ที่เป็นจุดต่อแบบถูกบังคับก็จะเปลี่ยนเป็นจุดต่อที่มีระดับขั้นความเสรีแบบอิสระ และจะได้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กลง มีระดับการแบ่งเพิ่มขึ้นหนึ่งระดับคือเอลิเมนต์ w,x,y,z ซึ่งจะเกิดจุดต่อแบบถูกบังคับเพิ่มขึ้นที่ด้านของเอลิเมนต์ D,ii,iv.vi ทำให้ต้องมีการจัดการที่จุดต่อเพื่อให้เกิดความต่อเนื่องของค่าเปลี่ยนตำแหน่งระหว่างเอลิเมนต์ ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อถัดไป



● จุดต่อแบบอิสระ

○ จุดต่อแบบถูกบังคับ

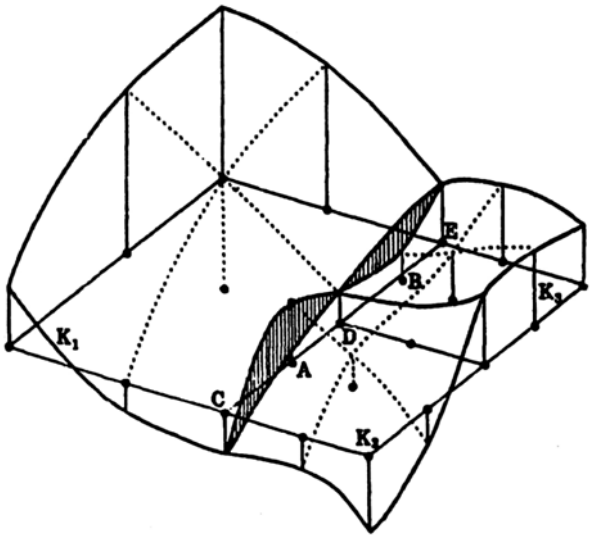
รูปที่ 4 ลักษณะข้อกำหนดตามกฎการแบ่งแบบหนึ่งระดับ

Demkowicz และคณะ (1989) ได้เสนอเทคนิคการแบ่งเอลิเมนต์แบบหนึ่งระดับ เช่นเดียวกับ Devloo แต่ในงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นถึงเทคนิคในการแบ่งเอลิเมนต์และจัดการกับจุดต่อชนิดที่เป็นจุดต่อแบบถูกบังคับ ดังแสดงในรูปที่ 5 แสดงถึงความไม่ต่อเนื่องของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นระหว่างเอลิเมนต์ Demkowicz ได้เสนอสมการที่ใช้ในการคำนวณหาค่าของจุดต่อที่เป็นจุดต่อแบบถูกบังคับดังสมการที่ 37 ดังนี้

$$u_h(A) = \alpha u_h(C) + \beta u_h(D) + \gamma u_h(E) \tag{37}$$

โดยที่ u_h = ผลเฉลยของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งไฟไนต์เอลิเมนต์

α, β, γ = สัมประสิทธิ์ค่าความเหมาะสม เพื่อทำให้เกิดความต่อเนื่องของค่าเปลี่ยนตำแหน่งระหว่างเอลิเมนต์



รูปที่ 5 แสดงถึงความไม่ต่อเนื่องของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นระหว่างเอลิเมนต์