บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตัวแบบการพยากรณ์ความต้องการเหล็ก ภายใต้ความไม่แน่นอนโดยวิธีเบย์ ในครั้งนี้ผู้ศึกษาได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามหัวข้อดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเทคนิคการพยากรณ์

ก่อนที่จะทำการตัดสินใจเลือกวิธีการพยากรณ์ใดๆควรจะพิจารณาถึงลักษณะรูปแบบของข้อมูลที่กำลังตัดสินใจว่ามีความสอดคล้องกับลักษณะของวิธีการพยากรณ์ใดที่ต้องการจะเลือกใช้สำหรับการพยากรณ์โดยทั่วไป มีหลักเกณฑ์ในการพิจารณความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

2.1.1 เทคนิคการพยากรณ์ (Box et al.,1994)

เป็นวิธีการที่ใช้คาดการข้อมูลในอนาคต โดยคาดว่าจะมีลักษณะเช่นเดียวกับข้อมูลในปัจจุบันหรืออดีต เช่น ข้อมูลยอดขายหรืออุปสงค์ในความเป็นจริง ซึ่งได้รับอิทธิพลจากแนวโน้ม (Trend) ฤดูกาล (Seasonal) วัฏจักร (Cycle) และเหตุการณ์ผิดปกติ (Irregular Variation) ต่างๆ เป็นต้น การพยากรณ์ (Forecasting) มีการนำไปใช้อย่างแพร่หลาย ทั้งทางด้านเศรษฐกิจและสังคม ยกตัวอย่างเช่น การพยากรณ์ความต้องการ ราคา ผลผลิต หรือแม้กระทั่งการพยากรณ์อากาศ อุณหภูมิ ปริมาณน้ำฝน การพยากรณ์เป็นสิ่งที่จำเป็นอย่างมากในการวางแผนในด้านต่างๆ ทั้งนี้ ความแม่นยำ รวดเร็ว เป็นปัจจัยสำคัญในการวัดคุณภาพของของการพยากรณ์ เทคนิคหรือวิธีการพยากรณ์ก็ได้มีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่องเพื่อตอบสนองต่อความต้องการดังกล่าว ซึ่งเทคนิคการพยากรณ์สามารถแบ่งได้เป็นสองประเภทหลักๆคือ เทคนิคการพยากรณ์เชิงคุณภาพ (Qualitative Forecasting Techniques) และ เทคนิคการพยากรณ์เชิงปริมาณ (Quantitative Forecasting Techniques)

ในส่วนของเทคนิคการพยากรณ์เชิงปริมาณ สามารถแบ่งออกเป็นสองกลุ่มหลักๆ ได้แก่ การพยากรณ์แบบอนุกรมเวลา (Time Series Forecasting) เช่น วิธีนาอีฟ (Naive) วิธีปรับเรียบ (Exponential Smoothing) วิธี ARIMA วิธีของเบย์ (Bayesian) และ การพยากรณ์แบบวิเคราะห์ความสัมพันธ์ (Causal Forecasting) เช่น วิธีวิเคราะห์ความถดถอย (Regression Analysis) วิธี Econometric วิธี Input-Output นอกจากนี้ก็ยังมีเทคนิคการพยากรณ์สมัยใหม่อีกหลายวิธีที่ได้รับความนิยม เช่น วิธีโครงข่ายประสาทเทียม (Artificial Neural Network, ANN) วิธีจีเนติกอัลกอริธึม (Genetic Algorithms, GA) วิธีตรรกศาสตร์คลุมเครือ สำหรับในงานวิจัยนี้จะขออธิบายเทคนิคการพยากรณ์ที่นิยมใช้ในปัจจุบัน และเทคนิคที่ใช้เป็นพื้นฐานความรู้ในการศึกษาและทำวิจัย

1) วิธีการพยากรณ์อย่างง่าย (Naïve Method) (Bisgaard,2011)

เป็นการพยากรณ์ว่ายอดขายในอนาคตจะเท่ากับยอดขายปัจจุบัน เช่น เดือนมกราคมขายได้ 10 ตัน เดือนกุมภาพันธ์จะควรขายได้ 10 ตัน เช่นกัน แต่ถ้าเดือนกุมภาพันธ์ขายได้จริง 15 ตัน ก็จะพยากรณ์เดือนมีนาคมว่าขายได้ 15 ตันเช่นกัน การพยากรณ์อย่างง่ายอาจแสดงเป็นแนวโน้มของอุปสงค์ ดังนี้ ถ้าเดือนมกราคมขายได้ 10 ตัน เดือนกุมภาพันธ์ขายได้ 14 ตัน จะพยากรณ์เดือนมีนาคมว่าขายได้ 14 + (14-10) เท่ากับ 18 ตัน ถ้าเดือนมีนาคมขายได้จริง 15 ตัน เดือนเมษายนจะมียอดขายพยากรณ์ 15+ (15-14) เท่ากับ 16 ตัน และใช้พยากรณ์ฤดูกาลว่าถ้าปีที่แล้วในช่วงเวลานี้ขายได้เท่าไร ปีนี้ก็น่าจะขายได้เท่านั้น วิธีนี้ง่ายและมีค่าใช้จ่ายต่ำ แต่ใช้ได้ในกรณีที่อิทธิพลต่างๆที่มีต่อยอดขายส่งผลอย่างสม่ำเสมอเท่านั้น แต่ถ้ามีเหตุการณ์ผิดปกติเกิดขึ้น จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นได้

2) วิธีการพยากรณ์แบบถดถอยเชิงพหุ (Multiple Regression) (Yan,2009)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + ... + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

เมื่อ t แทนเวลา โดยที่ $t = 1, ..., n$

Y_t แทน ตัวแปรตาม ณ เวลา t และ X_{it} แทนตัวแปรอิสระ ณ เวลา t โดยที่ $i = 1, ..., k$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ แทน ค่าคงที่ และ ε_t แทน ค่าความผิดพลาด ณ เวลา t และเป็นอิสระกัน โดย ε_t จะมีการแจกแจกแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย เท่ากับ 0 และค่าความแปรปรวน คือ σ^2 สำหรับการพยากรณ์ ณ เวลา t จะได้

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1t} + \hat{\beta}_2 X_{2t} + ... + \hat{\beta}_k X_{kt} + \varepsilon_t \qquad (2)$$

เมื่อ $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, ..., \hat{\beta}_k$ ได้จากการประมาณค่าโดยวิธี maximum likelihood

3) วิธีการพยากรณ์แบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average (MA)) (Bisgaard,2011)

$$F_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + ... + y_{t+1-n}}{N} \tag{3}$$

เมื่อ N = ขนาดของ moving average โดยที่ $N = 1,...,n$

ตัวอย่างเช่น

$$F_4 = \frac{y_3 + y_2 + y_1}{3}$$

$$F_5 = \frac{y_4 + y_3 + y_2 + y_1}{4}$$

เมื่อ

$$N = 1 \rightarrow F_2 = y_1, F_3 = y_{2,...}$$

$$N = n \rightarrow F_{n+1} = \overline{y}$$

ถ้า N เป็นฤดูกาล ดังนั้น จะสามารถกำจัดฤดูกาลไปได้ในตัว

สำหรับวิธี Moving Average ที่ได้กล่าวมาแล้ว ยังมีวิธี double MA, triple MA และ centered MA อีก เช่น 2x2 MA, 3x5 MA , 3x3x5 MA เป็นต้น

กรณีมี trend ในข้อมูล

ให้ใช้วิธี MA และ double MA โดยกำหนดให้มี moving average length ที่เท่ากันดังนี้

$$F_{t+m} = a_t + b_t m_t \qquad \text{โดยที่ } m = 1,2,3,\ldots \tag{4}$$

เมื่อ

$$a_t = 2S'_t - S''_t$$

$$b_t = \frac{2}{N-1}(S'_t - S''_t)$$

$$S'_t = \frac{1}{N}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + ... + y_{t+1-n})$$

$$S''_t = \frac{1}{N}(S'_t + S'_{t-1} + S'_{t-2} + ... + S'_{t+1-n})$$

4) วิธีการพยากรณ์แบบ Exponential Smoothing (EXPS) (Montgomery,2008)

Exponential smoothing เป็นการพยากรณ์โดยกำหนดน้ำหนักให้ค่าสังเกตในปัจจุบันมีค่ามากกว่าน้ำหนักของค่าสังเกตก่อนหน้านั้น มี 3 แบบคือ

1. Single exponential smoothing

ตัวแบบการพยากรณ์แบบ Single exponential smoothing นิยามดังนี้

ให้ S_t แทนค่าพยากรณ์ของค่าสังเกต Y_t ณ เวลา t เมื่อ $t = 1,...,n$

$$S_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)S_{t-1},\ 0 \le \alpha \le 1 \tag{5}$$

ค่าพยากรณ์ S_1 ไม่เกิดขึ้นเนื่องจากไม่มีเทอม S_0 นอกเสียจากจะกำหนดค่าเริ่มต้นให้ S_0 เทคนิคนี้ใช้สำหรับข้อมูลที่ ไม่มี trend และ seasonal ถ้าข้อมูลมี trend จะใช้ Double exponential smoothing และถ้ามีทั้ง trend และ seasonal จะใช้ Triple Exponential Smoothing

2. Double exponential smoothing หรือ Holt's method

ตัวแบบการพยากรณ์แบบ Double exponential smoothing ได้จากขยายตัวแบบของ Single exponential smoothing ออกไปดังนี้

$$S_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + A_{t-1}),\ 0 \le \alpha \le 1 \tag{6}$$

โดยที่ $$A_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)A_{t-1},\ 0 \le \beta \le 1 \tag{7}$$

เมื่อ β คือค่าคงที่แสดง trend

3. Triple Exponential Smoothing หรือ Holt-Winters method

ตัวแบบการพยากรณ์แบบ Triple exponential smoothing ได้จากขยายตัวแบบของ Double exponential smoothing ออกไป มี 2 แบบคือ

3.1 Multiplicative Seasonal Model

$$S_t = \alpha(Y_t / B_{t-s}) + (1-\alpha)(S_{t-1} + A_{t-1}),\ 0 \le \alpha \le 1, \tag{8}$$

$$A_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)A_{t-1},\ 0 \le \beta \le 1, \tag{9}$$

$$B_t = \gamma(Y_t / S_t) + (1-\gamma)B_{t-s},\ 0 \le \gamma \le 1, \tag{10}$$

เมื่อ γ คือค่าคงที่แสดง seasonal และ s คือความยาวช่วงของ seasonal ใช้ตัวแบบการพยากรณ์นี้เมื่อข้อมูลมี seasonal เป็นแบบการคูณ (multiplicative seasonality) คือในเวลาเดียวกันของแต่ละฤดูกาล ค่าสังเกตจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็นค่าร้อยละ ตัวอย่างเช่นข้อมูลรายเดือน 5 ปี ความยาวช่วงของ seasonal คือ 12 และข้อมูลปรากฏให้เห็นว่าในเดือนธันวาคมของแต่ละปี ค่าสังเกตจะเพิ่มขึ้นร้อยละ 40 ไม่ใช่เพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็นค่าคงที

3.2 Additive Seasonal Model

$$S_t = \alpha(Y_t - B_{t-s}) + (1-\alpha)(S_{t-1} + A_{t-1}),\ 0 \le \alpha \le 1, \tag{11}$$

$$A_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)A_{t-1},\ 0 \le \beta \le 1, \tag{12}$$

$$B_t = \gamma(Y_t - S_t) + (1-\gamma)B_{t-s},\ 0 \le \gamma \le 1, \tag{13}$$

เมื่อ γ คือค่าคงที่แสดง seasonal และ s คือความยาวช่วงของ seasonal ใช้ตัวแบบการพยากรณ์นี้เมื่อข้อมูลมี seasonal เป็นแบบการบวก (additive seasonality) คือในเวลาเดียวกันของแต่ละฤดูกาล ค่าสังเกตจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงเป็นค่าคงที ในทางปฏิบัติเราไม่ทราบว่าจะต้องกำหนดค่า moving average length เท่าไรดี จึงจะทำให้ ค่า error หรือ mean square error (MSE) หรือ ค่าวัดความผิดพลาดอื่นๆ ให้ค่าต่ำที่สุด ดังนั้นเราควรจะต้องกำหนดค่า α ให้เหมาะสม

5) วิธีการพยากรณ์แบบ Autoregressive Integrated Moving Average Model (ARIMA) (Montgomery,2008)

แบบจำลอง ARIMA เป็นแบบจำลองที่ได้รับความนิยม และเป็นวิธีที่ให้ค่าพยากรณ์ในระยะสั้นที่ดี อีกทั้งในการจัดทำสมการและการพยากรณ์ยังมีขั้นตอนที่ยุ่งยาก และซับซ้อนน้อยกว่าแบบมหาภาคที่อยู่ในลักษณะระบบสมการหลายชั้น สำหรับแบบจำลอง ARIMA เป็นแบบจำลองที่พัฒนาโดย George E.P.Box และ Gwilym M. Jenkins ในปี ค.ศ. 19702 โดยพื้นฐานแล้วแบบจำลอง ARIMA เป็นวิธีที่ให้ค่าพยากรณ์ในระยะสั้นที่ดี หรือเหมาะกับการพยากรณ์ไปข้างหน้าในช่วงเวลาสั้นๆ และต้องมีช่วงของข้อมูลที่ยาวพอสมควร แบบจำลอง ARIMA(p,d,q) ประกอบด้วย 3 ส่วนหลักๆ ได้แก่ แบบจำลอง Auto Regressive (AR(p)) กระบวนการ Integrated (I(d)) และแบบจำลอง Moving Average (MA(q)) โดยรายละเอียดของแต่ละส่วนมีดังนี้

1. แบบจำลอง Auto Regressive (AR(p))

แบบจำลอง Auto Regressive เป็นรูปแบบที่แสดงว่าค่าสังเกต y_t ถูกกำหนดจากค่าของ $y_t,\dots,y_{t-p}$ หรือ ค่าสังเกตที่เกิดขึ้นก่อนหน้า p โดยกระบวนการหรือระบบ AR(p) คือกระบวนการหรือระบบ Auto Regressive ที่มีอันดับที่ p ซึ่งเขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$\text{AR(p)} \quad \text{คือ} \quad x_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{14}$$

โดยที่

μ คือ ค่าคงที่ (Constant Term)

ϕ_j คือ พารามิเตอร์ตัวที่ j

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t

ในกรณี ของ AR(1) สามารถเขียนรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (15)$$

หรือ

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} = \mu + \varepsilon_t \quad (16)$$

หรือ

$$(1 - \phi_1 \beta) x_t = \mu + \varepsilon_t \quad (17)$$

เมื่อ β คือ backward shift operation

และในกรณี ของ AR(2) สามารถเขียนรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (18)$$

หรือ

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} = \mu + \varepsilon_t \quad (19)$$

หรือ

$$(1 - \phi_1 \beta - \phi_2 \beta^2) y_t = \mu + \varepsilon_t \quad (20)$$

2. แบบจำลอง Moving Average (MA(q))

แบบจำลอง Moving Average (MA) เป็นรูปแบบที่แสดงว่าค่าสังเกต y_t ถูกกำหนดจากค่าความคลาดเคลื่อน $\varepsilon_{t-1},\ldots,\varepsilon_{t-p}$ หรือค่าความคลาดเคลื่อนที่อยู่ก่อนหน้า โดยกระบวนการหรือระบบ MA(q) คือกระบวนการหรือระบบ Moving Average ที่มีอันดับ q ซึ่งเขียนในรูปของ MA (q) ได้ดังนี้

$$\text{MA (q) คือ} \quad y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (21)$$

โดยที่

μ คือ ค่าคงที่ (Constant Term)

θ_j คือ พารามิเตอร์ตัวที่ j

ε_t คือ ความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t

ในกรณี MA(1) สามารถเขียนรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (22)$$

หรือ

$$y_t = \mu + (1 - \theta_1 \beta)\varepsilon_t \tag{23}$$

และในกรณี MA(2) สามารถเขียนรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \tag{24}$$

หรือ

$$y_t = \mu + (1 - \theta_1 \beta - \theta_2 \beta^2)\varepsilon_t \tag{25}$$

3. แบบจำลอง Auto Regressive Moving Average (ARMA(p,q))

เป็นแบบจำลองที่นำเอากระบวนการ Auto Regressive และ Moving Average มาใช้รวมกัน โดยกระบวนการหรือระบบ ARMA(p,q) คือกระบวนการหรือระบบ Auto Regressive ที่มีอันดับที่ p และ Moving Average ที่มีอันดับ q ซึ่งเขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$\Delta_t y_t = \delta + \phi y_{t-1} + \phi y_{t-2} + \ldots + \phi y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{26}$$

โดยที่

y_t คือ ค่าสังเกตในอนุกรมเวลา ณ เวลา t

p คือ อันดับของ Autoregressive

q คือ อันดับของ Moving Average

δ คือ ค่าคงที่ (Constant Term)

t คือ เวลา

ϕ คือ พารามิเตอร์ของ Auto Regressive

θ คือ พารามิเตอร์ของ Moving Average

ε_t คือ กระบวนการ white noise ซึ่งก็คือ ค่าความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t

4. กระบวนการ Integrated (I (d))

กระบวนการ Integrated (I(d)) เป็นการหาผลต่างของอนุกรมเวลาระหว่างข้อมูล ณ ปัจจุบันกับข้อมูลถอยหลังไป d คาบเวลา โดยสาเหตุที่ต้องทำการหาผลต่างของอนุกรมเวลาเนื่องจากแบบจำลอง ARIMA ต้องใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลาทีมีคุณสมบัติคงที่ (Stationary) เท่านั้น โดยในกรณีข้อมูลอนุกรรมเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์มีคุณสมบัติไม่คงที่ (Nonstationary) จะต้องทำการแปลงข้อมูลดังกล่าวให้เป็นข้อมูลที่มีคุณสมบัติคงที่

ก่อน โดยการหาผลต่างของข้อมูลอนุกรมเวลาก่อนที่นำไปสร้างแบบจำลอง ARIMA ซึ่งโดยทั่วไปแล้วถ้าต้องหาผลต่างอันดับที่ d สามารถเขียนในรูปของ I(d) ได้ดังนี้

I (d) คือ $\Delta_d x_t = \Delta_{d-1}(x_t - x_{t-1})$ หรือ $(1-\beta)^d x_t$ (27)

ในกรณี I (1) สามารถเขียนรูปแบบได้ดังนี้

I (1) คือ $\Delta x_t = (x_t - x_{t-1})$ หรือ $(1-\beta)x_t$

ในกรณี I (2) สามารถเขียนรูปแบบได้ดังนี้

I (2) คือ $\Delta_2 x_t = \Delta(x_t - x_{t-1})$ หรือ $(1-\beta)^2 x_t$

โดยที่

ε_t คือ พจน์ความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t

$(1-\beta)^d x_t$ คือ ผลต่างอันดับที่ d

β คือ Backward shift operation

จากรายละเอียดต่างๆ ที่กล่าวข้างต้นถ้านำแบบจำลอง Auto Regressive แบบจำลอง Moving Average และ กระบวนการ Integrated มาพิจารณารวมกันสามารถนำมากำหนดเป็นรูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง ARIMA ที่ใช้ในการประมาณการคือ

$$\Delta_t y_t = \delta + \phi\Delta_d y_{t-1} + \phi\Delta_d y_{t-2} + \ldots + \phi\Delta_d y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (28)$$

โดยที่

y_t คือ ค่าสังเกตในอนุกรมเวลา ณ เวลา t

d คือ จำนวนครั้งของการหาผลต่างเพื่อให้อนุกรมเวลามีคุณสมบัติคงที่ (Stationary)

p คือ อันดับของ Autoregressive

q คือ อันดับของ Moving Average

δ คือ ค่าคงที่ (Constant Term)

t คือ เวลา

Δ_d คือ ผลต่างอันดับที่ d

$\phi_1, \ldots, \phi_p$ คือ พารามิเตอร์ของ Auto Regressive

$\theta_1, \ldots, \theta_q$ คือ พารามิเตอร์ของ Moving Average

ε_t คือ กระบวนการ white noise ซึ่งก็คือ ค่าความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t ภายใต้ข้อสมมติที่ว่าความคลาดเคลื่อนที่คนละเวลาเป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อ

กันโดยมีการแจง แจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และความแปรปรวนคงที่

ดังนั้นเพื่อให้ง่ายขึ้นสำหรับการหาค่าพยากรณ์ Y_t ของ ARIMA สามารถหาได้จากนิยามที่สรุปไว้ต่อไปนี้

$$(1-\varnothing_1\beta-\varnothing_2\beta^2-...-\varnothing_p\beta^p)(1-\beta)^d Y_t=(1-\omega_1\beta-\omega_2\beta^2-...-\omega_q\beta^q)\varepsilon_t \tag{29}$$

เมื่อ $\beta Y_t = Y_{t-1}$, $\beta^2 Y_t = Y_{t-2}$, $\beta^3 Y_t = Y_{t-3}$, … (30)

$$\beta\varepsilon_t=\varepsilon_{t-1}\,,\ \beta^2\varepsilon_t=\varepsilon_{t-2}\,,\ \beta^3\varepsilon_t=\varepsilon_{t-3}\,,\ \ldots \tag{31}$$

ตัวอย่างเช่น

ARIMA(0,1,0) คือ

$$\begin{aligned}
&(1-\beta)Y_t=\varepsilon_t\\
&Y_t-\beta Y_t=\varepsilon_t\\
&Y_t-Y_{t-1}=\varepsilon_t\\
&Y_t=Y_{t-1}+\varepsilon_t
\end{aligned} \tag{32}$$

ARIMA(2,1,2) คือ

$$\begin{aligned}
&(1-\varnothing_1\beta-\varnothing_2\beta^2)(1-\beta)Y_t=(1-\omega_1\beta-\omega_2\beta^2)\varepsilon_t\\
&(1-\varnothing_1\beta-\varnothing_2\beta^2)(Y_t-\beta Y_t)=\varepsilon_t-\omega_1\beta\varepsilon_t-\omega_2\beta^2\varepsilon_t\\
&(Y_t-\varnothing_1\beta Y_t-\varnothing_2\beta^2Y_t)-(\beta Y_t-\varnothing_1\beta^2Y_t-\varnothing_2\beta^3Y_t)=\varepsilon_t-\omega_1\varepsilon_{t-1}-\omega_2\varepsilon_{t-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Y_t-\varnothing_1\beta Y_t-\varnothing_2\beta^2Y_t-\beta Y_t+\varnothing_1\beta^2Y_t+\varnothing_2\beta^3Y_t=\varepsilon_t-\omega_1\varepsilon_{t-1}-\omega_2\varepsilon_{t-2}\\
&Y_t-\varnothing_1Y_{t-1}-\varnothing_2Y_{t-2}-Y_{t-1}+\varnothing_1Y_{t-2}+\varnothing_2Y_{t-3}=\varepsilon_t-\omega_1\varepsilon_{t-1}-\omega_2\varepsilon\\
&Y_t-\varnothing_1Y_{t-1}-Y_{t-1}-\varnothing_2Y_{t-2}+\varnothing_1Y_{t-2}+\varnothing_2Y_{t-3}=\varepsilon_t-\omega_1\varepsilon_{t-1}-\omega_2\varepsilon\\
&Y_t-(\varnothing_1-1)Y_{t-1}-(\varnothing_2-\varnothing_1)Y_{t-2}+\varnothing_2Y_{t-3}=\varepsilon_t-\omega_1\varepsilon_{t-1}-\omega_2\varepsilon
\end{aligned}$$

$$Y_t=(\varnothing_1-1)Y_{t-1}+(\varnothing_2-\varnothing_1)Y_{t-2}-\varnothing_2Y_{t-3}+\varepsilon_t-\omega_1\varepsilon_{t-1}-\omega_2\varepsilon \tag{33}$$

ตัวแบบ ARIMA ใช้วิเคราะห์ข้อมูลได้ทั้งแบบ stationary และ nonstationary ข้อมูล stationary คือข้อมูลที่ mean และ variance ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ข้อมูล nonstationary คือข้อมูลที่ mean หรือ variance เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ค่า variance ทำให้ stationary ได้โดยการแปลงข้อมูลด้วยฟังก์ชันลอการิทึม (Log transform) ซึ่งต้องทำก่อนใช้ตัวแบบ Aสำหรับค่า mean ทำให้ stationary ได้โดยการทำผลต่างข้อมูล (differencing) ซึ่งสามารถทำในตัวแบบ ARIMA ได้ โดยการกำหนดค่าให้กับ d ส่วนระดับของ autocorrelation (p) และระดับของ moving average (q) พิจารณาได้จากกราฟ (Autocorrelation function) ACF และ Partial autocorrelation function (PACF) (Montgomery,2008)

5. Autocorrelation Function (ACF)

เป็นฟังก์ชันของการวัดสหสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล ณ เวลา t (x_t) และ ข้อมูล ณ เวลา $t-k(x_{t-k})$ ของช่วงเวลาห่างกัน k หน่วย ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ ρ_k หรือ r_k ในกรณีสหสัมพันธ์ในตัวเองของตัวอย่าง ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\rho_k \text{ หรือ } r_k \ \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(x_t-\bar{x})(x_{t-k}-\bar{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t-\bar{x})^2} \tag{34}$$

เมื่อ $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_t$ และ k = 0,1,2,3,.....

โดยความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ r_k (Standard Error of r_k) ซึ่งมีสูตรในการคำนวณดังนี้

$$se_{r_k}=\frac{1}{\sqrt{n}} \tag{35}$$

สหสัมพันธ์ในตัวเองของข้อมูลสุ่ม (random data) มีการแจกแจงเชิงตัวอย่างที่สามารถประมาณได้ โดยการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ย (mean) เท่ากับศูนย์ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{n}}$

ในการศึกษาจะใช้สหสัมพันธ์ในตัวเองเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับสืบค้นคุณสมบัติของข้อมูลอนุกรมเวลาเชิงประจักษ์ โดยมี 2 วิธีสำหรับทดสอบว่าค่า rk มีค่าแตกต่างไปจากศูนย์หรือไม่โดย ใช้การแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution) หรือ ใช้ค่าสถิติ Box-Pierce Q statistic ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

การแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution)

$$r_k \sim N(0,\frac{1}{\sqrt{n}})$$

ค่าสถิติ Box-Pierce Q statistic

$$Q=n\sum_{k=1}^{m}r^2 \sim \chi^2(m-p-q)$$

โดยที่ m คือค่าล่าหรือค่าล้าหลังสูงสุด (Maximum Lag) ที่พิจารณา

6. Partial Autocorrelation Function (PACF)

เป็นการพิจารณาสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x_t กับ x_{t-k} อาจเป็นไปได้ว่าสหสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นผลเนื่องมาจากสหสัมพันธ์ระหว่าง 2 ตัวแปรนี้กับตัวแปร $x_{t-1},...,x_{t-k+1}$ ดังนั้น

เพื่อที่จะได้สหสัมพันธ์ระหว่าง x_t กับ x_{t-k} ที่ได้ขจัดความเกี่ยวข้องระหว่างตัวแปรทั้งสองตัวนี้กับตัวแปร $x_{t-1},...,x_{t-k+1}$ ดังกล่าว จึงต้องทำการวัดสหสัมพันธ์ของทั้งสองตัวแปรในรูปแบบของการสหสัมพันธ์แบบมีเงื่อนไข $Corr(x_t, x_{t-k} | x_{t-1},...,x_{t-k+1})$ ซึ่งเรียกว่า Partial Autocorrelation โดยแทนด้วยสัญลักษณ์ ϕ_{kk} แต่ถ้านำสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนมาพิจารณาในรูปแบบฟังก์ชัน จะเรียกว่า Partial Autocorrelation Function (PACF) ซึ่ง ϕ_{kk} สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\phi_{kk} = \frac{Cov\left[\left(x_t - \hat{x}_t\right), \left(x_{t-k} - \hat{x}_{t-k}\right)\right]}{\sqrt{Var\left(x_t - \hat{x}_t\right)}\sqrt{Var\left(x_{t-k} - \hat{x}_{t-k}\right)}} \tag{36}$$

โดยที่ $$\hat{x}_t = \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + ... + \beta_k x_{t-k+1} \tag{37}$$

6) วิธีการพยากรณ์แบบ Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average Model (SARIMA) (Montgomery,2008), (Bisgaard,2011)

วิธีการพยากรณ์แบบ SARIMA ถูกพัฒนามาจากวิธีการพยากรณ์ ARIMA (p,d,q) โดยได้เพิ่ม (P,D,Q) ของ Seasonal เข้าไปอีก SARIMA หรือSeasonal ARIMA แทนด้วย ARIMA$(p,d,q)(\mathrm{P,D,Q})$ และถ้ามีตัวแปรร่วม (covariate) X_{1t} และ X_{2t} สามารถนิยามได้ดังต่อไปนี้

$$\varnothing(\beta)\left[\Delta\left(Y_t - c_1 X_{1t} - c_2 X_{2t}\right) - \mu\right] = \Theta(\beta)\varepsilon_t \tag{38}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 คือสัมประสิทธิ์การถดถอย

$\varnothing(\beta) = \phi_p(\beta)\varnothing_{\mathbf{P}}(\beta^s)$ และ $\Theta(\beta) = \theta_q(\beta)\Theta_Q(\beta^s)$ โดยที่

$\phi_p(\beta) = 1 - \phi_1\beta - ... - \phi_p\beta^p$, $\theta_q(\beta) = 1 - \theta_1(\beta) - ... - \theta_q(\beta)^q$,

$\varnothing_{\mathbf{P}}(\beta^s) = 1 - \varnothing_1\beta^s - ... - \varnothing_P\beta^{s^P}$, และ $\Theta_Q(\beta^s) = 1 - \Theta_1\beta^s - ... - \Theta_Q\beta^{s^Q}$. Δ คือ differencing operator, $\Delta = (1-\beta)^d(1-\beta^s)^D$. β คือ backshift operator และ $\beta Y_t = Y_{t-1}, \beta^2 Y_t = Y_{t-2}$ เป็นแบบนี้ต่อๆ ไป s คือ seasonal lag และ ε_t คือ ความผิดพลาด (error)ที่มีการแจกแจงแบบปกติมีค่าเฉลี่ยเป็น 0และความแปรปรวน σ^2. $\varnothing$'s และ ϕ's คือพารามิเตอร์autoregressiveแบบ seasonal และ non-seasonal ตามลำดับ Θ's และ θ's คือพารามิเตอร์moving average แบบ seasonal และ non-seasonal ตามลำดับ p และ q คือลำดับ (order) ของพารามิเตอร์ autoregressive แบบ non-seasonal และ พารามิเตอร์moving average แบบ non-seasonal

ตามลำดับโดยที่ P และ Q คือ ลำดับ (order) ของพารามิเตอร์ autoregressive แบบ seasonal และ พารามิเตอร์ moving average แบบ seasonal ตามลำดับ d และ D แทน non-seasonal และ seasonal differencesตามลำดับ

7) วิธีการใช้วิจารณญาณ (Judgment Method) (Bisgaard,2011)

เป็นวิธีการที่ใช้เมื่อไม่มีข้อมูลในอดีตเพียงพอที่จะใช้พยากรณ์ เช่น ต้องการพยากรณ์ยอดขายของสินค้าใหม่ หรือเมื่อมีความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีเกิดขึ้น การพยากรณ์แบบนี้วิธีมีส่วนใหญ่ด้วยกันคือ

1. การประมาณการของพนักงานขาย (Sale Force Estimates) ใช้การประมาณการของพนักงานขายซึ่งเป็นผู้ที่ได้สัมผัสกับสภาพของตลาดมากที่สุด ใกล้ชิดกับลูกค้ามากที่สุด พนักงานขายจะพยากรณ์โดยรวบรวมยอดขายแต่ละเขตพื้นที่ซึ่งตนรับผิดชอบเท่านั้น แล้วส่งมายังสำนักงานใหญ่ แต่วิธีนี้ก็มีข้อผิดพลาดได้เนื่องจากพนักงานขายบางคนเป็นผู้มองโลกแง่ดีเกินไป หรือพนักงานขายมักจะรู้ดีว่ายอดขายของการพยากรณ์จะถูกใช้ในการกำหนดโควตาการขายจึงประมารการไว้ต่ำเพื่อเอายอดขายเกินเป้าได้

2. ความคิดเห็นของผู้บริหาร (Executive Opinion) ใช้พยากรณ์ผลิตภัณฑ์ใหม่ที่ยังไม่ออกสู่ท้องตลาดมาก่อน จึงใช้ความคิดเห็นของผู้บริหารที่มีประสบการณ์คนหนึ่งหรือหลายคนมาช่วยพยากรณ์และกำหนดกลยุทธ์ให้เหมาะสมกับสภาพแวดล้อม เช่น การนำผลิตภัณฑ์สู่ตลาดต่างประเทศ ข้อจำกัดของวิธีนี้ คือ มักใช้เวลาของกลุ่มผู้บริหารในการประชุมสรุปการพยากรณ์มากจึงเป็นวิธีที่มีค่าใช้จ่ายสูงและไม่ควรใช้ผู้บริหารฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งพยากรณ์ตามลำพังโดยไม่ได้สรุปร่วมกับผู้บริหารฝ่ายอื่น เพราะผลของการพยากรณ์กระทบทุกฝ่ายขององค์การ

3. การวิจัยตลาด (Market Research) เป็นวิธีที่ต้องกระทำอย่างมีระบบโดยสร้างสมมติฐานแล้วเก็บรวบรวมข้อมูลจากผู้ใช้ผลิตภัณฑ์เพื่อทำการพยากรณ์ การวิจัยตลาดต้องประกอบด้วยการออกแบบสอบถาม กำหนดวิธีการเก็บข้อมูล สุ่มตัวอย่างมาสัมภาษณ์ รวบรวมข้อมูลมาประมวลผลและเคราะห์ตามลำดับ วิธีนี้ใช้กับการพยากรณ์ในระยะสั้น ระยะปานกลางและระยะยาวได้ แต่เป็นวิธีที่เสียค่าใช้จ่ายสูงและต้องพิถีพิถันในการปฏิบัติหลายขั้นตอน

4. วิธีเดลฟาย (Delphi Method) เป็นวิธีที่ประชุมกลุ่มผู้เชี่ยวชาญเฉพาะทางที่มีความรู้เกี่ยวกับผลิตภัณฑ์นั้น วิธีนี้จะใช้ได้ดีเมื่อมีมีข้อมูลใดจะใช้พยากรณ์ได้และผู้บริหารขององค์การไม่มีประสบการณ์ในผลิตภัณฑ์นั้นเพียงพอ วิธีนี้จะเริ่มจากการส่งคำถามเวียนไปยัง

ผู้เชี่ยวชาญหลายคนให้ตอบกลับมาแล้วทำเป็นรายงานส่งให้ผู้เชี่ยวชาญทุกคนได้อ่านข้อคิดเห็นของทุกคน เพื่อให้ทุกคนปรับปรุงแนวความคิดใหม่ แล้วส่งกลับมาอีกทำซ้ำๆหลายรอบจนได้ข้อสรุปยุติจากทุกคน ข้อเสียของวิธีนี้คือเสียเวลานานมาก (อาจเป็นปี) ผู้เชี่ยวชาญบางคนอาจยึดมั่นในความคิดของตนจนไม่สรุปกับข้อคิดเห็นของคนอื่น คำถามหรือแบบสอบถามที่มีดีทำให้สรุปยาก จึงใช้วิธีนี้กับผลิตภัณฑ์ใหม่ที่ไม่สามารถใช้วิธีอื่นได้

8) ตัวแบบการพยากรณ์แบบโครงข่ายประสาทเทียม (Artificial Neural Network=ANN)

(Anderson,1997), (Hagan,1996)

โครงข่ายปราสาทเทียม หรือเรียกสั้นๆว่าข่ายงานประสาท (Neural Network) คือ การใช้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ในการประมวลผลสารสนเทศแบบเดียวกับสมองของมนุษย์ ANN เป็น Nonlinear model เป้าหมายของ ANN เหมือนกับตัวแบบ Regression คือต้องการประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อให้เกิดค่าความผิดพลาด (error) น้อยที่สุด สำหรับการหาคำตอบของตัวแบบ ANN นั้นจะใช้การวนซ้ำ

ANN โครงข่ายแบบป้อนไปข้างหน้า (Feed Forward Network) คือสารสนเทศ หรือข้อมูลจะถูกส่งผ่านจากชั้นที่ซ่อนอยู่ (Hidden Layer) หนึ่ง ไปยังชั้นที่ซ่อนอยู่ต่อๆไป (ซึ่งในหนึ่งโครงข่ายจะมีชั้นที่ซ่อนอยู่กี่ชั้นก็ได้แต่โดยปกติจะมีชั้นที่ซ่อนอยู่ประมาณ 2-5 ชั้น ตัวแบบนี้ถึงจะทำงานให้ผลที่ดี) สำหรับการส่งข้อมูลจะถูกส่งผ่านไปในทิศทางเดียวกัน ไม่มีการส่งย้อนกลับ โดยกระบวนการ (Process) จะเริ่มจาก ตัวแปรพยากรณ์ (Predictive Variables) ในชั้นของ input ตัวแปรนี้คือข้อมูลที่เรารวบรวมได้ เช่น ราคาสินค้า ปริมาณผลผลิต เป็นต้น โดยข้อมูลนี้ก็จะถูกส่งต่อไปยังชั้นที่ซ่อนอยู่ (Hidden Layer) ซึ่งชั้นนี้จะบรรจุเครื่องมือที่ใช้ทำงานของ ANN โดยจะเรียกว่า activation function คือฟังก์ชันที่แสดงความสำพันธ์ของ input ที่เข้ามากับ Output ที่จะออกไป เช่นฟังก์ชั่น logistic หรือฟังก์ชั่น Nonlinear อื่นๆ

สำหรับวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นมีได้หลายวิธี แต่จะขอยกตัวอย่างวิธีที่ได้รับความนิยมกันอย่างแพร่หลายคือวิธีการแพร่กระจายแบบย้อนกลับ (Back-propagation) ซึ่งเป็นวิธีการใช้อัลกอริทึมการแพร่กระจายแบบย้อนกลับ โดยจะทำการปรับปรุงน้ำหนักคะแนนของเครือข่ายเพื่อให้ได้ผลรวมมากกว่าค่าที่ตั้งเป้าไว้ (Threshold) หลังจากนั้นจึงจะสามารถส่ง

ข้อมูลไปยังชั้นขาออก (Output layer) ได้ แล้วจึงทำการคำนวณหาค่าความผิดพลาด ซึ่งค่าความผิดพลาดนี้ก็จะถูกส่งกลับเข้าสู่เครือข่ายเพื่อใช้แก้ไขค่าน้ำหนักคะแนนต่อไป จนได้ค่าความผิดพลาดต่ำที่สุด

9) วิธีการพยากรณ์แบบ เบย์ (Bayesian) (Robert, 2001), (Congdon,2006),(West,1997)

ตัวแบบเบย์สร้างจาก Likelihood, $p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})$, และ Prior, $\pi(\boldsymbol{\theta})$, เมื่อ $\mathbf{Y}$ คือตัวแปรสุ่มที่สังเกตค่าได้ และ $\boldsymbol{\theta}$ คือค่าพารามิเตอร์ที่สังเกตค่าไม่ได้

การแจกแจงร่วม (Joint Distribution) ของ $\boldsymbol{\theta}$ กับ $\mathbf{Y}$ สามารถเขียนอยู่ในรูป

$\pi(\boldsymbol{\theta},\mathbf{Y}) = p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})$ และ Posterior ที่สร้างจากกฎของเบย์คือ

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) = \frac{p(\boldsymbol{\theta},\mathbf{Y})}{p(\mathbf{Y})} = \frac{p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{Y})} \tag{39}$$

โดยที่

$p(\mathbf{Y}) = \sum_{\boldsymbol{\theta}} p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})$ เมื่อ $\boldsymbol{\theta}$ เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete) และ

$p(\mathbf{Y}) = \int p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}$ เมื่อ $\boldsymbol{\theta}$ เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (Continuous)

เนื่องจาก $p(\mathbf{Y})$ เป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{Y}$ ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับ $\boldsymbol{\theta}$ จึงถูกพิจารณาว่าเป็นค่าคงที่ และสามารถเขียน $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$ อยู่ในรูป $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})$ นั่นคือ $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$ เป็นสัดส่วนกับผลคูณของ จาก Likelihoodกับ Prior

ตัวแบบที่ซับซ้อนสามารถใช้ตัวแบบเบย์แก้ปัญหาได้ เช่นใช้ตัวแบบเบย์ที่มี 3 ขั้น ได้แก่ ขั้นตอนที่ 1 ระบุการการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่สังเกตค่าได้เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ให้ ขั้นตอนที่ 2 ระบุการแจกแจงของพารามิเตอร์เมื่อกำหนดไฮเปอร์พารามิเตอร์ให้ และขั้นตอนที่ 3 ระบุการแจกแจงของไฮเปอร์พารามิเตอร์ในทำนองเดียวกัน จำนวนขั้นตอนอาจมีมากกว่า 3 ได้

ตัวแบบเบย์สามารถเพิ่มความแกร่ง (Robustness) ให้กับตัวประมาณแบบเบย์ได้ เนื่องจากความไม่แน่นอน (Uncertainty) ถูกนำมาคิดไว้ในขั้นตอนของการแจกแจงของ Prior นอกจานั้นวิธีการของเบย์ยังทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์ใน Posterior ง่ายขึ้น โดยใช้การการจำลองสถานการณ์ (Simulation) การจำลองสถานการณ์ที่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือ วิธีเชิงตัวเลข Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

สำหรับตัวอย่างเพื่อให้เห็นภาพรวมของวิธีเบย์ จะขอยกตัวอย่างตัวแบบที่มีความซับซ้อน จึงใช้วิธีการของเบย์ในการแก้ปัญหา ตัวแบบคือ

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 Z_{it.1} + \beta_2 Z_{it.2} + ... + \beta_p Z_{it.p} + \gamma_i \Delta W(t \mid \alpha_i, \delta_i) + \gamma_i X_{it} + \varepsilon_{it}$$

เมื่อ Y_{it} แทนราคา หรือปริมาณผลผลิตของพืชชนิดที่ i ในช่วงเวลา t, i=1,…,m และ t=1,…,T_i

โดยที่

$$\varepsilon_{it} \sim \mathrm{N}\left(0, \left[\gamma_i (1+3\zeta_{it})\sigma_\varepsilon\right]^2\right)$$

$$Y_{it} \sim \mathrm{N}\left(\beta_0 + \beta_1 Z_{it.1} + \beta_2 Z_{it.2} + ... + \beta_p Z_{it.p} + \gamma_i \Delta W(t \mid \alpha_i, \delta_i) + \gamma_i X_{it}, \left[\gamma_i (1+3\zeta_{it})\sigma_\varepsilon\right]^2\right)$$

Prior (มีหลายระดับ) คือ

1. $p(\sigma_\varepsilon) \propto Unif(0,\infty)$, $p(\beta_i) \propto \text{constant}$
2. ข้อมูลผิดปกติ (Outliners)

   $$\zeta_{it} \sim \mathrm{Bern}(0.05)$$

3. ราคาหรือปริมาณผลผลิตรวมทุกช่วงเวลา

   $$\gamma_i \sim \mathrm{N}(\mathrm{g}_i, \sigma_\gamma^{\ 2}),\ p(\sigma_\gamma) \propto \mathrm{U}nif(0,\infty)$$

   $$g_j \sim \mathrm{N}(\mu_g, \sigma_g^{\ 2}),\ p(\mu_g) \propto 1,\ p(\sigma_g) \propto \mathrm{U}nif(0,\infty)$$

   $$S_i \sim \mathrm{N}(\gamma_i, [0.2\gamma_i]^2)$$

4. Autoregression ที่ซ่อนเร้นอยู่ (Latent Autoregression)

   $$X_{it} \sim \mathrm{N}(\lambda_{i1}\mathrm{X}_{it-1} + \lambda_{i2}\mathrm{X}_{it-2}, \sigma_x^{\ 2}),\ \sigma_x = 0.8\sigma_\varepsilon$$

   $$(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})^T \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda),\ \mathrm{p}(\boldsymbol{\mu}_\lambda, \boldsymbol{\Sigma}_\lambda) \propto \left|\boldsymbol{\Sigma}_\lambda\right|^2$$

   $$(X_{i0}, X_{i,-1})^T \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}_{x_0}, \boldsymbol{\Sigma}_{x_0}),\ \boldsymbol{\mu}_{x_0} = (0,0)^T,\ \boldsymbol{\Sigma}_{x_0} = diag(2,2).$$

5. พารามิเตอร์อื่นๆ

   $$\alpha_i \sim \mathrm{N}(\mathrm{a}_i, \sigma_\alpha^{\ 2}),\ p(\sigma_\alpha) \propto \mathrm{U}nif(0,\infty)$$

   $$\delta_i \sim \mathrm{N}(\mathrm{d}_i, \sigma_\delta^{\ 2}),\ p(\sigma_\delta) \propto \mathrm{U}nif(0,\infty)$$

   $$a_j \sim \mathrm{N}(\mu_a, \sigma_a^{\ 2}),\ p(\mu_a) \propto 1,\ p(\sigma_a) \propto \mathrm{U}nif(0,\infty)$$

$d_j \sim \mathrm{N}(\mu_d, \sigma_d^{\,2})$, $p(\mu_d) \propto 1$, $p(\sigma_d) \propto \mathrm{U}nif(0, \infty)$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบดังกล่าวมีขั้นตอนดังนี้

ก. สร้าง Likelihood จากการแจกแจงของ Y_{it}

ข. สร้าง Posterior จากผลคูณของ Likelihood กับ prior ทุกตัว

ค. จำลองสถานการณ์ด้วยวิธีการ MCMC โดยใช้การเขียนโปรแกรม ใน Open bugs และ R หรือโปรแกรมคณิตศาสตร์ต่างๆ

10) Markov Chain Monte Carlo (MCMC)และ Gibbs sampling (Robert,2004)

MCMC เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้สำหรับสร้างข้อมูลจากการแจกแจงที่มีมิติขนาดใหญ่ในตัวแบบเบย์ เป้าหมายหลักคือการสร้าง $\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{\theta}^{(2)}, \ldots$ ของ Posterior จากห่วงโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain) โดยเริ่มจาก Initial state $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ และเมื่อห่วงโซ่คงที่ในการวนซ้ำรอบที่ T เซตของ $\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \ldots, \boldsymbol{\theta}^{(T)}$ จะถูกตัดทิ้ง เรียกว่า ช่วงของการ burn-in และ $\boldsymbol{\theta}^{(T+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(T+)}, \boldsymbol{\theta}^{(T+3)}, \ldots$ เป็นห่วงโซ่ที่คงที่ (Stationary) แล้ว ที่สร้างมาจาก Posterior มีหลายวิธีในการสร้าง MCMC แต่วิธีที่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือ Gibbs sampling

Gibbs sampling (Geman and Geman, 1984)

เป็นวิธีการสร้าง MCMC จากการสุ่มตัวอย่างแบบวนซ้ำจากการแจกแจงแบบมีเงื่อนของแต่ละพารามิเตอร์เมื่อรู้พารามิเตอร์ที่เหลือทั้งหมดและข้อมูล

สมมติว่า Posterior คือ $\pi(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{Y})$ ที่มีมิติขนาด k โดยที่ $\mathbf{Y}$ แทนข้อมูลที่สังเกตค่าได้ และสำหรับแต่ละ θ_i ของ $\boldsymbol{\theta}$ การแจกแจงแบบมีเงื่อนของแต่ละพารามิเตอร์เมื่อรู้พารามิเตอร์ที่เหลือทั้งหมดและข้อมูลคือ $\pi(\theta_i \mid \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_k, \mathbf{Y}) = \pi(\theta_i \mid \theta_{-i}, \mathbf{Y})$ Gibbs sampling เป็นกระบวนการวนซ้ำมีขั้นตอนดังนี้

- กำหนดค่าเริ่มต้น $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_1^{(0)}, \ldots, \theta_k^{(0)})$ (40)
- รอบที่ i จะเป็นการเปลี่ยนสถานะจาก $\boldsymbol{\theta}^{i}$ ไปเป็น $\boldsymbol{\theta}^{i+1}$ มีขั้นตอนดังนี้

1. สุ่ม $\theta_1^{(i)}$ จาก $\pi(\theta_1 \mid \theta_2^{(i-1)}, \theta_3^{(i-1)}, \ldots, \theta_k^{(i-1)}, \mathbf{Y})$
2. สุ่ม $\theta_2^{(i)}$ จาก $\pi(\theta_2 \mid \theta_1^{(i)}, \theta_3^{(i-1)} \ldots, \theta_k^{(i-1)}, \mathbf{Y})$

. .

. .

3. สุ่ม $\theta_k^{(i)}$ จาก $\pi(\theta_k \mid \theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)} \ldots, \theta_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y})$

ลำดับของการสุ่ม $\boldsymbol{\theta}_1^{(1)}, \boldsymbol{\theta}_2^{(2)} \ldots, \boldsymbol{\theta}^{(T)}$ เป็นสถานะต่อเนื่องกันของ Markov Chain

11) การวัดความถูกต้องแม่นยำของการพยากรณ์ (Najafi and Tarazkar,2006),(Yelland**,**2010)

การวัดความถูกต้องแม่นยำของการพยากรณ์นั้นเป็นการเลือกวิธีการพยากรณ์ที่เหมาะสมกับข้อมูลอนุกรมเวลาในแต่ละชุด วิธีวัดความถูกต้องแม่นยำของการพยากรณ์นั้นมีหลายวิธีแต่วิธีที่ใช้กันมากก็คือ เราจะใช้การพิจารณาจากค่าวัดความถูกต้อง ซึ่งต่างเป็นฟังก์ชันของค่าความคลาดเคลื่อน e_t โดยที่ e_t เป็นผลต่างของค่าจริง (Y_t) กับค่าพยากรณ์ $(\hat{Y}_t)$ ณ เวลา t ดังนี้

1. Mean Squared Error (MSE)

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2}{n} \tag{41}$$

วิธี MSE เป็นวิธีที่ใช้กันทั่วไป ข้อเสียของวิธีนี้คือไม่มีฐานการเปรียบเทียบ และถ้า MSE มีค่าสูงอาจเป็นเพราะมีความคลาดเคลื่อนสูง หรือขึ้นอยู่กับขนาดของข้อมูล

2. Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left| e_t / Y_t \right|}{n} \times 100 \tag{42}$$

วิธี MAPE เป็นหนึ่งในวิธีที่ถูกยอมรับ และที่ใช้ในการเปรียบเทียบมากที่สุดสำหรับอนุกรมเวลา

3. Mean Absolute Error (MAE)

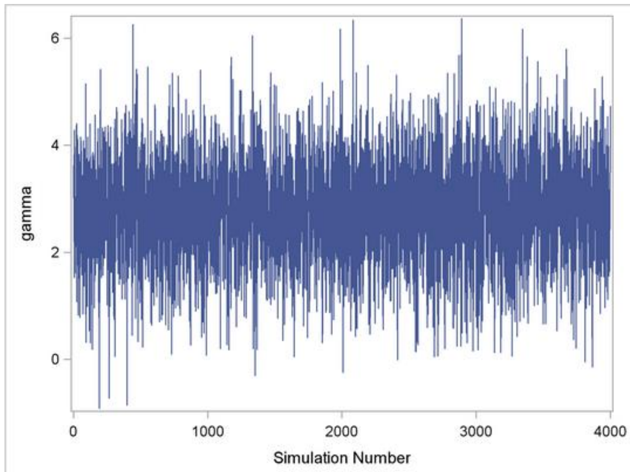
$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left| e_t \right|}{n} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left| Y_t - \hat{Y}_t \right|}{n} \tag{43}$$

เมื่อค่า MSE (Mean Squared Error) MAPE (Mean Absolute Percentage Error) และ MAE (Mean Absolute Error) มีค่าต่ำ แสดงถึง วิธีการพยากรณ์นั้นมีความถูกต้องมาก

12) การตรวจสอบการลู่เข้าของ MCMC โดยดูที่ Trace plots

Trace plots เป็นตัวชี้วัดตัวหนึ่งที่สามารถตรวจสอบการลู่เข้าของ MCMC ซึ่งมันจะช่วยบอกว่า chain ของพารามิเตอร์แต่ละตัวลู่หรือยังไม่ลู่เข้าสู่ stationary distribution และมันยังเป็นตัวช่วยบอกว่าอีกนานเท่าไรมันถึงจะลู่เข้า trace plots ยังสามารถบอกเราว่ามันลู่เข้าดีหรือ

ยังไม่ดีอีกด้วย ดังตัวอย่างในภาพที่ 1 ที่แสดง trace plots ที่ลู่เข้าสู่ stationary distribution ที่ดี (SAS, 2011)



ภาพที่ 1 Trace plots ที่ลู่เข้าสู่ stationary distribution ที่ดีของ gamma

13) การจำลองสถานการณ์สำหรับประเมินประสิทธิภาพของตัวแบบ (Bernd, 2004)

ประสิทธิภาพของตัวประมาณจะถูกประเมินจาก 3 ตัว ที่นิยมใช้กันอยู่ทั่วไปซึ่งได้แก่ Relative Bias (RB) Mean Squared Error (MSE) และ the coverage probability (CP) ซึ่งตัวประเมินแต่ละตัวจะคำนวณจากเซตของข้อมูลที่เป็นอิสระกันจากการจำลองสถานการณ์ที่มาจากกระบวนการของ MCMC โดยที่ มี T เซต โดยที่ $T = T_1,...,T_B$ และ S มีจำนวนที่ใหญ่พอ สามารถแสดงสูตรของตัวประเมินแต่ละตัวดังสมการข้างล่าง

$$mean = S^{-1}\sum_{s=1}^{S} T_s^{(k)} = \bar{T}^{(k)}, \tag{44}$$

$$bias = \bar{T}^{(k)} - \mu \tag{45}$$

$$SD = \sqrt{\left(S-1\right)^{-1}\sum_{s=1}^{S}(T_s^{(k)} - \bar{T}^{(k)})^2}, \tag{46}$$

$$MSE = S^{-1}\sum_{s=1}^{S}\left(T_s^{(k)} - \mu\right)^2 \approx SD^2 + bias^2 \tag{47}$$

$$RB\left(\hat{\mu}_Y\right) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\frac{\hat{\mu}_Y^{(b)} - \mu}{\mu} \tag{48}$$

$$MSE\left(\hat{\mu}_Y\right) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\left(\hat{\mu}_Y^{(b)} - \mu\right)^2 \tag{49}$$

$$CP\left(\hat{\mu}_Y\right) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I\left(\hat{\mu}_L^{(b)} < \mu < \hat{\mu}_U^{(b)}\right) \tag{50}$$

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับอุตสาหกรรมเหล็กและเหล็กกล้าของไทย

อุตสาหกรรมเหล็กและเหล็กกล้าแบ่งออกเป็น อุตสาหกรรมต้นน้ำ อุตสาหกรรมกลางน้ำ และ อุตสาหกรรมปลายน้ำ ได้ดังนี้

- อุตสาหกรรมต้นน้ำ คือ อุตสาหกรรมเหล็กถลุง (Pig Iron) และเหล็กพรุน (Sponge Iron) ซึ่งจัดได้ว่าเป็นกระบวนการเริ่มต้นของอุตสาหกรรมเหล็กที่มีความสำคัญอย่างมากต่อศักยภาพในการพัฒนาอุตสาหกรรมเหล็กและอุตสาหกรรมต่อเนื่อง สำหรับประเทศไทยในปัจจุบันยังไม่มีการจัดตั้งโรงงานผลิตเหล็กต้นน้ำ ซึ่งแต่เดิมนั้นแนวทางการพัฒนาถูกกำหนดโดยความต้องการของตลาดในประเทศมากกว่าจากนโยบายของภาครัฐ จึงทำให้อุตสาหกรรมเหล็กเริ่มต้นพัฒนาจากปลายน้ำเพื่อทดแทนการนำเข้าจากต่างประเทศมากกว่าการเริ่มต้นพัฒนาจากอุตสาหกรรมต้นน้ำ

- อุตสาหกรรมกลางน้ำ เป็นขั้นที่นำผลิตภัณฑ์จากการผลิตเหล็กขั้นต้นทั้งที่เป็นของเหลวและของแข็งรวมถึงเศษเหล็ก (Scrap) มาหลอมปรับปรุงคุณสมบัติและส่วนผสมทางเคมีให้ได้เป็นเหล็กกล้า (Steelmaking) สำหรับประเทศไทยผู้ผลิตขั้นกลางทุกรายจะผลิตด้วยเตาอาร์คไฟฟ้าโดยใช้เศษเหล็กเป็นวัตถุหลักในการผลิต นอกจากการผลิตเหล็กกล้าแล้วอุตสาหกรรมขั้นกลางยังรวมถึงการหล่อเหล็กกล้าให้เป็นผลิตภัณฑ์กึ่งสำเร็จรูปที่มีอยู่ 3 ประเภท ได้แก่ เหล็กแท่งยาว (Billet) เหล็กแท่งแบน (Slab) และเหล็กแท่งใหญ่ (Bloom)

- อุตสาหกรรมปลายน้ำ เป็นขั้นของการแปรรูปผลิตภัณฑ์กึ่งสำเร็จรูปด้วยกระบวนการต่าง ๆ ได้แก่ การรีดร้อน การรีดเย็น การเคลือบผิว การผลิตท่อเหล็ก การตีเหล็กขึ้นรูปรวมไปถึงการหล่อเหล็ก

เช่น เหล็กเส้น เหล็กลวด เหล็กแผ่นรีดร้อน เหล็กแผ่นรีดเย็น เหล็กแผ่นเคลือบ เหล็กโครงสร้างรูปพรรณรีดร้อน เป็นต้น ซึ่งจะนำไปใช้เป็นวัตถุดิบทางการผลิตในอุตสาหกรรมต่าง ๆ ที่ต่อเนื่อง เช่น อุตสาหกรรมก่อสร้าง อุตสาหกรรมยานยนต์ อุตสาหกรรมเครื่องใช้ไฟฟ้า อุตสาหกรรมเฟอร์นิเจอร์ และอุตสาหกรรมบรรจุภัณฑ์ เป็นต้น ในประเทศไทย การผลิตเหล็กและเหล็กกล้าจะเริ่มจากขั้นกลาง คือ การหลอมและการหล่อ

2.1.1 กระบวนการผลิตเหล็กและเหล็กกล้า

การผลิตเหล็กและเหล็กกล้าประกอบด้วยขั้นตอนดังนี้

1.การแต่งแร่และการถลุง

การแต่งแร่ คือ การแปรสภาพสินแร่ให้ได้ขนาดและคุณสมบัติที่เหมาะสมต่อการถลุง เช่น การบดแร่ให้ละเอียดเพื่อแยกเหล็กจากมลทินแล้ว อาจแยกโดยอาศัยความถ่วงเฉพาะที่ต่างกัน (Float) หรือใช้การแยกด้วยแม่เหล็ก (Magnetic separation) ซึ่งแร่ที่ได้จะละเอียดเกินไป ต้องทำให้เป็นก้อน (Agglomeration) ก่อนป้อนเข้าเตาถลุง

การถลุงเหล็ก คือ การแปรสภาพแร่เหล็กให้มีความบริสุทธิ์เพิ่มขึ้น (%เหล็กเพิ่มขึ้น) โดยการขจัดสิ่งเจือปนต่างๆ ออกจากแร่เหล็ก

2. การหลอมและการปรุงส่วนผสม

การหลอมเหล็ก คือ การให้ความร้อนแก่ เหล็กถลุง (Pig iron) เหล็กพรุน หรือเศษเหล็ก ทำให้เหล็กหลอมเหลวที่อุณหภูมิสูง (ประมาณ 1600 °C)

สำหรับการผลิตเหล็กกล้า ในขั้นตอนการหลอมนี้ จะมีการปรับปรุงส่วนผสมทางเคมีของเหล็กโดยการทำออกซิเดชั่นเพื่อลดปริมาณคาร์บอนและฟอสฟอรัส การเติมสารประกอบต่างๆ เพื่อลดปริมาณสารเจือปนและทำให้ผลิตภัณฑ์เหล็กมีคุณสมบัติตามที่ต้องการในขั้นตอนนี้ สิ่งเจือปนซึ่งส่วนใหญ่เป็นสารประกอบออกไซด์ ซิลิเกตของธาตุต่างๆ จะแยกตัวจากน้ำโลหะ ซึ่งเราเรียกสิ่งเจือปนที่แยกออกมานี้ว่า Slag

3. การหล่อ

การหล่อเหล็ก คือ การนำเหล็กหลอมเหลวที่ได้ปรุงแต่งส่วนผสมแล้วเทลงในแบบเพื่อให้เกิดการแข็งตัวตามรูปร่างที่ต้องการการหล่อสามารถแบ่งได้แบ่ง 2 แบบ

- Ingot casting คือ การหล่อแบบที่น้ำเหล็กกล้าถูกเทลงสู่แบบหล่อที่ไม่เคลื่อนไหว (Stationary mold) เพื่อหล่อเป็นแท่งโลหะ (Ingot)

- การหล่อแบบต่อเนื่อง (Continuous casting) คือ การที่น้ำเหล็กหลอมเหลวได้ไหลผ่านแบบหล่อ (Mold) อย่างต่อเนื่องและแข็งตัวเป็น “ผลิตภัณฑ์กึ่งสำเร็จ” คือ Billet, Bloom หรือ Slab ซึ่งสามารถตัดและนำไปผ่านขบวนการแปรรูปต่อไป

ปัจจุบัน การหล่อแบบต่อเนื่องเป็นที่นิยม เนื่องจากนำมาสู่การเพิ่มสัดส่วนผลผลิตที่ได้รับ (Yield), ปรับปรุงคุณภาพ, เพิ่มความสามารถในการผลิตและประสิทธิภาพของการลงทุน

4. การแปรรูป

คือ การแปรรูปเหล็กกล้าที่ได้หลอมเพื่อให้ได้รูปร่างและขนาดที่ต้องการ นอกจากนี้ยังเป็นการปรับปรุงคุณสมบัติเชิงของผลิตภัณฑ์เหล็กกล้าอีกด้วย การแปรรูปประกอบด้วยการแปรรูปร้อนและการแปรรูปเย็น

สำหรับเหล็กแผ่นเมื่อผ่านการรีดร้อนแล้วสามารถนำไปใช้งานบางอย่างได้โดยตรง แต่สำหรับเหล็กแผ่นบางจะถูกลดขนาดด้วยการรีดเย็นต่อ เพื่อให้ได้ความหนาตามที่ต้องการและด้วยเหตุผลอื่นๆ ดังนี้

-เพื่อปรับปรุงคุณภาพผิว

- เพื่อให้ได้คุณสมบัติเชิงกลที่ต้องการ

-เพื่อให้ได้ความหนาที่ต่ำกว่าเหล็กแผ่นรีดร้อน

-เพื่อควบคุมให้ความคลาดเคลื่อนของความหนาต่ำ

เนื่องจากการรีดร้อนจะประหยัดกว่าการรีดเย็น ดังนั้นในการผลิตเหล็กแผ่นบางจึงเริ่มจากการรีดร้อนให้ได้ขนาดค่าหนึ่งก่อน จากนั้นจึงทำการรีดเย็นต่อ

ผลิตภัณฑ์ที่ผ่านขั้นตอนที่ 4 คือการแปรรูปแล้ว สามารถนำไปผ่านขบวนต่างๆ ของอุตสาหกรรมต่อเนื่อง เพื่อผลิตผลิตภัณฑ์ที่หลากหลายตามประเภทของการใช้งาน เช่น วัสดุก่อสร้าง ท่อ คอนเทนเนอร์ ถังความดัน ชิ้นส่วนยานยนต์ ไฟฟ้าและเครื่องจักรกล เป็นต้น

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตัวแบบการพยากรณ์ของไทยในปัจจุบันใช้ตัวแบบการพยากรณ์ส่วนใหญ่ยังใช้ตัวแบบการพยากรณ์แบบดั้งเดิม ทั่วๆไป (Classical model) เช่น Multiple Regression, Moving Average (MA), Exponential Smoothing (EXPS), ARIMA และ Seasonal ARIMA เป็นต้น ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม (Artificial Neural Network) ตัวแบบ Semiparametric Multiple Regression เป็นต้น ตัวแบบที่มีความซับซ้อนมากขึ้น เช่นตัวแบบที่มีการนำความสัมพันธ์ของข้อมูลอนุกรมเวลามาคิดคำนวณด้วย และตัวแบบที่กำหนดให้พารามิเตอร์ในตัวแบบมีความไม่แน่นอน (uncertainty) ยังมีน้อยมาก ส่วนใหญ่จะอยู่ในต่างประเทศ สำหรับในงานวิจัยนี้ได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่ใช้ตัวแบบการพยากรณ์ที่นำมาใช้กับด้านอุตสาหกรรม และนำไปใช้กับงานด้านอื่นๆ ดังนี้

ตัวแบบการพยากรณ์แบบดั้งเดิม (Classical Models) ในการพยากรณ์ผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตของเหตุการณ์ด้านต่างๆ นั้น Wright (1986) นำตัวแบบ Simple Exponential และ Holt ไปใช้กับข้อมูลอนุกรมเวลาที่ไม่สม่ำเสมอ (Irregular) Deetae (1991) ประยุกต์ใช้ตัวแบบ Box Jenkins (ARIMA) ในการพยากรณ์ราคาข้าว พบว่าตัวแบบนี้มีประสิทธิภาพอย่างเห็นได้ชัด และดีกว่าตัวแบบ Decomposition เช่นเดียวกันกับที่ Kerdsomboon (1999) พบว่า ตัวแบบ Box Jenkins พยากรณ์ราคาข้าวได้ดีกว่าตัวแบบสถิติเบื้องต้น Cipraและคณะ (1995) ใช้ตัวแบบ Holt-Winter กับข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีข้อมูลสูญหาย (Missing) Hyndman (2002) พบว่าการใช้ตัวแบบ Single Exponential Smoothing ในกรอบการทำงาน (Framework) ของตัวแบบ State-space มีประสิทธิภาพสูง โดยนำไปใช้กับข้อมูลอนุกรมเวลา M-

Competition ซึ่งเป็นข้อมูลทางด้านเศรษฐศาสตร์ การเงิน อุตสาหกรรม ประชากรศาสตร์ และอื่นๆใน ขณะที่ Sangpattaranate (2005) ที่พบว่า Box Jenkins เป็นตัวแบบที่ใช้ในการพยากรณ์ราคาข้าวได้ดีกว่า ตัวแบบ Holt-Winter และตัวแบบการถดถอย Iqbal และคณะ (2005) ใช้ตัวแบบ ARIMA พยากรณ์ ผลผลิตและพื้นที่เพราะปลูกข้าวสารีในประเทศปากีสถานเพื่อใช้เป็นข้อมูลให้กับรัฐบาลในการกำหนด นโยบาย Mishra และ Desai (2005) ใช้ตัวแบบ SARIMA ในการพยากรณ์ภัยแล้ง (Drought) โดยใช้ ข้อมูลอนุกรมเวลาเป็นค่าดัชนีมาตรฐานของหยาดน้ำที่ตกมาจากชั้นบรรยากาศ (Precipitation)สำหรับ ตัวแบบการพยากรณ์แบบ exponential smoothing นั้นมีการนำไปใช้อย่างแพร่หลายนั้น และมีการยืด ขยายเป็น Simple exponential smoothing, Holt ,Holt-Winters และ double exponential smoothing Cipra (2006) ใช้ตัวแบบ double exponential smoothing กับข้อมูลอนุกรมเวลาที่ไม่สม่ำเสมอ boosarawongse และคณะ (2007) ได้ใช้วิธีการพยากรณ์ Box-Jenkins(ARIMA)กับ Artificial Neural Network สำหรับพยากรณ์ commodity prices การส่งออกข้าวของไทย 4 ชนิด ผลพบว่าวิธีการพยากรณ์ ทั้งสองให้ผลที่ดี แต่วิธีการพยากรณ์ Artificial Neural Network ให้ผลการพยากรณ์ที่แม่นยำข้าวที่ดีกว่า 3 ชนิด โดยเปรียบเทียบจากค่าความคลาดเคลื่อนต่างๆ Sumer และคณะ (2009) ศึกษาการใช้ตัวแบบ ARIMA, SARIMA และ ตัวแบการถดถอย (Regression Model)ที่มีฤดูกาล (Seasonal) เป็นตัวแปรซ่อน เร้น (Latent variable) ในการพยากรณ์ ปริมาณความต้องการกระแสไฟฟ้าพบว่าตัวแบการถดถอยที่มี ฤดูกาลเป็นตัวแปรซ่อนเร้นพยากรณ์ได้แม่นยำกว่าARIMA และSARIMA Kahforoushan, Zarif and Mashahir (2010) ศึกษาการพยากรณ์ผลผลิตทางด้านการเกษตร ซึ่งได้แก่ การปลูกพืช การเลี้ยงสัตว์ การ ประมง และการปลูกป่า โดยใช้วิธีการพยากรณ์ 4 วิธี ได้แก่ วิธีปรับเรียบเอ็กโปเนนเชียลโดยวิธี Holt-Winters แบบไม่มีฤดูกาล (Holt-Winters (no seasonal) Exponential Smooting Model) วิธีบอกซ์-เจน กินส์ (Box-Jenkins Model) วิธีโครงข่ายปราสาทเทียม (Artificial Neural Network Model) และ วิธี ARIMA (ARIMA Model) และใช้ ค่า MAE MSE และMAPE เปรียบเทียบผลการพยากรณ์แต่ละวิธี ผลการศึกษาพบว่า วิธีโครงข่ายปราสาทเทียมเหมาะสมในการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ (Learn Stage) วิธีบอกซ์-เจนกินส์เหมาะสมในการประเมินความถูกต้องในตัวแบบ (Model Validation) แต่วิธีปรับเรียบเอ็กโปเนนเชียลโดยวิธี Holt-Winters แบบไม่มีฤดูกาล ให้ค่า MAPE ต่ำสุดในการ ประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ (Model Fitting) และการประเมินความถูกต้องในตัวแบบ

นอกจากตัวแบบการพยากรณ์แบบเดิมที่กล่าวมาแล้วนั้น ยังมีอีกตัวแบบหนึ่งที่กำลังได้รับความ นิยมเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ คือตัวแบบการพยากรณ์แบบเบย์ ตัวแบบนี้เหมาะสำหรับกรณีที่กำหนดให้ พารามิเตอร์ในตัวแบบมีความไม่แน่นอน (Uncertainty) และยังสามารถนำความสัมพันธ์ของข้อมูล

อนุกรมเวลามาคิดคำนวณได้ด้วย ดังปรากฏในงานของ Monahan (1983) ใช้วิธีของเบย์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ ARMA และ Broemelingและ Land (1984) ใช้วิธีของเบย์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ AR(p) Liu (1994) ใช้วิธีของเบย์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ AR(p) ที่มีตัวแปรภายนอก (Exogenous) รวมอยู่ด้วย Neelamegham และ Chintagunta (1999) ประยุกต์ใช้ตัวแบบเบย์ในการพยากรณ์การจำนวนผู้เข้าชมภาพยนตร์ใหม่ ที่เข้าฉายในโรงภาพยนตร์ในสัปดาห์แรกทั้งภายในประเทศและบางประเทศในต่างประเทศ ซึ่งมีประโยชน์ต่อผู้ที่เกี่ยวข้องเช่น เจ้าของโรงภาพยนตร์ ผู้แทนจำหน่าย และผู้จัดทำโฆษณา เป็นต้น จำนวนผู้เข้าชมภาพยนตร์เป็นจำนวนนับ ที่มีการแจกแจงแบบปัวซง ผลการศึกษาพบว่า ตัวแบบเบย์พยากรณ์ได้แม่นยำในระดับประเทศ และเมื่อพิจารณาค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยกำลังสองของค่าความผิดพลาด (Root Mean Square Error) และค่าเฉลี่ยความผิดพลาดสัมบูรณ์ (Mean Absolute Error) พบว่ามีค่าต่ำกว่าตัวแบบของผู้วิจัยอื่นๆ คือ ตัวแบบของ Sawhney และ Eliashberg (1996) Fourth และ Woodlock (1960) และตัวแบบ Naïve (Logged) OLS และ Poisson Maximum Likelihood de Alba และ Mendoza(2006) ศึกษาการพยากรณ์โดยใช้วิธีเบย์ เมื่อมีข้อมูลจำนวนน้อย ค่าที่พยากรณ์เป็นค่าสะสมของตัวแปรต่อเนื่องที่เป็นค่าบวกโดยทราบค่าสะสมของข้อมูลมาส่วนหนึ่งแล้ว ตัวแบบที่ถูกนำเสนอเป็นการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่ารวมทั้งหมดกับค่ารวมมาแล้วบางส่วนของตัวแปรภายใต้อิทธิพลของฤดูกาลแบบคงที่ (Stable Seasonality) ผลการศึกษาพบว่าตัวแบบที่นำเสนอเหมาะสมเมื่อมีข้อมูลจำนวนน้อย และตัวแบบมาตรฐานทั่วไปไม่เหมาะสม Pedroza (2006) ใช้ตัวแบบเบย์ในการพยากรณ์อัตราการเสียชีวิต ของชายชาวสหรัฐอเมริกา ใช้ MCMC ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ และใช้ Gibbs sampling ในการสุ่มตัวอย่างจาก Posterior กลุ่มตัวอย่างเป็นข้อมูลการเสียชีวิตของชายชาวสหรัฐอเมริกา เป็นการพยากรณ์อัตราการเสียชีวิตในช่วงปี 1990-1999 โดยใช้ข้อมูลปี 1959-1989 การพยากรณ์นี้เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับค่าสังเกตจริง และวิธีการของ Lee-Carter พบว่าวิธีการของเบย์เหมาะสมกว่า de Alba และ Mendoza(2007) ที่นำตัวแบบการพยากรณ์แบบเบย์ไปใช้กับข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีอิทธิพลของฤดูกาลรวมอยู่ด้วย Yelland (2009) ใช้วิธีของเบย์ประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ state-space 3 ประเภทคือ Adjusted Gaussian Dynamic Linear Model (AG), Poisson Dynamic Log-Linear Model (PL) และGamma-Poisson Local Level Model (GP) รวมทั้ง ตัวแบบ Climatological Baseline Model (Cm) กับข้อมูลปริมาณความต้องการซื้อสินค้า พบว่า ตัวแบบ GP ดีที่สุด Yelland (2010) นำเสนอมีความเหมาะสมกับข้อมูลปริมาณความต้องการซื้อชิ้นส่วนอุปกรณ์คอมพิวเตอร์ และเมื่อเปรียบเทียบกับตัวแบบมาตรฐานอื่นๆ ได้แก่

Exponential smoothing (ExpS) และ Judgmental Methods (Judg) พบว่าวิธีเบย์ มีความเหมาะสมมากกว่า จากที่กล่าวมาทั้งหมดนั้น