

บทที่ 3

การคำนวณการสันสะท้อนของมอเตอร์เหนี่ยวนำโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

แบบ 3 มิติ

3.1 บทนำ

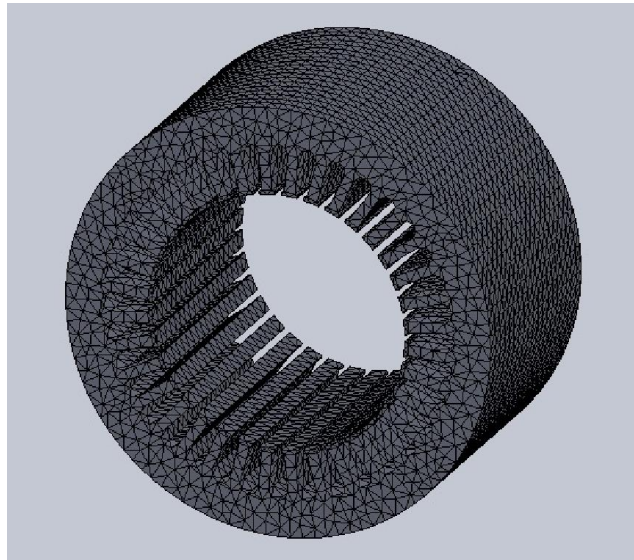
การคำนวณขนาดของการสันสะท้อนของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสในขณะที่โรเตอร์หมุน โดยแสดงผลของการสันสะท้อนในรูปของการกระจัดที่ผิวด้านไปจากรูปร่างดั้งเดิมของมอเตอร์ ก่อนข้างดำเนินการได้ยาก เนื่องจากผลลัพธ์ของการกระจัดอย่างละเอียดที่ครอบคลุมตลอดทั้งปริมาตรของมอเตอร์ต้องอาศัยการคำนวณที่มีความซับซ้อนสูง ซึ่งปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีประสิทธิภาพสูงและมีหน่วยความจำขนาดใหญ่ จึงสามารถคำนวณการสันสะท้อนของมอเตอร์ในทุกๆตำแหน่งด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ ดังนั้นในบทนี้จึงได้ประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ในการคำนวณหาขนาดของการสันสะท้อน

3.2 การคำนวณการสันสะท้อนโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

การคำนวณขนาดของการสันสะท้อนในมอเตอร์ จะอาศัยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อสร้างสมการการเคลื่อนที่ โดยพิจารณาการสันในรูปของฟังก์ชันการกระจัด ซึ่งการดำเนินงานจะมีขั้นตอนคล้ายคลึงกับการคำนวณค่าสนามแม่เหล็กด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จากบทที่ 2 ที่ผ่านมา โดยมีขั้นตอนการดำเนินงานต่างๆ ดังนี้

3.2.1 การแบ่งเอลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา

เริ่มจากการแบ่งปริมาตรของมอเตอร์ออกเป็นเอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อ โดยสมมติลักษณะการกระจายผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใดๆ บนเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น การแบ่งเอลิเมนต์และจุดต่อของมอเตอร์ขนาดเล็กพิกัด 3 แรงม้า ได้ใช้โปรแกรม Solid Work โดยมีจำนวนจุดต่อและเอลิเมนต์เท่ากับ 5,448 จุด และ 28,059 เอลิเมนต์ ตามลำดับ ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.1 ซึ่งจากรูป การคำนวณการสันสะท้อนได้แบ่งพื้นที่การพิจารณาเฉพาะส่วนของแกนสเตเตอร์เท่านั้น เนื่องจากพิจารณาผลของแรงที่มากระทำเฉพาะส่วนของแกนสเตเตอร์ (Henneberger, Sattler, and Shen, 1992), (Durantay, Laurent, Messin, and Kromer, 1999) และ (Ishibashi, Kamimoyo, Noda, and Itomi, 2003)



รูปที่ 3.1 การแบ่งอิลิเมนต์และจุดต่อของมอเตอร์เพื่อคำนวณการสั่นสะเทือน

3.2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในและสมการของอิลิเมนต์

การสร้างสมการการเคลื่อนที่ของอิลิเมนต์ เมื่อพิจารณาการสั่นของมอเตอร์ในฟังก์ชันของการกระจัด สมการการเคลื่อนที่ของอิลิเมนต์สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.1) ซึ่งเป็นสมการไฟไนต์อิลิเมนต์สำหรับแต่ละอิลิเมนต์ที่มี 12 สมการประกอบรวมกัน

$$[M]_{12 \times 12} \frac{\partial^2 \{x\}_{12 \times 1}}{\partial t^2} + [D]_{12 \times 12} \frac{\partial \{x\}_{12 \times 1}}{\partial t} + [K]_{12 \times 12} \{x\}_{12 \times 1} = \{F\}_{12 \times 1} \quad (3.1)$$

โดย $[M]_{12 \times 12}$ = เมทริกซ์มวล (mass matrix)

$[D]_{12 \times 12}$ = เมทริกซ์ความหน่วง (damping matrix)

$[K]_{12 \times 12}$ = เมทริกซ์ความแข็งของสปริง (stiffness matrix)

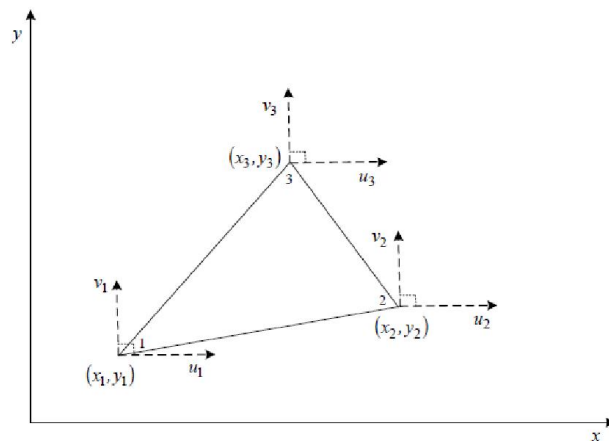
$\{F\}_{12 \times 1}$ = เวกเตอร์ของแรงหรือโมเมนต์ที่มากระทำ

$\{x\}_{12 \times 1}$ = เวกเตอร์การกระจัดเพื่อใช้หาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $\frac{\partial \{x\}_{12 \times 1}}{\partial t}$ และสอง $\frac{\partial^2 \{x\}_{12 \times 1}}{\partial t^2}$

เทียบกับเวลา หรืออีกนัยหนึ่งคือเวกเตอร์ความสัมพันธ์ของความเร็วและความเร่งตามลำดับ

ซึ่งแรงที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์เกิดจากการนำแรงแม่เหล็กไฟฟ้าตรงกลางขึ้นในแต่ละซี่ของสเตเตอร์ที่ติดกับช่องอากาศ ซึ่งแรงแม่เหล็กไฟฟ้างกล่าวเป็นผลลัพธ์จากการคำนวณดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 2 ส่วนเวกเตอร์การกระจัดที่แสดงในสมการที่ (3.2) เป็นการแสดงระยะกระจัดบนจุดต่อหมายเลข 1, 2, 3 และ 4 ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาต่อหนึ่งอิลิเมนต์ โดย u , v และ w แทนระยะกระจัดในแนวแกน x , y และ z ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 ซึ่งการแสดงระนาบพิกัดในลักษณะเช่นนี้ จะเรียกว่าระนาบพิกัดวงกว้าง (global coordinate)

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

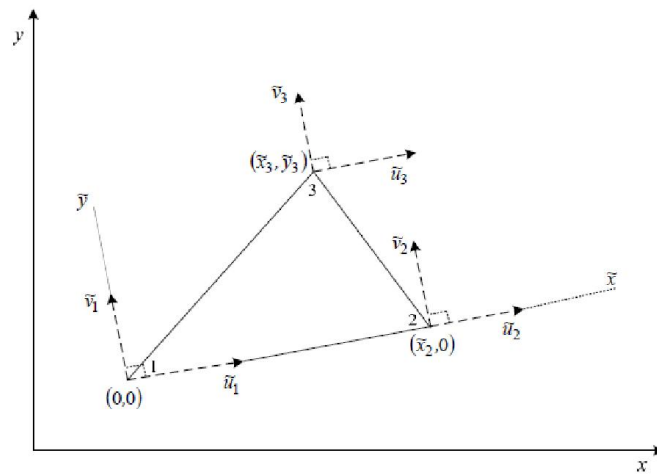


รูปที่ 3.2 อิลิเมนต์สามเหลี่ยมเมื่อพิจารณาระนาบพิกัดวงกว้าง

การพิจารณาการกระจัดของแต่ละอิลิเมนต์ที่มีลักษณะการวางตัวในแต่ละอิลิเมนต์ที่แตกต่างกัน จะต้องพิจารณาการวางตัวของทุกๆ อิลิเมนต์ให้อยู่ในรูปแบบเดียวกันเสียก่อน ซึ่งดำเนินการได้โดยแปลงระนาบพิกัดวงกว้างให้เป็นระนาบพิกัดเฉพาะถิ่น (local coordinate) (Rao,

1999) ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.3 ซึ่งดำเนินการได้โดย กำหนดให้ที่จุดต่อหมายเลข 1 ของทุกๆ อลิเมนต์ที่มีพิกัดเฉพาะถิ่น $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$ อยู่ที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$ โดยที่แกน $\tilde{x}$ ของทุกๆ อลิเมนต์บนระนาบพิกัด

เฉพาะถิ่นจะวางตัวตามฐานของสามเหลี่ยมระหว่างจุดต่อหมายเลข 1 และ 2 และแกน $\tilde{y}$ จะตั้งฉากกับแกน $\tilde{x}$ ดังนั้นจุดต่อหมายเลข 2 ของทุกๆ อลิเมนต์จึงมีพิกัดเฉพาะถิ่น $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z})$ เป็น $(\tilde{x}_2, 0, \tilde{z})$ และ $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3, \tilde{z}_3)$ คือจุดต่อหมายเลข 3 ของพิกัดเฉพาะถิ่น โดยมี $\tilde{u}$ และ $\tilde{v}$ ที่จุดต่อหมายเลขต่างๆ แทนระยะกระจัดในแนวแกน $\tilde{x}$ และ $\tilde{y}$ ตามลำดับ เมื่อสร้างสมการอิลิเมนต์ในระนาบพิกัดเฉพาะถิ่นเพื่อพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แล้ว จากนั้นจึงแปลงกลับไปเป็นสมการอิลิเมนต์ในระนาบพิกัดวงกว้าง (x, y) ดังเดิม



รูปที่ 3.3 อิลิเมนต์สามเหลี่ยมเมื่อพิจารณาระนาบพิกัดเฉพาะถิ่น

การพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ ยังคงพิจารณาลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นเช่นเดียวกับที่เคยกล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ซึ่งลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลิเมนต์เมื่อพิจารณาระนาบพิกัดเฉพาะถิ่น สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.3), (3.4) และ (3.5)

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{u}_1 N_1 + \tilde{u}_2 N_2 + \tilde{u}_3 N_3 + \tilde{u}_4 N_4 \quad (3.3)$$

$$v(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{v}_1 N_1 + \tilde{v}_2 N_2 + \tilde{v}_3 N_3 + \tilde{v}_4 N_4 \quad (3.4)$$

$$w(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{w}_1 N_1 + \tilde{w}_2 N_2 + \tilde{w}_3 N_3 + \tilde{w}_4 N_4 \quad (3.5)$$

โดยที่ N_n , $n=1, 2, 3, 4$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ และ $\tilde{u}_n$, $\tilde{v}_n$ และ $\tilde{w}_n$ เมื่อ $n=1, 2, 3, 4$ คือผลลัพธ์ของการกระจัดในแนวแกน $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ และ $\tilde{z}$ ในแต่ละจุดต่อ (1, 2, 3, 4) ของอิลิเมนต์ตามลำดับ ซึ่ง

$$N_n = \frac{a_n + b_n \tilde{x} + c_n \tilde{y} + d_n \tilde{z}}{6V} \quad (3.6)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_1 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_2\tilde{z}_3 - \tilde{y}_3\tilde{z}_2) + \tilde{x}_3(\tilde{y}_4\tilde{z}_2 - \tilde{y}_2\tilde{z}_4) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_3\tilde{z}_4 - \tilde{y}_4\tilde{z}_3) \\ a_2 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_3\tilde{z}_1 - \tilde{y}_1\tilde{z}_3) + \tilde{x}_3(\tilde{y}_1\tilde{z}_4 - \tilde{y}_4\tilde{z}_1) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_4\tilde{z}_3 - \tilde{y}_3\tilde{z}_4) \\ a_3 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_1\tilde{z}_2 - \tilde{y}_2\tilde{z}_1) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_4\tilde{z}_1 - \tilde{y}_1\tilde{z}_4) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_3\tilde{z}_2 - \tilde{y}_2\tilde{z}_3) \\ a_4 &= \tilde{x}_3(\tilde{y}_2\tilde{z}_1 - \tilde{y}_1\tilde{z}_2) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_1\tilde{z}_3 - \tilde{y}_3\tilde{z}_1) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_3\tilde{z}_2 - \tilde{y}_2\tilde{z}_3) \\ b_1 &= \tilde{y}_4(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2) + \tilde{y}_3(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_4) + \tilde{y}_2(\tilde{z}_4 - \tilde{z}_3) \\ b_2 &= \tilde{y}_4(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3) + \tilde{y}_1(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_4) + \tilde{y}_3(\tilde{z}_4 - \tilde{z}_1) \\ b_3 &= \tilde{y}_4(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) + \tilde{y}_2(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_4) + \tilde{y}_1(\tilde{z}_4 - \tilde{z}_2) \\ b_4 &= \tilde{y}_3(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) + \tilde{y}_1(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3) + \tilde{y}_2(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1) \\ c_1 &= \tilde{x}_4(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3) + \tilde{x}_2(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_4) + \tilde{x}_3(\tilde{z}_4 - \tilde{z}_2) \\ c_2 &= \tilde{x}_4(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1) + \tilde{x}_3(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_4) + \tilde{x}_1(\tilde{z}_4 - \tilde{z}_3) \\ c_3 &= \tilde{x}_4(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) + \tilde{x}_1(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_4) + \tilde{x}_2(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2) \\ c_4 &= \tilde{x}_3(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) + \tilde{x}_2(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3) + \tilde{x}_1(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2) \\ d_1 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_2) + \tilde{x}_3(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_4) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_4 - \tilde{y}_3) \\ d_2 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_3) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4) + \tilde{x}_3(\tilde{y}_4 - \tilde{y}_1) \\ d_3 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_4) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_4 - \tilde{y}_2) \\ d_4 &= \tilde{x}_3(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_3) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

และ V คือปริมาตรของแต่ละอิลิเมนต์ ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 & \tilde{z}_1 \\ 1 & \tilde{x}_2 & \tilde{y}_2 & \tilde{z}_2 \\ 1 & \tilde{x}_3 & \tilde{y}_3 & \tilde{z}_3 \\ 1 & \tilde{x}_4 & \tilde{y}_4 & \tilde{z}_4 \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

จากสมการโฟฟในทอิลิเมนต์ในสมการที่ (3.1) สามารถคำนวณอิลิเมนต์เมทริกซ์ความแข็งของสปริงและอิลิเมนต์เมทริกซ์มวลได้ดังที่จะอธิบายต่อจากนี้ไป ซึ่งในงานวิจัยนี้จะไม่พิจารณาถึงอิลิเมนต์เมทริกซ์ความหน่วงเนื่องจากมีผลต่อการสั่นสะเทือนของมอเตอร์ค่อนข้างน้อย ประกอบกับการคำนวณมีความยุ่งยาก (Henneberger, Sattler, Hadrys, and Shen, 1992)

เมทริกซ์ความแข็งของสปริง: $[K]_{12 \times 12}$

ดำเนินการโดยพิจารณาการวางตัวของอิลิเมนต์ในระนาบพิกัดเฉพาะถิ่นเพื่อให้ทุกๆ อิลิเมนต์มีการวางตัวอยู่ในรูปแบบเดียวกันก่อน จะได้เมทริกซ์ส่วนประกอบความแข็งของสปริง(constitutive matrix, $[\tilde{D}]$) ดังแสดงด้วยสมการที่ (3.9)

$$[\tilde{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \text{sym} & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ซึ่ง E และ ν คือค่ามอดูลัส (modulus) และอัตราส่วนของปัวซอง (Poisson's ratio) ตามลำดับ

เมทริกซ์ความเครียดของสปริง(strain relationship, $[\tilde{B}]$) ดังแสดงได้ในสมการที่ (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), และ (3.14)

$$[\tilde{B}] = [\tilde{B}_1 \ \tilde{B}_2 \ \tilde{B}_3 \ \tilde{B}_4] \quad (3.10)$$

โดยที่

$$[\tilde{B}_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ c_1 & b_1 & 0 \\ 0 & d_1 & c_1 \\ d_1 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$[\tilde{B}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \\ c_2 & b_2 & 0 \\ 0 & d_2 & c_2 \\ d_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$[\tilde{B}_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \\ c_3 & b_3 & 0 \\ 0 & d_3 & c_3 \\ d_3 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$[\tilde{B}_4] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 \\ c_4 & b_4 & 0 \\ 0 & d_4 & c_4 \\ d_4 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

เมื่อนำค่า $[\tilde{B}]$ รวมระบบจะได้ดังสมการที่ (3.15)

$$[\tilde{B}] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 & 0 \\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_2 & c_2 & 0 & d_3 & c_3 & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & d_2 & 0 & b_2 & d_3 & 0 & b_3 & d_4 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

ซึ่งเมทริกซ์ความแข็งของสปริงเฉพาะถิ่น (local stiffness matrix, $[\tilde{K}]$) เกิดจากผลของเมทริกซ์ส่วนประกอบความแข็งของสปริงและเมทริกซ์ความเครียดของสปริง ดังแสดงด้วยสมการที่ (3.16) และ (3.17) ตามลำดับ

$$[\tilde{K}] = \iiint_V [\tilde{B}]^T [\tilde{D}] [\tilde{B}] dV \quad (3.16)$$

$$[\tilde{K}] = [\tilde{B}]^T [\tilde{D}] [\tilde{B}] V \quad (3.17)$$

เมื่อคำนวณเมทริกซ์ความแข็งของสปริงเฉพาะถิ่นได้แล้ว จากนั้นแปลงกลับเป็นเมทริกซ์ความแข็งของสปริงที่แท้จริงได้ในสมการที่ (3.18)

$$[K] = [R]^T [\tilde{K}] [R] \quad (3.18)$$

โดยที่

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{x}, x) & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{x}, x) & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{x}, x) & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

จากสมการที่ (3.19) สมาชิกในเมทริกซ์ $[R]$ จะประกอบไปด้วยฟังก์ชันโคไซน์ระนาบทิศทาง (directional cosine) ซึ่งเป็นค่าที่ใช้สำหรับถ่ายโอนจากระนาบพิกัดเฉพาะถิ่นสู่ระนาบพิกัดวงกว้าง ดังแสดงด้วยความสัมพันธ์ดังสมการที่ (3.20) - (3.30)

$$\cos(\tilde{x}, x) = \frac{x_2 - x_1}{L} = l \quad (3.20)$$

$$\cos(\tilde{x}, y) = \frac{y_2 - y_1}{L} = m \quad (3.21)$$

$$\cos(\tilde{x}, z) = \frac{z_2 - z_1}{L} = n \quad (3.22)$$

$$\cos(\tilde{y}, x) = -\frac{m}{P} \quad (3.23)$$

$$\cos(\tilde{y}, y) = \frac{l}{P} \quad (3.24)$$

$$\cos(\tilde{y}, z) = 0 \quad (3.25)$$

$$\cos(\tilde{z}, x) = -\frac{(l)(n)}{P} \quad (3.26)$$

$$\cos(\tilde{z}, y) = -\frac{(m)(n)}{P} \quad (3.27)$$

$$\cos(\tilde{z}, z) = P \quad (3.28)$$

โดยที่

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3.29)$$

$$P = \sqrt{l^2 + m^2} \quad (3.30)$$

เมทริกซ์มวล: $[M]_{12 \times 12}$

ดำเนินการโดยพิจารณาการวางตัวของอิลิเมนต์ในระนาบพิภคเฉพาะถิ่นก่อน
เช่นกัน ดังแสดงได้ในสมการที่ (3.31)

$$[\tilde{M}] = \frac{\rho V_e}{20} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

ซึ่ง ρ คือค่าความหนาแน่นมวล (mass density) ในแต่ละอีลิเมนต์ จากนั้นแปลงกลับเป็นเมทริกซ์มวลที่แท้จริงได้ในสมการที่ (3.32)

$$[M] = [R]^T [\tilde{M}] [R] \quad (3.32)$$

การนำสมการการเคลื่อนที่ของแต่ละอีลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมสำหรับการเคลื่อนที่ของระบบ โดยหากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอีลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย n จุดต่อ จึงก่อให้เกิดระบบสมการรวมสำหรับการเคลื่อนที่ของระบบ ซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น $3n$ สมการ ดังแสดงด้วยสมการที่ (3.33) ทั้งนี้เนื่องจากการพิจารณาการกระจัดจะพิจารณาทั้งแนวแกน x , y และแกน z ร่วมกัน

$$[M]_{3n \times 3n} \frac{\partial^2 \{x\}_{3n \times 1}}{\partial t^2} + [D]_{3n \times 3n} \frac{\partial \{x\}_{3n \times 1}}{\partial t} + [K]_{3n \times 3n} \{x\}_{3n \times 1} = \{F\}_{3n \times 1} \quad (3.33)$$

3.3 การหาผลเฉลยสำหรับการสั่นสะเทือน

ในการวิเคราะห์สถานะชั่วครู่ในขณะที่มีมอเตอร์หมุนไป ดังสมการการเคลื่อนที่ที่เวลา t ใดๆ ที่แสดงด้วยสมการที่ (3.34)

$$[M] \frac{\partial^2 \{x\}^t}{\partial t^2} + [D] \frac{\partial \{x\}^t}{\partial t} + [K] \{x\}^t = \{F\}^t \quad (3.34)$$

ซึ่งด้วย t หมายถึงค่าที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา จะสังเกตเห็นว่าเมทริกซ์ $[M]$, $[D]$ และ $[K]$ จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาเมื่อมอเตอร์หมุนไป การแก้สมการสถานะชั่วคราวในงานวิจัยนี้ จะใช้วิธีผลต่างกลาง (central difference) เพราะเป็นวิธีที่นิยมใช้กันแพร่หลายสำหรับการแก้สมการ การเคลื่อนที่ในสถานะชั่วคราว (Kwon and Bang, 2000) โดยเมื่อพิจารณาวิธีผลต่างกลาง จะได้

$$\frac{\partial^2 \{x\}^t}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2} [\{x\}^{t+\Delta t} - 2\{x\}^t + \{x\}^{t-\Delta t}] \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \{x\}^t}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t} [\{x\}^{t+\Delta t} - \{x\}^{t-\Delta t}] \quad (3.36)$$

แทนค่าสมการที่ (3.35) และ (3.36) ลงในสมการที่ (3.34) จะได้

$$[M_{eff}]\{x\}^{t+\Delta t} = \{F_{eff}\} \quad (3.37)$$

โดยที่

$$[M_{eff}] = \left[\frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [D] \right] \quad (3.38)$$

$$\{F_{eff}\} = \{F\}^t - \left[[K] - \frac{2}{\Delta t^2} [M] \right] \{x\}^t - \left[\frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [D] \right] \{x\}^{t-\Delta t} \quad (3.39)$$

ซึ่ง $[M_{eff}]$ และ $\{F_{eff}\}$ คือเมทริกซ์มวลประสิทธิภาพ (effective mass matrix) และเวกเตอร์แรง ประสิทธิภาพ (effective force matrix) ตามลำดับ ดังนั้นจึงสรุปเป็นขั้นตอนในการคำนวณหาการ ตื่นสะเทือนเป็นระยะกระจัดเมื่อมอเตอร์หมุนไป ได้ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 : คำนวณหาเมทริกซ์ระบบสมการรวม $[M]$, $[D]$ และ $[K]$

ขั้นตอนที่ 2 : กำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นที่ $t=0$ ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์การกระจัด $\{x\}^0$

และเวกเตอร์ความเร็ว $\frac{\partial \{x\}^0}{\partial t}$ พร้อมทั้งรับค่าเวกเตอร์ของแรงที่กระทำกับมอเตอร์ $\{F\}^0$

ขั้นตอนที่ 3 : คำนวณค่าเวกเตอร์ความเร่ง $\frac{\partial^2 \{x\}^0}{\partial t^2}$ ในสมการที่ (3.34) ซึ่งสามารถแสดงได้

ดังนี้

$$[M] \frac{\partial^2 \{x\}^0}{\partial t^2} = \{F\}^0 - [D] \frac{\partial \{x\}^0}{\partial t} - [K] \{x\}^0 \quad (3.40)$$

ขั้นตอนที่ 4 : คำนวณค่าเวกเตอร์การกระจัดที่เวลา $-\Delta t$ โดยใช้ความสัมพันธ์ของสมการที่ (3.35) และ (3.36) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

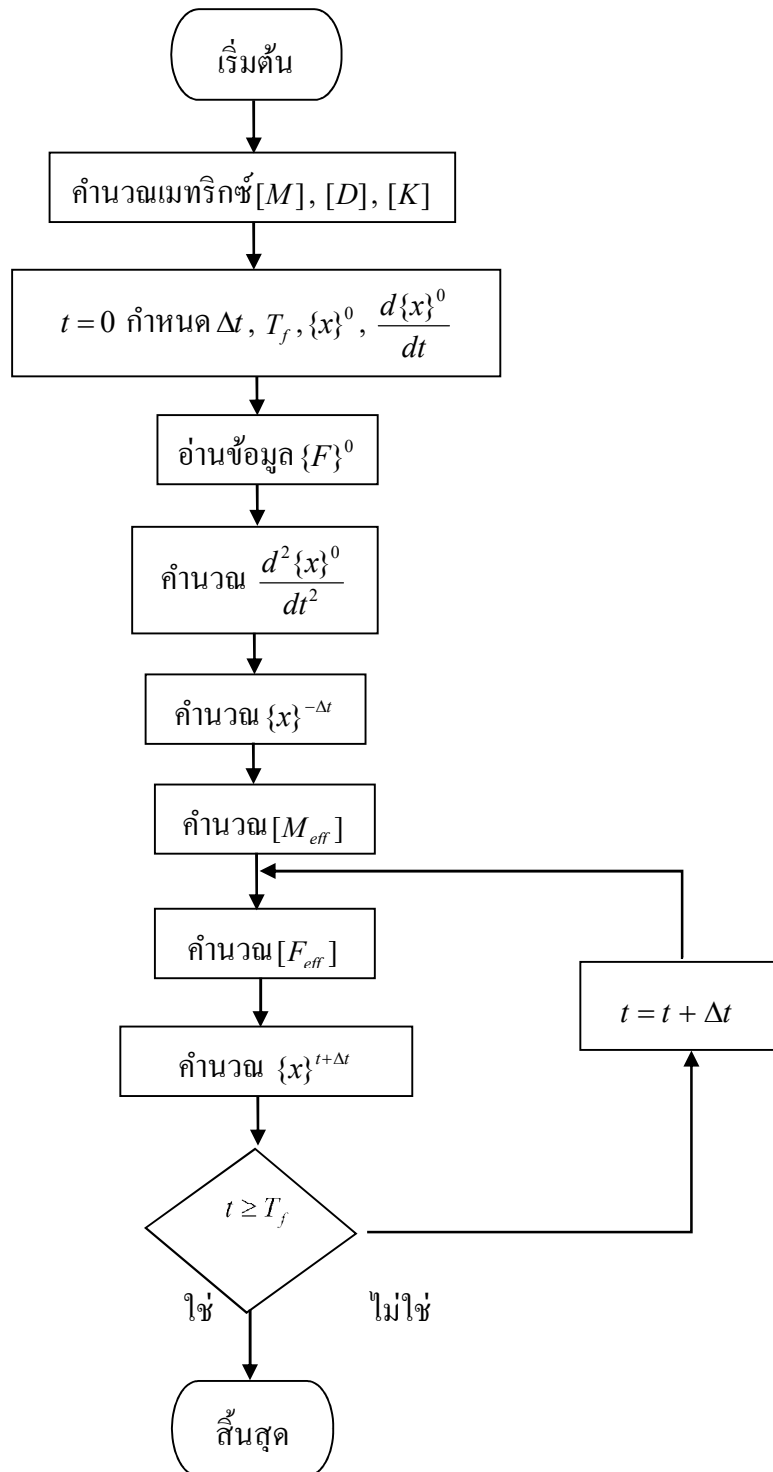
$$\{x\}^{-\Delta t} = \{x\}^0 - \Delta t \frac{\partial \{x\}^0}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \{x\}^0}{\partial t^2} \quad (3.41)$$

ขั้นตอนที่ 5 : คำนวณเมทริกซ์มวลประสิทธิภาพ $[M_{eff}]$ โดยใช้สมการที่ (3.38)

ขั้นตอนที่ 6 : คำนวณเวกเตอร์แรงประสิทธิภาพ $\{F_{eff}\}$ โดยใช้สมการที่ (3.39)

ขั้นตอนที่ 7 : คำนวณค่าเวกเตอร์การกระจัดที่เวลาถัดไป $\{x\}^{t+\Delta t}$ ในสมการที่ (3.37) จากนั้นที่เวลาถัดไป $t + \Delta t$ ดำเนินการทำซ้ำในขั้นตอนที่ 6-7 จนถึงเวลาสิ้นสุด T_f

ขั้นตอนต่างๆ ที่ได้อธิบายผ่านมา อาจสรุปรวมในรูปของแผนภูมิได้ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 แผนภูมิการคำนวณการสั่นสะเทือนในมอเตอร์

3.4 สรุป

บทที่ 3 นี้ ได้อธิบายการประยุกต์วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์เพื่อคำนวณหาขนาดของการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสเมื่อโรเตอร์หมุน โดยพิจารณาในรูปแบบของฟังก์ชันการกระจัดซึ่งอาศัยสมการการเคลื่อนที่ในรูปของสมการอนุพันธ์สามัญอันดับสอง รายละเอียดต่างๆ ในบทนี้ จะนำไปสู่การประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์อีลิเมนต์เพื่อใช้เป็นโปรแกรมจำลองผลการสั่นสะเทือนที่จะได้กล่าวถึงในบทที่ 4 ต่อไป