

บทที่ 2

การคำนวณสนามแม่เหล็กของมอเตอร์เหนี่ยวนำโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

แบบ 3 มิติ

2.1 บทนำ

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ได้รับคามนิยมนมาก เนื่องจากปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีความเร็วสูงและมีหน่วยความจำขนาดใหญ่ ทำให้สามารถคำนวณงานต่างๆ ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น การคำนวณสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำที่มีความซับซ้อน จึงมีความจำเป็นอย่างย้งที่ต้องนำวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้ในการแก้ปัญหา ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำ และประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็กนี้

2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็ก

ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็ก **B** สามารถดำเนินการได้โดยเลียงไปคำนวณหาศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก **A** ก่อน เนื่องจากสามารถคำนวณได้ง่ายกว่า โดยสนามแม่เหล็ก **B** สามารถคำนวณได้ด้วยการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก **A** เท่านั้น ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.1)$$

การคำนวณสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำ จึงเริ่มจากการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็ก ซึ่งตั้งต้นจากการศึกษาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงค่าตามเวลา (William, 1989) โดยศึกษาได้จากกฎของฟาราเดย์ (Faraday's law) ที่กล่าวว่า สนามแม่เหล็กที่แปรผันตามเวลาจะเหนี่ยวนำให้เกิดสนามไฟฟ้า **E** ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

แทนสมการที่ (2.1) ลงในสมการที่ (2.2) จะได้

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.3)$$

และจากกฎของแอมแปร์ (Ampere's law) ที่ใช้กับสนามที่แปรตามเวลา เมื่อสมมติให้ความหนาแน่นกระแสกระจัด (displacement current density) มีค่าเป็นศูนย์ (Demerdash and Gillott, 1974) และ (Fu, 1999) เนื่องจากแหล่งจ่ายมีค่าความถี่ต่ำ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_e \quad (2.4)$$

เมื่อ $\mathbf{H}$ คือความเข้มสนามแม่เหล็ก, $\mathbf{J}_0$ คือความหนาแน่นของกระแสภายนอก (external current density) และ $\mathbf{J}_e$ คือความหนาแน่นของกระแสวน (eddy current density) ซึ่งได้จากกฎของโอห์ม โดยที่

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (2.5)$$

เมื่อ σ คือสภาพนำทางไฟฟ้า (electrical conductivity) และจากความสัมพันธ์ของสมการที่ (2.3) จึงได้

$$\mathbf{J}_e = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.6)$$

นำสมการที่ (2.1) และ (2.6) แทนค่าลงไปในสมการที่ (2.4) จะได้

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_0 \quad (2.7)$$

จากการศึกษาคุณสมบัติของ $\mathbf{A}$ พบว่า จึงได้สมการของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กดังสมการที่ (2.8)

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_0 \quad (2.8)$$

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส ซึ่งกระแสเหนี่ยวนำในวงจรโรเตอร์จะขึ้นอยู่กับค่าสลิป s ของมอเตอร์ด้วย เมื่อพิจารณามอเตอร์ในสามมิติตามระนาบพิกัด xyz ซึ่งแปรผันตามเวลา จึงสามารถคำนวณได้จากสมการ โดยสมการจะปรากฏอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation: PDE) อันดับสอง สามารถแสดงด้วยสมการที่ (2.9) (Vassent, Meunier, and Foggia, 1991), (Nagwa, Anthony, and Graham, 1992) และ (Fu, 1999) ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - s\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 = 0 \quad (2.9)$$

โดยที่ μ คือ ความซาบซึมได้ของแม่เหล็ก (magnetic permeability)

σ คือ สภาพนำทางไฟฟ้า (electrical conductivity)

s คือ ค่าสลิป (slip) ของมอเตอร์

$\mathbf{J}_0$ คือ ความหนาแน่นของกระแสภายนอก (external current density)

จากสมการที่ (2.9) ซึ่งเป็นการสมมติให้สนามแม่เหล็กวางตัวตามพื้นที่หน้าตัดในระนาบพิกัด xy ของมอเตอร์ ดังนั้นการพิจารณาเทอมของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{J}_0$ จะปรากฏเฉพาะส่วนประกอบแกน z เท่านั้น

2.3 การคำนวณสนามแม่เหล็กโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

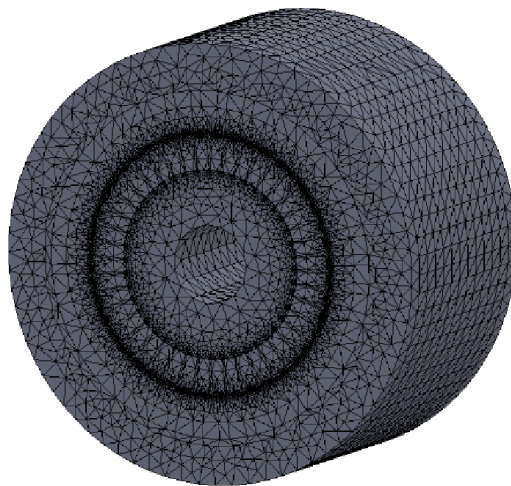
สืบเนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อใช้ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็กของมอเตอร์เหนี่ยวนำ ดังแสดงในสมการที่ (2.9) หาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ยาก ดังนั้นการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงถูกนำมาใช้ในการนี้ ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนการดำเนินงานต่างๆ ดังนี้

2.3.1 การแบ่งเอลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา

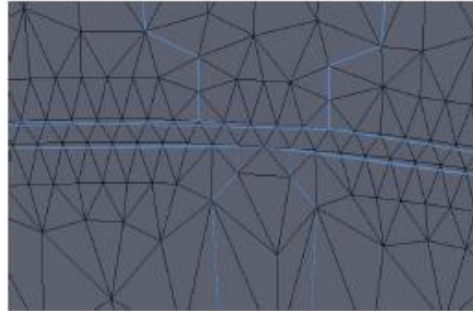
ขั้นตอนแรกเริ่มจากการแบ่งพื้นที่ย่อยของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ ซึ่งในที่นี้จะใช้เอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใดๆ บนเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นซึ่งงานวิจัยนี้จะดำเนินการแบ่งพื้นที่ย่อย โดยอาศัยโปรแกรมสำเร็จรูป Solid Work และได้ผลลัพธ์ออกมาดังรูปที่ 2.1 ซึ่งเป็นตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์และจุดต่อบนพื้นที่ของ

มอเตอร์ โดยมอเตอร์มีจำนวนร่องของสเตเตอร์และโรเตอร์ทั้งหมดเท่ากับ 36 และ 44 ร่องตามลำดับ และการพันขดลวดสเตเตอร์เป็นแบบสองชั้น ส่วนรูปที่ 2.2 เป็นการขยายให้เห็นถึงรายละเอียดในการแบ่งอิลิเมนต์และจุดต่อบนบริเวณพื้นที่ที่สำคัญ

ในงานวิจัยนี้การแบ่งพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์ออกเป็นอิลิเมนต์ จะพิจารณาแยกพื้นที่กันออกเป็น 3 ส่วน ได้แก่ ส่วนของพื้นที่สเตเตอร์ ส่วนของพื้นที่โรเตอร์ และส่วนของพื้นที่ช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์และโรเตอร์ โดยส่วนของพื้นที่สเตเตอร์การแบ่งอิลิเมนต์จะกระทำเพียงครั้งเดียว ทั้งนี้เพราะส่วนของสเตเตอร์ถูกยึดอยู่กับที่ ในส่วนของพื้นที่โรเตอร์การแบ่งอิลิเมนต์ดำเนินการเพียงครั้งเดียวเช่นกัน แต่เมื่อพิจารณาถึงตำแหน่งพิกัดของจุดต่อบนพื้นที่แล้ว จะต้องคำนึงถึงมุมของโรเตอร์ที่หมุนเปลี่ยนแปลงไปด้วย



รูปที่ 2.1 การแบ่งอิลิเมนต์และจุดต่อของมอเตอร์เหนี่ยวนำด้วยรูปทรงสี่หน้า



รูปที่ 2.2 ภาพขยายการแบ่งอีลิเมนต์และจุดต่อบนบริเวณที่สำคัญ

2.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์

ขั้นตอนนี้เป็น การเลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์ (element interpolation function) โดยเมื่อสมมติลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอีลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น จึงได้

$$A(x, y, z) = A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3 + A_4 N_4 \quad (2.10)$$

โดยที่ N_n , $n = 1, 2, 3, 4$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์ และ A_n , $n = 1, 2, 3, 4$ คือผลลัพธ์ของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กในแต่ละจุดต่อ (1, 2, 3, 4) ของอีลิเมนต์ ซึ่ง

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad (2.11)$$

V คือปริมาตรของรูปทรงสี่หน้าของแต่ละอีลิเมนต์ ซึ่งหาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
a_1 &= x_4(y_2z_3 - y_3z_2) + x_3(y_4z_2 - y_2z_4) + x_2(y_3z_4 - y_4z_3) \\
a_2 &= x_4(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_4 - y_4z_1) + x_1(y_4z_3 - y_3z_4) \\
a_3 &= x_4(y_1z_2 - y_2z_1) + x_2(y_4z_1 - y_1z_4) + x_1(y_2z_4 - y_4z_2) \\
a_4 &= x_3(y_2z_1 - y_1z_2) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_1(y_3z_2 - y_2z_3) \\
b_1 &= y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3) \\
b_2 &= y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1) \\
b_3 &= y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2) \\
b_4 &= y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) \\
c_1 &= x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2) \\
c_2 &= x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3) \\
c_3 &= x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1) \\
c_4 &= x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2) \\
d_1 &= x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3) \\
d_2 &= x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) \\
d_3 &= x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2) \\
d_4 &= x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

2.3.3 การสร้างสมการของอีลิเมนต์

ขั้นตอนนี้เป็น การสร้างสมการอีลิเมนต์ (element formulation) ซึ่งขั้นตอนนี้อธิบายว่าเป็น ขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ อย่างไรก็ตามอีลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยม รูปแบบทั่วไป ของสมการของอีลิเมนต์สำหรับปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา สามารถแสดงได้ดังนี้ (Huebner, Dewhurst, Smith, and Byrom, 2001)

$$[M]\{\dot{A}\} + [K]\{A\} = \{F\} \tag{2.14}$$

โดย $\{A\}$ คือ เวกเตอร์ของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กซึ่งเป็นตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ และ $\{A\}$ คือ เวกเตอร์ของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก สมการที่ (2.14) นี้สามารถ ประดิษฐ์ขึ้นได้โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ โดยการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ซึ่ง ถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่างๆ ในปัจจุบัน และวิธีนี้ยังสามารถ จำแนกแยกย่อยออกไปได้อีกเช่นวิธีของกาลเอร์คิน (Galerkin) ซึ่งเมทริกซ์ที่เกิดขึ้นจากวิธีนี้ ปกติ

แล้วจะมีความสมมาตร จึงก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้กับปัญหขนาดใหญ่ออย่างเช่นปัญหาในงานวิจัยนี้

การสร้างสมการของอิลิเมนต์ด้วยการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมีหลักการดังนี้คือ หากแทนผลเฉลยโดยประมาณลงในสมการที่ (2.9) จะไม่ได้ค่าเท่ากับศูนย์ แต่จะมีค่าเท่ากับ R ดังแสดงด้วยสมการที่ (2.15)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - s\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 = R \quad (2.15)$$

ซึ่ง R เรียกว่าเศษตกค้าง (residual) เป็นค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการใช้ผลเฉลยโดยประมาณซึ่งไม่ใช่ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาเศษตกค้าง R ที่เกิดขึ้นควรมีค่าต่ำที่สุด เพื่อผลเฉลยโดยประมาณที่เกิดขึ้นจะมีค่าเที่ยงตรงมากที่สุด และในงานวิจัยนี้ วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างได้ใช้วิธีของกาลเลอร์กิน (Preston, Reece, and Sangha, 1988) และ (Kim, Kwon, and Park, 1999) ซึ่งวิธีนี้สามารถกระทำได้โดยการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function: W) แล้วอินทิเกรตรอบปริมาตร(V) และกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_V W_n R dV = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (2.16)$$

งานวิจัยนี้เลือกอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อในการคำนวณ ดังนั้นจุดที่ไม่ทราบค่าจะมี 4 จุด ซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสี่ ดังนั้นจึงต้องการ 4 สมการในการแก้ปัญหาค่าที่ไม่ทราบค่า ดังสมการที่ (2.16) จะต้องมีค่า $n = 1, 2, 3, 4$ และโดยปกติเราจะเลือก $W_n = N_n$ ซึ่งเรียกว่าบับโนฟ-กาลเลอร์กิน (Bubnov-Galerkin) ดังนั้นเมื่อแทน R ด้วยสมการที่ (2.15) ลงในสมการที่ (2.16) จึงได้

$$\int_V N_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - s\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 \right) dV = 0 \quad (2.17)$$

$$\int_V N_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \right) dv - \int_V N_n s\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv + \int_V (N_n \mathbf{J}_0) dv = 0 \quad (2.18)$$

พิจารณาการอินทิเกรตที่ละพจน์ของสมการที่ (2.18) สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตที่ละส่วน (integrate by parts) โดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\int_V u(\nabla \cdot \mathbf{V}) dv = \int_\Gamma u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_V (\nabla u \cdot \mathbf{V}) dv \quad (2.19)$$

Γ คือขอบเขตของอีลิเมนต์เมื่อเปรียบเทียบกับสมการที่ (2.19) กับพจน์แรกของสมการที่ (2.18) จะได้

$$u = N_n$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \mathbf{k}$$

และเนื่องจาก $\mathbf{n}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเขตของอีลิเมนต์ Γ

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} n_z$$

$$u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = N_n \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} n_z \right)$$

$$\nabla u = \frac{\partial N_n}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (2.18) เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$ จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} N_n \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} n_z \right) d\Gamma - \int_v \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dv - \\ \int_v N_n s \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv + \int_v (N_n \mathbf{J}_0) dv = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

พิจารณาพจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (2.20) ซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอิลิเมนต์ Γ ที่มีคุณสมบัติทางกายภาพคือปริมาณกระแสตลอดขอบนอกของอิลิเมนต์นั้นๆ อนึ่งอิลิเมนต์นั้นๆ อาจวางตัวอยู่ภายในหรืออยู่ติดขอบนอกของพื้นที่ศึกษา หากอิลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่ตรงตำแหน่งขอบนอกของพื้นที่ศึกษา เงื่อนไขแบบนอยมันน์ (Neumann condition) จะถูกนำมาใช้ในงานวิจัยนี้เพื่อเป็นเงื่อนไขตรงขอบนอกของพื้นที่ศึกษา เงื่อนไขนี้เป็นการกำหนดค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรตามที่ขอบเขตนั้น ซึ่งในปัญหาของงานวิจัยนี้ มีเงื่อนไขขอบเขตแสดงได้ดังสมการที่ (2.21) (Nagwa, Anthony, and Graham, 1992) นั่นคือศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ มีค่าคงที่ตลอดตามขอบของพื้นที่ศึกษา หรือหมายถึงไม่มีการไหลของกระแสไฟฟ้าผ่านบริเวณขอบนอกของมอเตอร์เหนี่ยวนำ (ปริมาณกระแสที่ไหลผ่านขอบเท่ากับศูนย์) และหากอิลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่วางตัวอยู่ภายในพื้นที่ศึกษาโดยมีอิลิเมนต์อื่นๆ ล้อมรอบค่าปริมาณกระแสที่ไหลผ่านจุดต่อภายในจุดต่อหนึ่งของอิลิเมนต์นี้ต้องอยู่ในสภาวะสมดุลกับปริมาณกระแสจากอิลิเมนต์ที่อยู่ล้อมรอบ ดังนั้นปริมาณกระแสที่ไหลเข้าและออกจุดต่อจึงต้องหักล้างกันหมดเท่ากับศูนย์เพื่อก่อให้เกิดสภาวะการไหลของกระแสที่สมดุล ดังนั้นจึงได้สมการไฟไนท์อิลิเมนต์ดังแสดงด้วยสมการที่ (2.22) และเนื่องจากสมการที่ (2.22) มีทั้งหมด 4 สมการ เราสามารถเขียนสมการไฟไนท์อิลิเมนต์นี้ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (2.23)

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} = 0 \quad (2.21)$$

$$\int_v \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dv + \int_v N_n s \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv = \int_v (N_n \mathbf{J}_0) dv \quad (2.22)$$

$$\int_v \left(\left[\frac{\partial N_n}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \left[\frac{\partial N_n}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \left[\frac{\partial N_n}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dv + \int_v [N_n]_{4 \times 1} s \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv = \int_v [N_n]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dv \quad (2.23)$$

และจากสมการที่ (2.10) จึงได้ลักษณะการกระจายของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ โดยประมาณในแต่ละอิลิเมนต์เป็น

$$A(x, y, z) = [N]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1} \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}$$

และสมการไฟไนต์อิลิเมนต์จึงกลายมาเป็น

$$\int_v \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial A}{\partial z} \right]_{1 \times 4} \right) dv [A]_{4 \times 1} + \int_v [N]_{4 \times 1} s \sigma [N]_{1 \times 4} dv [\dot{A}] = \int_v [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dv \quad (2.24)$$

หรือเขียนสมการไฟไนต์อิลิเมนต์สำหรับแต่ละอิลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 4 สมการดังนี้

$$[M]_{4 \times 4} \{\dot{A}\}_{4 \times 1} + [K]_{4 \times 4} \{A\}_{4 \times 1} = \{F\}_{4 \times 1} \quad (2.25)$$

โดยที่ $[M]_{4 \times 4}$ = เมทริกซ์การนำไฟฟ้า

$[K]_{4 \times 4}$ = เมทริกซ์ความขาคซึมได้ของแม่เหล็ก

$\{F\}_{4 \times 1}$ = โหลดเวกเตอร์กระแสที่ผลิตขึ้นเอง

เมทริกซ์การนำทางไฟฟ้า: $[M]_{4 \times 4}$

$$[M]_{4 \times 4} = \int_v [N]_{4 \times 1} s \sigma [N]_{1 \times 4} dv \quad (2.26)$$

จากสมการที่ (2.11) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{1}{6V}(a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (2.27)$$

จากสมการที่ (2.27) และหากค่าสภาพนำทางไฟฟ้า σ มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (2.26) จึงกลายเป็น

$$[M]_{4 \times 4} = s\sigma \int_v [N]_{4 \times 1} [N]_{1 \times 4} dv \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (2.28)$$

สมการที่ (2.28) นี้สามารถคำนวณได้ง่ายโดยใช้สูตรการอินทิเกรตตลอดปริมาตรรูปทรงสี่หน้า (อานนท์ อิศรมงคลรักษ์, 2552) ดังแสดงได้ด้วยสมการที่ (2.29)

$$\int_v N_1^a N_2^b N_3^c N_4^d dv = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V \quad (2.29)$$

สมการที่ (2.28) สามารถแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณีคือ $N_n = N_m$ และ $N_n \neq N_m$ ในกรณีที่ $N_n = N_m$ และยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ 1 ของรูปทรงสี่หน้า จึงได้ $a = 2, b = 0, c = 0, d = 0$ ดังนั้นจากสมการที่ (2.29) จะได้

$$\int_v N_1^2 dv = \frac{2!0!0!0!}{(2+0+0+0+3)!} 6V = \frac{2V}{20}$$

ในกรณีที่ $N_n \neq N_m$ และยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ 1 และ 2 จึงได้ $a = 1, b = 1, c = 0, d = 0$ ดังนั้นจากสมการที่ (2.29) จะได้

$$\int_v N_1^1 N_2^1 dv = \frac{1!1!0!0!}{(1+1+0+0+3)!} 6V = \frac{V}{20}$$

ที่จุดต่ออื่นๆ ของรูปทรงสี่หน้าก็ได้รับการพิจารณาในลักษณะนี้เช่นกัน ดังนั้นจากสมการที่ (2.29) จึงได้เมทริกซ์การนำทางไฟฟ้า $[M]_{4 \times 4}$ ดังแสดงด้วยสมการที่ (2.30) ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าเมทริกซ์ $[M]_{4 \times 4}$ จะมีค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับรูปร่างของอิลิเมนต์

$$[M]_{4 \times 4} = \frac{s\sigma V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

เมทริกซ์ความขบข้มได้ของแม่เหล็ก: $[K]_{4 \times 4}$

$$[K]_{4 \times 4} = \int_v \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} \right) dv \quad (2.31)$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายใน ในสมการที่ (2.27) จึงได้

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{b_n}{6V} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{c_n}{6V} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{d_n}{6V} \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (2.32)$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (2.32) ลงในสมการที่ (2.31) จะได้

$$\begin{aligned} [K]_{4 \times 4} &= \frac{1}{\mu} \int \left(\frac{b_n}{6V} \frac{b_m}{6V} + \frac{c_n}{6V} \frac{c_m}{6V} + \frac{d_n}{6V} \frac{d_m}{6V} \right) dx dy dz \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \\ &= \frac{1}{36\mu V^2} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \int dx dy dz \\ &= \frac{1}{36\mu V} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$[K]_{4 \times 4} = \frac{1}{36\mu V} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3 & b_1 b_4 + c_1 c_4 + d_1 d_4 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 + d_2 d_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3 & b_2 b_4 + c_2 c_4 + d_2 d_4 \\ & & b_3 b_3 + c_3 c_3 + d_3 d_3 & b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4 \\ & & & b_4 b_4 + c_4 c_4 + d_4 d_4 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Sym

โวลเทจเคอร์กระแสน์ผลิตขึ้นเอง: $\{F\}_{4 \times 1}$

$$\{F\}_{4 \times 1} = \int_v [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dv \quad (2.35)$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายในดังสมการที่ (2.27) ดังนั้นสมการที่ (2.35) จึงกลายเป็น

$$\{F\}_{4 \times 1} = \mathbf{J}_0 \int_V N_n dv \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (2.36)$$

สมการที่ (2.36) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรคังสมการ (2.29) โดยยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ 1 ของรูปทรงสี่หน้า จึงได้ $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$ ดังนั้นจากสมการที่ (2.29) จะได้

$$\int_V N_1^1 dv = \frac{1!0!0!0!}{(1+0+0+0+3)!} 6V = \frac{V}{4}$$

ซึ่งจุดที่เหลือของรูปทรงสี่หน้าก็ได้รับการพิจารณาเช่นเดียวกันนี้ ดังนั้นจากสมการที่ (2.36) จึงได้โหลดเวกเตอร์กระแสที่ผลิตขึ้นเองแสดงดังนี้

$$\{F\}_{4 \times 1} = \frac{\mathbf{J}_0 V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

ซึ่งการคำนวณค่าความหนาแน่นของกระแสภายนอก $\mathbf{J}_0$ ของมอเตอร์เหนี่ยวนำในแต่ละเฟส จะแสดงรายละเอียดต่างๆ ให้ปรากฏในบทต่อไป

2.3.4 การแก้ปัญหายุติสถานะชั่วคราว

ปัญหาในงานวิจัยนี้เป็นปัญหาแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วคราว (linear transient problem) โดยที่ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ จะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาเนื่องจากเวกเตอร์ $\{F\}$ เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาเนื่องจากแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับ ซึ่งการแก้สมการที่ (2.25) จะต้องอาศัยวิธีการแก้ปัญหายุติสถานะชั่วคราวที่เรียกว่าวิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations)

การแก้ปัญหายุติสถานะชั่วคราวจะใช้วิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด โดยจะมีลักษณะของผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับค่า β ที่เลือกใช้ ดังแสดงในสมการที่ (2.38) โดย Δt คือค่าของช่วงเวลา (time step) โดยถ้าเลือกใช้ $\beta = 0$ จะเป็นวิธีของออยเลอร์ (Euler) ถ้า $\beta = 1/2$ เป็นวิธีของแครังก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson) ถ้า $\beta = 2/3$ เป็นวิธีของกาลเลอร์กิน (Galerkin) และถ้า $\beta = 1$ จะเรียกว่าวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (backward difference) ในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังดัง

สมการที่ (2.39) เนื่องจากวิธีนี้รับประกันการลู่เข้าของผลลัพธ์ และผลลัพธ์จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง

$$\beta\{\dot{A}\}^{t+\Delta t} + (1-\beta)\{\dot{A}\}^t = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (2.38)$$

$$\{\dot{A}\}^{t+\Delta t} = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (2.39)$$

จากการเลือกใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง สมการที่ (2.25) จึงพัฒนามาเป็นสมการที่ (2.40) จากนั้นแทนค่าสมการที่ (2.39) ลงในสมการที่ (2.40) จึงได้ผลลัพธ์ของสมการไฟไนต์อิลิเมนต์เมื่อพิจารณาปัญหาในสถานะชั่วคราว ดังสมการที่ (2.41)

$$[M]\{\dot{A}\}^{t+\Delta t} + [K]\{A\}^{t+\Delta t} = \{F\}^{t+\Delta t} \quad (2.40)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[M] + [K] \right) \{A\}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[M]\{A\}^t + \{F\}^{t+\Delta t} \quad (2.41)$$

2.3.5 การประกอบสมการอิลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ

ขั้นตอนนี้เป็น การนำสมการของแต่ละอิลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมของระบบ โดยจากขั้นตอนในหัวข้อที่ 2.3.1 หากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์ย่อย ซึ่งประกอบด้วย n จุดต่อ จึงก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น n สมการ ดังนั้นจึงได้สมการรวมของงานวิจัยนี้เมื่อพิจารณาปัญหาแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วคราว คือ

$$[J]_{n \times n} [A]_{n \times 1} = [f]_{n \times 1} \quad (2.42)$$

2.3.6 การประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาผลเฉลย

ประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต (initial and boundary condition) ที่สอดคล้องกับปัญหาลงในสมการรวมของระบบ (constraints) ซึ่งงานวิจัยนี้มีค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในรอบแรกที่จะพิจารณาการหมุนของมอเตอร์คือ $A(t=0) = 0$ ส่วนการหมุนรอบถัดไปจะใช้คำตอบจากรอบที่แล้วเป็นเงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อประหยัดเวลาในการลู่เข้าหาคำตอบที่ถูกต้อง ส่วนค่าเงื่อนไขขอบเขต จะ

กำหนดให้ขอบในที่ติดกับเพลลาและขอบนอกของมอเตอร์มีค่า $A = 0$ (Brunelli, Casadei, Reggiani and Serra, 1983) และ (Fu, 1999)

2.3.7 การคำนวณค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการ

เมื่อทราบค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ ที่จุดต่อต่างๆ แล้ว จึงสามารถคำนวณหาค่าต่างๆ ที่สัมพันธ์กันต่อไปได้ โดยสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ ที่กระจายตัวในระบบพิกัดฉาก (ระนาบ xyz) ของมอเตอร์สามารถคำนวณได้จาก $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ดังนั้นเมื่อพิจารณามอเตอร์ใน 3 มิติ ตามระนาบพิกัด xyz จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน x (B_x) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน y (B_y) ดังแสดงด้วยสมการที่ (2.43) และ (2.44) ตามลำดับ

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \quad (2.43)$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4}{6V} \quad (2.44)$$

จากนั้นแปลงระบบจากพิกัดฉากไปเป็นพิกัดทรงกระบอก เพื่อใช้คำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กในแนวรัศมี (radial flux density, B_r) และสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัส (tangential flux density, B_t) ที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์ตรงส่วนของฟันสเตเตอร์ในแต่ละซี่ที่มีมุม ϕ เปลี่ยนแปลงไป สามารถแสดงได้ดังนี้

$$B_r = B_x \cos \phi + B_y \sin \phi \quad (2.45)$$

$$B_t = -B_x \sin \phi + B_y \cos \phi \quad (2.46)$$

เมื่อคำนวณหาค่า B_r และ B_t แล้ว จากนั้นจึงใช้สมการความเค้นของแมกซ์เวลล์หาค่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับช่องอากาศ ซึ่งจะมีผลต่อการสั่นสะเทือนในมอเตอร์เหนี่ยวนำ (Ishibashi, Noda, and Mochizuki, 1998) และ (Sakamoto, Hirata, Kobayashi, and Kajiwar, 1999) โดยที่

$$F_r = \frac{1}{2\mu_0} (B_r^2 - B_t^2) \quad (2.47)$$

$$F_t = \frac{1}{\mu_0} (B_r B_t) \quad (2.48)$$

ซึ่ง F_r และ F_t คือแรงแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวรัศมีและแนวสัมผัสตามลำดับ โดยขนาดของการสั่นสะเทือนที่เกิดจากแรงแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวสัมผัสจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแนวรัศมี ดังนั้นการพิจารณาแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์ในงานวิจัยนี้ จึงพิจารณาเฉพาะในแนวรัศมีเท่านั้น (Tarnhuvud, and Reichert, 1988) และ (Neves, Carlson, Sadowski, and Bastos, 1998) แต่เมื่อพิจารณาแรงบิดของมอเตอร์ที่ทำให้โรเตอร์หมุน แรงแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวสัมผัสจะเป็นแรงหลักที่ต้องนำมาพิจารณาถึง

2.4 สรุป

ในบทนี้ ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส เมื่อพิจารณามอเตอร์ในสถานะชั่วคราว ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะปรากฏอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง การประยุกต์วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์เพื่อคำนวณค่าฟลักซ์แม่เหล็กได้ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาเลอร์คิน รายละเอียดต่างๆ ในบทนี้ จะนำไปสู่การประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์อีลิเมนต์เพื่อใช้เป็นโปรแกรมจำลองผลระบบที่จะได้กล่าวถึงในบทที่ 4 ต่อไป