# บทที่ 2
# ทฤษฎีที่ใช้ในการแก้ปัญหา

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง และนำมาใช้ในการทดลอง เพื่อตรวจจับก้อนหินปูนขนาดเล็กในภาพรังสีเต้านม ซึ่งทฤษฎีที่นำมาประยุกต์ใช้คือ Type-2 Fuzzy Logic System, Fuzzy C-Means (FCM) และ Possibilistic C-Means (PCM) โดยจะกล่าวรายละเอียดเฉพาะส่วนที่สำคัญดังต่อไปนี้

## 2.1 ระบบไทป์ทูฟัซซีลอจิก (Type-2 Fuzzy Logic System) [20]

ไทป์ทูฟัซซี (Type-2 Fuzzy) พัฒนามาจากไทป์วันหรือฟัซซี (Fuzzy) รูปแบบดั้งเดิมทั่วไป ในระบบไทป์ทูฟัซซีลอจิกจะกล่าวถึง นิยาม (Definitions) การดำเนินการ (Operations) โดยจะกล่าวรายละเอียดดังต่อไปนี้

### 2.1.1 ไทป์ทูฟัซซีเซต (Type-2 Fuzzy Set) [20]

**นิยามที่ 2.1** ไทป์ทูฟัซซีเซตแสดงโดย กำหนดให้ฟัซซีเซต $\tilde{A}$ มีคุณลักษณะค่าฟังก์ชันสมาชิก (Membership Function) แทนสัญลักษณ์ด้วย $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ เมื่อ $x \in X$ และ $u \in J_x \subseteq [0,1]$

$$\tilde{A} = \left\{ \left( (x,u),\, \mu_{\tilde{A}}(x,u) \right) \middle| \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0,1] \right\} \tag{2.1}$$

สำหรับ $0 \le \mu_{\tilde{A}}(x,u) \le 1$ สามารถเขียนแสดงออกมาในลักษณะเฉพาะเป็น

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x,u)}{(x,u)} \qquad , J_x \subseteq [0,1] \tag{2.2}$$

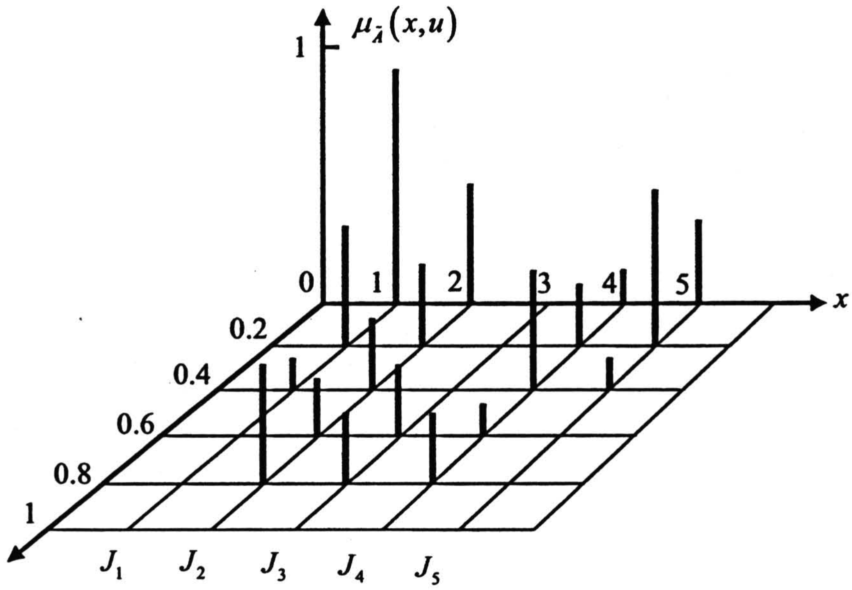
ซึ่ง $\int\int$ แทนด้วยยูเนียนของความเป็นสมาชิกของ $x$ และ $u$

**ตัวอย่างที่ 2.1** รูปที่ 2.1 แสดงไทป์ทูฟังก์ชันสมาชิกที่มี $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ สำหรับ $x$ และ $u$ ที่มีค่าแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete) เมื่อกำหนดให้ $X = \{1,2,3,4,5\}$ และ $u = \{0,0.2,0.4,0.6,0.8,1\}$ พิจารณาค่า

$J_1 = \{0,0.2,0.4\}$,

$J_2 = \{0,0.2,0.4,0.6,0.8\}$,

$J_3 = \{0.6,0.8\}$, $J_4 = J_2$ และ $J_5 = J_1$




รูปที่ 2.1 ตัวอย่างของไทป์ทูฟังชันความเป็นสมาชิก

**นิยามที่ 2.2** ในแต่ละค่าของ $x$ ค่าใดๆ ให้มีค่าเป็น $x = x'$ เรียกเป็นระนาบ (Plane) 2 มิติ (Dimensions) ของแกน $u$ และความเป็นสมาชิกของ $\mu_{\tilde{A}}(x',u)$ เรียกเป็น ส่วนแบ่งแนวตั้ง (Vertical Slice) ของ $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ ฟังก์ชันสมาชิกลำดับรอง (Secondary Membership Function) ก็คือส่วนแบ่งแนวตั้งของ $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ นั่นคือความเป็นสมาชิก $\mu_{\tilde{A}}(x=x',u)$ สำหรับ $x' \in X$ และ $\forall u \in J_{x'} \subseteq [0,1]$ เขียนได้เป็น

$$\mu_{\tilde{A}}(x=x',u) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{u \in J_{x'}} \frac{f_{x'}(u)}{u} \qquad ,J_{x'} \subseteq [0,1] \qquad (2.3)$$

สำหรับ $0 \le f_{x'}(u) \le 1$ สามารถอธิบายไทป์ทูฟัซซีเซต ได้ว่าการรวมกันของเซตลำดับรอง (Secondary Set) ทั้งหมด หรือเขียนสมการ $\tilde{A}$ จากสมการที่ (2.2) ได้คือ

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} = \int_{x \in X} \left[ \int_{u \in J_x} \frac{f_x(u)}{u} \right] \Big/ x \qquad ,J_x \subseteq [0,1] \qquad (2.4)$$

**ตัวอย่างที่ 2.2** จากรูปที่ 2.1 ที่ค่า $x = 4$ จะมีค่าความเป็นสมาชิกอยู่จำนวน 5 ค่าคือ (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8) ตามลำดับ และสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\mu_{\tilde{A}}(4)=\frac{0.25}{0}+\frac{0.35}{0.2}+\frac{0.5}{0.4}+\frac{0.1}{0.6}+\frac{0.35}{0.8}$$

จากค่าความเป็นสมาชิกข้างต้นสามารถอธิบาย $\mu_{\tilde{A}}(4)$ ได้ว่า ค่าความเป็นสมาชิกที่ $x=4$ จะประกอบไปด้วย $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ ดังนี้

$\mu_{\tilde{A}}(4,0)=0.25$ หมายความว่าที่ค่า $u$ เท่ากับ 0 ค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.25

$\mu_{\tilde{A}}(4,0.2)=0.35$ หมายความว่าที่ค่า $u$ เท่ากับ 0.2 ค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.35

$\mu_{\tilde{A}}(4,0.4)=0.5$ หมายความว่าที่ค่า $u$ เท่ากับ 0.4 ค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.5

$\mu_{\tilde{A}}(4,0.6)=0.1$ หมายความว่าที่ค่า $u$ เท่ากับ 0.6 ค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.1

$\mu_{\tilde{A}}(4,0.8)=0.35$ หมายความว่าที่ค่า $u$ เท่ากับ 0.8 ค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 0.35

**นิยามที่ 2.3 ขอบเขต (Domain) ของค่าฟังก์ชันสมาชิกลำดับรอง (Secondary Membership Function)** จะนำมาจากความเป็นสมาชิกลำดับแรก (Primary Membership) ของ $x$ และในสมการที่ (2.4) $J_x$ ก็คือความเป็นสมาชิกลำดับแรกของ $x$ โดยที่ $u\in J_x\subseteq[0,1]$ และ $\forall x\in X$

**นิยามที่ 2.4 ขนาด (Amplitude) ของค่าฟังก์ชันสมาชิกลำดับรอง (Secondary Membership Function)** เรียกว่าค่าระดับรอง (Secondary Grade) ดังนั้นในสมการที่ (2.4) $f_x(u)$ จะเป็นค่าระดับรอง และในสมการที่ (2.1) ก็จะเป็น $\mu_{\tilde{A}}(x',u')(x'\in X,u'\in J_{x'})$ นั่นเอง

ถ้ากำหนดให้ $X$ และ $J_x$ เป็นค่าแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete) สามารถแสดงเป็นสมการที่มีลักษณะเดียวกับสมการที่ (2.4) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\tilde{A}&=\sum_{x\in X}\left[\sum_{u\in J_x}\frac{f_x(u)}{u}\right]\Big/x\\&=\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{u\in J_{x_i}}\frac{f_{x_i}(u)}{u}\right]\Big/x_i\\&=\left[\sum_{k=1}^{M_1}\frac{f_{x_1}(u_{1k})}{u_{1k}}\right]\Big/x_1+\ldots+\left[\sum_{k=1}^{M_N}\frac{f_{x_N}(u_{Nk})}{u_{Nk}}\right]\Big/x_N\end{aligned}\tag{2.5}$$

**ตัวอย่างที่ 2.3** พิจารณาจากรูปที่ 2.1 จาก $\mu_{\tilde{A}}(2)=\frac{0.5}{0}+\frac{0.4}{0.2}+\frac{0.4}{0.4}+\frac{0.2}{0.6}+\frac{0.5}{0.8}$ หมายถึงค่าระดับแรก (Primary Grade) ที่ค่า $x=2$ มีจำนวน 5 ค่าคือ $J_2=$ 0,0.2,0.4,0.6,0.8 ตามลำดับ และค่าระดับรองก็คือ 0.5,0.4,0.4,0.2,0.5 ตามลำดับ

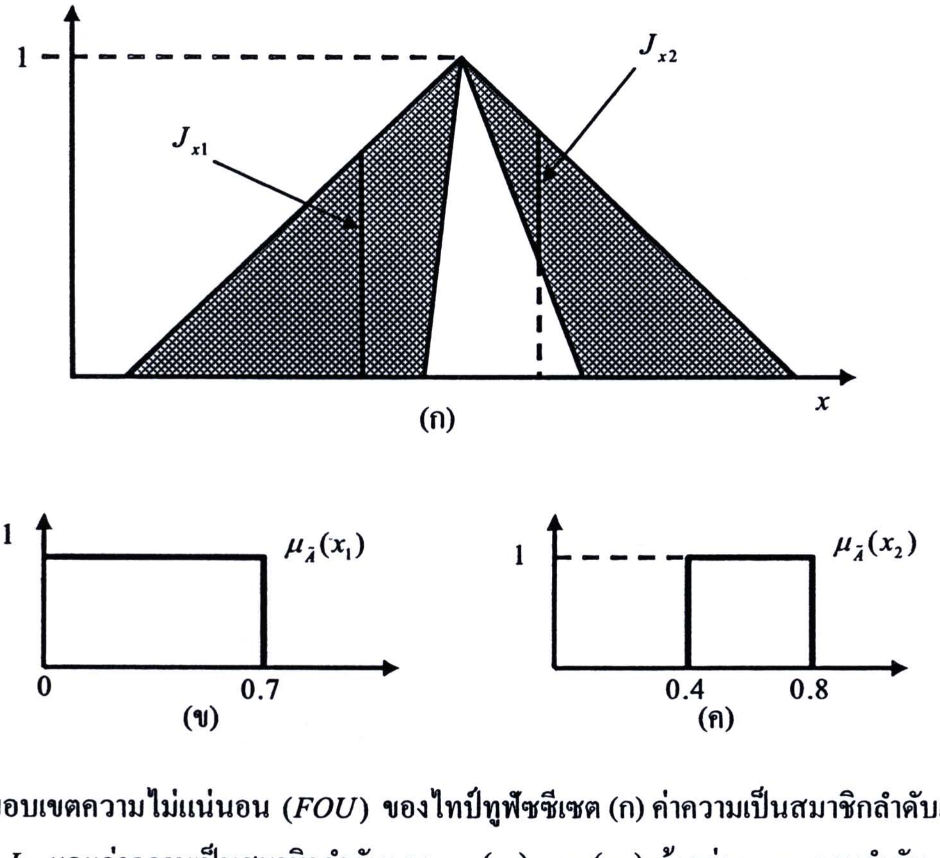
**นิยามที่ 2.5** สมมติให้ฟังก์ชันสมาชิกลำดับรองของไทป์ทูฟัซซีเซต แต่ละฟังก์ชันและหนึ่งฟังก์ชันที่มีค่าระดับรองมีค่าเท่ากับ 1 จะเรียกว่า **ฟังก์ชันสมาชิกหลัก (Principal Membership Function)** คือ เป็นการรวมกัน (Union) ของจุดทุกจุดที่มีอยู่ในฟังก์ชัน

$$\mu_{principal}(x) = \int_{x \in X} \frac{u}{x} \quad where \;\; f_x(u) = 1 \tag{2.6}$$

**นิยามที่ 2.6** ความไม่แน่นอน (Uncertainty) ในความเป็นสมาชิกลำดับแรก (Primary Membership) ของ Type-2 Fuzzy Set ประกอบไปด้วยพื้นที่ที่มีขอบเขตที่เรียกว่า Footprint of Uncertainty (FOU) ซึ่งก็คือการยูเนียน (Union) ของความเป็นสมาชิกลำดับแรกทั้งหมด

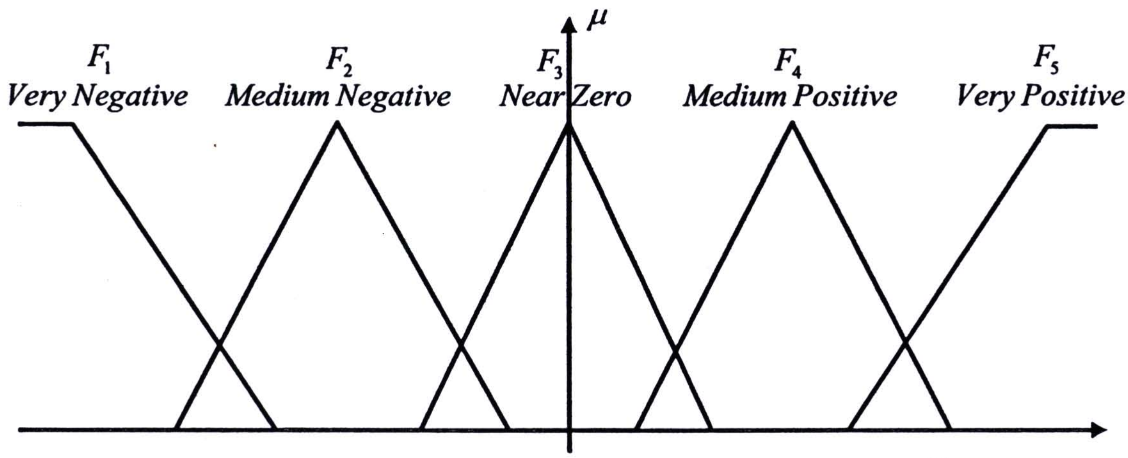
$$FOU(\tilde{A}) = \cup_{x \in X} J_x \tag{2.7}$$

**ตัวอย่างที่ 2.4** ตัวอย่างของขอบเขตความไม่แน่นอน (FOU) คือพื้นที่แรเงา (Shaded) ในรูปที่ 2.2 และในขอบเขตความไม่แน่นอนนี้แสดงอีกอย่างคือ อินเทอวัลไทป์ทูฟัซซีเซต (Interval Type-2 Fuzzy Set) รูปแบบสมการ $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ ฟังก์ชันสมาชิกลำดับแรก และฟังก์ชันสมาชิกลำดับรองดังแสดงในรูปที่ 2.2

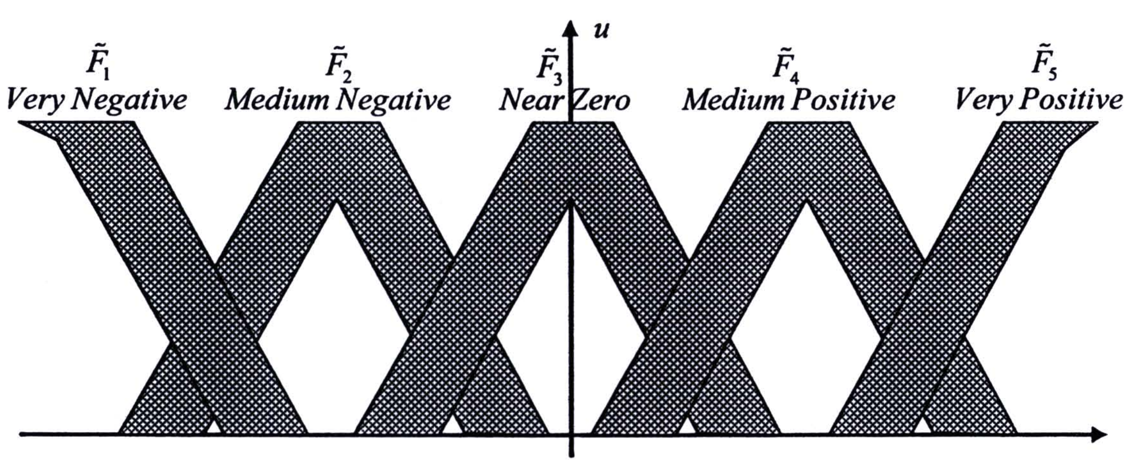



รูปที่ 2.2 ขอบเขตความไม่แน่นอน (*FOU*) ของไทป์ทูฟัซซีเซต (ก) ค่าความเป็นสมาชิกลำดับแรก $J_{x1}, J_{x2}$ และค่าความเป็นสมาชิกลำดับรอง $\mu_{\tilde{A}}(x_1)$, $\mu_{\tilde{A}}(x_2)$ ด้วยค่า $x_1, x_2$ ตามลำดับ (ข) และ (ค) ฟังก์ชันสมาชิกลำดับรอง ที่มีลักษณะเป็นเซตช่วง (Interval Set)

**ตัวอย่างที่ 2.5** จากรูปที่ 2.3 ได้แสดงฟังก์ชันสมาชิกแบบไทป์วัน และแสดงถึงขอบเขตของความไม่แน่นอน (Uncertain) ของไทป์ทูฟังก์ชันสมาชิกจากการวัดอุณหภูมิ ฟังก์ชันได้แสดงตำแหน่งของยอดฟังก์ชันแบบสามเหลี่ยม และตำแหน่งของฟังก์ชันสมาชิกขอบเขตบนและฟังก์ชันสมาชิกขอบเขตล่าง




(ก)




(ข)

**รูปที่ 2.3 ฟังก์ชันสมาชิกของการวัดอุณหภูมิ (ก) ฟังก์ชันสมาชิกของไทป์วัน (ข) ฟังก์ชันสมาชิกของไทป์ทู**

**นิยามที่ 2.7** ฟังก์ชันสมาชิกขอบเขตบน และฟังก์ชันสมาชิกขอบเขตล่าง คือ สองไทป์วันฟังก์ชันสมาชิก (2 Type-1 Membership Functions) เป็นพื้นที่ของขอบเขตความไม่แน่นอนของไทป์ทูฟัซซีเซต $\tilde{A}$ ฟังก์ชันสมาชิกขอบเขตบนแทนขอบเขตบนของ $FOU(\tilde{A})$ เขียนเป็น $\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$ และฟังก์ชันสมาชิกขอบเขตล่างแทนขอบเขตบนของ $FOU(\tilde{A})$ เขียนเป็น $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$

$$\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv \overline{FOU(\tilde{A})}, \forall x \in X \tag{2.8}$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv \underline{FOU(\tilde{A})}, \forall x \in X \tag{2.9}$$

จากนิยามที่ 2.7 ขอบเขตความไม่แน่นอน (FOU) ก็คือการ ยูเนียนของฟังก์ชันลำดับแรกทั้งหมด ดังนั้น $\overline{FOU(\tilde{A})} = \cup_{x \in X} \overline{J}_x$ และ $\underline{FOU(\tilde{A})} = \cup_{x \in X} \underline{J}_x$ เมื่อ $\overline{J}_x$ และ $\underline{J}_x$ คือขอบเขตบนและขอบเขตล่างของ $J_x$ ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาจากสมการที่ (2.8), (2.9) จะได้ว่า $\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \overline{J}_x$ และ $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \underline{J}_x$, $\forall x \in X$ ตามลำดับ สามารถนำขอบเขตบนและขอบเขตล่างมาแทนในสมการที่ (2.4) ดังสมการที่ (2.10)

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x,u) &= \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x = \int_{x \in X}\left[\int_{u \in J_x} \frac{f_x(u)}{u}\right]\Big/ x \\ &= \int_{x \in X}\left[\int_{u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)]} \frac{f_x(u)}{u}\right]\Big/ x \end{aligned} \tag{2.10}$$

สำหรับ $\mu_{\tilde{A}}(x)$ สามารถเขียนเป็นสมการของ ฟังก์ชันสมาชิกขอบเขตบนและขอบเขตล่างได้ดังสมการที่ (2.11)

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)]} \frac{f_x(u)}{u} \tag{2.11}$$

ในกรณีที่ฟังก์ชันสมาชิกลำดับรอง (Secondary Membership Function) มีค่าเป็นช่วงเซต (Interval Set) ทำให้ในสมการที่ (2.10) เขียนได้เป็น

$$\tilde{A} = \int_{x \in X}\left[\int_{u \in J_x} \frac{1}{u}\right]\Big/ x = \int_{x \in X}\left[\int_{u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)]} \frac{1}{u}\right]\Big/ x \tag{2.12}$$

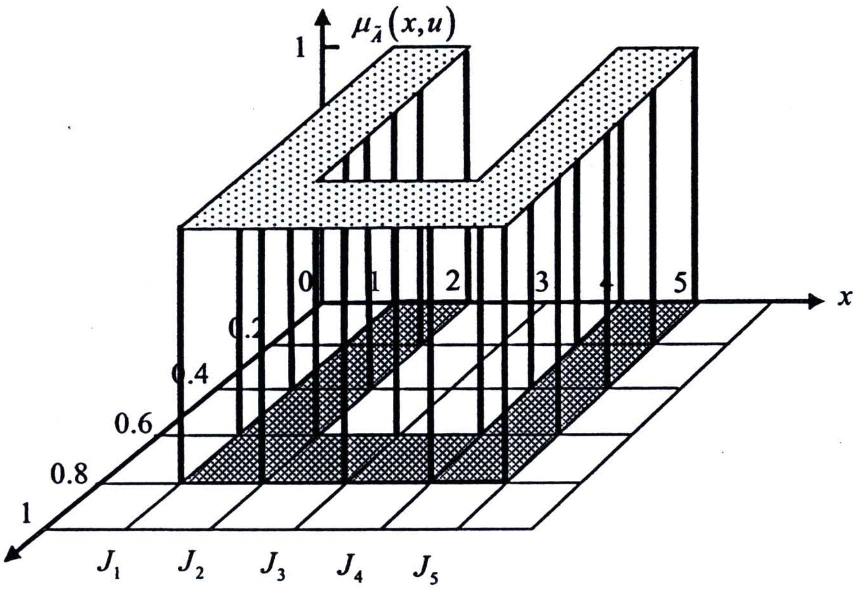
ถ้ากำหนดให้ $X$ และ $J_x$ เป็นค่าแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete) สามารถแสดงเป็นสมการที่มีลักษณะเดียวกับสมการที่ (2.12) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \sum_{x \in X}\left[\sum_{u \in J_x} \frac{1}{u}\right]\Big/ x \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{u \in J_{x_i}} \frac{1}{u}\right]\Big/ x_i \\ &= \left[\sum_{k=1}^{M_1} \frac{1}{u_{1k}}\right]\Big/ x_1 + \ldots + \left[\sum_{k=1}^{M_N} \frac{1}{u_{Nk}}\right]\Big/ x_N \end{aligned} \tag{2.13}$$

**ตัวอย่างที่ 2.6** ในรูปที่ 2.4 แสดงฟังก์ชันสมาชิกลำดับรอง (5 ฟังก์ชัน) ที่ $x=1,2,3,4,5$ มีค่าเป็น $\mu_{\tilde{A}}(x,u)$ จากค่าฟังก์ชันสมาชิกลำดับแรกจะเป็น

$$J_1 = J_2 = J_4 = J_5 = \{0,0.2,0.4,0.6,0.8\} \text{ และ } J_3 = \{0.6,0.8\}$$

ถ้า Vertical Slice ที่ $x=2$ จะได้ $\mu_{\tilde{A}}(2) = \frac{1}{0}+\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.4}+\frac{1}{0.6}+\frac{1}{0.8}$




รูปที่ 2.4 ตัวอย่างของอินเทอวัลไทป์ทูฟังชันความเป็นสมาชิก

### 2.1.2 การดำเนินการบนไทป์ทูฟัซซีเซต (Operation on Type-2 Fuzzy Set) [20]

**พิจารณาไทป์ทูฟัซซีเซต $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$**

$$\tilde{A} = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)/x = \int_X \left[\int_{J_x^u} \frac{f_x(u)}{u}\right]\Big/ x \quad ,J_x^u \subseteq [0,1] \tag{2.14}$$

$$\tilde{B} = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x)/x = \int_X \left[\int_{J_x^w} \frac{g_x(w)}{w}\right]\Big/ x \quad ,J_x^w \subseteq [0,1] \tag{2.15}$$

**1) การดำเนินการยูเนียน (Union Operation)**

$$\tilde{A}\cup\tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w} \frac{f_x(u)\bigstar g_x(w)}{v} \equiv \mu_{\tilde{A}}(x) \sqcup \mu_{\tilde{B}}(x) \quad ,x\in X \tag{2.16}$$

โดยที่ $\bigstar$ แสดงถึงการ Minimum หรือ Product ระหว่าง $f_x(u)$ และ $g_x(w)$ และ $\sqcup$ แทนตัวดำเนินการ Join Operation และ $v \equiv u \vee w$ คือ ผลลัพธ์จาก **Maximum Operation**

**2) การดำเนินการอินเตอร์เซกชัน (Intersection Operation)**

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}\Leftrightarrow\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\int_{u\in J_x^u}\int_{w\in J_x^w}\frac{f_x(u)\bigstar g_x(w)}{v}\equiv\mu_{\tilde{A}}(x)\sqcap\mu_{\tilde{B}}(x)\quad ,x\in X \tag{2.17}$$

โดยที่ $\bigstar$ แสดงถึงการ Minimum หรือ Product ระหว่าง $f_x(u)$ และ $g_x(w)$ และ $\sqcap$ แทนตัวดำเนินการ Meet Operation และ $v\equiv u\wedge w$ คือ ผลลัพธ์จาก **Minimum Operation**

**3) การดำเนินการคอมพลีเมนต์ (Complement Operation)**

$$\bar{\tilde{A}}\Leftrightarrow\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x)=\int_{u\in J_x^u}\frac{f_x(u)}{(1-u)}\equiv\neg\mu_{\tilde{A}}(x)\quad ,x\in X \tag{2.18}$$

**ตัวอย่างที่ 2.7** กำหนดให้ไทป์ทูฟัซซีเซต $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$ โดยที่ค่า $x$ สำหรับฟังก์ชันสมาชิกลำดับรองมีค่า $\mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{0.5}{0}+\frac{0.7}{0.1}$ และ $\mu_{\tilde{B}}(x)=\frac{0.3}{0.4}+\frac{0.9}{0.8}$

การดำเนินการในสมการ (2.16) โดยใช้ Minimum t-norm และ Maximum t-norm จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\sqcup\mu_{\tilde{B}}(x)&=\left(\frac{0.5}{0}+\frac{0.7}{0.1}\right)\sqcup\left(\frac{0.3}{0.4}+\frac{0.9}{0.8}\right)\\
&=\frac{0.5\wedge0.3}{0\vee0.4}+\frac{0.5\wedge0.9}{0\vee0.8}+\frac{0.7\wedge0.3}{0.1\vee0.4}+\frac{0.7\wedge0.9}{0.1\vee0.8}\\
&=\frac{0.3}{0.4}+\frac{0.5}{0.8}+\frac{0.3}{0.4}+\frac{0.7}{0.8}\\
&=\frac{\max\{0.3,0.3\}}{0.4}+\frac{\max\{0.5,0.7\}}{0.8}\\
&=\frac{0.3}{0.4}+\frac{0.7}{0.8}
\end{aligned}$$

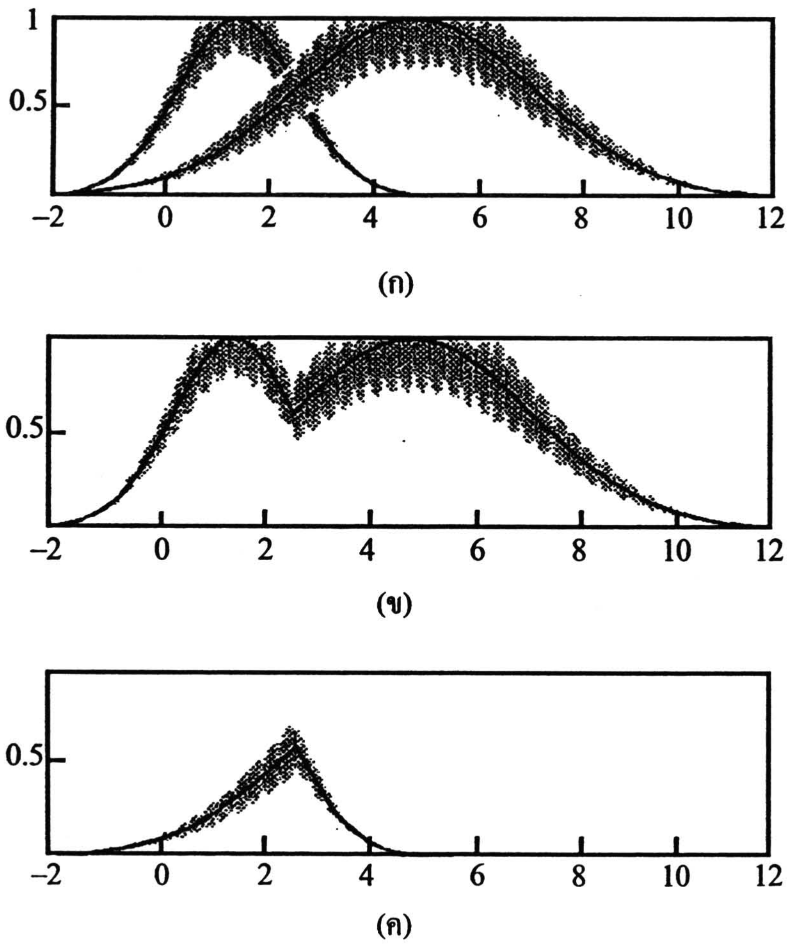
การดำเนินการในสมการ (2.17) โดยใช้ Minimum t-norm และ Maximum t-norm จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\sqcap\mu_{\tilde{B}}(x)&=\left(\frac{0.5}{0}+\frac{0.7}{0.1}\right)\sqcap\left(\frac{0.3}{0.4}+\frac{0.9}{0.8}\right)\\
&=\frac{0.5\wedge0.3}{0\wedge0.4}+\frac{0.5\wedge0.9}{0\wedge0.8}+\frac{0.7\wedge0.3}{0.1\wedge0.4}+\frac{0.7\wedge0.9}{0.1\wedge0.8}\\
&=\frac{0.3}{0}+\frac{0.5}{0}+\frac{0.3}{0.1}+\frac{0.7}{0.1}\\
&=\frac{\max\{0.3,0.5\}}{0}+\frac{\max\{0.3,0.7\}}{0.1}\\
&=\frac{0.5}{0}+\frac{0.7}{0.1}
\end{aligned}$$

**การดำเนินการในสมการ (2.18) จะได้ดังนี้**

$$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = \neg\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{0.5}{(1-0)} + \frac{0.7}{(1-0.1)}$$
$$= \frac{0.5}{1} + \frac{0.7}{0.9}$$
$$\mu_{\bar{\tilde{B}}}(x) = \neg\mu_{\tilde{B}}(x) = \frac{0.3}{(1-0.4)} + \frac{0.9}{(1-0.8)}$$
$$= \frac{0.3}{0.6} + \frac{0.9}{0.2}$$

**ตัวอย่างที่ 2.8** **การทำงานของการดำเนินการ** (Operation) [21] **แสดงดังในรูปที่** 2.5 **ซึ่งเป็นลักษณะของความสัมพันธ์ของไทป์ทูฟัซซีเซต** (Type-2 Fuzzy Set)




รูปที่ 2.5 การดำเนินการของไทป์ทูฟัซซีเซต (ก) ไทป์ทูฟังก์ชันสมาชิก 2 ฟังก์ชัน (ข) การยูเนียน (Union) และ (ค) การอินเตอร์เซกชัน (Intersection)

**2.1.3 การดำเนินการอินเทอวัลไทป์ทูฟัซซีเซต (Operation on Interval Type-2 Fuzzy Sets) [20, 21]**

พิจารณาอินเทอวัลไทป์ทูฟัซซีเซต $\tilde{A}$ และ $\tilde{B}$

$$\tilde{A}=\int_{X}\mu_{\tilde{A}}(x)/x=\int_{X}\left[\int_{j_x^u}\frac{1}{u}\right]\Big/x \quad ,j_x^u\subseteq[0,1] \tag{2.19}$$

$$\tilde{B}=\int_{X}\mu_{\tilde{A}}(x)/x=\int_{X}\left[\int_{j_x^w}\frac{1}{w}\right]\Big/x \quad ,j_x^w\subseteq[0,1] \tag{2.20}$$

**1) การดำเนินการยูเนียนหรือ Join (Union/Join Operation)**

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=1\Big/\left[\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)\vee\underline{\mu}_{\tilde{B}}(x),\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)\vee\overline{\mu}_{\tilde{B}}(x)\right] \quad ,\forall x\in X \tag{2.21}$$

**2) การดำเนินการอินเตอร์เซกชันหรือมีท (Intersection/Meet Operation)**

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=1\Big/\left[\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)\wedge\underline{\mu}_{\tilde{B}}(x),\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)\wedge\overline{\mu}_{\tilde{B}}(x)\right] \quad ,\forall x\in X \tag{2.22}$$

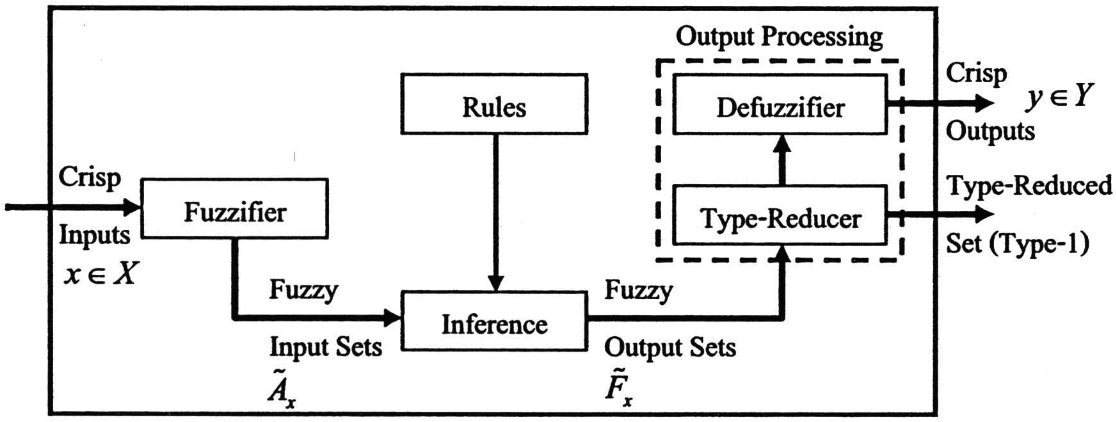
**3) การดำเนินการคอมพลีเมนต์ (Complement Operation)**

$$\overline{\tilde{A}}=1\Big/\left[1-\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x),1-\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)\right] \quad ,\forall x\in X \tag{2.23}$$

**2.1.4 ระบบอินเทอวัลไทป์ทูฟัซซีลอจิก (Interval Type-2 Fuzzy Logic) [22, 23]**

การเลือกใช้ระบบอินเทอวัลไทป์ทูฟัซซีเซตมาใช้งานสาเหตุเนื่องจาก การดำเนินการบนไทป์ทูฟัซซีมีความซ้ำซ้อนและกระทำได้ยาก อีกสาเหตุหนึ่งก็คือยังไม่มีเหตุผลที่เหมาะสมในการสร้างฟังก์ชันสมาชิกลำดับรอง จากรูปที่ 2.6 แสดงถึงการทำงานของระบบไทป์ทูฟัซซีลอจิกหรือ General Type-2 Fuzzy Logic System ซึ่งจะมีลักษณะคล้ายกับระบบไทป์วันฟัซซีลอจิก แต่จะแตกต่างกันตรงที่ในส่วนกระบวนการประมวลผลลัพธ์ (Output Processing) โดยจะมีสองกระบวนการย่อยคือ กระบวนการ Type-Reduction และกระบวนการ Defuzzification

จากการทำงานในรูปที่ 2.6 เริ่มด้วยการนำค่าที่เป็นจำนวนคริสป์ (Crisp Number) มาผ่านกระบวนการทำให้เป็นค่าแบบฟัซซี (Fuzzy Number) ของกระบวนการ Fuzzification โดยจะผ่านฟังก์ชันสมาชิกของอินเทอวัลไทป์ทู ส่วนต่อมาเป็นการอนุมานด้วยกฎ (Rules) ซึ่งกฎจะอยู่ในรูปแบบดังนี้




**รูปที่ 2.6 กระบวนการของระบบไทป์ทูฟัซซีลอจิก**

IF Antecedent, THEN Consequent

สามารถอธิบายเป็นรูปแบบของกฎคือ ถ้า (IF) ข้อ หรือข้อนำ (Antecedent) แล้ว (Then) จะอนุมาน (Inference) ของกฎนี้เป็น ข้อสรุปหรือข้อตาม (Consequent)

กำหนดให้ระบบไทป์ทูฟัซซีลอจิกมีจำนวน $n$ อินพุต $x_1 \in X_1,...,x_p \in X_p$ และเอาต์พุตหนึ่งเอาต์พุต $y \in Y$ จากทั้งหมด $M$ กฎสำกรับกฎที่ $l$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\tilde{R}^l : \text{IF} x_1 \text{ is } \tilde{F}_1^l \text{ and} \cdots \text{and} x_p \text{ is } \tilde{F}_p^l \text{ THEN } y \text{ is } \tilde{G}^l, \quad l = 1,...,M \tag{2.24}$$

**2.1.5 การอนุมานแบบฟัซซี (Fuzzy Inference Engine) [20 - 23]**

การอนุมานจากกฎในระบบไทป์ทูฟัซซีเซตสามารถกล่าวได้ดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีที่ 2.1** ระบบอินเทอวัลไทป์ทูฟัซซีลอจิกการกระทำ Meet Operation ภายใต้ Minimum หรือ Product (a) ผลลัพธ์ของการดำเนินการอินพุตและข้อนำ จะเป็นไฟร์เซต (Firing Set) ของ $\prod_{i=1}^{p} \mu_{\tilde{F}_i^l}(x') \equiv F^l(\mathbf{x}')$ เป็นอินเทอวัลไทป์วันเซต

$$F^l(\mathbf{x}') = [\underline{f}^l(\mathbf{x}'), \overline{f}^l(\mathbf{x}')] \equiv [\underline{f}^l, \overline{f}^l] \tag{2.25}$$

โดยที่

$$\underline{f}^l(\mathbf{x}') = \underline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_1') \bigstar \cdots \bigstar \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p') \tag{2.26}$$

และ

$$\overline{f}^l(\mathbf{x}') = \overline{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_1') \bigstar \cdots \bigstar \overline{\mu}_{\tilde{F}_p^l}(x_p') \tag{2.27}$$

(b) กฎที่ $l$ ค่าความเป็นสมาชิกของ $\mu_{\tilde{B}^l}(y)$ คือ

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y)=\int_{b^l\in\left[\underline{f}^l\star\,\underline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y),\,\overline{f}^l\star\,\overline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)\right]} 1/b^l \tag{2.28}$$

โดยที่ $\underline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)$ และ $\overline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)$ คือ ค่าความเป็นสมาชิกขอบเขตบนและขอบเขตล่างของ $\mu_{\tilde{G}^l}(y)$

(c) ถ้าหาก $N$ จาก $M$ กฎ ในไฟร์ของระบบฟัซซีลอจิกที่ $(N \le M)$ เอาต์พุตรวมก็คือ $\mu_{\tilde{B}}(y)=\sqcup_{l=1}^{N}\mu_{\tilde{B}^l}(y), y\in Y$ แล้ว

$$\mu_{\tilde{B}}(y)=\int_{b\in\left[\left[\underline{f}^1\star\,\underline{\mu}_{\tilde{G}^1}(y)\right]\vee\cdots\vee\left[\underline{f}^N\star\,\underline{\mu}_{\tilde{G}^N}(y)\right],\left[\overline{f}^1\star\,\overline{\mu}_{\tilde{G}^1}(y)\right]\vee\cdots\vee\left[\overline{f}^N\star\,\overline{\mu}_{\tilde{G}^N}(y)\right]\right]} 1/b \quad ,y\in Y \tag{2.29}$$

### 2.1.6 การทำไทป์รีดักชันและดีฟัซซิฟิเคชัน (Type-Reduction and Defuzzification) [20]

การทำ Type-Reduction จะเป็นกระบวนการลดไทป์จาก ไทป์ทูฟัซซีเซตเป็นไทป์วันฟัซซีเซต และหลังจากนั้นกระบวนการของ Defuzzification จะเป็นการเปลี่ยนไทป์วันฟัซซีเซตเป็นค่าจำนวนคริสป์ (Crisp Number)

วิธีการทำ Type-Reduction [20] ในระบบไทป์ทูฟัซซีลอจิกจะมี 5 วิธีคือ Centroid Type-Reduction, Center of Sum Type-Reduction, Height Type-Reduction, Modified Height Type-Reduction และ Center of Sets Type-Reduction ซึ่งงานวิจัยนี้ได้นำวิธี Center of Sets Type-Reduction (COS) มาใช้เนื่องจากวิธีนี้เป็นการนำวิธี Centriod Type-Reduction มาพัฒนาเพิ่มเติมให้สอดคล้องกับเอาต์พุตแต่ละกฎ ซึ่งผลลัพธ์จะออกมาในช่วงของเซต (Interval Set) พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$Y_{\cos}(\mathbf{x})=[y_l,y_r]=\int_{y^1\in\left[y^1{}_l,y^1{}_r\right]}\cdots\int_{y^M\in\left[y^M{}_l,y^M{}_r\right]}\int_{f^1\in\left[\underline{f}^1,\overline{f}^1\right]}\cdots\int_{f^M\in\left[\underline{f}^M,\overline{f}^M\right]} 1\Bigg/\frac{\sum_{i=1}^{M}f^i y^i}{\sum_{i=1}^{M}f^i} \tag{2.30}$$

โดยที่ $Y_{\cos}(\mathbf{x})$ คืออินเทอวัลเซตมีขอบเขต $y_l$ เป็นขอบซ้ายและ $y_r$ เป็นขอบขวา $[y_l^i, y_r^i]$ ดังนั้น Centroid ของข้อตาม (Consequent) ในอินเทอวัลไทป์ทู $\tilde{G}^i$ ดังนี้

$$C_{\tilde{G}^i}=\int_{\theta_1\in J_{y1}}\cdots\int_{\theta_N\in J_{yN}} 1\Bigg/\frac{\sum_{i=1}^{N}y_i\theta_i}{\sum_{i=1}^{N}\theta_i}=\left[y_l^i,y_r^i\right] \tag{2.31}$$

สำหรับ $[y_l^i, y_r^i]$ $(i=1,\ldots,M)$ จะต้องคำนวณก่อนการหาค่า $Y_{\cos}(\mathbf{x})$

เมื่อได้ค่า Centroid จากสมการ (2.31) แล้วสามารถนำมาใช้ในการหา $Y_{\cos}(\mathbf{x})$ โดยต้องหาขอบเขตบน $y_r$ และขอบเขตล่าง $y_l$ โดยให้ $f^i$ และ $y^i$ ที่เกี่ยวข้องกับ $y_l$ เป็น $f_l^i$ และ $y_l^i$

ตามลำดับและค่า $f^i$ และ $y^i$ ที่เกี่ยวข้องกับ $y_r$ เป็น $f_r^i$ และ $y_r^i$ ตามลำดับ การหาค่า $y_l$ และ $y_r$ แสดงในสมการที่ (2.32) และ (2.33)

$$y_l = \frac{\sum_{i=1}^{M} f_l^i y_l^i}{\sum_{i=1}^{M} f_l^i} \tag{2.32}$$

$$y_r = \frac{\sum_{i=1}^{M} f_r^i y_r^i}{\sum_{i=1}^{M} f_r^i} \tag{2.33}$$

ในการคำนวณ $y_l$ จะต้องทำการหา $\{f_l^i = 1,\ldots,M\}$, $\{y_l^i = 1,\ldots,M\}$ และในการคำนวณ $y_r$ จะต้องทำการหา $\{f_r^i = 1,\ldots,M\}$, $\{y_r^i = 1,\ldots,M\}$ วิธีที่สามารถคำนวณค่า $y_l$ และ $y_r$ มีอยู่ 5 ขั้นตอน [20] จะเป็นตัวอย่างการคำนวณค่า $y_r$ อันดับแรกก่อนจะเริ่มคำนวณให้ $y_r^i$ เรียงค่ามากน้อยไปมาก ดังนี้ $y_r^1 \le y_r^2 \le \cdots \le y_r^M$

1) คำนวณค่า $y_r$ ในสมการที่ (2.33) เริ่มต้นค่า ที่ $f_r^i = (\underline{f}^i + \overline{f}^i)/2$ สำหรับ $i = 1,\ldots,M$ เมื่อ $\underline{f}^i$ และ $\overline{f}^i$ หาได้จากสมการที่ (2.26) และ (2.27) แล้วให้ $y_r' \equiv y_r$
2) หาค่า $R\,(1 \le R \le M-1)$ โดยที่ $y_r^R \le y_r' \le y_r^{R+1}$
3) คำนวณค่า $y_r$ ในสมการที่ (2.33) ด้วย $f_r^i = \underline{f}^i$ สำหรับ $i \le R$ และ $f_r^i = \overline{f}^i$ สำหรับ $i > R$ และให้ $y_r'' \equiv y_r$
4) ถ้า $y_r'' \ne y_r'$ ให้ไปทำขั้นตอนที่ 5 ถ้า $y_r'' = y_r'$ ให้หยุดและให้ $y_r'' \equiv y_r$
5) ให้ $y_r'$ มีค่าเท่ากับ $y_r''$ และกลับไปทำขั้นตอนที่ 2

หลังจากกระบวนการนี้จะเกิดการทำงานไม่เกิน $M$ รอบสังเกตจาก กระบวนการที่ค่า $R$ มีความสำคัญมาก สำหรับที่ $i \le R$, $f_r^i = \underline{f}^i$ หรือ สำหรับ $i > R$, $f_r^i = \overline{f}^i$ ค่า $y_r$ ในสมการที่ (2.33) สามารถแสดงได้เป็น

$$y_r = y_r(\underline{f}^1,\ldots,\underline{f}^R,\overline{f}^{R+1},\ldots,\overline{f}^M,y_r^1,\ldots,y_r^M) \tag{2.34}$$

สำกรับกระบวนการคำนวณค่า $y_l$ สามารถทำได้ในลักษณะเดียวกันกับ $y_r$ โดยแทนค่า $y_r^i$ ด้วย $y_l^i$ ในขั้นตอนที่ 2 หา $L(1 \le L \le M-1)$ เมื่อ $y_l^L \le y_l' \le y_l^{L+1}$ และขั้นตอนที่ 3 การคำนวณหา

ค่า $y_l$ ในสมการที่ (2.32) ด้วย $f_l^i = \overline{f}^i$ สำหรับ $i \le L$ และ $f_l^i = \underline{f}^i$ สำหรับ $i > L$ ค่า $y_l$ สามารถแสดงได้เป็น

$$y_l = y_l(\overline{f}^1, \ldots, \overline{f}^L, \underline{f}^{L+1}, \ldots, \underline{f}^M, y_l^1, \ldots, y_l^M) \tag{2.35}$$

จากทั้งหมดเป็นการทำ Type-Reduction สำหรับระบบอินเทอวัลไทป์ทูฟัซซีลอจิก และค่าของ $Y_{cos}(\mathbf{x})$ จะเป็นเป็นอินเทอวัลเซต (Interval Set) และสำหรับการ Defuzzifed ของเอาต์พุต สามารถหาได้จากค่าเฉลี่ยของ $y_l$ และ $y_r$ ดังนั้นค่าเอาต์พุตของระบบอินเทอวัลไทป์ทูฟัซซีลอจิกคือ

$$y(\mathbf{x}) = f_{s2}(\mathbf{x}) = \frac{y_l + y_r}{2} \tag{2.36}$$

## 2.2 ฟัซซีซีมีนส์ Fuzzy C-Means [38, 39]

ฟัซซีซีมีนส์ (Fuzzy C-Means: FCM) เป็นวิธีการแบ่งกลุ่ม (Cluster) ข้อมูล สามารถจัดแบ่งกลุ่มได้หลายกลุ่ม (พัฒนาขึ้นโดย Dunn ในปี 1973 [38] และปรับปรุงให้ดีขึ้นโดย Bezdek ในปี 1981 [39]) เป็นวิธีการที่ถูกนำมาใช้แพร่หลายในงานรู้จำรูปแบบ (Pattern Recognition) สำหรับวิธีการจะเริ่มพิจารณาจากการหาค่าน้อยที่สุด (Minimization) ของฟังก์ชันเป้าหมาย (Objective Function) ดังต่อไปนี้

$$J_m = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{C} u_{ij}^m \left\| x_i - c_j \right\|^2, \quad 1 \le m < \infty \tag{2.37}$$

โดยที่ $m$ คือจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่า 1 สำหรับ $u_{ij}^m$ คือดีกรีความเป็นสมาชิกของ $x_i$ ในกลุ่มข้อมูลที่ $j$ ข้อมูล $x_i$ จะเป็นชุดข้อมูลที่ $i$ ของ d-dimensional ส่วนค่า $c_j$ คือ d-dimensional ตำแหน่งกลางของกลุ่มข้อมูล และ $\|*\|$ เป็นการวัดค่าระหว่างชุดข้อมูลกับตำแหน่งกลางของกลุ่มข้อมูล และค่าของ $u_{ij}$ ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} & u_{ij} \in [0,1] \; for\,all \; i \; and \; j, \\ & 0 < \sum_{j=1}^{N} u_{ij} < N \; for\,all \; i, and \\ & \sum_{i=1}^{C} u_{ij} = 1 \; for\,all \; j \end{aligned} \tag{2.38}$$

จากการ Optimization ของฟังก์ชันเป้าหมายจากสมการที่ (2.37) สามารถปรับปรุง (Update) ค่าความเป็นสมาชิก $u_{ij}$ ได้ดังนี้

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{C}\left(\frac{\|x_i - c_j\|}{\|x_i - c_k\|}\right)^{\frac{2}{m-1}}} \tag{2.39}$$

และการปรับปรุงตำแหน่งกลางของกลุ่มข้อมูล $c_j$ ตามสมการดังนี้

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_{ij}^m x_i}{\sum_{i=1}^{N} u_{ij}^m} \tag{2.40}$$

จากการปรับปรุงค่าตามสมการที่ (2.39) และสมการที่ (2.40) กระบวนการจะหยุดเมื่อ $\max_{ij}\left\{\left|u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}\right|\right\} < \varepsilon$ เมื่อ $\varepsilon$ คือค่าเกณฑ์ระกว่าง 0 และ 1 ด้วยเหตุที่ $k$ เป็นรอบของการปรับปรุงจากกระบวนการทั้งหมดจะทำให้ได้ค่าน้อยที่สุดของ $J_m$

สรุปขั้นตอนของ Fuzzy C-Means ได้ดังนี้

1) เริ่มต้นกำหนดค่าตำแหน่งกลางข้อมูล $C$ และคำนวณหาค่าความเป็นสมาชิก $U$ โดยใช้สมการที่ (2.39)
2) ปรับปรุงค่าตำแหน่งกลางข้อมูล $C$ ด้วยค่าความเป็นสมาชิก $U$ โดยใช้สมการที่ (2.40)
3) ปรับปรุงค่าความเป็นสมาชิก $U$ โดยใช้สมการที่ (2.39)
4) ถ้า $\left\|U^{(k)} - U^{(k-1)}\right\| < \varepsilon$ ให้หยุด นอกจากนั้นกลับไปทำขั้นตอนที่ 2

โดยกำหนดให้ $U^{(k)}$ คือ ค่าความเป็นสมาชิกรอบปัจจุบัน และ $U^{(k-1)}$ คือ ค่าความเป็นสมาชิกรอบก่อนหน้า

## 2.3 พอสซิบิลิสติกซีมีนส์ Possibilistic C-Means [37]

การจัดกลุ่มข้อมูลแบบวิธี พอสซิบิลิสติกซีมีนส์ (Possibilistic C-Means: PCM) ได้พัฒนามาจาก FCM มีข้อดีคือ ตำแหน่งกลางหรือต้นแบบ (Prototype) ของแต่ละกลุ่มข้อมูลจะคงยังเป็นตำแหน่งที่อยู่ใกล้กับกลุ่มข้อมูลที่มีความหนาแน่นสูง และต้นแบบจะไม่เปลี่ยนไปตามข้อมูลรบกวน (Noise Data) โดยจะพิจารณาสมการเป้าหมายให้มีค่าน้อยที่สุด ดังนี้

$$J_m = \sum_{i=1}^{C}\sum_{j=1}^{N}(u_{ij})^m d_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{C}\eta_i\sum_{j=1}^{N}(1-u_{ij})_m \tag{2.41}$$

โดยที่ $u_{ij}$ คือค่าความเป็นสมาชิกของข้อมูล $j$ ในกลุ่มข้อมูล $i$ สำหรับ $d_{ij}^2$ เป็นระยะทางจากข้อมูล $j$ ถึงตำแหน่งกลางกลุ่มข้อมูล $i$ และ $\eta_i$ เป็นค่าบวก และค่าของ $u_{ij}$ ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&u_{ij} \in [0,1] \ for\ all\ i\ and\ j, \\
&0 < \sum_{j=1}^{N} u_{ij} \le N \ for\ all\ i, and \\
&\sum_{i=1}^{C} u_{ij} \le 1 \ for\ all\ j
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

สำหรับการหาค่าความเป็นสมาชิกสำหรับ PCM จะเรียกว่า Possibilistic Membership ซึ่งจะใช้สมการในการหาค่าดังนี้

$$u_{ij} = \frac{1}{1+\left(\frac{d_{ij}^2}{\eta_i}\right)^{\frac{1}{m-1}}} \tag{2.43}$$

ค่า $\eta_i$ เป็นค่า Possibilistic ของระยะทางแต่ละกลุ่มข้อมูลสามารถกำหนดได้ดังในสมการ

$$\eta_i = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_{ij}^m d_{ij}^2}{\sum_{i=1}^{N} u_{ij}^m} \tag{2.44}$$

สุดท้ายในการหาค่าตำแหน่งกลางของกลุ่มข้อมูลจะใช้วิธีเดียวกันกับวิธีของ FCM ในสมการที่ (2.39) และสามารถสรุปขั้นตอนของ PCM ได้ดังนี้ [40]

1) เริ่มต้นตำแหน่งกลางข้อมูลโดยใช้ขั้นตอนของ FCM [39] เพื่อหาค่า $C$ และคำนวณหาค่าความเป็นสมาชิก $U$ โดยใช้สมการที่ (2.43)
2) คำนวณหาค่า $\eta_i$ ตามสมการที่ (2.44)
3) ปรับปรุงค่าตำแหน่งกลางข้อมูล $C$ ด้วยค่าความเป็นสมาชิก $U$ โดยใช้สมการที่ (2.40)
4) คำนวณหาค่า $U$ ตามสมการที่ (2.43)
5) ถ้า $\left\| U^{(k)} - U^{(k-1)} \right\| < \varepsilon$ ให้หยุด นอกจากนั้นกลับไปทำขั้นตอนที่ 3

โดยกำหนดให้ $U^{(k)}$ คือ ค่าความเป็นสมาชิกรอบปัจจุบัน และ $U^{(k-1)}$ คือ ค่าความเป็นสมาชิกรอบก่อนหน้า