

บทที่ 2

ทฤษฎีและเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎี

2.1.1 ปรากฏการณ์ทัศนศาสตร์แม่เหล็ก

ปรากฏการณ์ทัศนศาสตร์แม่เหล็ก (magneto-optic effect) คือปรากฏการณ์ที่แสงโพลาไรซ์มีระนาบของการโพลาไรซ์เปลี่ยนแปลงไปเมื่อแสงโพลาไรซ์ทะลุผ่านหรือสะท้อนจากผิวของสารแม่เหล็ก ปรากฏการณ์นี้ถูกค้นพบในช่วงกลางของศตวรรษที่ 18 โดยในปี ค.ศ. 1845 ไมเคิล ฟาราเดย์ (Michel Faraday) ได้ค้นพบปรากฏการณ์แบบทะลุผ่าน (transmission effect) จากการทดลองฉายแสงโพลาไรซ์ทะลุผ่านแท่งแก้วซึ่งวางอยู่ในสนามแม่เหล็กและพบว่าแสงที่ทะลุผ่านออกมามีระนาบของการโพลาไรซ์เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมปรากฏการณ์นี้เรียกว่าปรากฏการณ์ของฟาราเดย์ (Faraday effect) ในปี ค.ศ. 1877 จอห์น เคอร์ (Rev. John Kerr) ได้ค้นพบปรากฏการณ์แบบสะท้อน (reflection effect) จากการทดลองฉายแสงโพลาไรซ์ไปที่ผิวหน้าของขั้วแม่เหล็กไฟฟ้าและพบว่าแสงที่สะท้อนออกมามีระนาบของการโพลาไรซ์เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมปรากฏการณ์นี้เรียกว่าปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็ก (Qiu; & Bader. 2000: 1243)

ในปี ค.ศ. 1973 เออร์สกายและสเตอร์น (Erskine; & Stern. 1973: 1329) ได้นำเทคนิคสเปกโทรสโกปีของปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็ก (magneto-optic Kerr effect spectroscopy) มาใช้ศึกษาความกว้างของแถบพลังงานดี (d-band) และโพลาไรเซชันของสปินของอิเล็กตรอน (electron spin polarization, ESP) ของนิกเกิล (Ni) โคบอลต์ (Co) และเหล็ก (Fe) ในปี ค.ศ. 1985 บาร์เดอร์และมูก (Barder; & Moog. 1987: 3731) ได้พัฒนาเทคนิค MOKE เพื่อนำไปใช้ศึกษาสมบัติเชิงแม่เหล็กของสารฟิล์มบางโดยสามารถสร้างวงฮิสเทอรีซิสของเหล็กที่ปลูกเป็นฟิล์มบางมาก (ultrathinfilms) บนทองระนาบ (100) (Fe/Au(100)) ได้ และเรียกเทคนิคที่ใช้นี้ว่าเทคนิคการวัดปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กพื้นผิว (SMOKE) ซึ่งเป็นเทคนิคที่ได้รับความนิยมใช้ในการศึกษาสมบัติทางแม่เหล็กของสารฟิล์มบางจนถึงปัจจุบัน

2.1.2 ปรากฏการณ์ของฟาราเดย์

ปรากฏการณ์ของฟาราเดย์เป็นปรากฏการณ์ที่ฟาราเดย์ทำการทดลองฉายแสงโพลาไรซ์ทะลุผ่านแท่งแก้วซึ่งอยู่ในสนามแม่เหล็ก โดยการให้สนามแม่เหล็กเพื่อแมกนีไทซ์ตัวกลาง ในการสร้างปรากฏการณ์ฟาราเดย์สามารถทำได้ในทิศทางเดียวคือในแนวขนานกับลำแสงที่ส่องทะลุสาร เนื่องจากความเป็นแม่เหล็กของสารซึ่งมีทิศในแนวขนานกับแนวแกนลำแสงจะส่งผลต่อองค์ประกอบ

ของสนามไฟฟ้าของแสงทำให้ระนาบการโพลาไรซ์ของแสงเกิดการเปลี่ยนแปลง ในขณะที่ความเป็นแม่เหล็กของสารซึ่งมีทิศในแนวตั้งฉากกับแนวแกนลำแสงจะไม่ส่งผลกระทบต่อองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าของแสง แสงที่ทะลุผ่านออกมาจะมีระนาบของการโพลาไรซ์เปลี่ยนไปจากระนาบเดิมเป็นมุม θ_F เรียกว่า การหมุนของฟาราเดย์ (Faraday rotation) โดยที่

$$\theta_F = k_v H l \quad (2.1)$$

เมื่อ k_v คือ ค่าคงที่ของเวอร์เดต (Verdet's constant) มีหน่วยเป็น $\text{arc min} \cdot \text{Oe}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

H คือ ค่าสนามแม่เหล็ก มีหน่วยเป็น Oe

l คือ ระยะทางที่แสงเดินทางผ่านตัวกลาง มีหน่วยเป็น m

(Robinson. 1964: 1163)

2.1.3 ปฏิกิริยาของเคอร์ตันทัศนศาสตร์แม่เหล็ก

ปรากฏการณ์ของเคอร์ตันทัศนศาสตร์แม่เหล็กเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างความเป็นแม่เหล็กของสารแม่เหล็กกับองค์ประกอบสนามไฟฟ้าหรือโพลาไรเซชันของแสงที่ตกกระทบที่ผิวของสาร ซึ่งจะทำให้ระนาบการโพลาไรซ์ของแสงที่สะท้อนจากผิวสารหมุนไปจากระนาบเดิมเป็นมุม θ_K เรียกว่า การหมุนของเคอร์ โดยที่

$$\theta_K = \frac{2 \cdot 10^{-7} n m M}{f(p^2 - h^2 f^2)} \quad (2.2)$$

เมื่อ n คือ ฟังก์ชันของค่าดัชนีหักเหของสารตัวอย่าง

m คือ ฟังก์ชันของการกระจายพลังงานในแถบพลังงาน 3d มีหน่วยเป็น J

p คือ ฟังก์ชันของการกระจายพลังงานในแถบพลังงาน 4s มีหน่วยเป็น J

f คือ ความถี่ของแสง มีหน่วยเป็น Hz

h คือ ค่าคงที่ของพลังค์ มีค่าเท่ากับ $6.6260693 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

M คือ ค่าความเป็นแม่เหล็ก มีหน่วยเป็น Am^{-1}

(Prutton. 1964: 135)

ในกรณีของเหล็กจะมีค่า $n = 2.4$, $p = 6.4 \times 10^{-19}$ J, $m = 3.2 \times 10^{-20}$ J เมื่อใช้แสงที่มีความยาวคลื่น 633 nm มีความถี่เท่ากับ 4.739×10^{14} Hz มีค่าความเป็นแม่เหล็กอิมิตว์ที่ 840 G จะคำนวณค่ามุมการหมุนของเคอร์ได้เท่ากับ 5.25 arcmin หรือ 0.08754° มีค่าน้อยกว่าค่าที่วัดได้จริงซึ่งมีค่าประมาณ 24.6 arcmin หรือ 0.41°

2.1.4 รูปแบบของปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็ก (MOKE configuration)

ในการพิจารณารูปแบบของปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กจะพิจารณาจากทิศทางการให้สนามแม่เหล็กภายนอกเพื่อทำให้สารมีความเป็นแม่เหล็ก ซึ่งสามารถจำแนกปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กได้เป็น 3 รูปแบบ คือ (Du Trémolet de Lacheisserie; Gignoux; & Schlenker. 2002: 403)

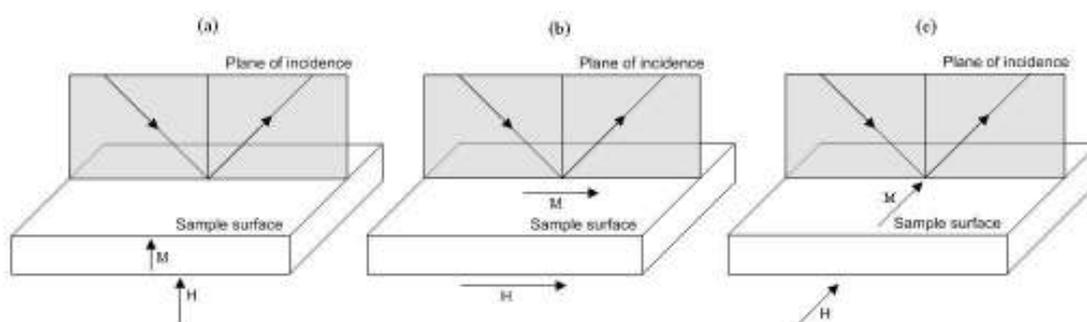
2.1.4.1 ปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กแบบเชิงขั้ว (polar MOKE, P-MOKE) เกิดจากการฉายแสงที่มีโพลาไรซ์เชิงเส้นตกกระทบบนผิวหน้าของสารตัวอย่าง (sample) โดยให้สนามแม่เหล็กในทิศตั้งฉากกับผิวหน้าของสาร ดังภาพประกอบ 1 (a) แสงที่สะท้อนจะมีทิศการโพลาไรซ์หมุนไปเป็นมุมการหมุนของเคอร์ ตัวอย่างเช่นเมื่อใช้แสงที่มีความยาวคลื่น 633 nm ตกกระทบบนสารตัวอย่างซึ่งเป็นโคบอลต์ เหล็ก และนิกเกิล ที่อุณหภูมิห้อง แสงที่สะท้อนจะมีระนาบของการโพลาไรซ์หมุนไปเป็นมุม 0.30° , 0.41° และ 0.13° ตามลำดับ

2.1.4.2 ปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กแบบตามยาว (longitudinal MOKE, L-MOKE) เกิดจากการฉายแสงที่มีโพลาไรซ์เชิงเส้นตกกระทบบนผิวหน้าของสารตัวอย่างที่ให้สนามแม่เหล็กในทิศขนานกับผิวหน้าของสารและระนาบการตกกระทบบน ดังภาพประกอบ 1(b) ถ้าแสงที่ตกกระทบบนมีทิศการโพลาไรซ์ในแนวตั้งฉาก (s-polarization) หรือในแนวขนาน (p-polarization) กับระนาบตกกระทบบนเพียงอย่างเดียวจะทำให้แสงที่สะท้อนออกไปเกิดความรีของเคอร์ (ϵ_K) โดยมีแกนหลักของวงรีทำมุมกับทิศการโพลาไรซ์เดิมเท่ากับค่ามุมการหมุนของเคอร์ ขนาดของมุมการหมุนและความรีของเคอร์จะขึ้นอยู่กับความยาวคลื่นของแสงที่ตกกระทบบน อุณหภูมิ และมุมตกกระทบบน

2.1.4.3 ปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กแบบตามขวาง (transverse MOKE, T-MOKE) เกิดจากการฉายแสงที่มีโพลาไรซ์เชิงเส้นตกกระทบบนผิวหน้าของสารตัวอย่างที่ให้สนามแม่เหล็กในทิศขนานกับผิวหน้าของสารและตั้งฉากกับระนาบตกกระทบบน ดังภาพประกอบ 1 (c) สำหรับแสงตกกระทบบนที่มีทิศการโพลาไรซ์ในแนวตั้งฉากหรือในแนวขนานกับระนาบตกกระทบบนจะไม่ทำให้เกิดการหมุนของทิศการโพลาไรซ์เมื่อเปลี่ยนแปลงค่าความเป็นแม่เหล็ก แต่การกลับทิศของความเป็นแม่เหล็กจะทำให้ความเข้มของแสงสะท้อนมีค่าเปลี่ยนไปสำหรับแสงตกกระทบบนที่มีโพลาไรซ์ชันใน

แนวขนาน โดยจะวัดปรากฏการณ์นี้ในรูปของอัตราส่วนของค่าการเปลี่ยนแปลงสภาพการสะท้อน (reflectivity) ต่อค่าสภาพการสะท้อนของสารตัวอย่าง ($\Delta R/R$) ซึ่งจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าความเป็นแม่เหล็กเฉลี่ยในบริเวณที่วัด ค่า $\Delta R/R$ จะขึ้นอยู่กับความยาวคลื่นแสงที่ตกกระทบ อุณหภูมิ และมุมตกกระทบของแสง ซึ่งมีค่าประมาณ 65° ถึง 80° สำหรับโลหะ

ปรากฏการณ์ของเคอร์ตามขวางถูกใช้ในการศึกษาพื้นผิวของฟิล์มบางแม่เหล็กโดยเฉพาะโลหะทรานซิชัน 3d (3d transition metal) ตัวอย่างเช่นการวัดค่า $\Delta R/R$ ของฟิล์มโคบอลต์ที่อุณหภูมิห้องโดยใช้แสงที่มีความยาวคลื่น 700 nm มุมตกกระทบ 71° และแสงที่มีความยาวคลื่น 632.8 nm มุมตกกระทบ 60° จะมีค่าสูงสุดประมาณ 1.5×10^{-2} และ 1.1×10^{-2} ตามลำดับ



ภาพประกอบ 1 ทิศของสนามแม่เหล็กที่ให้กับสารตัวอย่างของปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็ก (a) แบบเชิงขั้ว (b) แบบตามยาว และ (c) แบบตามขวาง

ที่มา: Homan Yuen. (2000). *Construction of a Surface Magneto-Optic Kerr Effect Apparatus for the Measurement of Magnetic Properties of Thin Films*. p. 7.

2.1.5 อีลิปโซเมทรี (ellipsometry)

อีลิปโซเมทรีเป็นเทคนิคทางทัศนศาสตร์สำหรับตรวจวัดคุณลักษณะของรอยต่อหรือฟิล์มของตัวกลางสองชนิดโดยใช้การสังเกตการเปลี่ยนแปลงการโพลาไรซ์ของแสงที่สะท้อนหรือทะลุผ่านรอยต่อหรือฟิล์มที่ต้องการศึกษา โดยจะเรียกเครื่องมือนี้ว่าอีลิปโซมิเตอร์ (ellipsometer)



ภาพประกอบ 2 แผนภาพแสดงขั้นตอนการทำงานของอิลลิปโซมิเตอร์

ที่มา: R. M. A. Azzam; & N. M. Bashara. (1987). *Ellipsometry and Polarized Light*. p. 154.

แผนภาพแสดงขั้นตอนการทำงานของอิลลิปโซมิเตอร์แสดงดังภาพประกอบ 2 แหล่งกำเนิดแสง (L) จะสร้างลำแสงขนาน (well-collimated) ที่เป็นแสงเอกรงค์ (monochromatic) เดินทางผ่านโพลาไรเซอร์ (P) ซึ่งทำหน้าที่เป็นโพลาไรเซอร์ควบคุม (controlled polarizer) สำหรับกำหนดทิศทางการโพลาไรซ์ของแสง ลำแสงนี้จะไปตกกระทบสารตัวอย่าง (S) ที่ต้องการศึกษาและเกิดอันตรกิริยาต่อกัน ทำให้โพลาไรซ์ของแสงที่เดินทางออกจากสารตัวอย่างเปลี่ยนแปลงไป ลำแสงจะเดินทางผ่านโพลาไรเซอร์ (A) ซึ่งทำหน้าที่เป็นโพลาไรเซอร์วิเคราะห์ (analyzer polarizer) เพื่อตรวจวัดสถานะของการโพลาไรซ์ที่เปลี่ยนแปลงไปจากการเปลี่ยนแปลงความเข้มแสงที่ตกลงบนโฟโตดีเทคเตอร์ (D) (Azzam; & Bashara. 1987: 153) เมื่อพิจารณาว่าอันตรกิริยาระหว่างคลื่นแสงกับสารตัวอย่างเป็นเชิงเส้นและความถี่ของคลื่นไม่เปลี่ยนแปลง สารตัวอย่างจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงสถานะของการโพลาไรซ์ของคลื่นได้ใน 3 รูปแบบ คือ

2.1.5.1 การสะท้อนหรือการหักเห เมื่อคลื่นแสงสะท้อนหรือหักเหบริเวณรอยต่อของตัวกลางสองชนิดที่แตกต่างกันจะทำให้สถานะการโพลาไรซ์ของแสงเปลี่ยนในทันที ซึ่งเกิดจากองค์ประกอบการโพลาไรซ์เชิงเส้นของแสงในแนวขนาน และแนวตั้งฉากมีสัมประสิทธิ์การสะท้อนของเฟรเนล (Fresnel reflection coefficient) และสัมประสิทธิ์การทะลุผ่าน (transmission coefficient) แตกต่างกัน โดยเรียกว่าอิลลิปโซเมทรีสะท้อน (reflection ellipsometry) หรืออิลลิปโซเมทรีพื้นผิว (surface ellipsometry) ซึ่งถูกนำไปใช้วัดสมบัติทางทัศนศาสตร์และการเปลี่ยนแปลงที่ขึ้นอยู่กับความถี่ของสาร สามารถวัดได้ทั้งในเฟสของแข็งและของเหลวซึ่งอาจมีไอโซทรอปี (isotropy) หรือแอนไอโซทรอปี (anisotropy) ทางทัศนศาสตร์ และสามารถวัดได้ทั้งในรูปแบบของปริมาตรและฟิล์มบาง โดยสามารถตรวจวัดปรากฏการณ์บนพื้นผิวที่เกิดจากการปลูกฟิล์มหรือขจัดฟิล์มที่มีความหนาตั้งแต่ซับโมโนเลเยอร์ (submonolayer) ขึ้นไป อีกทั้งยังสามารถวัดปัจจัยทางฟิสิกส์ที่มีผลกระทบต่อสมบัติทางทัศนศาสตร์ได้ เช่น สนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก ความเค้น และอุณหภูมิ เป็นต้น

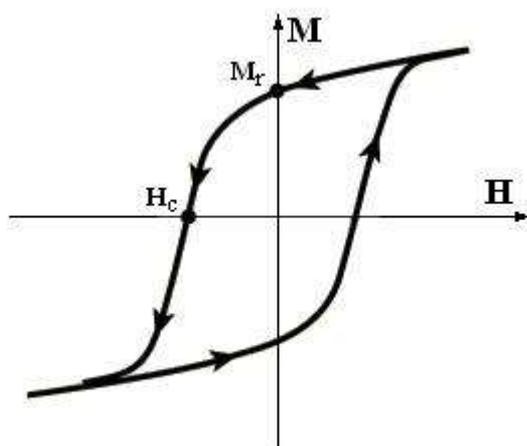
2.1.5.2 การทะลุผ่าน โดยสถานะของการโพลาไรซ์ของแสงจะเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องตลอดเวลาที่แสงเดินทางอยู่ภายในตัวกลาง เรียกว่าอิลลิปโซเมทรีทะลุผ่าน (transmission ellipsometry) หรือโพลาไรเมทรี (polarimetry) เป็นวิธีการวิเคราะห์ที่สำคัญทางฟิสิกส์เคมีซึ่งสามารถนำไปใช้วัดสารตัวอย่างที่เป็นปริมาตรได้ทุกเฟส สามารถวัดการหมุนทางทัศนศาสตร์ธรรมชาติ (natural optical rotation) และไดโครอิซึมวงกลม (circular dichroism) สามารถวัดการหักเหสองแนวเชิงเส้นธรรมชาติ (natural linear birefringence) และไดโครอิซึมเชิงเส้น (linear dichroism) และสามารถวัดการหักเหสองแนวเชิงวงรีธรรมชาติ (natural elliptical birefringence) และไดโครอิซึมวงรี (elliptical dichroism) อีกทั้งยังสามารถวัดแอนไอโซทรอปีทางทัศนศาสตร์ที่เกิดจากการเหนี่ยวนำและการกระจายความยาวคลื่นของปรากฏการณ์ต่างๆ เช่นการหักเหสองแนวอย่างต่อเนื่อง (streaming birefringence) สภาพยืดหยุ่นของแสง (photoelasticity) ปรากฏการณ์ของฟาราเดย์ ปรากฏการณ์ของเคอร์ และปรากฏการณ์ของคอตตอน-มูตัน (Cotton-Mouton effects) โดยวัตถุประสงค์หลัก คือการใช้ศึกษาตรวจสอบโครงสร้างโมเลกุลของสาร

2.1.5.3 การกระเจิง โดยเกิดขึ้นเมื่อคลื่นแสงเดินทางในตัวกลางที่มีดัชนีหักเหไม่เอกพันธ์ (inhomogeneous) และมีจุดศูนย์กลางของการกระเจิง เช่น ในละอองลอย (aerosols) หรืออิมัลชัน (emulsion) โดยเรียกว่าอิลลิปโซเมทรีกระเจิง (scattering ellipsometry) ซึ่งถูกประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรม เช่น การวัดความหนาแน่นและขนาดอนุภาคที่กระจายในสารละลายคอลลอยด์และละอองลอย การประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรม เช่น การศึกษาหมอก เมฆ และฝน การประยุกต์ใช้ในทางดาราศาสตร์ เช่น การศึกษาบรรยากาศของดาวเคราะห์ เป็นต้น

2.1.6 วงฮิสเทอรีซิส

ในการใช้ระบบการวัด MOKE และ SMOKE เพื่อศึกษาคุณลักษณะความเป็นแม่เหล็กของสาร โดยส่วนมากนิยมวัดในรูปของวงฮิสเทอรีซิส ซึ่งเป็นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเป็นแม่เหล็ก (M) กับสนามแม่เหล็กภายนอกที่ให้กับสาร (H) ดังแสดงในภาพประกอบ 2 โดยสมบัติของวงฮิสเทอรีซิส (Bertotti, 1998: 11) ที่ถูกนำมาพิจารณาได้แก่ ค่าสภาพแม่เหล็กตกค้าง (M_c) ในสาร ซึ่งแสดงความเป็นแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในสารหลังจากให้สนามแม่เหล็กปริมาณมากแล้วลดสนามแม่เหล็กจนเป็นศูนย์ และสนามลบค้างแม่เหล็ก (H_c) ซึ่งเป็นสนามที่ใช้ในการเปลี่ยนค่าความเป็นแม่เหล็กจากค่าสภาพแม่เหล็กตกค้างให้เป็นศูนย์ โดยจะวัดจากขนาดของสนามที่ให้กับสารในขนาดเพียงพอที่จะกลับทิศความเป็นแม่เหล็กได้ โดยสนามลบค้างแม่เหล็กจะอยู่ในช่วงตั้งแต่ 1 Am⁻¹ ถึง 10⁶ Am⁻¹

โดยทั่วไปสารแม่เหล็กสามารถแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ สารแม่เหล็กอ่อนและสารแม่เหล็กแข็ง โดยที่สารแม่เหล็กอ่อนเป็นสารที่ทำให้เป็นแม่เหล็กได้ง่ายโดยจะมีค่าสนามลบล้างแม่เหล็กต่ำเช่น ในโลหะผสมของซิลิกอนและเหล็ก (Si-Fe alloys) และเหล็กคาร์บอนต่ำ (low carbon steels) จะมีค่าประมาณ $50-100 \text{ Am}^{-1}$ ในโลหะผสมของซิลิกอนและเหล็กแบบเกรนเรียง (grain-oriented Si-Fe alloys) โลหะเฟอร์ไรต์ของแมงกานีส-สังกะสี (Mn-Zn ferrite) และโลหะเฟอร์ไรต์ของนิกเกิล-สังกะสี (Ni-Zn ferrite) จะมีค่าประมาณ 10 Am^{-1} สำหรับสารแม่เหล็กอ่อนมากๆ จะเป็นโลหะผสมของนิกเกิล เช่น โลหะผสมนิกเกิล 80% เหล็ก 20% หรือเพิร์มอัลลอย (permalloys) จะมีค่าสนามลบล้างแม่เหล็กต่ำกว่า 1 Am^{-1} ส่วนสารแม่เหล็กแข็งเป็นสารที่มีค่าสนามลบล้างแม่เหล็กสูง เช่น ในอัลนิโคอัลลอย (alnico alloys) ซึ่งเป็นโลหะผสมของเหล็ก นิกเกิล โคบอลต์ อะลูมิเนียม และทองแดง จะมีค่าประมาณ $50-100 \text{ kAm}^{-1}$ ในสารเฟอร์ไรต์เฮกซะโกนัลซึ่งเป็นออกไซด์ของเหล็ก เช่น แบเรียมออร์โทเฟอร์ไรต์ ($\text{BaFe}_{12}\text{O}_{19}$) หรือ สตรอนเตียมออร์โทเฟอร์ไรต์ ($\text{SrFe}_{12}\text{O}_{19}$) จะมีค่าสนามลบล้างแม่เหล็กประมาณ 300 kAm^{-1} ในสารแม่เหล็กที่เป็นธาตุหายาก (rare earth) เช่น ซามาเรียม-โคบอลต์ (Sm-Co) หรือนีโอดีเมียม-เหล็ก-โบรอน (Nd-Fe-B) จะมีค่ามากกว่า 1000 kAm^{-1}



ภาพประกอบ 3 วงฮิสเทอรีซิสที่แสดงค่าสภาพแม่เหล็กตกค้างและค่าสนามลบล้างแม่เหล็กในสาร

ที่มา: Giorgio Bertotti. (1998). *Hysteresis in Magnetism*. p. 9.

วงฮิสเทอรีซิสที่ได้จากเครื่องมือวัด MOKE และ SMOKE จะสร้างขึ้นจากความสัมพันธ์ระหว่างค่าสนามแม่เหล็กภายนอกและมุมการหมุนของเคอร์ ซึ่งแปรผันตรงกับความเป็นแม่เหล็กของสารตัวอย่าง การวัดปรากฏการณ์ของเคอร์จะให้ข้อมูลบริเวณผิวของสารในระนาบที่แสงทะลุผ่านลงไปได้ซึ่งจะได้วงฮิสเทอรีซิสที่แตกต่างจากที่ได้ในปริมาตรสาร ซึ่งความแตกต่างนี้แสดงให้เห็นว่าโดเมนแม่เหล็กในปริมาตรสารมีทิศของความเป็นแม่เหล็กแตกต่างไปจากโดเมนบริเวณผิวของสาร การเปรียบเทียบวงฮิสเทอรีซิสที่เกิดจากการให้สนามในทิศที่การเปลี่ยนแปลงความเป็นแม่เหล็กทำได้ง่ายและยากจะทำให้ทราบถึงความเป็นแอนไอโซทรอปีของฟิล์มและค่าสนามลบล้างแม่เหล็กหรือค่าสภาพแม่เหล็กตกค้างในสารอีกทั้งยังใช้ในการศึกษาการเปลี่ยนแปลงเฟส (phase transition) ในสารแม่เหล็ก

2.1.7 รูปนัยนิยมมหรรศน์ของปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็ก (macroscopic formalism of the magneto-optic Kerr effect)

การวิเคราะห์รูปนัยนิยมมหรรศน์ของปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กจะพิจารณาผลของความไม่สมมาตรของสมาชิก (element) ในไดอิเล็กทริกเทนเซอร์ (dielectric tensor) ของตัวกลางที่มีผลต่อองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าของแสงที่เดินทางผ่าน โดยแมกเวลล์ (James Clerk Maxwell) ได้แสดงว่าแสงที่มีโพลาไรซ์เชิงเส้นเกิดจากผลรวมขององค์ประกอบการโพลาไรซ์เชิงวงกลมสองชุดและปรากฏการณ์ของฟาราเดย์เป็นผลของความแตกต่างของความเร็วในการแผ่คลื่นของรูปแบบเชิงวงกลมทั้งสองในตัวกลางที่เป็นแม่เหล็ก ซึ่งจะเกิดกระบวนการได้สองแบบ (Qiu; & Bader. 2000: 1243) คือ แบบที่หนึ่งรูปแบบ (mode) การโพลาไรซ์เชิงวงกลมทั้งสองเกิดการเลื่อนเฟส (phase shift) แตกต่างกันเนื่องจากความเร็วในการแผ่คลื่นแตกต่างกัน ส่งผลให้เกิดการหมุนของระนาบการโพลาไรซ์ แบบที่สองอัตราการดูดกลืน (absorption rate) ในตัวกลางของรูปแบบการโพลาไรซ์เชิงวงกลมทั้งสองแตกต่างกันส่งผลให้เกิดความรี (ellipticity)

การวิเคราะห์รูปนัยนิยมจะเริ่มจากการพิจารณาให้แสงที่มีโพลาไรซ์เชิงเส้น (linearly polarized) เป็นคลื่นระนาบเอกพันธ์ทั่วไป (general homogeneous plane wave) (Jackson. 1999: 300) ที่มีองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าอยู่ในทิศ \hat{e}_1 และ \hat{e}_2 ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน ดังแสดงในสมการ (2.3) โดย \tilde{E}_1 และ \tilde{E}_2 เป็นขนาดของสนามไฟฟ้าที่เป็นค่าเชิงซ้อนเพื่อสามารถพิจารณาความต่างเฟสระหว่างองค์ประกอบทั้งสองของสนามไฟฟ้าได้

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{e}_1 \tilde{E}_1 + \hat{e}_2 \tilde{E}_2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad (2.3)$$

โดยสมการ (2.3) สามารถแสดงได้ในรูปแบบที่สมนัยกันขององค์ประกอบการโพลาไรซ์เชิงวงกลม (circularly polarized) ดังสมการ (2.4) โดยที่ \tilde{E}_+ และ \tilde{E}_- เป็นขนาดเชิงซ้อนขององค์ประกอบสนามไฟฟ้าที่มีโพลาไรซ์เชิงวงกลมวนซ้าย (left circularly polarized) และโพลาไรซ์เชิงวงกลมวนขวา (right circularly polarized) เมื่อผู้สังเกตมองไปยังทิศที่แสงเคลื่อนที่มา โดย \hat{e}_+ และ \hat{e}_- เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศวนซ้ายและวนขวา ตามลำดับ

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (\hat{e}_+ \tilde{E}_+ + \hat{e}_- \tilde{E}_-) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \quad (2.4)$$

$$\text{โดย } \tilde{E}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{E}_1 - i\tilde{E}_2) \quad \tilde{E}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{E}_1 + i\tilde{E}_2) \quad \hat{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) \quad \text{และ} \quad \hat{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)$$

กรณีที่ \tilde{E}_+ และ \tilde{E}_- มีการดูดกลืนในตัวกลางต่างกันจะทำให้มีขนาดแตกต่างกันส่งผลให้ $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ มีโพลาไรซ์เชิงวงรี (elliptically polarized) ซึ่งมีความยาวครึ่งแกนหลักเป็น $\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{E}_+ + \tilde{E}_-)$ และความยาวครึ่งแกนรองเป็น $\frac{i}{\sqrt{2}}(\tilde{E}_+ - \tilde{E}_-)$ โดยค่าอาร์กแทนเจนต์ของอัตราส่วนระหว่างความยาวครึ่งแกนรองต่อความยาวครึ่งแกนหลัก คือ ความรีของเคอร์ (ε_K) จะมีค่าเท่ากับ (Reichl. 2005:17)

$$\varepsilon_K = \tan^{-1} \frac{|\tilde{E}_+ - \tilde{E}_-|}{|\tilde{E}_+ + \tilde{E}_-|} \quad (2.5)$$

และถ้าความเร็วในการแผ่คลื่นในตัวกลางของ \tilde{E}_+ และ \tilde{E}_- ต่างกันทำให้องค์ประกอบทั้งสองมีเฟสเป็น ϕ_+ และ ϕ_- ตามลำดับ เมื่อรวมองค์ประกอบทั้งสองเข้าด้วยกันความต่างเฟส (Δ) จะส่งผลให้แกนหลักของวงรีหมุนไปจากแนวเดิมเท่ากับการหมุนของเคอร์ (θ_K) ซึ่งจะมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของความต่างเฟสระหว่างองค์ประกอบทั้งสอง เมื่อ $\Delta = \phi_+ - \phi_-$ โดย

$$\theta_K = \frac{\Delta}{2} \quad \text{และ} \quad \tan \phi_{\pm} = \frac{\text{Im}(\tilde{E}_{\pm})}{\text{Re}(\tilde{E}_{\pm})} \quad (2.6)$$

รูปแบบขององค์ประกอบการโพลาไรซ์เชิงเส้น องค์ประกอบการโพลาไรซ์เชิงวงกลม องค์ประกอบการโพลาไรซ์เชิงวงรี การหมุนของเคอร์ และความรีของเคอร์ แสดงได้ดังภาพประกอบ 4

ในกรณีที่คลื่นระนาบเป็นแบบคลื่นระนาบเคลื่อนที่สนามไฟฟ้าตามขวางเอกรูป (uniform transverse electric travelling plane wave, TE) จะสามารถเขียนสมการของสนามไฟฟ้าในรูปของ Jones vector ($\mathbf{E}(0)$) ได้เป็น (Azzam; & Bashara. 1987: 15)

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(0)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}] \quad (2.7)$$

โดย Jones vector สำหรับระบบพิกัดคาร์ทีเซียน คือ

$$\mathbf{E}(0) = \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{E}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{E}_2 = \xi_x \tilde{E}_1 + \xi_y \tilde{E}_2 \quad (2.8)$$

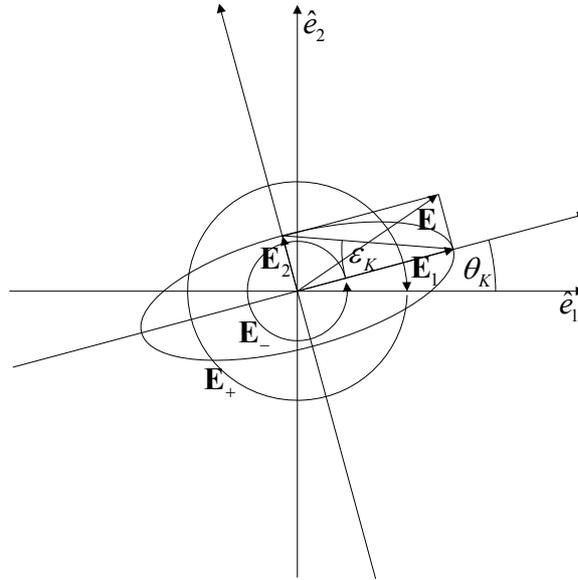
และ Jones vector สำหรับระบบวงกลม คือ

$$\mathbf{E}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_+ \\ \tilde{E}_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \tilde{E}_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \tilde{E}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_+ \tilde{E}_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_- \tilde{E}_- \quad (2.9)$$

โดย ξ_x และ ξ_y คือ เวกเตอร์ฐานหลัก (basis vector) สำหรับระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

ξ_+ และ ξ_- คือ เวกเตอร์ฐานหลักสำหรับระบบวงกลม

เมื่อพิจารณาคลื่นที่ตำแหน่ง $\mathbf{x} = 0$ สำหรับคลื่นเอกรงค์ (monochromatic wave) ซึ่งมีารสันแบบฟังก์ชันไซน์ด้วยความถี่ที่จึงสามารถลดรูปพจน์ของเวลา ทำให้สามารถแทนสมการของสนามไฟฟ้าด้วย Jones vector ได้



ภาพประกอบ 4 องค์ประกอบการโพลาไรซ์เชิงเส้น องค์ประกอบการโพลาไรซ์เชิงวงกลม องค์ประกอบ
การโพลาไรซ์เชิงวงรี การหมุนของเคอร์ และความรีของเคอร์

ที่มา: Irene Reichl. (2005). *Theoretical Investigations of Magneto-Optical Properties of Multilayer Systems*. p. 18.

พิจารณาปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กในกรณีที่แสงตกกระทบทำมุมตั้ง
ฉาก (normal incidence) กับระนาบของผิวสารตัวอย่าง เมทริกซ์การสะท้อน (reflectivity matrix, \mathfrak{R})
บริเวณผิวรอยต่อจะเป็น

$$\mathfrak{R}_{surf}^{xy} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_{xx} & \tilde{r}_{xy} \\ \tilde{r}_{yx} & \tilde{r}_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

ในกรณีที่สนามไฟฟ้าตกกระทบมีการสั่นอยู่ในแนวแกน x จะแทนด้วย $\mathbf{E} = (E_x, 0)$ คลื่นสะท้อนจะมี
องค์ประกอบสนามไฟฟ้าแสดงในรูปเวกเตอร์ฐานหลักสำหรับระบบวงกลมได้เป็น

$$\mathbf{E}'' = \frac{\tilde{a}_+}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} E_x + \frac{\tilde{a}_-}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} E_x \equiv \begin{pmatrix} \tilde{r}_{xx} \\ \tilde{r}_{yx} \end{pmatrix} E_x \quad (2.11)$$

โดย $\tilde{a}_+ = a_+ e^{i\phi_+} = \tilde{r}_{xx} - i\tilde{r}_{yx}$ และ $\tilde{a}_- = a_- e^{i\phi_-} = \tilde{r}_{xx} + i\tilde{r}_{yx}$

จากสมการ (2.5) และ (2.6) จะได้ค่าการหมุนและความรีของเคอร์เป็น

$$\theta_K = \frac{1}{2}(\phi_+ - \phi_-) \quad \text{โดย } \phi_{\pm} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(\tilde{a}_{\pm})}{\text{Re}(\tilde{a}_{\pm})} \right) \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_K = \tan^{-1} \frac{|\tilde{a}_+| - |\tilde{a}_-|}{|\tilde{a}_+| + |\tilde{a}_-|} \quad (2.13)$$

ในกรณีที่สนามไฟฟ้าตกกระทบบนผิวการสั่นอยู่ในแนวแกน y จะแทนด้วย $\mathbf{E} = (0, E_y)$ คลื่นสะท้อนจะมีองค์ประกอบสนามไฟฟ้าแสดงในรูปเวกเตอร์ฐานหลักสำหรับระบบวงกลมเป็น

$$\mathbf{E}'' = \frac{\tilde{b}_+}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} E_y + \frac{\tilde{b}_-}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} E_y \equiv \begin{pmatrix} \tilde{r}_{xy} \\ \tilde{r}_{yy} \end{pmatrix} E_y \quad (2.14)$$

โดย $\tilde{b}_+ = b_+ e^{i\phi_+} = \tilde{r}_{xy} - i\tilde{r}_{yy}$ และ $\tilde{b}_- = b_- e^{i\phi_-} = \tilde{r}_{xy} + i\tilde{r}_{yy}$

ค่าการหมุนและความรีของเคอร์เป็นเช่นเดียวกับสมการ (2.12) และ (2.13) โดยเปลี่ยนค่า \tilde{a}_{\pm} เป็น \tilde{b}_{\pm} เมื่อพิจารณาในกรณีที่แสงตกกระทบบนผิวการสั่นเป็นมุมเอียง (oblique incidence) กับระนาบของผิวสารตัวอย่างดังภาพประกอบ 5 เมทริกซ์การสะท้อนจะเป็น

$$\mathfrak{R}_{surf}^{sp} = \begin{pmatrix} \tilde{r}_{ss} & \tilde{r}_{sp} \\ \tilde{r}_{ps} & \tilde{r}_{pp} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

ในกรณีที่องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าอยู่ในแนวขนานกับระนาบตกกระทบบน (p-polarized wave) สนามไฟฟ้าตกกระทบบนผิวการสั่นอยู่ในแนวแกน p จะแทนด้วย $\mathbf{E} = (E_p, 0)$ คลื่นสะท้อนจะมีองค์ประกอบสนามไฟฟ้าแสดงในรูปเวกเตอร์ฐานหลักสำหรับระบบวงกลมเป็น

$$\mathbf{E}'' = \frac{\tilde{a}_+}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} E_p + \frac{\tilde{a}_-}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} E_p \equiv \begin{pmatrix} \tilde{r}_{pp} \\ \tilde{r}_{sp} \end{pmatrix} E_p \quad (2.16)$$

โดย $\tilde{a}_+ = a_+ e^{i\phi_+} = \tilde{r}_{pp} - i\tilde{r}_{sp}$ และ $\tilde{a}_- = a_- e^{i\phi_-} = \tilde{r}_{pp} + i\tilde{r}_{sp}$

ในกรณีที่องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบตกกระทบ (s-polarized wave) สนามไฟฟ้าตกกระทบจะมีการสั่นอยู่ในแนวแกน s จะแทนด้วย $\mathbf{E} = (0, E_s)$ คลื่นสะท้อนจะมีองค์ประกอบสนามไฟฟ้าแสดงในรูปเวกเตอร์ฐานหลักสำหรับระบบวงกลมเป็น

$$\mathbf{E}'' = \frac{\tilde{a}_+}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} E_s + \frac{\tilde{a}_-}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} E_s \equiv \begin{pmatrix} \tilde{r}_{ps} \\ \tilde{r}_{ss} \end{pmatrix} E_s \quad (2.17)$$

โดย $\tilde{b}_+ = b_+ e^{i\phi_+} = \tilde{r}_{ps} - i\tilde{r}_{ss}$ และ $\tilde{b}_- = b_- e^{i\phi_-} = \tilde{r}_{ps} + i\tilde{r}_{ss}$

การหาค่าการหมุนและความรีของเคอร์ทำได้โดยแทนค่าสัมประสิทธิ์ \tilde{a}_\pm และ \tilde{b}_\pm ในสมการ (2.12) และ (2.13) ตามลำดับ

การพิจารณาปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กที่เกิดจากการสะท้อนบริเวณรอยต่อของตัวกลางสองชนิด โดยปกติจะเป็นปรากฏการณ์ที่แสงซึ่งเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเดินทางในตัวกลางที่หนึ่งซึ่งเป็นอากาศและสะท้อนที่ผิวรอยต่อกับตัวกลางที่สองคือสารตัวอย่างที่มีสภาพเป็นแม่เหล็ก ซึ่งมีทางเดินของแสงและระบบพิกัดเป็นดังภาพประกอบ 5 โดยจะพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตบริเวณรอยต่อระหว่างตัวกลางทั้งสองที่ตำแหน่ง $z = 0$ คือ

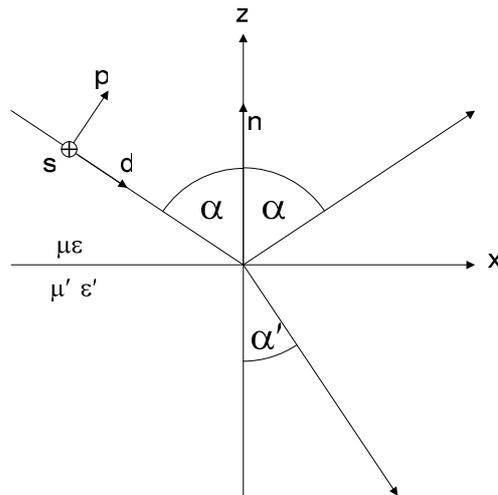
$$[\varepsilon(\mathbf{E} + \mathbf{E}'') - \varepsilon'\mathbf{E}'] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.18)$$

$$[\mu(\mathbf{H} + \mathbf{H}'') - \mu'\mathbf{H}'] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.19)$$

$$(\mathbf{E} + \mathbf{E}'' - \mathbf{E}') \times \mathbf{n} = 0 \quad (2.20)$$

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}'' - \mathbf{H}') \times \mathbf{n} = 0 \quad (2.21)$$

เมื่อ \mathbf{n} เป็นเวกเตอร์หน่วย (unit vector) ในทิศตั้งฉากกับผิว



ภาพประกอบ 5 คลื่นตกกระทบ คลื่นหักเห และคลื่นสะท้อนบริเวณรอยต่อของตัวกลางสองชนิด

ที่มา: Irene Reichl. (2005). *Theoretical Investigations of Magneto-Optical Properties of Multilayer Systems*. p. 24.

เมื่อกำหนดให้แสงเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีลักษณะเป็นคลื่นระนาบ $\mathbf{E} = E_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}$ โดยมีเวกเตอร์คลื่นของคลื่นตกกระทบ คลื่นสะท้อน และคลื่นหักเหเป็น $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n \hat{e}_k$ $\mathbf{k}'' = \frac{\omega}{c} n \hat{e}_{k''}$ และ $\mathbf{k}'_{\pm} = \frac{\omega_{\pm}}{c} n'_{\pm} \hat{e}'_{k'_{\pm}}$ ตามลำดับ โดยพิจารณาสมบัติของคลื่นในสองลักษณะคือ

สมบัติทางจลนศาสตร์ (kinematic properties) หรือกฎของสเนลล์ (Snell's law)

พิจารณาคลื่นที่ตำแหน่ง $z = 0$ และไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา (time independence) ดังนั้น $\omega = \omega'' = \omega'_{\pm}$ จะมีเวกเตอร์คลื่นเป็น

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})_{z=0} = -(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x})_{z=0} \text{ และ } (n\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (n'_{\pm}\mathbf{k}'_{\pm} \cdot \mathbf{x})_{z=0} \quad (2.22)$$

กำหนดให้ระนาบ xz เป็นระนาบตกกระทบ ทิศทางของคลื่นตกกระทบ คลื่นหักเห และคลื่นสะท้อนจะเป็น

$$\hat{e}_k = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \quad \hat{e}'_{k'_{\pm}} = (\sin \alpha'_{\pm}, 0, \cos \alpha'_{\pm}) \quad \hat{e}''_k = (\sin \alpha'', 0, -\cos \alpha'') \quad (2.23)$$

จากสมการ (2.22) ทำให้ได้กฎของสเนลล์ คือ

$$\alpha = \alpha'' \text{ และ } n \sin \alpha = n'_{\pm} \sin \alpha'_{\pm} \quad (2.24)$$

สมบัติทางพลศาสตร์ (dynamic properties) หรือสมการของเฟรเนล (Fresnel equations)

การหาสมการเฟรเนลสำหรับตัวกลางแม่เหล็กจะพิจารณาจากสมการแมกเวลล์

$$\epsilon_{lmn} \partial_m E_n = -\frac{1}{c} \partial_0 H_l \quad (2.25)$$

$$\epsilon_{lmn} \partial_m H_n = \frac{4\pi}{c} j_l + \frac{1}{c} \partial_0 D_l \quad (2.26)$$

เนื่องจากในการพิจารณาไม่มีประจุภายนอกและกระแสในระบบ เมื่อทำผลคูณเชิงเวกเตอร์กับสมการ (2.25) จะได้

$$\epsilon_{pql} \partial_q \epsilon_{lmn} \partial_m E_n = -\frac{1}{c} \partial_0 \epsilon_{pql} \partial_q H_l \quad (2.27)$$

$$\epsilon_{pql} \partial_q H_l = \frac{1}{c} \partial_0 D_p \quad (2.28)$$

แทนสมการ (2.28) ในสมการ (2.27) และใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสัญลักษณ์เลวี-ซีวิตา (Levi-Civita symbol) กับโคโรเนกเคอร์เดลตา (kronecker delta) จะได้

$$(\delta_{pm} \delta_{qn} - \delta_{pn} \delta_{qm}) \partial_q \partial_m E_n = -\frac{1}{c^2} \partial_0 \partial_0 D_p \quad (2.29)$$

สำหรับคลื่นระนาบ $E_n = E_{n0} e^{i(k_n x_n - \omega t)}$ และ $D_p = \epsilon_{pn} E_n$ โดย $k_n = \frac{\omega}{c} n e_{kn}$ เมื่อแทนค่าในสมการ (2.29) จะได้สมการเฟรเนลเป็น

$$n^2 (e_{kn} e_{kp} - \delta_{pn}) E_n + \epsilon_{pn} E_n = 0 \quad (2.30)$$

พิจารณาสมการเฟรเนลในพจน์ของการกระจัดไฟฟ้า (Electric displacement, \mathbf{D}) จะได้

$$\mathbf{D} = n^2 (\mathbf{E} - \hat{e}_k (\hat{e}_k \cdot \mathbf{E})) = n^2 (\epsilon^{-1} \mathbf{D} - \hat{e}_k (\hat{e}_k \cdot \epsilon^{-1} \mathbf{D})) \quad (2.31)$$

โดยไดโอดีเล็กตริกในตัวยกกลางจะแสดงได้ในรูปของเทนเซอร์ ϵ_{ij} ขนาด 3×3 เมื่อ $i, j = x, y, z$ โดย

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \epsilon_{xx} \begin{pmatrix} 1 & -iQm_z & iQm_x \\ iQm_z & 1 & -iQm_y \\ -iQm_x & iQm_y & 1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

ค่า $Q = i \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}}$ เรียกว่าค่าคงที่ทัศนศาสตร์แม่เหล็ก (magneto-optical constant) หรือเวกเตอร์เวกเตอร์ (Voigt vector) และ m_i โดย $i = x, y, z$ เป็นโคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosine) ของเวกเตอร์ความเป็นแม่เหล็ก (magnetization vector)

สำหรับปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กแบบเชิงขั้วจะมีความเป็นแม่เหล็กเฉพาะในแกน z โดยสมาชิกของไดโอดีเล็กตริกเทนเซอร์ในแนวทแยงมุม (diagonal) จะมีค่าเท่ากัน คือ $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$ และสมาชิกนอกแนวทแยงมุมจะมีเครื่องหมายตรงข้ามกัน คือ $\epsilon_{yx} = -\epsilon_{xy}$ (Yang; & Scheinfein. 1993: 6813)

$$\epsilon_{polar} = \epsilon^z = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ -\epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{xx} \end{pmatrix} = \epsilon_{xx} \begin{pmatrix} 1 & -iQm_z & 0 \\ iQm_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

สำหรับปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กแบบตามยาวจะมีความเป็นแม่เหล็กเฉพาะในแกน x โดย $\epsilon_{zx} = -\epsilon_{xz}$ จะมีไดโอดีเล็กตริกเทนเซอร์เป็น

$$\epsilon_{longitudinal} = \epsilon^x = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & \epsilon_{xz} \\ 0 & \epsilon_{xx} & 0 \\ -\epsilon_{xz} & 0 & \epsilon_{xx} \end{pmatrix} = \epsilon_{xx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & iQm_x \\ 0 & 1 & 0 \\ -iQm_x & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

สำหรับปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กแบบตามขวางจะมีความเป็นแม่เหล็กเฉพาะในแกน y โดย $\epsilon_{zy} = -\epsilon_{yz}$ จะมีไดโอดีเล็กตริกเทนเซอร์เป็น

$$\epsilon_{transverse} = \epsilon^y = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{xx} & \epsilon_{yz} \\ 0 & -\epsilon_{yz} & \epsilon_{xx} \end{pmatrix} = \epsilon_{xx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -iQm_y \\ 0 & iQm_y & 1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

โดยจะสามารถหาเมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของทั้งสามรูปแบบได้ คือ

$$\mathcal{E}_{polar}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}_{xx}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{xy}^2} & \frac{\mathcal{E}_{xy}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{xy}^2} & 0 \\ \frac{-\mathcal{E}_{xy}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{xy}^2} & \frac{\mathcal{E}_{xx}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{xy}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mathcal{E}_{xx}} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathcal{E}_{longitudinal}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}_{xx}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{xz}^2} & 0 & \frac{-\mathcal{E}_{xz}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{xz}^2} \\ 0 & \frac{1}{\mathcal{E}_{xx}} & 0 \\ \frac{\mathcal{E}_{xz}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{xz}^2} & 0 & \frac{\mathcal{E}_{xx}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{xz}^2} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathcal{E}_{transverse}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathcal{E}_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{E}_{xx}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{yz}^2} & \frac{-\mathcal{E}_{yz}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{yz}^2} \\ 0 & \frac{\mathcal{E}_{yz}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{yz}^2} & \frac{\mathcal{E}_{xx}}{\mathcal{E}_{xx}^2 + \mathcal{E}_{yz}^2} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

จากการกำหนดพิกัด (p, s, d) ดังภาพประกอบ 5 จะสามารถหาค่าผกผันของไดอิเล็กตริกเทนเซอร์ในระบบพิกัด (p, s, d) จากระบบพิกัด (x, y, z) ได้โดย

$$\left(\mathcal{E}^{-1}\right)_{psd} = S^{-1} \left(\mathcal{E}^{-1}\right)_{xyz} S \quad (2.39)$$

เมื่อ $S = S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ เรียกว่าเมทริกซ์การหมุนในสามมิติ (3D rotation matrix)

ในกรณีที่การกระจายไฟฟ้ามีทิศตั้งฉากกับเวกเตอร์คลื่นและแกน d ขนานกับเวกเตอร์คลื่น ดังนั้นองค์ประกอบของการกระจายไฟฟ้าตามแกน d จะมีค่าเป็นศูนย์ ($D_d = 0$) จากสมการ (2.31) จะสามารถแสดงองค์ประกอบของการกระจายไฟฟ้าตามแกน p s และ d ได้เป็น

$$D_p = n^2 \left((\varepsilon^{-1})_{pp} D_p + (\varepsilon^{-1})_{ps} D_s \right) \quad (2.40)$$

$$D_s = n^2 \left((\varepsilon^{-1})_{sp} D_p + (\varepsilon^{-1})_{ss} D_s \right) \quad (2.41)$$

$$D_d = 0 \quad (2.42)$$

โดยจะสามารถลดรูปไดอิเล็กทริกเทนเซอร์ผกผันเป็นขนาด 2×2 คือ

$$\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} (\varepsilon^{-1})_{pp} & (\varepsilon^{-1})_{ps} \\ (\varepsilon^{-1})_{sp} & (\varepsilon^{-1})_{ss} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

พิจารณาเฉพาะในกรณีของรูปแบบเชิงขั้วซึ่งจะมีองค์ประกอบของไดอิเล็กทริกเทนเซอร์ผกผันเป็น

$$(\varepsilon^{-1})_{pp} = (\varepsilon^{-1})_{xx} \cos^2 \alpha + (\varepsilon^{-1})_{zz} \sin^2 \alpha = \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_{xx}} \quad (2.44)$$

$$(\varepsilon^{-1})_{ps} = (\varepsilon^{-1})_{xy} \cos \alpha = \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \cos \alpha \quad (2.45)$$

$$(\varepsilon^{-1})_{sp} = (\varepsilon^{-1})_{yx} \cos \alpha = -\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \cos \alpha \quad (2.46)$$

$$(\varepsilon^{-1})_{ss} = (\varepsilon^{-1})_{yy} = \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (2.47)$$

$$(\varepsilon^{-1})_{dp} = \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} - \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \right) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.48)$$

$$(\varepsilon^{-1})_{ds} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \sin \alpha \quad (2.49)$$

จัดรูปสมการ (2.40) และ (2.41) จะได้สมการระบบในรูปของการกระจัดไฟฟ้าเป็น

$$0 = \left(n^2 (\varepsilon^{-1})_{pp} - 1 \right) D_p + n^2 (\varepsilon^{-1})_{ps} D_s \quad (2.50)$$

$$0 = n^2 (\varepsilon^{-1})_{sp} D_p + \left(n^2 (\varepsilon^{-1})_{ss} - 1 \right) D_s \quad (2.51)$$

ถ้าสมการ (2.50) และ (2.51) มีผลเฉลยแสดงว่าดีเทอร์มิแนนต์ของระบบมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้สมการพหุนามของดัชนีหักเหเป็น

$$\begin{aligned}
& n^4 \left(\frac{\varepsilon_{xx}^3 \cos^2 \alpha + \varepsilon_{xx} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2) \sin^2 \alpha + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xy}^2 \cos^2 \alpha}{\varepsilon_{xx} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2)^2} \right) \\
& - n^2 \left(\frac{\varepsilon_{xx}^2 \cos^2 \alpha + (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2) \sin^2 \alpha + \varepsilon_{xx}^2}{\varepsilon_{xx} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2)} \right) + 1 = 0
\end{aligned} \tag{2.52}$$

และสามารถลดรูปได้เป็น

$$n^4 - n^2 \frac{2\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 \sin^2 \alpha}{\varepsilon_{xx}} + (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2) = 0 \tag{2.53}$$

โดยใช้การประมาณเชิงเส้น (linear approximation) สำหรับ ε_{xy} จะได้ผลเฉลยของสมการ (2.53) เป็น

$$\begin{aligned}
n_{\pm}^2 &= \frac{2\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 \sin^2 \alpha}{2\varepsilon_{xx}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 \sin^2 \alpha}{\varepsilon_{xx}} \right)^2 - 4(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2)} \\
&= \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{2\varepsilon_{xx}} \sin^2 \alpha \pm i\varepsilon_{xy} \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{xy}^2 \sin^2 \alpha}{4\varepsilon_{xx}^2 \cos^2 \alpha}} \\
&\approx \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{2\varepsilon_{xx}} \sin^2 \alpha \pm i\varepsilon_{xy} \cos \alpha
\end{aligned} \tag{2.54}$$

แทนค่า $(\varepsilon)_{pp}^{-1}$ และ $(\varepsilon)_{ps}^{-1}$ ในสมการ (2.50) และใช้ค่าประมาณของ n_{\pm}^2 จากสมการ (2.54) จะได้สมการความสัมพันธ์ของการกระจัดไฟฟ้าระหว่างแกน p และ s เป็น

$$\begin{aligned}
D_{p\pm} &= \frac{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2}{n_{\pm}^2 \varepsilon_{xy} \cos \alpha} \left(\frac{n_{\pm}^2 \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} - 1 \right) D_{s\pm} \\
&= \frac{1}{n_{\pm}^2 \varepsilon_{xy} \cos \alpha} (n_{\pm}^2 \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^2 - \varepsilon_{xy}^2) D_{s\pm} \\
&= \frac{1}{n_{\pm}^2 \varepsilon_{xy} \cos \alpha} \left(\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{2\varepsilon_{xx}} \sin^2 \alpha \pm i\varepsilon_{xy} \cos \alpha \right) \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^2 - \varepsilon_{xy}^2 \right) D_{s\pm} \\
&= \frac{1}{n_{\pm}^2 \cos \alpha} \left(\varepsilon_{xy} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \alpha - 1 \right) \pm i\varepsilon_{xx} \cos \alpha \right) D_{s\pm}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

โดยใช้การประมาณเชิงเส้นสำหรับ ε_{xy} ของพจน์แรกในสมการ (2.55) จะได้

$$\begin{aligned} (n_{\pm}^2 \cos \alpha)^{-1} &= \left(\varepsilon_{xx} \cos \alpha \left(1 + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{2\varepsilon_{xx}^2} \sin^2 \alpha \pm i \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \cos \alpha \right) \right)^{-1} \\ &\approx \frac{1}{\varepsilon_{xx} \cos \alpha} \left(1 \mp i \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \cos \alpha \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

แทนสมการ (2.56) ลงในสมการ (2.55) และใช้การประมาณเชิงเส้นของ ε_{xy} จะได้องค์ประกอบของการกระจัดไฟฟ้าเป็น

$$\begin{aligned} D_{p\pm} &\approx \frac{1}{\varepsilon_{xx} \cos \alpha} \left(1 \mp i \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \cos \alpha \right) \left(\frac{\varepsilon_{xy}}{2} \sin^2 \alpha - \varepsilon_{xy} \pm i \varepsilon_{xx} \cos \alpha \right) D_{s\pm} \\ &\approx \frac{1}{\varepsilon_{xx} \cos \alpha} \left(\frac{\varepsilon_{xy}}{2} \sin^2 \alpha - \varepsilon_{xy} \pm i \varepsilon_{xx} \cos \alpha \pm i \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}} \cos \alpha \mp i \frac{\varepsilon_{xy}^2}{2\varepsilon_{xx}} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{xy} \cos^2 \alpha \right) D_{s\pm} \\ &\approx \frac{1}{\varepsilon_{xx} \cos \alpha} \left(-\frac{\varepsilon_{xy}}{2} \sin^2 \alpha \pm i \varepsilon_{xx} \cos \alpha \right) D_{s\pm} \\ &\approx \left(-\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha} \pm i \right) D_{s\pm} \\ D_{d\pm} &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

จากความสัมพันธ์ $\mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{D}$ และใช้การประมาณเชิงเส้นของ ε_{xy} จะได้ความสัมพันธ์ของการกระจัดไฟฟ้าในพจน์ของสนามไฟฟ้าเป็น

$$E_{p\pm} = \frac{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 \sin^2 \alpha}{\varepsilon_{xx} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2)} D_{p\pm} + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \cos \alpha D_{s\pm} \quad (2.58)$$

$$E_{s\pm} = -\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \cos \alpha D_{p\pm} + \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} D_{s\pm} \quad (2.59)$$

$$E_{d\pm} = \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} - \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \right) \sin \alpha \cos \alpha D_{p\pm} + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \sin \alpha D_{s\pm} \quad (2.60)$$

ใช้ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบการกระจัดไฟฟ้าในแนว p และ s จากสมการ (2.57) เพื่อกำจัดพจน์ $D_{p\pm}$ จะได้

$$E_{p\pm} = \left(\frac{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 \sin^2 \alpha}{\varepsilon_{xx} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2)} \left(-\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha} \pm i \right) + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \cos \alpha \right) D_{s\pm} \quad (2.61)$$

$$E_{s\pm} = \left(-\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \cos \alpha \left(-\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha} \pm i \right) + \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \right) D_{s\pm} \quad (2.62)$$

$$E_{d\pm} = \left(\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} - \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \right) \left(-\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha} \pm i \right) \cos \alpha - \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \right) \sin \alpha D_{s\pm} \quad (2.63)$$

จากสมการ (2.62) จะแสดงการกระจัดไฟฟ้าในรูปของสนามไฟฟ้าเป็น

$$\begin{aligned} D_{s\pm} &= \left(-\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \cos \alpha \left(-\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha} \pm i \right) + \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2} \right)^{-1} E_{s\pm} \\ &\approx \frac{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}} \left(1 \pm i \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \cos \alpha \right) E_{s\pm} \end{aligned} \quad (2.64)$$

แทนค่า $D_{s\pm}$ ในสมการ (2.61) และ (2.63) และใช้กฎของสเนลล์สำหรับคลื่นหักเหจะได้

$$E'_{p\pm} \approx \left(-\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha'_{\pm}}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha'_{\pm}} \pm i \right) E'_{s\pm} \quad (2.65)$$

$$E'_{d\pm} \approx \frac{\varepsilon_{xy} \sin \alpha'_{\pm}}{\varepsilon_{xx}} E'_{s\pm} \quad (2.66)$$

พิจารณาเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กแบบเชิงขั้ว โดยในรูปแบบเชิงขั้วแกนของความเป็นแม่เหล็กจะตั้งฉากกับผิวหน้าของสารตัวอย่างและทำมุม α กับลำแสงตกกระทบ โดยบริเวณขอบเขตรอยต่อระหว่างสองตัวกลางองค์ประกอบในแนวตั้งฉากกับระนาบ (normal-to-plane) D_{\perp} และ B_{\perp} และองค์ประกอบในแนวระนาบ (in-plane) D_{\parallel} และ B_{\parallel} จะมีค่าต่อเนื่อง โดยใช้ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบสนามไฟฟ้าในระบบพิกัด xyz และ psd คือ

$$E_x = E_p \cos \alpha + E_d \sin \alpha \quad \rightarrow \in E_{\parallel} \quad (2.67)$$

$$E_y = E_s \quad \rightarrow \in E_{\parallel} \quad (2.68)$$

$$E_z = E_p \sin \alpha - E_d \cos \alpha \quad \rightarrow \in E_{\perp} \quad (2.69)$$

สำหรับในสูญญากาศ $E_d = 0$ โดยมีเวกเตอร์ของสนามไฟฟ้าของแสงตกกระทบ แสงหักเห และแสงสะท้อนในพิกัด (p, s, d) เป็น

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_p \\ E_s \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}'_{\pm} = \begin{pmatrix} E'_{p\pm} \\ E'_{s\pm} \\ E'_{d\pm} \end{pmatrix}, \mathbf{E}'' = \begin{pmatrix} E''_p \\ E''_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

และในพิกัดคาร์ทีเซียนเป็น

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \mathbf{E}'_{\pm} = \begin{pmatrix} E'_{x\pm} \\ E'_{y\pm} \\ E'_{z\pm} \end{pmatrix} \text{ และ } \mathbf{E}'' = \begin{pmatrix} E''_x \\ E''_y \\ E''_z \end{pmatrix}$$

โดยในตัวกลางแม่เหล็กขนาดขององค์ประกอบสนามไฟฟ้าในแกน p จะมีค่าเท่ากับ

$$|E_{p\pm}| = \pm \sqrt{E_{p\pm}^2 + E_{d\pm}^2} = \pm E_{s\pm} \sqrt{\left(-\frac{\epsilon_{xy} \sin^2 \alpha_{\pm} \pm i}{2\epsilon_{xx} \cos \alpha_{\pm}} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{xy} \sin \alpha_{\pm}}{\epsilon_{xx}} \right)^2} \quad (2.70)$$

องค์ประกอบเชิงวงกลมของคลื่นแสงหักเหจะเป็น

$$E'_{p\pm} \approx \left(-\frac{\epsilon_{xy} \sin^2 \alpha'_{\pm}}{2\epsilon_{xx} \cos \alpha'_{\pm}} \pm i \right) E'_{s\pm} \quad (2.71)$$

โดยใช้วิธีเดียวกันจะสามารถหาค่าขององค์ประกอบสนามไฟฟ้าตามแกน x และ z ได้เป็น

$$E_{x\pm} = \left(-\frac{\epsilon_{xy} \sin^2 \alpha_{\pm}}{2\epsilon_{xx} \cos \alpha_{\pm}} \mp i \right) \cos \alpha_{\pm} E_{s\pm} \quad (2.72)$$

$$E_{z\pm} = \left(\frac{\epsilon_{xy} (1 - \cos^2 \alpha_{\pm})}{2\epsilon_{xx} \cos \alpha_{\pm}} \mp i \right) \sin \alpha_{\pm} E_{s\pm} \quad (2.73)$$

จากเงื่อนไขสำหรับองค์ประกอบในแนวระนาบจะได้

$$\cos \alpha (E_p - E_p'') = \sum_{\pm} \left(-\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha'_{\pm}}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha'_{\pm}} \mp i \right) \cos \alpha'_{\pm} E_{s\pm}' \quad (2.74)$$

$$E_s + E_s'' = \sum_{\pm} E_{s\pm}' \quad (2.75)$$

จากนั้นจะหาค่าสนามแม่เหล็กจาก $\mathbf{H} = n \hat{e}_k \times \mathbf{E}$ โดยที่เวกเตอร์คลื่นมีค่าเท่ากับ

$$n \hat{e}_k = n \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad n'_{\pm} \hat{e}'_k = n' \begin{pmatrix} \sin \alpha'_{\pm} \\ 0 \\ -\cos \alpha'_{\pm} \end{pmatrix} \quad n'' \hat{e}''_k = n \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

สนามแม่เหล็กสำหรับคลื่นตกกระทบ (\mathbf{H}) คลื่นสะท้อน (\mathbf{H}') และคลื่นหักเห (\mathbf{H}'') จะเป็น

$$\mathbf{H} = n \begin{pmatrix} \cos \alpha E_y \\ -\cos \alpha E_x - \sin \alpha E_z \\ \sin \alpha E_y \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{H}' = n'_{\pm} \begin{pmatrix} \cos \alpha'_{\pm} E'_{y\pm} \\ -\cos \alpha'_{\pm} E'_{x\pm} - \sin \alpha'_{\pm} E'_{z\pm} \\ \sin \alpha'_{\pm} E'_{y\pm} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

$$\mathbf{H}'' = n \begin{pmatrix} -\cos \alpha E''_y \\ -\cos \alpha E''_x - \sin \alpha E''_z \\ \sin \alpha E''_y \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

โดยองค์ประกอบในแนวแกน y สามารถทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและอยู่ในสุญญากาศจะได้

$$\begin{aligned} n(-\cos \alpha E_x - \sin \alpha E_z - \cos \alpha E''_x - \sin \alpha E''_z) &= n(-\cos^2 \alpha E_p - \sin^2 \alpha E_p + \cos^2 \alpha E''_p + \sin^2 \alpha E''_p) \\ &= -n(E_p + E''_p) \end{aligned} \quad (2.79)$$

สำหรับคลื่นที่เดินทางในตัวกลางเนื้อเดียว (homogeneous medium) จะได้

$$\sum_{\pm} n'_{\pm} (-\cos \alpha'_{\pm} E'_{x\pm} - \sin \alpha'_{\pm} E'_{z\pm}) = -\sum_{\pm} n'_{\pm} E'_{s\pm} \approx \sum_{\pm} n'_{\pm} E'_{p\pm} \quad (2.80)$$

จากความต่อเนื่องขององค์ประกอบสนามแม่เหล็กในแนวระนาบจะได้

$$n \cos \alpha (E_s - E_s'') = \sum_{\pm} n'_{\pm} \cos \alpha'_{\pm} E'_{s\pm} \quad (2.81)$$

$$n(E_p - E_p'') = \sum_{\pm} n'_{\pm} \left(\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha'_{\pm}}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha'_{\pm}} \mp i \right) E'_{s\pm} \quad (2.82)$$

สมการ (2.74) (2.75) (2.81) และ (2.82) เป็นข้อสรุปของความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นตกกระทบ คลื่นสะท้อน และคลื่นหักเหที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของรอยต่อระหว่างตัวกลางแม่เหล็กและตัวกลางที่ไม่ใช่แม่เหล็ก โดยจะแยกพิจารณาเป็นสองกรณี คือ

2.1.7.1 ในกรณีที่คลื่นตกกระทบเป็นเอสโพลาไรซ์ (s-polarized) ไม่มีองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวขนาน ($E_p = 0$) แทนค่าในสมการ (2.74) (2.75) (2.81) และ (2.82) จะได้

$$E_s + E_s'' = \sum_{\pm} E'_{s\pm} \quad (2.83)$$

$$-\cos \alpha E_p'' = \sum_{\pm} \left(-\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha'_{\pm}}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha'_{\pm}} \mp i \right) \cos \alpha'_{\pm} E'_{s\pm} \quad (2.84)$$

$$n \cos \alpha (E_s - E_s'') = \sum_{\pm} n'_{\pm} \cos \alpha'_{\pm} E'_{s\pm} \quad (2.85)$$

$$nE_p'' = \sum_{\pm} n'_{\pm} \left(\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha'_{\pm}}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha'_{\pm}} \mp i \right) E'_{s\pm} \quad (2.86)$$

จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนได้เป็น

$$\frac{E_p''}{E_s} = \tilde{r}_{ps} = \frac{\varepsilon_{xy} n \cos \alpha}{n'(n \cos \alpha' + n' \cos \alpha)(n \cos \alpha + n' \cos \alpha')} \quad (2.87)$$

$$\frac{E_s''}{E_s} = \tilde{r}_{ss} = \frac{n \cos \alpha - n' \cos \alpha'}{n \cos \alpha + n' \cos \alpha'} \quad (2.88)$$

2.1.7.2 ในกรณีที่คลื่นตกกระทบเป็นพีโพลาไรซ์ (p-polarized) ไม่มีองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉาก ($E_s = 0$) แทนค่าในสมการ (2.74) (2.75) (2.81) และ (2.82) จะได้

$$E_s'' = \sum_{\pm} E'_{s\pm} \quad (2.89)$$

$$\cos \alpha (E_p - E_p'') = \sum_{\pm} \left(-\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha'_{\pm}}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha'_{\pm}} \mp i \right) \cos \alpha'_{\pm} E'_{s\pm} \quad (2.90)$$

$$-n \cos \alpha E_s'' = \sum_{\pm} n'_{\pm} \cos \alpha'_{\pm} E'_{s\pm} \quad (2.91)$$

$$n(E_p + E_p'') = \sum_{\pm} n'_{\pm} \left(\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \alpha'_{\pm}}{2\varepsilon_{xx} \cos \alpha'_{\pm}} \mp i \right) E'_{s\pm} \quad (2.92)$$

จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนได้เป็น

$$\frac{E_s''}{E_p} = \tilde{r}_{sp} = \frac{\varepsilon_{xy} n \cos \alpha}{n'(n \cos \alpha' + n' \cos \alpha)(n \cos \alpha + n' \cos \alpha')} \quad (2.93)$$

$$\frac{E_p''}{E_p} = \tilde{r}_{pp} = \frac{n' \cos \alpha - n \cos \alpha'}{n' \cos \alpha + n \cos \alpha'} \quad (2.94)$$

จากสมการ (2.12) แทนค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนจากสมการ (2.87) (2.88) (2.93) และ (2.94) จะสามารถหาสมการของมุมการหมุนของเคอร์ได้เป็น

$$\tan \theta_K^p = \frac{\tilde{r}_{sp}}{\tilde{r}_{pp}} = \frac{n\varepsilon_{xy} \cos \alpha}{n' \cos(\alpha + \alpha')(n^2 - n'^2)} \quad (2.95)$$

$$\tan \theta_K^s = \frac{\tilde{r}_{ps}}{\tilde{r}_{ss}} = \frac{n\varepsilon_{xy} \cos \alpha}{n' \cos(\alpha - \alpha')(n^2 - n'^2)} \quad (2.96)$$

พิจารณาเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปรากฏการณ์ของเคอร์ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กแบบตามยาวซึ่งจะมีองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในพิกัด (p, s, d) เป็น

$$E'_{s\pm} \approx \left(\frac{\varepsilon_{xy} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta'_{\pm} \right)}{2\varepsilon_{xx} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta'_{\pm} \right)} \pm i \right) E'_{p\pm} = \left(\frac{\varepsilon_{xy} \cos^2 \beta'_{\pm}}{2\varepsilon_{xx} \sin \beta'_{\pm}} \pm i \right) E'_{p\pm} \quad (2.97)$$

$$E'_{d\pm} \approx -\frac{\varepsilon_{xy} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta'_{\pm} \right)}{\varepsilon_{xx}} E'_{p\pm} = -\frac{\varepsilon_{xy} \cos \beta'_{\pm}}{\varepsilon_{xx}} E'_{p\pm} \quad (2.98)$$

โดยมุม $\beta_{\pm} = 90^\circ - \alpha_{\pm}$

จากเงื่อนไขขอบเขตสมการ (2.18)-(2.21) จะได้

$$\cos \beta (E_p - E_p'') = \sum_{\pm} \left(\frac{\varepsilon_{xy} (1 + \sin^2 \beta'_{\pm})}{2\varepsilon_{xx} \sin \beta'_{\pm}} \mp i \right) \cos \beta'_{\pm} E'_{s\pm} \quad (2.99)$$

$$n(E_p + E_p'') = \sum_{\pm} n'_{\pm} \left(\frac{\varepsilon_{xy} \cos^2 \beta'_{\pm}}{2\varepsilon_{xx} \sin \beta'_{\pm}} \mp i \right) E'_{s\pm} \quad (2.100)$$

จะสามารถหาสัมประสิทธิ์การสะท้อนได้ คือ

$$\frac{E_s''}{E_s} = \tilde{r}_{ss} = \frac{n \cos \beta - n' \cos \beta'}{n \cos \beta + n' \cos \beta'} \quad (2.101)$$

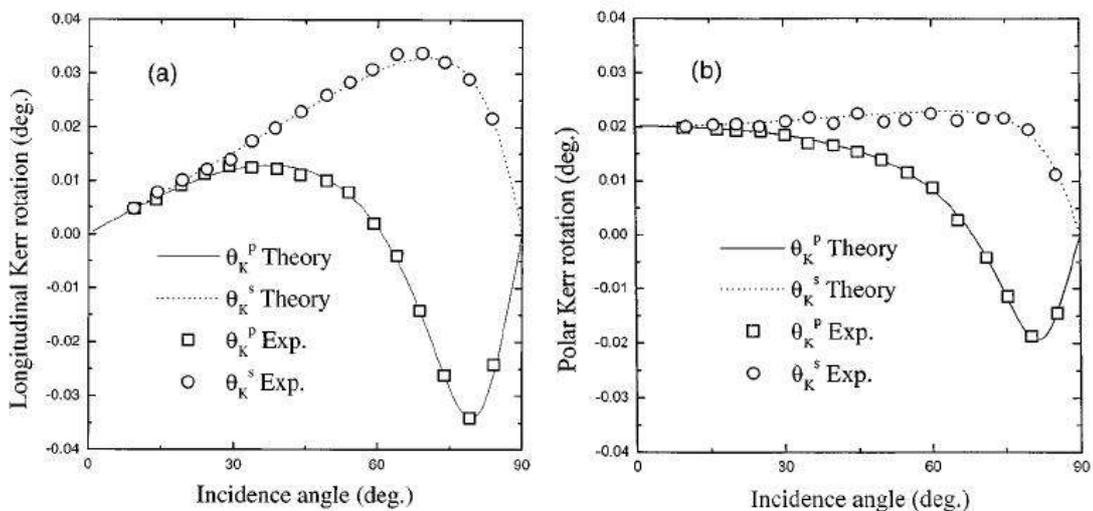
$$\frac{E_p''}{E_p} = \tilde{r}_{pp} = \frac{n' \cos \beta - n \cos \beta'}{n' \cos \beta + n \cos \beta'} \quad (2.102)$$

$$\frac{E_p''}{E_s} = \tilde{r}_{ps} = -\frac{E_s''}{E_p} = -\tilde{r}_{sp} = \frac{\varepsilon_{xy} n \cos \beta}{n' (n \cos \beta' + n' \cos \beta) (n \cos \beta + n' \cos \beta')} \tan \beta' \quad (2.103)$$

โดยจะได้มุมการหมุนของเคอร์เป็น

$$\tan \theta_K^p = \frac{\tilde{r}_{sp}}{\tilde{r}_{pp}} = \frac{n \varepsilon_{xy} \cos \beta \tan \beta'}{n' \cos(\beta + \beta') (n'^2 - n^2)} \quad (2.104)$$

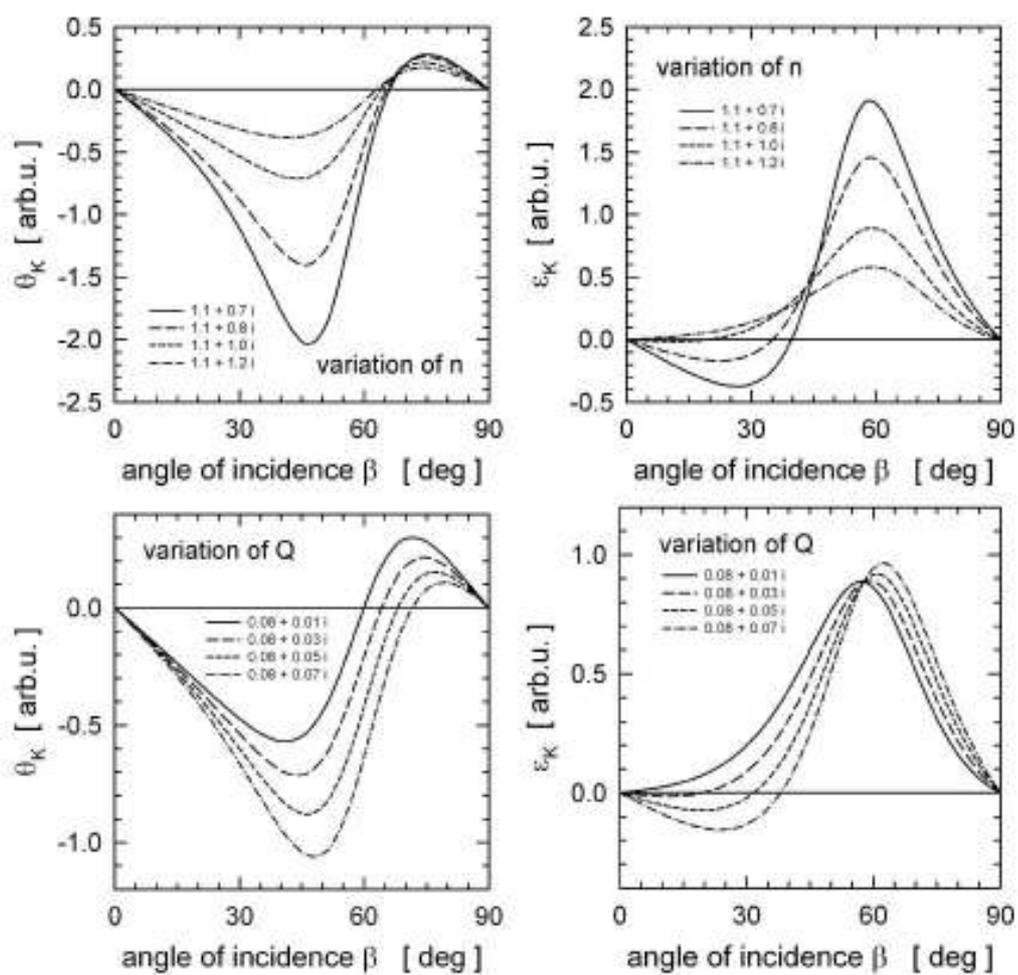
$$\tan \theta_K^s = \frac{\tilde{r}_{ps}}{\tilde{r}_{ss}} = -\frac{n \varepsilon_{xy} \cos \beta \tan \beta'}{n' \cos(\beta - \beta') (n^2 - n'^2)} \quad (2.105)$$



ภาพประกอบ 6 กราฟแสดงค่าการหมุนของเคอร์จากผลการทดลองและจากทฤษฎีสำหรับเอสและพีโพลาไรซ์ บน (a) Cu/Co แบบหลายชั้น (multilayer) ในรูปแบบตามยาว และ (b) Co/Pd แบบหลายชั้นในรูปแบบเชิงขั้ว

ที่มา: Chun Yeol You; & Sung Chul Shin. (1998, July 1). Generalize Analytic Formulae for Magneto-Optical Kerr Effects. *Journal of Applied Physics*. 84(1): 546.

ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนของเฟรเนลจากสมการ (2.87) (2.88) (2.93) (2.94) (2.101) (2.102) และ (2.103) มีความสอดคล้องกับงานวิจัยของยูและชิน (You; & Shin. 1998: 542) งานวิจัยของแยงและชินเฟิน (Yang; & Scheinfein. 1993: 6813) และงานวิจัยของฮันท์ (Hunt. 1967: 1655) โดยผลการคำนวณตามสมการ (2.95) (2.96) (2.104) และ (2.105) จะสอดคล้องกับผลการทดลองดังภาพประกอบ 6 และแสดงค่าการหมุนของเคอร์และความรีของเคอร์กับมุมตกกระทบจากทฤษฎีที่แปรค่าตามค่าดัชนีหักเห (n) และค่าคงที่ที่ค้นศาสตร์แม่เหล็ก (Q) ดังภาพประกอบ 7



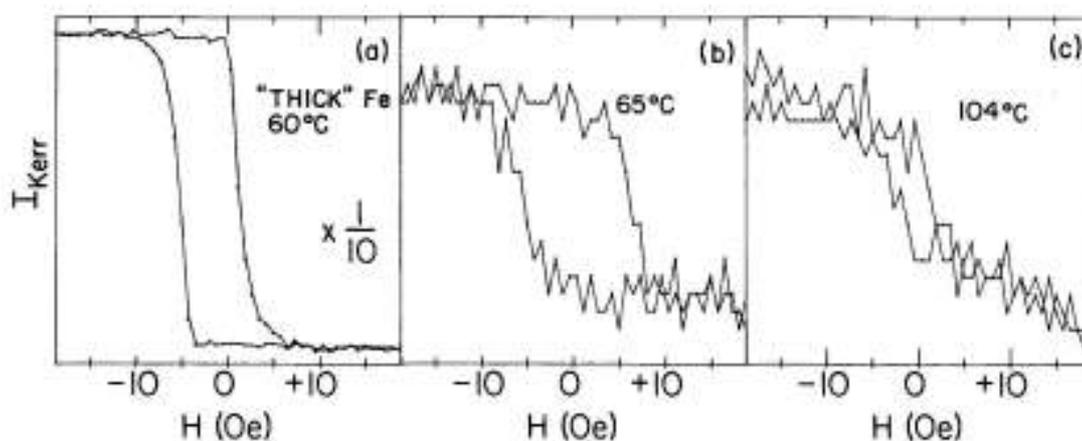
ภาพประกอบ 7 ค่าการหมุนของเคอร์และความรีของเคอร์ที่แปรกับมุมตกกระทบจากทฤษฎีเมื่อเปลี่ยนค่าดัชนีหักเห (n) และค่าคงที่ทัศนศาสตร์แม่เหล็ก (Q)

ที่มา: Irene Reichl. (2005). *Theoretical Investigations of Magneto-Optical Properties of Multilayer Systems*. p. 34.

2.2 เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.2.1 งานวิจัยของบาเดอร์ มูก และคิว

บาเดอร์และมูก (Bader; & Moog. 1987: 3730) ได้ออกแบบและสร้างระบบการวัด SMOKE ระบบแรกขึ้นในปี ค.ศ. 1985 เพื่อตรวจสอบคุณสมบัติทางแม่เหล็กของฟิล์มเหล็กปลูกบนทองระนาบ (100) (Fe/Au(100)) โดยสามารถสร้างวงฮิสเทอรีซิสซึ่งเป็นสัญญาณระหว่างค่าความเข้มของเคอร์ (Kerr intensity) และสนามแม่เหล็กที่ให้กับสารตัวอย่างได้ดังภาพประกอบ 8 ในเวลาต่อมา คิวและบาเดอร์ (Qiu; & Bader. 2000: 1243) ได้พัฒนาระบบการวัด SMOKE ให้มีประสิทธิภาพดีขึ้น โดยระบบมีองค์ประกอบและการจัดอุปกรณ์เพื่อวัดสัญญาณของเคอร์แบบเชิงชั่วและแบบตามยาว ดังภาพประกอบ 9



ภาพประกอบ 8 วงฮิสเทอรีซิสที่ได้จากการวัด SMOKE ของฟิล์ม Fe บนผลึก Au(100) โดย (a) ฟิล์ม Fe หนา วัดที่อุณหภูมิ 60 °C (b) วัดที่อุณหภูมิ 65 °C และ (c) วัดที่อุณหภูมิ 104 °C

ที่มา: S. D. Bader; & E. R. Moog. (1987, April 15). Magnetic Properties of Novel Epitaxial Films (Invited). *Journal of Applied Physics*. 61(8). 61(8): 3731.

การวัดสัญญาณของเคอร์ของคิวและบาเดอร์จะพิจารณาจากองค์ประกอบสนามไฟฟ้าของแสงที่ตกกระทบบนผิวสาร ถ้าฉายแสงที่เป็นแสงโพลาไรซ์ในแนวขนาน (E_p) ตกกระทบบนผิวสารที่ไม่เป็นแม่เหล็ก แสงที่สะท้อนจะเป็นแสงโพลาไรซ์ในแนวขนานเพียงอย่างเดียวจะไม่มีองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากเกิดขึ้น แต่ถ้าฉายแสงตกกระทบบนผิวสารที่เป็นแม่เหล็กเฟร์โรจะทำให้มีองค์ประกอบการโพลาไรซ์ในแนวตั้งฉาก (E_s) เกิดขึ้นด้วย โดยอัตราส่วนของขนาดสนามไฟฟ้าใน

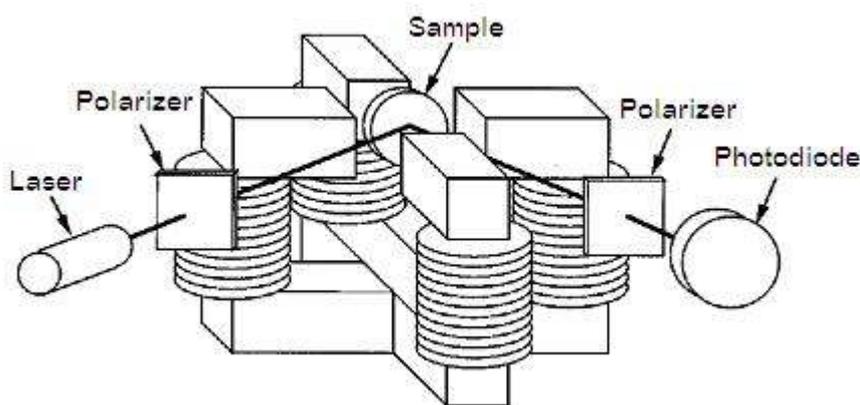
แนวตั้งฉากและแนวขนาน (E_s/E_p) คือการหมุนของเคอร์ ดังนั้นการสร้างเครื่องมือสำหรับวัดปรากฏการณ์เคอร์ คือการวัดองค์ประกอบสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉาก (E_s) ซึ่งทำได้โดยการติดตั้งโพลาไรเซอร์เชิงเส้นไว้หน้าตัววัดแสง (photo detector) เพื่อตัดองค์ประกอบในแนวขนานออกไป แต่วิธีนี้มีข้อบกพร่องเนื่องจากอุปกรณ์วัดแสงจะวัดความเข้มแสง ($\sim |E|^2$) ซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเข้มแม่เหล็กยกกำลังสองและเป็นการยากที่จะหาค่าการหมุนของเคอร์ที่แท้จริง การแก้ปัญหานี้สามารถทำได้โดยการหมุนโพลาไรเซอร์เป็นมุม δ จากแกน p ทำให้ความเข้มแสงที่วัดได้โดยอุปกรณ์วัดแสงหลังจากผ่านโพลาไรเซอร์มีค่าเป็น

$$I = |E_p \sin \delta + E_s \cos \delta|^2 \approx |E_p \delta + E_s|^2 \quad (2.106)$$

และโดยการกำหนดให้ $E_s/E_p = \phi' + i\phi''$ โดยที่ ϕ' เป็นการหมุนของเคอร์และ ϕ'' เป็นความรีของเคอร์ ดังนั้นจะได้สมการ (2.106) เป็น

$$I = |E_p|^2 |\delta + \phi' + i\phi''|^2 \approx |E_p|^2 (\delta^2 + 2\delta\phi') = I_0 \left(1 + \frac{2\phi'}{\delta}\right) \quad (2.107)$$

โดยที่ $I_0 = |E_p|^2 \delta^2$ คือ ความเข้มแสงที่การหมุนของเคอร์เป็นศูนย์



ภาพประกอบ 9 องค์ประกอบและการจัดชุดระบบการวัด SMOKE ของคิวและบาเดอร์

ที่มา: Z. Q. Qiu; & S. D. Bader. (2000, March). Surface Magneto-Optic Kerr Effect. *Review of Scientific Instruments*. 71(3): 1247.

ถ้าทำให้ทั้ง ϕ' และ ϕ'' เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเข้มแม่เหล็ก ความเข้มแสงที่วัดได้จะเป็นฟังก์ชันของสนามแม่เหล็ก (\mathbf{H}) และจะทำให้ได้เป็นวงฮิสเทอรีซิสของสารตัวอย่าง และเมื่อให้สนามแม่เหล็กภายนอกกับสารตัวอย่างจนถึงจุดอิ่มตัวค่าการหมุนของเคอร์จะมีค่าสูงสุด โดยการหมุนของเคอร์เมื่อแม่เหล็กอิ่มตัว (saturation Kerr rotation, ϕ'_m) จะหาได้จาก

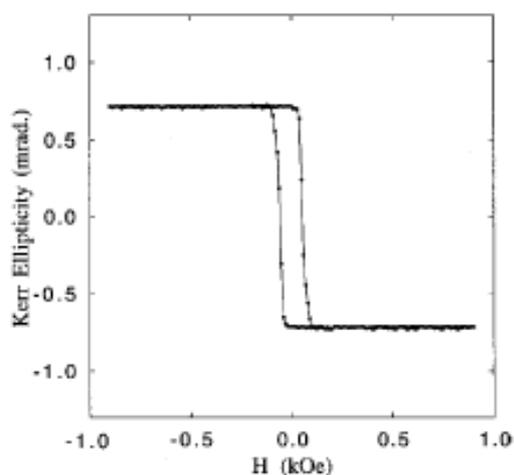
$$\phi'_m = \frac{\delta}{4} \cdot \frac{\Delta I}{I_0} \quad (2.108)$$

ในชุดอุปกรณ์ของระบบ SMOKE ในภาพประกอบ 9 แหล่งกำเนิดแสงที่ใช้โดยทั่วไปจะเป็นแสงเลเซอร์ที่มีกำลังต่ำ แต่ในการทดลองบางอย่าง เช่นการศึกษาในระดับโมโนเลเยอร์ (monolayer, ML) ต้องการแสงเลเซอร์ที่มีเสถียรภาพของความเข้มสูง เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงความเข้มของแสงจะลดสัญญาณของเคอร์ลง และจะทำให้การวัดวงฮิสเทอรีซิสมีการบิดเบี้ยวไป การใช้โพลาไรเซอร์แบบปริซึมผลึก สามารถใช้ได้ทั้งเป็นตัวกำหนดการโพลาไรซ์และเป็นตัววิเคราะห์ก่อนเข้าอุปกรณ์วัดแสง โดยโพลาไรเซอร์แบบแผ่นก็สามารถใช้ได้แต่จะลดอัตราการหักล้างของแสงมากกว่าแบบปริซึม ซึ่งไม่เหมาะสำหรับการศึกษาระดับโมโนเลเยอร์ สำหรับแม่เหล็กไฟฟ้าที่สร้างสนามแม่เหล็กภายนอกให้กับสารตัวอย่าง ประกอบด้วยขดลวดโซเลนอยด์สองคู่แยกจากกัน สำหรับสร้างสนามแม่เหล็กในแนวขนานกับผิวและแนวตั้งฉากกับผิวชิ้นงาน เพื่อวัดปรากฏการณ์ของเคอร์ตามยาวและเชิงขั้ว โดยแม่เหล็กมีความสูง 13 cm ยาว 15 cm และช่องระหว่างขั้วกว้าง 4 cm พันขดลวดจำนวนประมาณ 300 รอบ โดยใช้ลวดเกจ 12 หรือ 13 (AWG 12, AWG 13) ซึ่งสามารถสร้างสนามแม่เหล็กได้ประมาณ 1.5 kOe ที่กระแสขนาด 20 A สำหรับการวัดในระบบสุญญากาศ กระแสที่ใช้ให้แสงเดินทางผ่านจะทำให้เกิดการหักเหสองแนวซึ่งจะทำให้ผลการวัดคลาดเคลื่อนสามารถแก้ไขได้โดยการใส่แผ่นเล็อนคลื่นหนึ่งในสี่ (quarter-wave plate) ก่อนเข้าตัววิเคราะห์เพื่อกำจัดผลของการหักเหสองแนวออกไป โดยจะทำให้เกิดความต่างเฟสระหว่างองค์ประกอบในแนวขนานและแนวตั้งฉากเป็น $\pi/2$ ทำให้ตัววิเคราะห์สร้างสัญญาณในพจน์ของ $i(\phi' + i\phi'') = -\phi'' + i\phi'$ ซึ่งจะทำให้สามารถวัดความเข้มของเคอร์ได้เป็น

$$I = |E_p|^2 (\delta^2 + 2\delta\phi'') = I_0 \left(1 + \frac{2\phi''}{\delta}\right) \quad (2.109)$$

นั่นคือจะสามารถวัดค่าความรีของเคอร์แทนค่าการหมุนของเคอร์ได้ ถ้าต้องการที่จะวัดการหมุนของเคอร์จะต้องใช้แผ่นเล็อนครึ่งคลื่น (half-wave plate) แทนแผ่นเล็อนคลื่นหนึ่งในสี่

เนื่องจากความเข้มแสงที่สะท้อนจากผิวของสารตัวอย่างมีความสัมพันธ์โดยตรงกับการหมุนและความรีของเคอร์ตามสมการ (2.107) และ (2.109) และการหมุนของเคอร์มีความสัมพันธ์โดยตรงกับความเป็นแม่เหล็กตามสมการ (2.2) เมื่อสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มแสงหรือการหมุนของเคอร์หรือความรีของเคอร์กับสนามแม่เหล็กภายนอกจะมีลักษณะเป็นวงฮิสเทอรีซิส ดังเช่นในภาพประกอบ 10 ซึ่งเป็นวงฮิสเทอรีซิสที่ได้จากการวัดสัญญาณของความรีของเคอร์เทียบกับสนามแม่เหล็กภายนอกของฟิล์มเหล็กหนา 6 ไมโนเลเยอร์ ปลูกบนเงินระนาบ (100) (Fe/Ag(100))



ภาพประกอบ 10 วงฮิสเทอรีซิสของสัญญาณ SMOKE ที่ได้จากการวัดฟิล์ม 6 ML Fe/Ag(100)

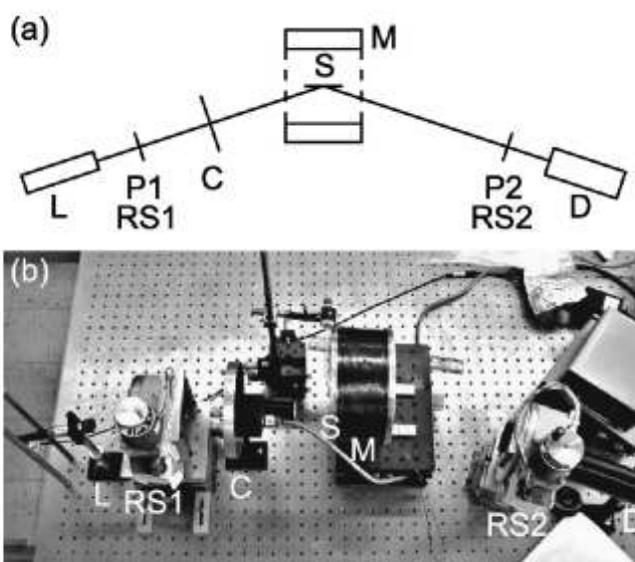
ที่มา: Z. Q. Qiu; & S. D. Bader. (2000, March). Surface Magneto-Optic Kerr Effect. *Review of Scientific Instruments*. 71(3): 1247.

2.2.2 งานวิจัยของแฮมตัน อัลเบอร์ตโตและอบรูน่า

แฮมตัน อัลเบอร์ตโตและอบรูน่า (Hampton; Albertos; & Abruna. 2002: 3018-3021) ได้พัฒนาระบบ SMOKE เพื่อใช้ในงานด้านไฟฟ้าเคมีในปี ค.ศ. 2002 โดยระบบเป็นดังภาพประกอบ 11 แหล่งกำเนิดแสงเป็นเลเซอร์ไดโอดขนาด 5 mW ความยาวคลื่น 635 nm ซึ่งมีเสถียรภาพของความเข้มแสงและระนาบของการโพลาไรซ์สูง โดยแสงจะเดินทางจากแหล่งกำเนิดแสงผ่านโพลาไรเซอร์ (P1) สะท้อนที่ตัวอย่างแล้วผ่านโพลาไรเซอร์ (P2) และวัดความเข้มแสงด้วยโฟโตมิเตอร์ (D) โพลาไรเซอร์ที่ใช้มีเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด 49 mm ติดตั้งบนฐาน RS1 และ RS2 ที่หมุนได้ซึ่งสามารถปรับตำแหน่ง

มุมการหมุนได้อย่างละเอียด โพลาริเซอร์ที่ใช้นี้จะมีอัตราส่วนการหักล้างของแสง (extinction ratio) ประมาณ 10^{-4}

สนามแม่เหล็กภายนอกจะถูกสร้างโดยแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งมีโครงสร้างดังภาพประกอบ 12 โดยใช้ลวดทองแดงเคลือบฉนวนขนาดเกจ 18 (AWG 18) พันรอบแกนอะลูมิเนียมยาว 95 mm กว้าง 117 mm โดยมีความต้านทานของขดลวดประมาณ 20Ω ใช้แหล่งจ่ายกำลังขนาดกระแส 4 A ที่ความต่างศักย์ 100 V สามารถวัดสนามแม่เหล็กโดยใช้หัววัดฮอลล์ (Hall probe) ได้สูงสุด 500 Oe ที่ตำแหน่งกลางแม่เหล็กและ 400 Oe ที่ขอบ โดยสามารถใช้วัดปรากฏการณ์เคอร์แบบตามยาว แบบตามขวาง และแบบเชิงซั้วได้ อีกทั้งยังสามารถติดเข้ากับแฟลนจ์ (flanges) ขนาด 4.5 in เพื่อใช้วัด ณ ตำแหน่งเดิม (in situ) ในระบบสุญญากาศ ความเข้มแสงจะถูกมอดูเลตโดยชอปเปอร์เชิงกล (mechanical chopper) ที่ความถี่ประมาณ 500 Hz และผ่านเข้าสู่เครื่องขยายแบบล็อกอิน (lock-in amplifier) ซึ่งแหล่งจ่ายกำลังและเครื่องขยายแบบล็อกอินจะถูกควบคุมและประมวลผลด้วยคอมพิวเตอร์ผ่านแผ่นวงจรจีพีไอบีโดยใช้โปรแกรมแลปวิว (Labview)



ภาพประกอบ 11 รูปแบบการจัดวางเครื่องมือสำหรับวัดสัญญาณ SMOKE แบบตามยาวของแฮมตัน อัลเบอร์ตโตและอบรูนานา

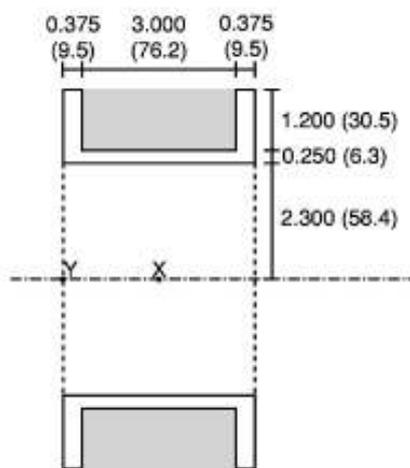
ที่มา: Jenifer R. Hampton; José Luis Martínez Albertos; & Héctor D. Abruna. (2002, August). Development of a Versatile SMOKE System with Electrochemical Applications. *Review of Scientific Instruments*. 73(8): 3019.

ในการใช้งานจะปรับโพลาไรเซอร์ตัวแรกเพื่อให้ได้แสงที่มีระนาบการโพลาไรซ์ที่ต้องการ จากนั้นจะปรับโพลาไรเซอร์ตัวที่สองเพื่อให้ได้ความเข้มแสงที่อุปกรณ์วัดแสงน้อยที่สุด โดยมีอัตราส่วนการหักล้างของแสงเมื่อโพลาไรเซอร์วิเคราะห์ขนานกับโพลาไรเซอร์ตัวแรกอยู่ในช่วงตั้งแต่ 5×10^{-5} ถึง 5×10^{-4} เพื่อให้การวัดมีความถูกต้อง แสงที่ตกกระทบต้องมีโพลาไรซ์ในแนว s หรือ p เพียงอย่างเดียว จากนั้นปรับมุมของตัววิเคราะห์ให้หมุนไปเป็นมุม δ ซึ่งมีค่าประมาณ 5° ถึง 8° จากตำแหน่งที่แสงหักล้างกัน โดยจะได้มุมการหมุนของเคอร์เป็น

$$\phi' = \frac{\delta}{2} \frac{I - I_0}{I_0} \quad (2.110)$$

โดยที่ I คือ ความเข้มแสงที่วัดได้

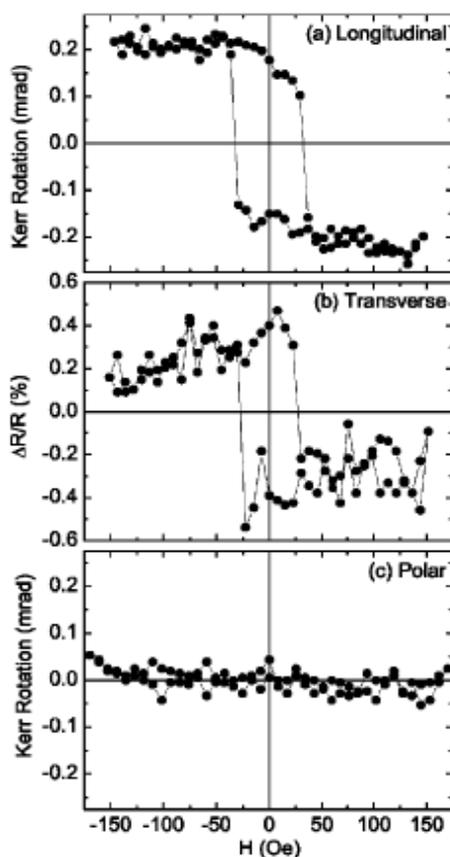
I_0 คือ ความเข้มแสงเฉลี่ยในวงฮิสเทอรีซิส หรือความเข้มแสงที่วัดได้เมื่อไม่มีการหมุนของเคอร์



ภาพประกอบ 12 แม่เหล็กสำหรับระบบ SMOKE โดยมีสนามแม่เหล็กที่ตำแหน่ง X เป็น 500 Oe และที่ตำแหน่ง Y เป็น 400 Oe ที่กระแส 4 A

ที่มา: Jenifer R. Hampton; José Luis Martínez Albertos; & Héctor D. Abruna. (2002, August). Development of a Versatile SMOKE System with Electrochemical Applications. *Review of Scientific Instruments*. 73(8): 3019.

การทดสอบระบบนี้จะใช้ฟิล์มของโคบอลต์เคลือบแบบไอ (vapor deposited) บนผลึกควอตซ์ที่มีความหนาของฟิล์มประมาณ 100 Å โดยจะวัดปรากฏการณ์เคอร์ทั้งสามแบบคือแบบตามยาว ตามขวาง และเชิงขั้ว เมื่อให้แสงเลเซอร์ตกกระทบผิวสารตัวอย่างด้วยมุมใกล้เคียงฉากกับผิว โดยจะได้ผลการวัดดังภาพประกอบ 13 ซึ่งจะสามารถเห็นวงฮิสเทอรีซิสได้ยกเว้นแบบเชิงขั้วแสดงว่าความเป็นแม่เหล็กในสารตัวอย่างนี้ไม่มีทิศในแนวตั้งฉากกับผิว ความไวของเครื่องมือนี้แสดงได้จากการสามารถวัดวงฮิสเทอรีซิสในปรากฏการณ์แบบตามยาวซึ่งมีสัญญาณน้อยมากได้

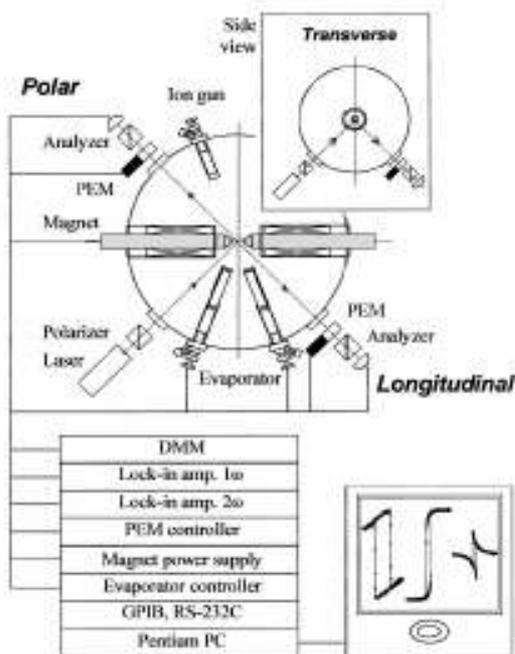


ภาพประกอบ 13 วงฮิสเทอรีซิสของสัญญาณ SMOKE ทั้งสามแบบ ของฟิล์มโคบอลต์บนควอตซ์

ที่มา: Jenifer R. Hampton; José Luis Martínez Albertos; & Héctor D. Abruna. (2002, August). Development of a Versatile SMOKE System with Electrochemical Applications. *Review of Scientific Instruments*. 73(8): 3020.

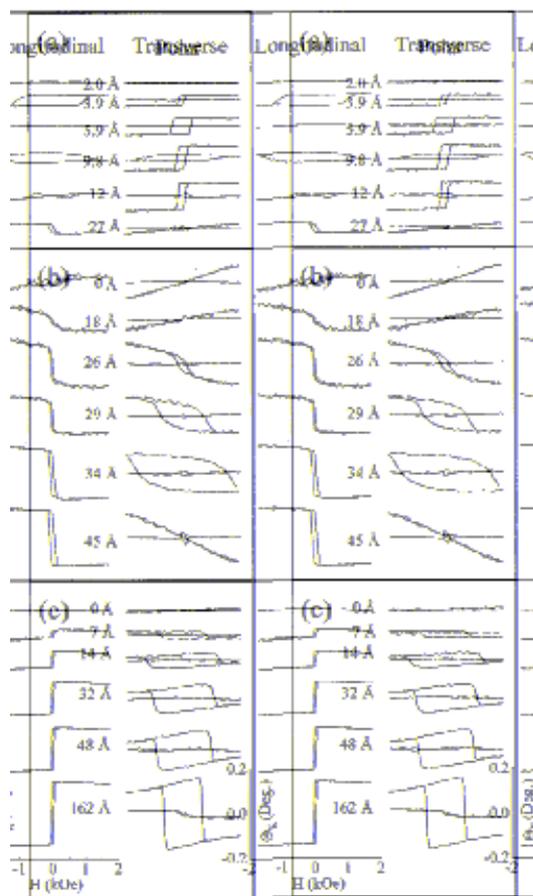
2.2.3 งานวิจัยของลีและคณะ

ลีและคณะ (Lee; et al. 2000: 3801-3805) ได้สร้างระบบการวัด SMOKE ซึ่งสามารถวัดวงฮิสเทอรีซิสได้ทั้งสามรูปแบบ ณ ตำแหน่งที่ทำการปลูกฟิล์มภายในส่วนทดลองระบบสุญญากาศระดับสูงยิ่ง โดยระบบเป็นดังภาพประกอบ 14 ประกอบด้วยห้องทดลอง (chamber) ทรงกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 400 mm ติดตั้งระบบปั๊มเพื่อสร้างระบบสุญญากาศระดับสูงยิ่งประกอบด้วยไอออนปั๊ม (ion pump) ขนาด 240 l/s ของ POSCON ไทเทเนียมซับลิเมชันปั๊ม (titanium sublimation pump) ของ Physical Electronics จำนวน 2 ชุด เทอร์โบโมเลกุลาร์ปั๊ม (turbomolecular pump) ขนาด 400 l/s ของ Alcatel ATP400 และปั๊มเชิงกล (mechanical pump) ขนาด 500 l/min ของ KODIVAC เมื่อใช้ระบบปั๊มทั้งหมดจะสร้างความดันภายในส่วนทดลองอยู่ที่ 5×10^{-11} torr



ภาพประกอบ 14 แผนภาพแสดงระบบการวัด SMOKE ทั้งสามรูปแบบของลีและคณะ

ที่มา: J. W. Lee; et al. (2000, October). Three-Configurational Surface Magneto-Optical Kerr Effect Measurement System for an Ultrahigh Vacuum in situ Study of Ultrathin Magnetic Films. *Review of Scientific Instruments*. 71(10): 3802.



ภาพประกอบ 15 วงฮิสเทอรีซิสของสัญญาณ SMOKE ทั้งสามรูปแบบที่แปรค่าตามความหนาของฟิล์ม Co เมื่อปลูกบน Pd(111) glass และ 200 Å Pd/glass

ที่มา: J. W. Lee; et al. (2000, October). Three-Configurational Surface Magneto-Optical Kerr Effect Measurement System for an Ultrahigh Vacuum in situ Study of Ultrathin Magnetic Films. *Review of Scientific Instruments*. 71(10): 3803.

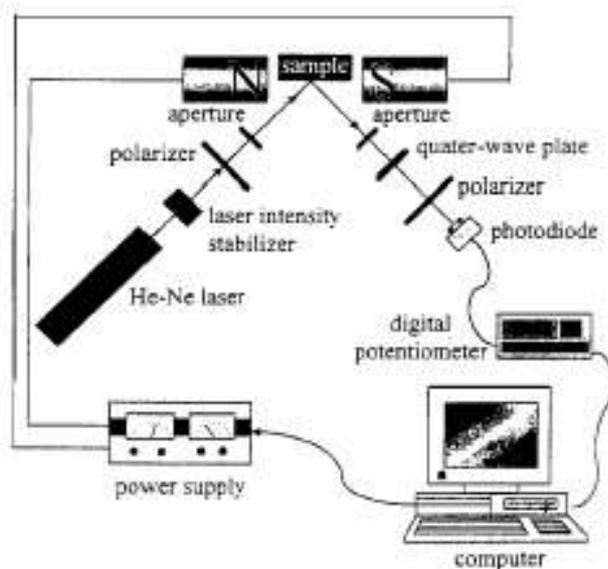
อุปกรณ์สำหรับระบบการวัด SMOKE จะประกอบด้วยแม่เหล็กซึ่งพันด้วยลวดทองแดงอบน้ำยาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1.0 mm มีความต้านทานรวม 3.5Ω ใช้กับแหล่งจ่ายกำลังชนิด bipolar ของ EMI BOSS โดยตัวแม่เหล็กจะติดตั้งกับแผงกั้นขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 in และอยู่ในระบบสุญญากาศทั้งหมด ขั้วแม่เหล็กจะทำจากเหล็กอ่อน เช่น เพอร์เมนเดอร์ (permender) ซึ่งจะให้สนามแม่เหล็กตกค้าง (remanence field) น้อยกว่า 20 Oe และแม่เหล็กจะให้สนามแม่เหล็กสูงสุด 2.0 kOe โดยมีความกว้างของช่องระหว่างขั้วแม่เหล็กเป็น 29 mm แหล่งกำเนิดแสงใช้เป็น

เลเซอร์ฮีเลียม-นีออน ของ Uniphase และอุปกรณ์วัดแสงใช้ซิลิกอนโฟโตไดโอด ของ Hinds DET90 โฟลาไรเซอร์ใช้ชนิดกลาน-เทลเลอร์ (Glan-Taylor) ของบริษัท Newport และใช้โฟโตอิลาสติกมอดูเลเตอร์ (photoelastic modulator) ของ Hinds PEM90D ที่ความถี่ 50 kHz สำหรับเพิ่มความละเอียดในการวัดสัญญาณ อุปกรณ์ในการอ่านสัญญาณจะใช้ดิจิตอลมัลติมิเตอร์ ของ HP34401A และเครื่องขยายแบบล็อกอิน ของ EG&G 7265 จำนวน 2 ชุด การต่อประสานระบบกับคอมพิวเตอร์จะทำผ่านช่องทางจีพีไอบีและช่องทางอนุกรม (RS-232) โดยใช้โปรแกรมแลปวิว

การวัดทดสอบจะใช้ตัวอย่างเป็นฟิล์มของโคบอลต์ปลูกบนพาลลาเดียมระนาบ (111) (Co/Pd(111)) ฟิล์มของโคบอลต์ปลูกบนแก้ว (Co/glass) และฟิล์มของโคบอลต์ปลูกบนพาลลาเดียมปลูกบนแก้ว (Co/Pd/glass) โดยจะได้ผลดั่งภาพประกอบ 15 โดยสัญญาณ SMOKE ทั้งสามรูปแบบของฟิล์ม Co บนผลึกเดี่ยว Pd(111) พบว่าที่โมโนเลเยอร์ของ Co น้อยกว่า 3.9 Å จะไม่มีวงฮิสเทอรีซิสของสัญญาณ SMOKE ทั้งสามรูปแบบซึ่งแสดงว่าไม่เป็นแม่เหล็กเฟอร์โร ค่าลบข้างแม่เหล็กแบบเชิงขั้ว (polar coercivity) จะมีค่าเพิ่มขึ้นจนสูงสุดที่ 6 Å แล้วลดลงเช่นเดียวกับสัญญาณของเคอร์ตามยาว แสดงให้เห็นว่าแกนง่าย (easy-axis) จะอยู่บนระนาบของผิวเพิ่มขึ้นเมื่อปลูกฟิล์มหนาขึ้น

2.2.4 งานวิจัยของเชิร์นและคณะ

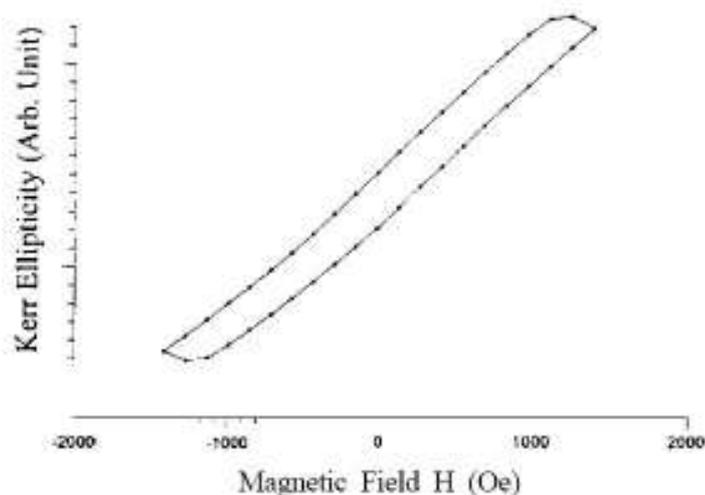
เชิร์นและคณะ (Shern; et al. 1998: 106-113) ได้ใช้ระบบการวัด SMOKE ศึกษาฟิล์ม Ni บน Pt(111) โดยมีองค์ประกอบดั่งภาพประกอบ 16 แหล่งกำเนิดแสงที่ใช้เป็นเลเซอร์ฮีเลียม-นีออน ความยาวคลื่น 6328.8 Å มีกำลังออก 5 mW โฟลาไรเซอร์สำหรับแสงตกกระทบเป็นชนิดปริซึมแบบกลาน-ทอมสัน (Glan-Thompson) มีอัตราการหักล้างแสง 1×10^{-6} โดยในการทดลองจะเลือกปรับระนาบการโพลาไรซ์ให้อยู่บนระนาบตกกระทบ (p-polarized) โดยจะมีช่องเปิดอยู่หลังจากโฟลาไรเซอร์เพื่อป้องกันรัศมีของแสง หลังจากสะท้อนจากผิวของสารตัวอย่างแสงจะเดินทางผ่านแผ่นเลื่อนคลื่นหนึ่งในสี่ซึ่งทำให้เกิดการเลื่อนเฟสของแสงเท่ากับ $\pi/2$ ซึ่งจะสลับค่าการหมุนของเคอร์ไปเป็นความรีของเคอร์ โฟลาไรเซอร์วิเคราะห์เป็นชนิดปริซึมแบบวอลลาสตัน (Wollaston) ซึ่งสามารถแยกองค์ประกอบของแสงเป็น เอส-โพลาไรซ์ และ พี-โพลาไรซ์ ทำให้สามารถอ่านค่าสัญญาณของเคอร์ได้แม่นยำยิ่งขึ้นเมื่อวัดเฉพาะองค์ประกอบ เอส-โพลาไรซ์ ของลำแสงสะท้อนหลังจากเกิดการหมุนของเคอร์ เนื่องจากอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงความเข้มแสงต่อความเข้มแสงเดิมขององค์ประกอบ เอส-โพลาไรซ์ ($\Delta I/I$) จะมีค่ามากกว่าขององค์ประกอบ พี-โพลาไรซ์ สัญญาณของเคอร์จะถูกตรวจวัดโดยโฟโตไดโอดและถูกบันทึกเป็นฟังก์ชันของสนามแม่เหล็ก (H) ที่ให้กับสารตัวอย่าง เพื่อสร้างวงฮิสเทอรีซิสด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ โดยระบบนี้สามารถสร้างสนามแม่เหล็กได้สูงสุด 1410 Oe



ภาพประกอบ 16 แผนภาพแสดงการติดตั้งระบบการวัด MOKE ของเซิร์นและคณะ

ที่มา: C. S. Shern; et al. (1998, April). Magnetic Properties of Ni/Pt(111) Thin Films Studied by MOKE. *Chinese Journal of Physics*. 36(2-1): 107.

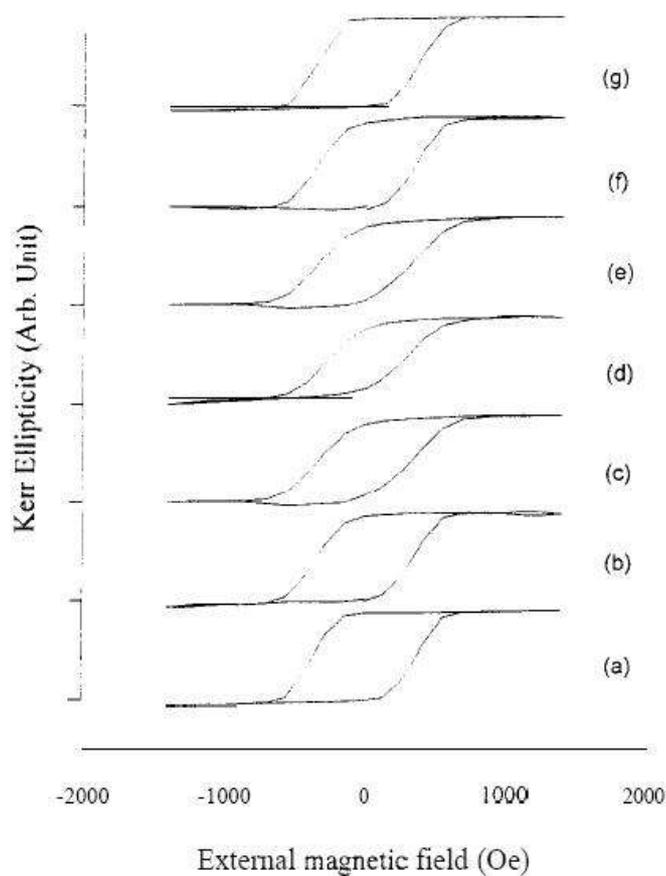
การพัฒนาของระบบ MOKE นี้อย่างที่หนึ่ง คือ การใช้อุปกรณ์รักษาเสถียรภาพความเข้มแสงเลเซอร์ (laser intensity stabilizer) ของ THORLABS ซึ่งเป็นระบบป้อนกลับเพื่อรักษาระดับความเข้มแสงของลำเลเซอร์และปรับปรุงอัตราส่วนของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (signal-noise ratio) สำหรับสัญญาณ MOKE ที่มีสัญญาณอ่อน การพัฒนาอย่างที่สอง คือ การตรวจวัดอัตราการเปลี่ยนแปลงความเข้มแสงต่อความเข้มแสงเดิม ($\Delta I/I$) แทนการวัดเฉพาะการเปลี่ยนแปลงความเข้มแสง (ΔI) ซึ่งกระบวนการนอัมัลไลซ์นี้จะลดการกวัดแกว่ง (fluctuation) ของสัญญาณของเคอร์ และการใช้โฟโตไดโอดของ ONSET (ET 4000) ซึ่งมีพื้นที่ตรวจวัดขนาดใหญ่ถึง 20 mm² ทำให้ไม่จำเป็นต้องใช้อุปกรณ์สำหรับรวมแสงทำให้ลดปัญหาเสถียรภาพของทางเดินแสงลง



ภาพประกอบ 17 วงฮิสเทอรีซิสของฟิล์ม Ni/Pt(111) วัดโดยเทคนิค P-MOKE

ที่มา: C. S. Shern; et al. (1998, April). Magnetic Properties of Ni/Pt(111) Thin Films Studied by MOKE. *Chinese Journal of Physics*. 36(2-1): 109.

สำหรับการวัดสัญญาณ MOKE ทั้งสามรูปแบบ เนื่องจากปรากฏการณ์ของเคอร์รี่ด้านทัศนศาสตร์แม่เหล็กแบบตามขวางจะมีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนน้อยมากสำหรับแสงที่เป็น พี-โพลาไรซ์ ดังนั้นจึงทำการวัดเฉพาะแบบตามยาวและแบบเชิงขั้วเท่านั้น การพิจารณาแกนง่ายและแกนยาก (hard axis) บนระนาบทำได้โดยการวัด MOKE แบบตามยาวเมื่อเปลี่ยนแปลงค่ามุมแอสิมัท (azimuth) ในภาพประกอบ 17 จะแสดงวงฮิสเทอรีซิสของฟิล์มที่เกิดจากการวัด MOKE แบบเชิงขั้ว โดยเป็นฟังก์ชันของความเข้มของความถี่ของเคอร์รี่ซึ่งเป็นสัดส่วนกับความเป็นแม่เหล็กของฟิล์มที่เกิดปลูกบนแพลทินัมระนาบ (111) (Ni/Pt(111)) และสนามแม่เหล็ก รูปร่างของวงจะมีลักษณะยาวและแคบ และความเป็นแม่เหล็กยังคงไม่อิ่มตัวเมื่อให้สนามแม่เหล็กถึงค่าสูงสุด 1410 Oe โดยค่าสภาพแม่เหล็กตกค้างและสนามลบค้างแม่เหล็กมีค่าน้อย ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าแกนยากของความเป็นแม่เหล็กสำหรับระบบนี้จะอยู่ตั้งฉากกับผิวของสารตัวอย่างและแกนง่ายจะอยู่บนระนาบของผิว



ภาพประกอบ 18 วงฮิสเทอริซิสของฟิล์ม Ni/Pt(111) วัดโดยเทคนิค L-MOKE ที่มุมเอซิมัทเป็น
(a) 0° (b) 30° (c) 60° (d) 90° (e) 120° (f) 150° (g) 180°

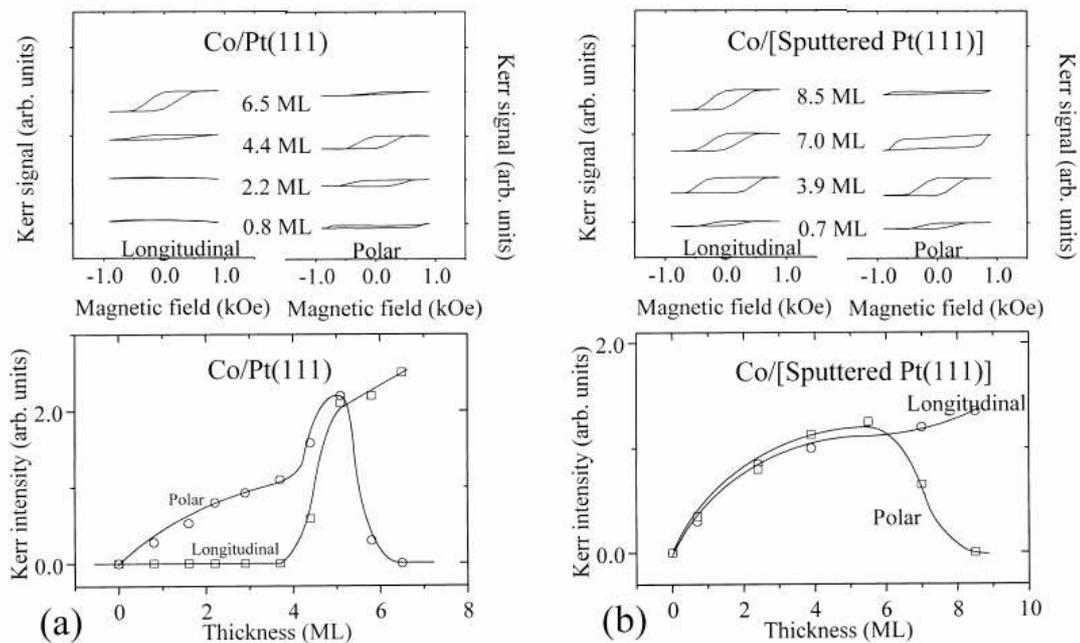
ที่มา: C. S. Shern; et al. (1998, April). Magnetic Properties of Ni/Pt(111) Thin Films Studied by MOKE. *Chinese Journal of Physics*. 36(2-1): 110.

การตรวจสอบแอนไอโซทรอปีบนระนาบทำโดยใช้การวัด MOKE แบบตามยาวเพื่อหาแกนง่ายบนระนาบของผิวสารตัวอย่าง เนื่องจากความรีของเคอร์เป็นสัดส่วนกับความเป็นแม่เหล็กที่มีองค์ประกอบในแนวเวกเตอร์การแผ่ของแสง ดังนั้นเมื่อให้มุมตกกระทบมีค่ามากขึ้นจะทำให้ความรีของเคอร์มีค่าเพิ่มขึ้นสำหรับ MOKE แบบตามยาว โดยในการทดลองนี้ใช้มุมตกกระทบ 45° และใช้สนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าตั้งแต่ -1410 ถึง 1410 Oe โดยทำการหมุนสารตัวอย่างรอบแกนตั้งฉากกับผิวสารตัวอย่างเพื่อเปลี่ยนค่ามุมเอซิมัท (ϕ) โดยชุดของวงฮิสเทอริซิสที่ค่ามุมเอซิมัทต่างๆ เป็นดังภาพประกอบ 18 รูปร่างของวงฮิสเทอริซิสที่มุม $\phi = 0^\circ$ จะคล้ายรูปสี่เหลี่ยมแสดงถึงการมีเพียงสอง

สถานะเท่านั้น ความเป็นแม่เหล็กจะอิมิตัวที่ $H_S = 675$ Oe และยังคงอิมิตัวเมื่อสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าลดลงจาก 1410 Oe ถึง -150 Oe โดยมีค่าสนามลบล้างแม่เหล็กเท่ากับ 375 Oe เมื่อเปรียบเทียบกับวงอื่นๆ ค่า H_S ที่ $\varphi = 0^\circ$ จะมีค่าน้อยที่สุด แต่มีค่าสนามลบล้างแม่เหล็กและความเป็นแม่เหล็กคงเหลือสูงที่สุด ซึ่งแสดงถึงการเป็นแกนง่ายของความเป็นแม่เหล็ก เมื่อมุม φ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0° ถึง 90° รูปร่างของวงฮิสเทอรีซิสจะแคบลงและค่า H_S จะเพิ่มขึ้น โดยจะเปลี่ยนจากรูปสี่เหลี่ยมไปเป็นเส้นโค้ง ในขณะที่ H_S จะมีค่าสูงสุดและค่าสนามลบล้างแม่เหล็กและความเป็นแม่เหล็กคงเหลือมีค่าต่ำที่สุดที่มุม $\varphi = 90^\circ$ ซึ่งแสดงถึงการเป็นแกนยากของความเป็นแม่เหล็กบนระนาบของฟิล์ม โดยพบว่าวงฮิสเทอรีซิสที่มุม $180^\circ < \varphi < 360^\circ$ จะเหมือนกับที่มุม $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ แสดงว่าฟิล์มนี้มีแอนไอโซทรอปีแม่เหล็กแบบแกนเดียว (uniaxial) บนระนาบ โดยแกนง่ายจะอยู่ในทิศที่ $\varphi = 0^\circ$

ในปี ค.ศ.1999 เซิร์นและคณะ (Shern; et al. 1999: 497-502) ใช้ระบบการวัด MOKE ในการศึกษาฟิล์มของโคบอลต์ปลูกบนแพลทินัมระนาบ (111) (Co/Pt(111)) ที่มีผิวหน้าเรียบและฟิล์มของโคบอลต์ปลูกบนแพลทินัมระนาบ (111) ที่มีผิวหน้าขรุขระโดยการสับเตอร์ด้วยไอออนของอาร์กอน (Ar) โดยมีผลการทดลองดังภาพประกอบ 19 พบว่าสัญญาณของเคอร์เทียบกับสนามแม่เหล็กของฟิล์มของโคบอลต์ปลูกบนแพลทินัมระนาบ (111) ผิวเรียบที่อุณหภูมิห้อง ที่ความหนาของฟิล์ม 0.8 และ 2.2 ML จะมีเพียงสัญญาณของเคอร์แบบเชิงขั้วเท่านั้น แสดงว่าแกนง่ายของความเป็นแม่เหล็กอยู่บนระนาบของผิว นั่นคือฟิล์มโคบอลต์จะมีแอนไอโซทรอปีแม่เหล็กแบบตั้งฉากที่ฟิล์มหนา 4.4 ML จะมีสัญญาณของเคอร์ทั้งแบบเชิงขั้วและแบบตามยาวซึ่งยังคงแสดงแอนไอโซทรอปีแม่เหล็กแบบตั้งฉาก เมื่อฟิล์มหนาถึง 6.5 ML จะพบเพียงสัญญาณของเคอร์แบบตามยาวแสดงแอนไอโซทรอปีที่อยู่บนระนาบเท่านั้น นั่นคือแอนไอโซทรอปีจากรูปร่าง (shape anisotropy) มีค่าเพิ่มขึ้นจากอันตรกิริยาไดโพล

เมื่อพิจารณาค่าความเข้มแสงของเคอร์อิมิตัวเทียบกับความหนาพบว่าที่ความหนาน้อยกว่า 3.7 ML จะมีเพียงสัญญาณของเคอร์เชิงขั้วซึ่งแสดงแอนไอโซทรอปีแม่เหล็กแบบตั้งฉากเท่านั้น ที่ความหนาระหว่าง 4.5 ถึง 5.8 ML พบการเปลี่ยนแปลงความเข้มแสงของเคอร์ทั้งแบบเชิงขั้วและแบบตามยาว จากการวัดโดยเทคนิคการเลี้ยวเบนอิเล็กตรอนพลังงานต่ำ (low energy electron diffraction, LEED) และสเปกโทรสโกปีของเออเจอร์อิเล็กตรอน (auger electron spectroscopy, AES) พบว่ารูปแบบของการปลูกฟิล์มเป็นแบบเกาะสามมิติ (three-dimensional island) ซึ่งทำให้ฟิล์มไม่สม่ำเสมอและแอนไอโซทรอปีที่ผิวไม่มีผลต่อระบบ เมื่อเพิ่มความหนาของฟิล์มมากกว่า 5.8 ML ความเข้มของเคอร์แบบเชิงขั้วจะหายไป มีเพียงความเข้มของเคอร์แบบตามยาวแสดงถึงแอนไอโซทรอปีจากรูปร่างจะมีผลทำให้แอนไอโซทรอปีแม่เหล็กเปลี่ยนจากตั้งฉากกับระนาบมาอยู่บนระนาบของผิว



ภาพประกอบ 19 สัญญาณของเคอร์เทียบกับสนามแม่เหล็กและความหนาของฟิล์ม Co บน
(a) Pt(111) และ (b) Sputtered Pt(111)

ที่มา: C. S. Shern; et al. (1999, March 23). Response and Enhancement of Surface Magneto-Optic Kerr Effect for Co–Pt(111) Ultrathin Films and Surface Alloy. *Surface Science*. 429: L498–L499.

ถ้าพิจารณากรณีฟิล์มของโคบอลต์ปลูกบนแพลทินัมระนาบ (111) ที่ผ่านการสัปดาห์ด้วยไอออนของอาร์กอนที่พลังงาน 1.6 keV เป็นเวลา 5 min ทำให้ผิวหน้ามีความขรุขระจากการวัดโดยเทคนิคสัปดาห์พบว่าฟิล์มจะก่อตัวเป็นแบบเกาะสามมิติ และที่ความหนาของฟิล์มระหว่าง 0.7 ถึง 7.0 ML สามารถวัดสัญญาณของเคอร์ได้ทั้งแบบเชิงขั้วและแบบตามยาว เมื่อเปรียบเทียบกับแบบแรกพบว่าแอนไอโซทรอปีแม่เหล็กแบบแกนเดียวที่ตั้งฉากจะหายไป ซึ่งแสดงว่าแอนไอโซทรอปีแบบผลึกแม่เหล็ก (magnetocrystalline) มีผลน้อยลงจากการที่ฟิล์มโคบอลต์ไม่สามารถสร้างเป็นโครงผลึกบนผิวที่ขรุขระได้ และจากการสัปดาห์ทำให้ผิวมีเหลี่ยมมุมซึ่งทำให้ระนาบของความเป็นแม่เหล็กของฟิล์มโคบอลต์ได้หลายทิศทางทำให้พบสัญญาณของเคอร์ทั้งสองรูปแบบ เมื่อพิจารณาความเข้มของเคอร์เทียบกับความหนาพบว่าที่ความหนามากกว่า 8 ML มีเพียงความเข้มของเคอร์แบบตามยาวเกิดขึ้นเท่านั้น แสดงว่าแกนง่ายของความเป็นแม่เหล็กจะมีอยู่บนระนาบเท่านั้น