

บทที่ 2

ท่อที่วางตัวเกือบตรงในแนวตั้ง (Near-Vertical Riser)

บทนี้ได้นำเสนอวิธีการวิเคราะห์ปัญหาทางด้านสถิตศาสตร์ของท่อขุดเจาะและลำเลียงของไหลใต้ทะเลที่มีการวางตัวเกือบตรงในแนวตั้ง (Near-Vertical Riser) ในกรณีที่ท่อมีการแอ่นตัวน้อย แรงที่กระทำต่อท่อขุดเจาะและลำเลียงของไหลใต้ทะเลประกอบด้วยแรงลากเนื่องจากกระแส น้ำหนักของท่อและน้ำหนักของของไหลภายในท่อ รวมถึงแรงลอยตัว สมการอนุพันธ์ซึ่งเป็นสมการครอบคลุมปัญหาจะได้ออกมาจากการพิจารณาสมดุลของชิ้นส่วนเล็กๆ ของท่อภายใต้สภาวะการรับแรงเสมือนจริง การหาคำตอบเชิงตัวเลขสำหรับการศึกษานี้จะอาศัยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบการประมาณตรงกลาง (Central divided-different)

2.1 ทฤษฎีและสมมติฐาน

ท่อขุดเจาะและลำเลียงของไหลใต้ทะเล (Marine Riser) เป็นท่อที่มีการวางตัวในแนวตั้ง และมีความอ่อนตัวสูงทำให้เกิดการเคลื่อนตัวได้มากเมื่อรับแรงกระทำ โดยท่อจะเชื่อมต่อระหว่างแท่นขุดเจาะที่ผิวน้ำกับหลุมขุดเจาะใต้ท้องทะเล โดยแรงที่กระทำโดยตรงต่อท่อขุดเจาะ ได้แก่ น้ำหนักของท่อขุดเจาะ แรงจากกระแส คลื่นของน้ำ ความดันภายใน และความดันภายนอกของท่อ จากแรงต่าง ๆ ที่กระทำกับท่อ จะทำให้ท่อขุดเจาะอยู่ในภาวะสมดุลได้ก็ต่อเมื่อมีแรงดึงที่ปลายบนสุดของท่อ (Top Tension) มากเพียงพอที่จะไม่ทำให้เกิดการโก่งคด (Buckling) ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวเป็นพฤติกรรมของโครงสร้างหลายประเภทผสมเข้าด้วยกัน ได้แก่ คาน เสา เคเบิล และท่อ จึงทำให้ยากต่อการวิเคราะห์

การวิเคราะห์พฤติกรรมทางด้านกลศาสตร์ของท่อดังกล่าวจำเป็นต้องใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้สมการครอบคลุมปัญหา โดยกำหนดสมมติฐานดังนี้

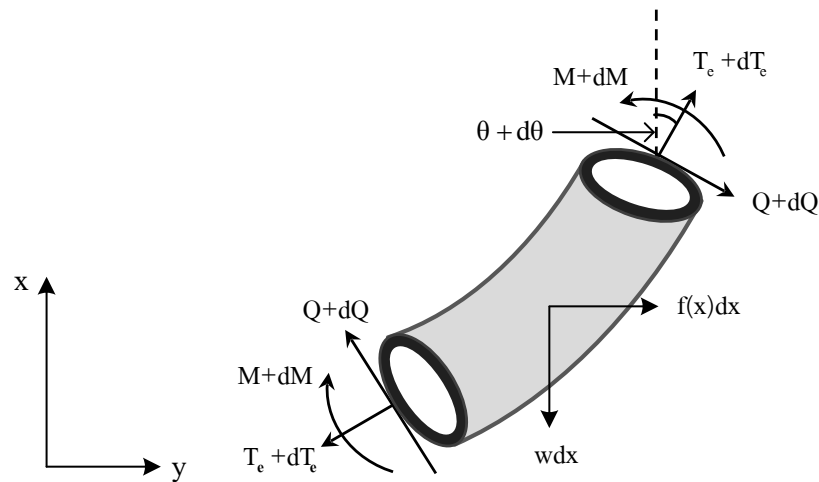
- 1) ท่อวางตัวเกือบตรงในแนวตั้งและมีการเคลื่อนตัวน้อยในสภาวะสมดุลสถิตศาสตร์
- 2) ท่อขุดเจาะและลำเลียงของไหลใต้ทะเลมีคุณสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้น
- 3) พื้นที่หน้าตัดของท่อมีลักษณะกลมทั้งสภาวะก่อนและหลังการเสียรูป
- 4) พื้นที่หน้าตัดของท่อมีลักษณะเป็นระนาบและตั้งฉากกับแนวแกนของท่อทั้งก่อนและหลังเสียรูป
- 5) ผลกระทบเนื่องจากแรงเฉือนและแรงบิดภายในท่อน้อยมาก
- 6) ท่อมีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกันตลอดความยาวท่อ โดยถือว่าจุดต่อ (node) ต่าง ๆ มีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกันกับตัวท่อ
- 7) ไม่คำนึงถึงแรงกระทำเนื่องจากการเคลื่อนที่ของของไหลภายในท่อ

2.2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากสมมุติฐานข้างต้นทำให้สามารถสร้างสมการครอบคลุมปัญหา เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาทางสถิตศาสตร์ของท่อขุดเจาะและลำเลียงของไหลสำหรับกรณี que ท่อวางตัวเกือบตรงในแนวตั้ง ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.2.1 สมการครอบคลุมปัญหา

ในการสร้างสมการครอบคลุมปัญหาซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาทางสถิตศาสตร์ของท่อขุดเจาะและลำเลียงของไหลสำหรับกรณีที่ท่อมีการวางตัวในเกือบตรงในแนวตั้ง สามารถทำได้โดยพิจารณาสมดุลของแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนของท่อในกรณีที่มีการแอ่นตัวน้อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงภาพของชิ้นส่วนของท่อที่รับแรงดึงแล้วเกิดการแอ่นตัวน้อย ๆ

สมการที่ (2.1) แสดงสมการสมดุลของแรงต่าง ๆ ที่กระทำต่อชิ้นส่วนของท่อในแนวราบ

$$\sum F_y = 0;$$

$$(Q + dQ)\cos(\theta + d\theta) - Q\cos\theta + (T_e + dT_e)\sin(\theta + d\theta) - T_e\sin\theta + f(x)dx = 0 \quad (2.1)$$

เมื่อ $d\theta$ มีค่าน้อยมาก จะสามารถประมาณค่าต่างๆ ได้ดังนี้

$$\sin(\theta + d\theta) \approx \sin\theta + \cos\theta d\theta \quad (2.2)$$

ดังนั้นสมการที่ (2.1) สามารถจัดรูปใหม่เป็น

$$\frac{d}{dx}(Q \cos \theta) + \frac{d}{dx}(T_e \sin \theta) + f(x) = 0 \quad (2.3)$$

และเมื่อพิจารณาการแอ่นตัวน้อย ส่งผลให้ค่า θ มีค่าน้อย ดังนั้น $\cos \theta \approx 1$, และ $\sin \theta \approx \frac{dy}{dx}$ ดังนั้น ทำให้สมการที่ (2.3) สามารถลดรูปได้เป็น

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{d}{dx}\left(T_e \frac{dy}{dx}\right) + f(x) = 0 \quad (2.4)$$

และจากการประมาณ

$$\cos(\theta + d\theta) \approx \cos \theta - \sin(\theta + d\theta)$$

จาก $Q = \frac{dM}{dx}$ ดังนั้น

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left(T_e \frac{dy}{dx}\right) + f(x) = 0 \quad (2.5)$$

จาก $M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$ ดังนั้น

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 y}{dx^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(T_e \frac{dy}{dx}\right) - f(x) = 0 \quad (2.6)$$

เมื่อกำหนดให้ EI มีค่าคงที่ จะทำให้สามารถจัดสมการใหม่ได้เป็น

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{d}{dx}\left(T_e \frac{dy}{dx}\right) - f(x) = 0 \quad (2.7)$$

สมการที่ (2.8) แสดงสมการสมดุลของแรงต่าง ๆ ที่กระทำต่อชิ้นส่วนของท่อนในแนวตั้ง

$$\sum F_x = 0;$$

$$(T_e + dT_e) \cos(\theta + d\theta) - T_e \cos \theta - (Q + dQ) \sin(\theta + d\theta) + Q \sin \theta - w dx = 0 \quad (2.8)$$

เมื่อการแอ่นตัวมีค่าน้อย จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{dT_e}{dx} = w \quad (2.9)$$

แทนค่าจากสมการที่ (2.9) ลงในสมการที่ (2.7) จะทำให้ได้สมการครอบคลุมปัญหาซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้นสำหรับการวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์ของท่อขุดเจาะและลำเลียงของไหลใต้ทะเล ดังสมการที่ (2.10)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - T_e \frac{d^2 y}{dx^2} - w \frac{dy}{dx} - f(x) = 0 \quad (2.10)$$

การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการที่ (2.10) จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในการประมาณคำตอบเชิงตัวเลข

2.2.2 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition)

เงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้คือบริเวณจุดรองรับที่ปลายของท่อขุดเจาะและลำเลียงของไหลทั้งสองข้างซึ่งจะกำหนดให้เป็นแบบยึดหมุน ทำให้เงื่อนไขของปัญหาที่เกิดขึ้นเป็นดังนี้

1. การเคลื่อนที่ (Displacement) บริเวณจุดรองรับที่ปลายของท่อขุดเจาะและลำเลียงของไหลทั้งสองข้างมีค่าเท่ากับศูนย์
2. โมเมนต์ (Bending Moment) บริเวณจุดรองรับที่ปลายของท่อขุดเจาะและลำเลียงของไหลทั้งสองข้างมีค่าเท่ากับศูนย์

ซึ่งจากเงื่อนไขทั้ง 2 ข้อ ทำให้สามารถลดตัวแปรไม่ทราบค่าของสมการครอบคลุมปัญหา และสามารถนำไปสร้างเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ตามสมการ (2.10) โดยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ได้

2.2.3 แรงลาก (Drag Force)

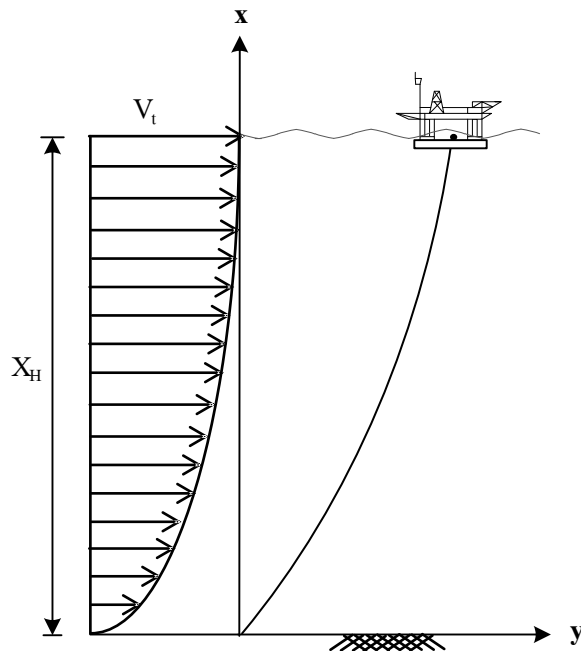
แรงลากที่กล่าวถึงในงานวิจัยนี้เป็นแรงลากเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.11)

$$f_D = \frac{1}{2} \rho_w C_D V^2 \quad (2.11)$$

แรงลากนั้นขึ้นอยู่กับความหนาแน่นของน้ำ (ρ_w), สัมประสิทธิ์ของแรงลาก (C_D) และความเร็วของกระแสน้ำ (V) โดยความเร็วของกระแสน้ำจะมีค่าแตกต่างกันตามระดับความลึก ซึ่งสามารถคำนวณความเร็วของกระแสน้ำตามความลึกในระดับต่าง ๆ ได้จากสมการที่ (2.12)

$$V(x_i) = V_i \left(\frac{X_i}{X_H} \right)^n \tag{2.12}$$

เมื่อ V_i คือความเร็วของกระแสน้ำที่ระดับผิวน้ำ, X_i คือระยะที่วัดจากใต้ท้องทะเลถึงจุดที่พิจารณา, X_H คือความลึกทั้งหมดของน้ำทะเลวัดจากใต้ท้องทะเลถึงระดับผิวน้ำและ n คือเลขชี้กำลังที่ใช้ในการกระจายความเร็วของกระแสน้ำโดยในการศึกษานี้จะใช้ค่า $n = \frac{1}{7}$



รูปที่ 2.2 แสดงลักษณะการกระจายความเร็วของกระแสน้ำที่ระดับความลึกต่างๆ

2.2.4 แรงดึงประสิทธิผลและน้ำหนักเสมือน (Effective Tension and Apparent weight)

จากการพิจารณาสมดุลของแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนของท่อกรณีท่อที่มีการแอนตัวน้อย ๆ ในสภาวะที่ท่อรับแรงเสมือนจริง สามารถหาค่าของแรงดึงประสิทธิผลได้จากสมการต่อไปนี้

$$\frac{dT_e}{dx} = w \tag{2.13}$$

$$\therefore dT_e = w dx \tag{2.14}$$

อินทิเกรตสมการที่ (2.14) จะได้สมการที่ (2.15) โดยที่ T_e เป็นแรงดึงที่ระดับใด ๆ

$$\int_{T_e}^{T_H} dT = \int w dx$$

$$T_H - T_e(x) = w \times x \quad (2.15)$$

ดังนั้นการคำนวณค่าแรงดึงประสิทธิผล T_e จะหาได้จากสมการที่ (2.16)

$$\therefore T_e(x) = T_H - (w \times x) \quad (2.16)$$

การคำนวณน้ำหนักประสิทธิผลจะใช้หลักการของอาร์คิมิดีส โดยการเปลี่ยนระบบการคำนวณน้ำหนักจากสภาพที่รับแรงเนื่องจากสนามความดันที่มีความยุ่งยากในการคำนวณให้เป็นการคำนวณน้ำหนักเสมือนที่ได้จากการรวมผลเนื่องจากความดันแล้ว ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.17)

$$w_A = (\rho_p A_p - \rho_e A_e + \rho_i A_i) g \quad (2.17)$$

เมื่อ ρ_p , ρ_e และ ρ_i เป็นความหนาแน่นของท่อ, ความหนาแน่นของน้ำทะเลและความหนาแน่นของของไหลภายในท่อตามลำดับ ส่วน A_p , A_e และ A_i เป็นพื้นที่หน้าตัดของท่อ พื้นที่หน้าตัดภายนอกและพื้นที่หน้าตัดภายในท่อตามลำดับ

2.3 การหาค่าตอบเชิงตัวเลข

สำหรับการวิเคราะห์ท่อที่วางตัวเกือบตรงในแนวดิ่ง ในการศึกษาครั้งนี้จะอาศัยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในการหาค่าตอบเชิงตัวเลขของสมการครอบคลุมปัญหา ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.3.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite difference Method)

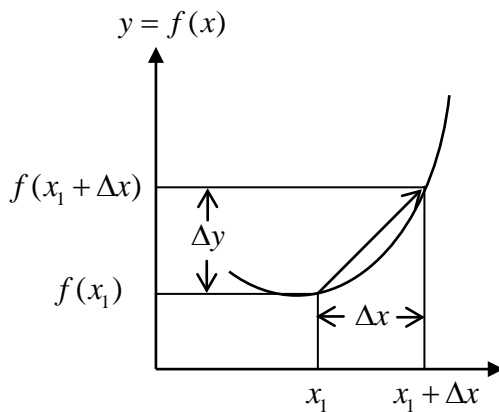
จากสมการครอบคลุมปัญหา (สมการที่ 2.10) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ สมการดังกล่าวสามารถคำนวณค่าได้ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ แต่การกระทำดังกล่าวจะมีความยุ่งยากและไม่เหมาะสมกับการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้จะอาศัยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข ซึ่งระเบียบวิธีดังกล่าวเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการประมาณคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ที่ยุ่งยากให้เป็นระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งง่ายต่อการหาค่าตอบ โดยในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์โดยสรุปดังต่อไปนี้

จากหลักการของแคลคูลัส รูปที่ 2.3 แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตาม y

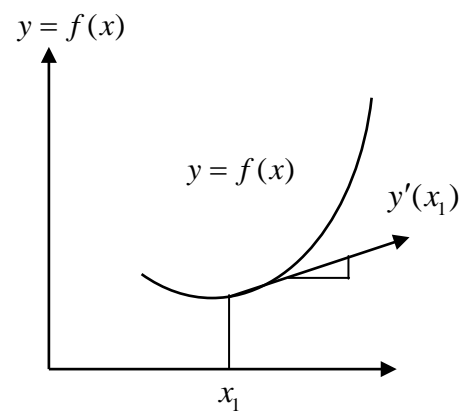
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (2.18)$$

เมื่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอิสระ Δx เข้าสู่ศูนย์ เราจะได้ค่าอนุพันธ์ของตัวแปร y ที่จุด x ใด ๆ ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (2.19)$$



(ก) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณ



(ข) ค่าอนุพันธ์แท้จริง

รูปที่ 2.3 ความหมายของค่าอนุพันธ์โดยประมาณและค่าอนุพันธ์แท้จริง
(อ้างอิง ปราโมทย์ เตชะอำไพ [20])

ค่า $\frac{dy}{dx}$ คือค่าความชันที่จุด x ใด ๆ นั้นเอง ซึ่งโดยทั่วไปจะใช้สัญลักษณ์เป็น y' หรือ $f'(x)$ ดังแสดงในรูป 2.3 (ข)

ในวิชาแคลคูลัสนั้นหากกำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ มาให้ เราจะสามารถหาค่าอนุพันธ์โดยใช้สูตรต่างๆ เช่น ฟังก์ชันที่กำหนดมาให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนามดังนี้

$$y = f(x) = x^n \quad (2.20)$$

เราสามารถหาค่าอนุพันธ์แม่นตรงได้โดยตรงจาก

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1} \quad (2.21)$$

โดยทั่วไปแล้วการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ นั้นมีความยุ่งยากในการหาคำตอบ ดังนั้นโดยปกติจะทำการหาค่าอนุพันธ์โดยประมาณโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปแบบดังนี้

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \dots \quad (2.22)$$

โดยที่ h คือช่วงระหว่างตำแหน่ง x_i และ x_{i+1} ทำให้สามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First derivative) ที่ตำแหน่ง x_i ได้จากอนุกรมเทย์เลอร์ดังนี้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} f''(x_i) + \dots \quad (2.23)$$

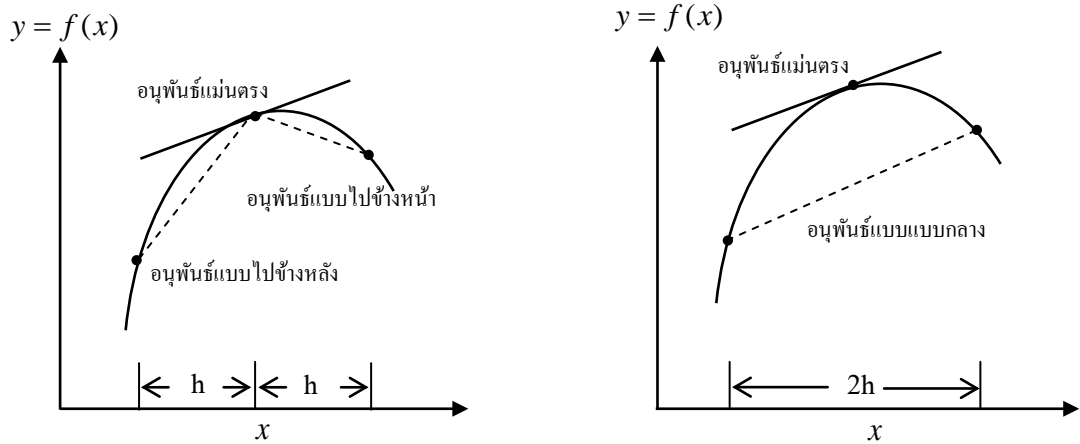
หรือเขียนใหม่ได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \quad (2.24)$$

โดย $O(h)$ แสดงถึงค่าความผิดพลาดอันดับ h (Error of order h) ที่เกิดขึ้นจากการเขียนสมการที่ (2.24) แทนสมการ (2.23) บางครั้งเรียกว่าผลต่างจากการแบ่งย่อยไปข้างหน้าอันดับที่หนึ่ง (First forward divided-difference) เหตุผลที่เรียกว่าผลต่างแบบไปข้างหน้าเพราะว่าใช้ข้อมูลของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_i และ x_{i+1} เพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง การเปรียบเทียบระหว่างค่าของอนุพันธ์โดยประมาณกับค่าอนุพันธ์แม่นตรงสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.4 (ก)

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (2.22) เราสามารถใช้อนุกรมเทย์เลอร์ในการหาค่าฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_{i-1} ได้ดังนี้

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \dots \quad (2.25)$$



(ก) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบไปข้างหน้า (ข) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณและแบบย้อนหลังแบบตรงกลาง

รูปที่ 2.4 การเปรียบเทียบระหว่างค่าอนุพันธ์แม่นยำกับค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบต่างๆ
 (อ้างอิง ปราโมทย์ เฑาะอำไพ [20])

ซึ่งนำไปสู่ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง x_i ได้ดังนี้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2!} f''(x_i) - \dots \tag{2.26}$$

หรือเขียนใหม่ได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \tag{2.27}$$

สมการ (2.27) นี้สามารถนำไปใช้คำนวณหาค่าประมาณของอนุพันธ์ได้เป็นสมการผลต่างจากการแบ่งย่อยย้อนหลังอันดับที่หนึ่ง (First backward divided-difference) การเปรียบเทียบค่าอนุพันธ์แบบไปข้างหน้ากับค่าอนุพันธ์แม่นยำสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.4(ก)

ผลจากการนำเอาสมการที่ (2.25) ไปลบออกจากสมการที่ (2.22) จะได้ดังนี้

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2hf'(x_i) + \frac{2h^3}{3!} f'''(x) + \dots \tag{2.28}$$

ซึ่งสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง x_i ใดๆ ได้คือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x_i) + \dots \quad (2.29)$$

หรือเขียนใหม่ได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \quad (2.30)$$

สมการผลต่างการแบ่งย่อยแบบตรงกลาง (Central divided-difference) ดังแสดงในสมการที่ (2.30) จะให้ค่าความผิดพลาดที่อันดับ h^2 ซึ่งต่างจากความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากสมการอนุพันธ์โดยประมาณแบบไปข้างหน้าและแบบย้อนหลัง ซึ่งมีค่าความผิดพลาดที่อันดับ h จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้นส่งผลให้ค่าอนุพันธ์ที่ได้จากสมการผลต่างการแบ่งย่อยแบบตรงกลางมีค่าการประมาณที่แม่นยำตรงมากกว่าดังแสดงในรูปที่ 2.4 (ข) ในการหาค่าอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไป เช่น ค่าอนุพันธ์อันดับสองเราสามารถทำได้ในลักษณะเดียวกันโดยใช้ออนุกรมเทย์เลอร์ในการคำนวณฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_{i+2} จากค่าต่างๆ ที่ตำแหน่ง x_i ได้ดังนี้

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + (2h)f'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_i) + \dots \quad (2.31)$$

หากเอา 2 คูณเข้ากับสมการ (2.22) แล้วนำไปลบออกจากสมการที่ (2.31) จะได้ดังนี้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \dots \quad (2.32)$$

จึงทำให้ได้ผลลัพธ์เป็นสมการของค่าอนุพันธ์อันดับสองดังนี้

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i))}{h^2} + O(h) \quad (2.33)$$

สมการที่ (2.33) เรียกว่าสมการผลต่างจากการแบ่งย่อยแบบไปข้างหน้าอันดับที่สอง (Second forward divided-difference) หากต้องการสมการของค่าอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไปสามารถทำได้โดยวิธีการในทำนองเดียวกัน รวมทั้งค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ จากการแบ่งย่อยแบบย้อนหลังและแบบตรงกลาง ซึ่งในงานวิจัยนี้จะนำเสนอค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ เนื่องจากการแบ่งย่อยแบบตรงกลางเท่านั้น ซึ่งได้สรุปไว้ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยแบบตรงกลาง (อ้างอิง ปราโมทย์ เศษะอำไพ [20])

อันดับ	ค่าอนุพันธ์
1	$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$
2	$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i))}{h^2}$
3	$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3}$
4	$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^4}$

ในกรณีที่ปลายหรือที่ตำแหน่งจุดรองรับนั้นจะใช้ Boundary Condition จากที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อก่อนหน้านี้ ซึ่งเงื่อนไขของจุดรองรับดังกล่าวจะช่วยลดจำนวนพจน์ที่ไม่สามารถหาค่าได้ สำหรับในกรณีที่โมเมนต์ตัดที่ปลายมีค่าเท่ากับศูนย์

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2.34)$$

เช่นต้องการหา y_{-2}, y_{-1}, y_5, y_6 จากค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ในสมการของโมเมนต์คือ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (2.35)$$

จากสมการที่ (2.35) สามารถใช้วิธีจากตารางที่ 2.1 ในการกระจายเทอมของค่าอนุพันธ์อันดับสองและแทนตำแหน่งที่ต้องการพิจารณาได้ดังนี้

$$y_{-1} - 2y_0 + y_1 = 0 \quad (2.36)$$

ย้ายข้างเพื่อทำการหาค่าของ y_{-1} จะได้

$$y_{-1} = 2y_0 - y_1 \quad (2.37)$$

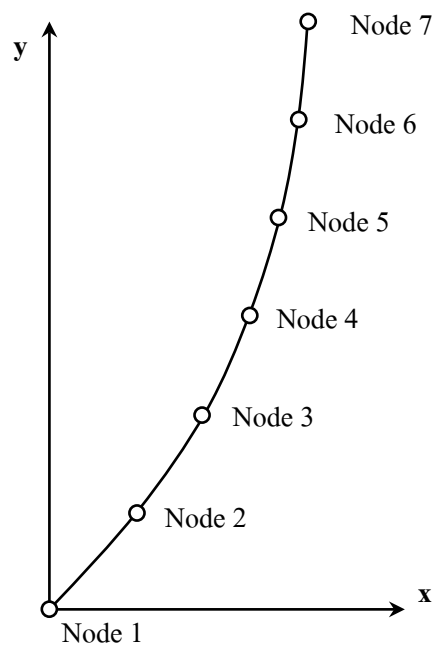
ซึ่งจากเงื่อนไขที่จุดรองรับ $y_0 = 0$

$$y_{-1} = -y_1 \quad (2.38)$$

ซึ่งสรุปได้ว่า

$$y_{m-1} = 2y_m - y_{m+1} \quad (2.39)$$

2.3.2 ตัวอย่างการสร้างเมตริกซ์ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์
 เนื่องจากวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งจำเป็นต้องแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งยากต่อการหาคำตอบให้เป็นสมการเชิงเส้นที่ง่ายต่อการหาคำตอบและเหมาะสมสำหรับการนำมาพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ดังนั้นในหัวข้อนี้จะทำการแสดงตัวอย่างการสร้างระบบสมการเชิงเส้นซึ่งแปลงมาจากสมการครอบคลุมปัญหา (สมการที่ 2.10) เพื่อให้ง่ายต่อการศึกษาและทำความเข้าใจจึงทำการแบ่งชิ้นส่วนของท่อออกเป็น 6 ส่วน ซึ่งจะทำให้ได้จุดต่อ (node) ของท่อทั้งหมด 7 จุด ดังแสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แสดงภาพตัวอย่างการแบ่งส่วนของท่อขูดเจาะและลำเลียงของไหลได้ทะเล

เมื่อพิจารณาถึงเงื่อนไขขอบเขตซึ่งเป็นเงื่อนไขของจตุรกรรับ โดยกำหนดให้จตุรกรรับที่ปลายทั้งสองด้านเป็นจุดยึดหมุน ทำให้เงื่อนไขขอบเขตของท่อนจตุรกร (node) ที่ปลายด้านบน และจตุรกร (node) ที่ปลายด้านล่างถูกกำหนดโดยเงื่อนไขต่อไปนี้

1. การแอ่นตัวที่ปลายทั้งสองข้างมีค่าเท่ากับศูนย์ ($y = 0$)
2. โมเมนต์คัตที่ปลายทั้งสองข้างมีค่าเท่ากับศูนย์ ($M = 0$)

จากสมการครอบคลุมปัญหา

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - T_e \frac{d^2 y}{dx^2} - w \frac{dy}{dx} - f(x) = 0 \quad (2.40)$$

เมื่อทำการพิจารณาที่จุดเจาะและค่าเฉลี่ยของไหลใต้ทะเลที่มีระยะเอียงที่ผิวน้ำทำให้พจน์ของความชันของเส้นโค้งการแอ่นตัว $\frac{dy}{dx}$ ประกอบด้วยสองส่วนด้วยกัน คือ ส่วนที่เป็นความชันเนื่องจากระยะเอียง คือ $\tan \phi = \frac{X_H}{Y_H}$ และส่วนที่เป็นความชันเนื่องจากการแอ่นตัว คือ $\frac{dy_i}{dx}$ เมื่อ y_i หมายถึงค่าการแอ่นตัวที่จตุรกร (node) i ใดๆ ทำให้พจน์ที่ 3 ทางฝั่งซ้ายของสมการที่ (2.40) สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$w \frac{dy}{dx} = w \left(\tan \phi + \frac{dy_i}{dx} \right) = w \left(\frac{X_H}{Y_H} + \frac{dy_i}{dx} \right) \quad (2.41)$$

เมื่อทำการแทนค่าการประมาณของค่าอนุพันธ์ในอันดับต่างๆ ลงในสมการครอบคลุมปัญหาแล้วทำการจัดรูปให้ค่าพจน์ $w \left(\frac{X_H}{Y_H} \right)$ มารวมกับพจน์ของแรงกระทำซึ่งอยู่ทางด้านขวาของสมการจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{h^4} (y_{(i+2)} - 4y_{(i+1)} + 6y_i - 4y_{(i-1)} + y_{(i-2)}) \\ & - \frac{T_e}{h^2} (y_{(i+1)} - 2y_i + y_{(i-1)}) - \frac{w}{2h} (y_{(i+1)} - y_{(i-1)}) = f(x) + w \left(\frac{X_H}{Y_H} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

จากสมการที่ 2.42 จะเห็นว่าพจน์ของน้ำหนักเสมือนที่เกิดจากระยะเอียงที่ผิวน้ำ จะเปรียบเสมือนแรงที่กระทำคงที่ตลอดความลึกของน้ำทะเลเมื่อทำการกำหนดให้

$$F(x) = f(x) + w \left(\frac{X_H}{Y_H} \right) \quad (2.43)$$

ทำการจัดรูปของสมการที่ (2.42) ใหม่ โดยการกระจายพจน์ของค่าการเคลื่อนที่ของจุดต่อ (node) ต่างๆ ในสมการจะได้

$$\begin{aligned} \frac{EI}{h^4}(y_{(i+2)}) - \frac{4EI}{h^4}(y_{(i+1)}) + \frac{6EI}{h^4}(y_i) - \frac{4EI}{h^4}(y_{(i-1)}) + \frac{EI}{h^4}(y_{(i-2)}) \\ - \frac{T_e}{h^2}(y_{(i+1)}) + \frac{2T_e}{h^2}(y_i) - \frac{T_e}{h^2}(y_{(i-1)}) - \frac{w}{2h}(y_{(i+1)}) + \frac{w}{2h}(y_{(i-1)}) = F(x) \end{aligned} \quad (2.44)$$

ทำการจัดรูปแบบของสมการอีกครั้งโดยจัดให้พจน์ซึ่งประกอบด้วยพจน์ของการเคลื่อนที่ของจุดต่อ (node) เดียวกันอยู่ในกลุ่มเดียวกัน ทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้นซึ่งประกอบด้วยสมการเชิงเส้นทั้งหมด n สมการ ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \frac{EI}{h^4}(y_{(i+2)}) + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right] (y_{(i+1)}) + \left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right] (y_i) \\ + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right] (y_{(i-1)}) + \frac{EI}{h^4}(y_{(i-2)}) = F(x) \end{aligned} \quad (2.45)$$

โดยที่ n เป็นจำนวนจุดต่อ (node) ทั้งหมดซึ่งมีค่าเท่ากับจำนวนชิ้นส่วนที่แบ่งบวกด้วยหนึ่ง

เมื่อนำสมการที่ (2.45) มาจัดรูปเป็นเมตริกซ์จะทำให้สามารถสร้างเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของค่าการแอ่นตัวที่จุดต่อ (node) ต่าง ๆ ได้ ตามตัวอย่างต่อไปนี้

สำหรับกรณีทำการแบ่งชิ้นส่วนที่ออกเป็น 6 ส่วนเท่า ๆ กัน เมื่อพิจารณาตามเงื่อนไขขอบเขตจะได้

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \text{และ} \quad y_1 = y_7 = 0 \quad (2.46)$$

จากตารางที่ 2.1 ค่าอนุพันธ์ของโมเมนต์คัต

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y_{(i+1)} - 2y_i + y_{(i-1)}}{h^2} = 0 \quad (2.47)$$

$$\text{เมื่อพิจารณาจุดต่อ (node) ที่ 1} \quad \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} = 0 \quad (2.48)$$

$$\text{เนื่องจาก } y_1 = 0 \text{ ดังนั้น} \quad y_0 = -y_2 \quad (2.49)$$

$$\text{เมื่อพิจารณาจุดต่อ (node) ที่ 7} \quad \frac{y_8 - 2y_7 + y_6}{h^2} = 0 \quad (2.50)$$

$$\text{เนื่องจาก } y_7 = 0 \text{ ดังนั้น} \quad y_8 = -y_6 \quad (2.51)$$

จากสมการ 2.45 เมื่อพิจารณาจุดต่อ (node) ที่ 2 จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{EI}{h^4}(y_4) + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right](y_3) + \left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right](y_2) \\ + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right](y_1) + \frac{EI}{h^4}(y_0) = F(x) \end{aligned} \quad (2.52)$$

เนื่องจาก $y_1 = 0$, $y_0 = -y_2$;

$$\frac{EI}{h^4}(y_4) + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right](y_3) + \left[\frac{5EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right](y_2) = F(x) \quad (2.53)$$

เมื่อพิจารณาจุดต่อ (node) ที่ 3 จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{EI}{h^4}(y_5) + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right](y_4) + \left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right](y_3) \\ + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right](y_2) + \frac{EI}{h^4}(y_1) = F(x) \end{aligned} \quad (2.54)$$

เนื่องจาก $y_1 = 0$;

$$\begin{aligned} \frac{EI}{h^4}(y_5) + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right](y_4) + \left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right](y_3) \\ + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right](y_2) = F(x) \end{aligned} \quad (2.55)$$

เมื่อพิจารณาจุดต่อ (node) ที่ 4 จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{EI}{h^4}(y_6) + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right](y_5) + \left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right](y_4) \\ + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right](y_3) + \frac{EI}{h^4}(y_2) = F(x) \end{aligned} \quad (2.56)$$

เมื่อพิจารณาจุดต่อ (node) ที่ 5 จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{EI}{h^4}(y_7) + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right](y_6) + \left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right](y_5) \\ + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right](y_4) + \frac{EI}{h^4}(y_3) = F(x) \end{aligned} \quad (2.57)$$

เนื่องจาก $y_7 = 0$;

$$\begin{aligned} \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right](y_6) + \left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right](y_5) \\ + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right](y_4) + \frac{EI}{h^4}(y_3) = F(x) \end{aligned} \quad (2.58)$$

เมื่อพิจารณาจุดต่อ (node) ที่ 6 จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{EI}{h^4}(y_8) + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right](y_7) + \left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right](y_6) \\ + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right](y_5) + \frac{EI}{h^4}(y_4) = F(x) \end{aligned} \quad (2.59)$$

เนื่องจาก $y_7 = 0$, $y_8 = -y_6$;

$$\left[\frac{5EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right](y_6) + \left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right](y_5) + \frac{EI}{h^4}(y_4) = F(x) \quad (2.60)$$

สุดท้ายทำให้สามารถจัดพจน์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของสมการต่างๆ ข้างต้นให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ได้ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงผลการจัดรูปเพื่อสร้างเมตริกซ์

$\left[\frac{5EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right]$	$\left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right]$	$\frac{EI}{h^4}$	0	0	Node 2
$\left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right]$	$\left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right]$	$\left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right]$	$\frac{EI}{h^4}$	0	Node 3
$\frac{EI}{h^4}$	$\left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right]$	$\left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right]$	$\left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right]$	$\frac{EI}{h^4}$	Node 4
0	$\frac{EI}{h^4}$	$\left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right]$	$\left[\frac{6EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right]$	$\left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} - \frac{w}{2h} \right]$	Node 5
0	0	$\frac{EI}{h^4}$	$\left[-\frac{4EI}{h^4} - \frac{T_e}{h^2} + \frac{w}{2h} \right]$	$\left[\frac{5EI}{h^4} + \frac{2T_e}{h^2} \right]$	Node 6
y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	

