

บทที่ 3 ทฤษฎี

บทนี้มีเนื้อหาเกี่ยวกับกลศาสตร์การแตกหักเชิงเส้น, วิถีคอมเพล็กซ์โพเทนเชียล, ทฤษฎีรีซิปโปรคอล และ วิถีรีซิปโปรคอลเวิร์คคอนทิวรัอินทิกรัล (RWCIM) เพื่อให้ทำการวิเคราะห์ผลการทดลองและทำนายอายุการหลุดร่อนของแผ่นพลาสติกเสริมเส้นใยคาร์บอนในคานเหล็ก

3.1 กลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM)

กลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการแตกหักของวัสดุที่มีรอยร้าว โดยวัสดุบริเวณปลายรอยร้าวเสียรูปแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (ไม่เกิดการครากขึ้น) ดังนั้นโดยหลักการแล้วกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้นจึงเหมาะสมกับการวิเคราะห์การแตกหักเปราะ (brittle fracture) เท่านั้น อย่างไรก็ตามข้อมูลการทดสอบการแตกหักชิ้นส่วนที่มีรอยร้าว แสดงให้เห็นกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้นสามารถทำนายการแตกหักในกรณีที่ปลายรอยร้าวมีบริเวณครากขนาดเล็ก เมื่อเทียบกับความยาวรอยร้าวและมิติระนาบ (planar dimension) ของวัสดุได้ แต่อาจจะต้องปรับแก้ค่าของพารามิเตอร์ปลายรอยร้าวเนื่องจากผลของบริเวณคราก

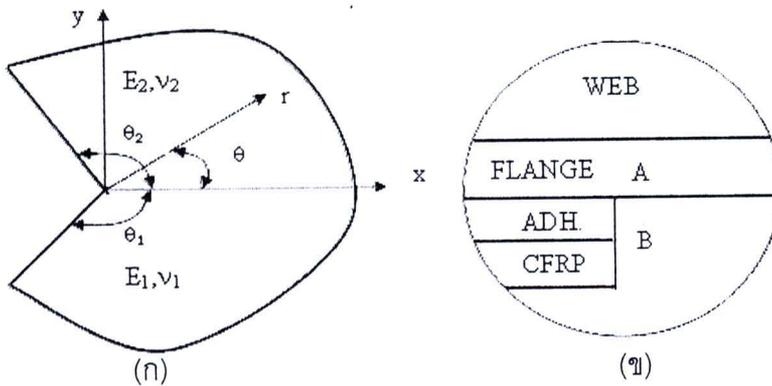
สำหรับการแตกหักเปราะ เมื่อแรงกระทำถึงค่าวิกฤติรอยร้าวจะเติบโตจากขนาดเริ่มต้นอย่างรวดเร็วจนทำให้ชิ้นส่วนเสียหาย เนื่องจากอัตราการเติบโตสูงมาก จึงเรียกว่าเป็นการเติบโตอย่างไร้เสถียรภาพ (unstable growth) สำหรับวัสดุที่มีความเหนียวพอสมควร เช่น เหล็กกล้า ความแข็งแรงสูง หรือสถานะความเค้นที่ปลายรอยร้าวเป็นแบบความเค้นระนาบ (plane stress) นั้น เมื่อแรงกระทำเพิ่มขึ้นถึงค่าวิกฤติ รอยร้าวจะเติบโตจากความยาวเดิมด้วยอัตราเร็วที่ต่ำกว่ากรณีแตกหักเปราะอย่างมาก รอยร้าวจะเติบโตเป็นระยะทางหนึ่งแล้วจะหยุดการเติบโตของรอยร้าวในลักษณะนี้เรียกว่า การเติบโตอย่างมีเสถียรภาพ (stable growth) ขณะที่เพิ่มแรงกระทำขึ้นเรื่อยๆ รอยร้าวก็จะเติบโตไปอย่างมีเสถียรภาพ จนกระทั่งแรงกระทำเพิ่มถึงขีดจำกัดค่าหนึ่งรอยร้าวก็จะเติบโตอย่างไร้เสถียรภาพในที่สุด การวิเคราะห์เสถียรภาพ (stability) ของรอยร้าวในกรณีที่ขนาดบริเวณครากยังไม่ขัดแย้งกับเงื่อนไขของกลศาสตร์การแตกหักเชิงยืดหยุ่นนั้นสามารถใช้พารามิเตอร์ปลายรอยร้าวของกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้นได้ นอกจากนี้ปัญหาการแตกร้าวยาวภายใต้แรงกระทำสถิตแล้วกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้นยังใช้ได้กับปัญหาการเติบโตของรอยร้าวเนื่องจากความล้า (fatigue crack growth) และการเติบโตของรอยร้าวเนื่องจากสภาวะแวดล้อม (จรรยาพร กสิวิทย์อำนวย, 2553)

3.2 การวิเคราะห์ความเค้นในลิ้มของสองวัสดุ

ในงานวิจัยนี้ศึกษาทฤษฎีการวิเคราะห์ค่าความเค้นในลิ้มของสองวัสดุประกอบด้วยวิธีคอมเพล็กซ์โพเทนเชียลและวิธี RWCIM

3.2.1 วิธีคอมเพล็กซ์โพเทนเชียล

บริเวณปลายแผ่นพลาสติกเสริมเส้นใยคาร์บอนอยู่ในลักษณะลิ้มของสองวัสดุ (Bi-Material wedge) แสดงดังรูปที่ 3.1(ก) ในหัวข้อนี้จะใช้วิธีคอมเพล็กซ์โพเทนเชียลวิเคราะห์ปัญหาลิ้มของสองวัสดุภายใต้ความเค้นระนาบและความเค้นระนาบได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.1 พิจารณารูปแบบลิ้มของสองวัสดุในงานวิจัยนี้ (ก) ลิ้มของสองวัสดุ และ (ข) ภาพแสดงความเค้นเอกฐานที่ปลายแผ่นจุด A และจุด B (อัศวินทร์ เล่นวารี, 2002)

Green และ Zirma (1968) ในเทอมของค่าจำนวนเชิงซ้อนผืนผ้า $z = x + iy = re^{i\theta}$ หรือรูปแบบสมการพื้นฐานในระนาบความยืดหยุ่นของวัสดุที่ปากร่องจะมีลักษณะเฉพาะในเทอมของคอมเพล็กซ์โพเทนเชียลสองค่าคือ $\Omega_j(z)$ และ $\psi_j(z)$ แสดงในสมการที่ 3.1

$$U = u_r + iu_\theta = (2\mu_j)^{-1} e^{-i\theta} \left[\kappa \Omega(z) - z \bar{\Omega}(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) \right]$$

$$\tau_r = \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z}) - z \bar{\Omega}''(\bar{z}) - \bar{z} z^{-1} \bar{\psi}'(\bar{z})$$

$$\tau_\theta = \sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} = \Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z}) + z \bar{\Omega}''(\bar{z}) + \bar{z} z^{-1} \bar{\psi}'(\bar{z}) \quad (3.1)$$

โดยที่เส้นบาร์หมายถึงสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน (Complex Conjugate)

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad \text{จำนวนเชิงซ้อนผืนผ้า}$$

$$\kappa_j = 3 - 4\nu_j \quad \text{สำหรับปัญหาในแนวความเค้นระนาบของวัสดุ } j$$

$$\kappa_j = 3 - 4\nu_j / (1 + \nu_j) \quad \text{สำหรับปัญหาในแนวความเค้นระนาบของวัสดุ } j$$

$v_j =$ อัตราส่วนปริมาตรของของวัสดุ j

$\mu_j =$ โมดูลัสความเค้นของวัสดุ j

จากรูปที่ 3.1 แสดงปลายของวัสดุทั้ง 2 ซึ่งทำมุม θ_1 และ θ_2 กับผิวสัมผัสระหว่างวัสดุทั้งสองชนิดและคุณสมบัติของทั้งสองวัสดุเป็น E_1, ν_1 และ E_2, ν_2 ตามลำดับ ดังนั้นความเค้นและการขจัดรอบบริเวณนี้ (รอบมุมฉากของลิ้มของสองวัสดุ) สามารถอธิบายในเทอมของตัวแปรคอมเพล็กซ์โพเทนเชียล, Ω_j และ ψ_j ได้ตามนี้

$$\begin{aligned} U_j &= u_{jr} + iu_{j\theta} = (2\mu_j)^{-1} e^{-i\theta} \left[\kappa_j \Omega_j(z) - z \bar{\Omega}_j(\bar{z}) - \bar{\psi}_j(\bar{z}) \right] \\ \tau_{jr} &= \sigma_{jrr} + i\sigma_{jr\theta} = \Omega_j'(z) + \bar{\Omega}_j'(\bar{z}) - \bar{z} \bar{\Omega}_j''(\bar{z}) - \bar{z} z^{-1} \bar{\psi}_j'(\bar{z}) \\ \tau_{j\theta} &= \sigma_{j\theta\theta} - i\sigma_{jr\theta} = \Omega_j'(z) + \bar{\Omega}_j'(\bar{z}) + \bar{z} \bar{\Omega}_j''(\bar{z}) + \bar{z} z^{-1} \bar{\psi}_j'(\bar{z}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

โดยที่ตัวอักษร j จะอ้างอิงวัสดุ 1 และ 2

Carpenter และ Byers (1987) ตั้งสมมุติฐานว่าคอมเพล็กซ์โพเทนเชียลอยู่ในรูปของ

$$\Omega_j(z) = A_j z^\lambda + a_j z^\lambda \quad \text{และ} \quad \psi_j(z) = B_j z^\lambda + b_j z^\lambda \quad (3.3)$$

โดยที่ A_j, B_j, a_j, b_j และ λ อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน

สภาวะเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาลิ้มของสองวัสดุ (ตามรูปที่ 3.1) คือความต่อเนื่องรอบผิวสัมผัสของลิ้มของสองวัสดุและ Traction อิสระรอบผิวของทั้งสองวัสดุ

1) ความต่อเนื่องของการขจัด ณ จุดที่ $\theta = 0^\circ$ จะได้ว่า

$$U_1(\theta = 0^\circ) = U_2(\theta = 0^\circ) \quad (3.4ก)$$

2) ความต่อเนื่องของความเค้น ณ จุดที่ $\theta = 0^\circ$ จะได้ว่า

$$\tau_{1\theta}(\theta = 0^\circ) = \tau_{2\theta}(\theta = 0^\circ) \quad (3.4ข)$$

3) สำหรับวัสดุที่ 1 เงื่อนไขความเค้นอิสระที่มุม $\theta = -\theta_1$ จะได้ว่า

$$\tau_{1\theta}(\theta = -\theta_1) = 0 \quad (3.4ค)$$

4) สำหรับวัสดุที่ 2 เงื่อนไขความเค้นอิสระที่มุม $\theta = \theta_2$

$$\tau_{2\theta}(\theta = \theta_2) = 0 \quad (3.4ง)$$

แทนสมการที่ 3.3 และสภาวะเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ 3.4ก-ง ลงในสมการที่ 3.2 จะได้ว่า

$$\{D\} [A_1 \ A_2 \ a_1 \ a_2 \ B_1 \ B_2 \ b_1 \ b_2]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.5)$$

ค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue, λ_k) ของสมการที่ 3.5 มีความสัมพันธ์เป็นค่าลำดับเอกฐาน (orders of singularities, $\alpha_k = 1 - \lambda_k$) ของสมการสนามความเค้นสามารถวิเคราะห์ที่ได้จากวิธีมูลเลอร์ (Muller's Method) ซึ่งจะแสดงในภาคผนวก ข. ผลของค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าจะให้เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvector) ซึ่งอยู่ในรูปของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้โดย

ขึ้นกับชนิดของค่าลักษณะเฉพาะนั้นๆ และค่าลักษณะเฉพาะในเทอมเด่นหรือ $\lambda_k = \lambda_j$, ($k=1$) จะให้ค่าของจำนวนจริงในรูปจำนวนเชิงซ้อนผืนผ้าเป็นค่าที่น้อยที่สุดในระหว่าง $0 < \text{Re}(\lambda_k) < 1$ สำหรับเป็นจำนวนจริงบวก และเป็นค่าที่มากที่สุดในช่วง $-1 < \text{Re}(\lambda_k) < 0$ สำหรับจำนวนจริงลบ

Carpenter และ Byers (1987) พิจารณาค่าของคอมเพล็กซ์โพเทนเชียลในสมการที่ 3.3 ให้อยู่ในรูปของจำนวนจริงจะได้

$$\Omega_j(z) = A_j z^\lambda \quad \text{และ} \quad \psi_j(z) = B_j z^\lambda \quad (3.6)$$

โดยที่ค่า A_j และ B_j ถูกสมมุติเป็นจำนวนเชิงซ้อน แทนสมการที่ 3.6 ลงในสมการที่ 3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2\mu_j U_j &= r^\lambda (\kappa_j A_j e^{i\theta(\lambda-1)} - \bar{A}_j \lambda e^{i\theta(-\lambda+1)} - \bar{B}_j \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)}) \\ 2\tau_{jr} &= r^{\lambda-1} (A_j \lambda e^{i\theta(\lambda-1)} - \bar{A}_j (\lambda^2 - 2\lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} - \bar{B}_j \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)}) \\ 2\tau_{j\theta} &= r^{\lambda-1} (A_j \lambda e^{i\theta(\lambda-1)} + \bar{A}_j \lambda^2 e^{i\theta(-\lambda+1)} + \bar{B}_j \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

โดยที่ $\lambda = \lambda_k$ และค่า $k = 1, 2, 3, \dots$ ตามลำดับ

จากสมการที่ 3.7 และสภาวะเงื่อนไขขอบเขตข้างต้นจะได้

$$1) \text{ ความต่อเนื่องของการจัด ณ จุดที่ } \theta = 0^\circ, U_1(\theta = 0^\circ) = U_2(\theta = 0^\circ)$$

$$\mu_1 \left(A_1 \kappa_1 - \bar{A}_1 \lambda - \bar{B}_1 \right) = \mu_2 \left(A_2 \kappa_2 - \bar{A}_2 \lambda - \bar{B}_2 \right) \quad (3.8)$$

$$2) \text{ ความเค้น ณ จุดที่ } \theta = 0^\circ : \tau_{1\theta}(\theta = 0^\circ) = \tau_{2\theta}(\theta = 0^\circ)$$

$$A_1 + \bar{A}_1 \lambda + \bar{B}_1 = A_2 + \bar{A}_2 \lambda + \bar{B}_2 \quad (3.9)$$

$$3) \text{ สำหรับวัสดุที่ 1 เงื่อนไขความเค้นอิสระที่มุม } \theta = -\theta_1 \text{ และ } \tau_{1\theta}(\theta = -\theta_1) = 0$$

$$\bar{B}_1 = -A_1 e^{-2i\lambda\alpha_1} - \bar{A}_1 \lambda e^{-2i\alpha_1} \quad (3.10)$$

$$4) \text{ สำหรับวัสดุที่ 2 เงื่อนไขความเค้นอิสระที่มุม } \theta = -\theta_2 \text{ และ } \tau_{2\theta}(\theta = -\theta_2) = 0$$

$$\bar{B}_2 = -A_2 e^{-2i\lambda\alpha_2} - \bar{A}_2 \lambda e^{2i\alpha_2} \quad (3.11)$$

แทนสมการที่ (3.10) และ (3.11) ลงในสมการที่ (3.8) และ (3.9) จะได้

$$A_1 d_1 + \bar{A}_1 d_2 + A_2 d_3 + \bar{A}_2 d_4 = 0 \quad (3.12)$$

$$A_1 d_5 + \bar{A}_1 d_6 + A_2 d_7 + \bar{A}_2 d_8 = 0 \quad (3.13)$$

โดยที่

$$d_1 = \kappa_1 + e^{-2i\lambda\alpha_1}$$

$$d_2 = -\lambda + \lambda e^{-2i\alpha_1}$$

$$d_3 = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \kappa_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} e^{2i\lambda\alpha_2}$$

$$d_4 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \lambda - \frac{\mu_1}{\mu_2} \lambda e^{2i\alpha_2}$$

$$d_5 = 1 - e^{-2i\lambda\alpha_1}$$

$$d_6 = \lambda(1 - e^{-2i\alpha_1})$$

$$d_7 = -1 + e^{2i\lambda\alpha_2}$$

$$d_8 = -\lambda(1 - e^{2i\alpha_2})$$

แก้สมการที่ 3.12 และ 3.13 จะได้

$$A_2 = \frac{d_4 d_5 - d_1 d_8}{d_3 d_8 - d_7 d_4} A_1 + \frac{d_6 d_4 - d_2 d_8}{d_3 d_8 - d_7 d_4} \bar{A}_1 = f_1 A_1 + f_2 \bar{A}_1 \quad (3.14)$$

หรือ
$$\bar{A}_2 = \bar{f}_2 A_1 + \bar{f}_1 \bar{A}_1 \quad (3.15)$$

ดังนั้น

$$\bar{A}_2 = \frac{d_5 d_3 - d_1 d_7}{d_4 d_7 - d_8 d_3} A_1 + \frac{d_6 d_3 - d_2 d_7}{d_4 d_7 - d_8 d_3} \bar{A}_1 = f_3 A_1 + f_4 \bar{A}_1 \quad (3.16)$$

จากสมการที่ 3.15 เท่ากับสมการที่ 3.16 จะได้

$$(\bar{f}_2 - \bar{f}_3) A_1 + (\bar{f}_1 - \bar{f}_4) \bar{A}_1 = g_1 A_1 + g_2 \bar{A}_1 = 0 \quad (3.17)$$

จัดรูปของสมการที่ (3.17) ให้อยู่ในระบบเมทริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} Rg_1 + Rg_2 & Ig_2 - Ig_1 \\ Ig_1 + Ig_2 & Rg_1 - Rg_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} RA_1 \\ IA_1 \end{Bmatrix} = [D^*] \begin{Bmatrix} RA_1 \\ IA_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^* & d_{11}^* \\ d_{11}^* & d_{11}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} RA_1 \\ IA_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

ให้
$$\begin{Bmatrix} RA_1 \\ IA_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{Bmatrix} c_k = [P] c_k \quad (3.19)$$

กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆในสมการที่ 3.19 (c_k , p_{11} และ p_{12}) แสดงในตารางที่ 3.1 ตารางที่ 3.1 ค่าสัมประสิทธิ์ในแต่ละเทอมของสมการที่ (3.19)

Largest $ d_y $ location		c_k	p_{11}	p_{12}
i	j			
1	1	IA_1	$-d_{12}/d_{11}$	1
1	2	RA_1	1	$-d_{11}/d_{12}$
2	1	IA_1	$-d_{22}/d_{21}$	1
2	2	RA_1	1	$-d_{21}/d_{22}$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} RA_1 \\ IA_1 \end{Bmatrix} = [F][P]c_k \quad (3.20)$$

จากสมการที่ (3.10) และ (3.20)

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{B}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -e^{-2i\lambda\alpha_1} & -\lambda e^{-2i\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{Bmatrix} = [R_1] \begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{Bmatrix} = [R_1][F][P]c_k = [E_1^*]c_k \quad (3.21)$$

จากสมการที่ (3.14) และ (3.16)

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{Bmatrix} = [S][F][P]c_k \quad (3.22)$$

จากสมการที่ (3.11) และ (3.20)

$$\begin{Bmatrix} A_2 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{B}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -e^{2i\lambda\alpha_2} & -\lambda e^{2i\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ \bar{A}_2 \end{Bmatrix} = [R_2] \begin{Bmatrix} A_2 \\ \bar{A}_2 \end{Bmatrix} = [R_2][F][P]c_k = [E_2^*]c_k \quad (3.23)$$

จากสมการ (3.7), (3.21) และ (3.23) จะได้สมการสนามความเค้นดังนี้

$$\begin{Bmatrix} 2\mu_j U_j \\ \tau_{jr} \\ \tau_{j\theta} \end{Bmatrix} = [G_j^*] \begin{Bmatrix} A_j \\ \bar{A}_j \\ \bar{B}_j \end{Bmatrix} = [G_j^*][E_j^*]c_k = [J_j^*]c_k \quad (3.24)$$

โดยที่

$$[G_j] = \begin{bmatrix} r^\lambda \kappa_j e^{i\theta(\lambda-1)} & -r^\lambda \bar{A}_j e^{i\theta(-\lambda+1)} & -r^{\lambda-1} e^{i\theta(-\lambda-1)} \\ r^{\lambda-1} \lambda e^{i\theta(\lambda-1)} & -r^{\lambda-1} (\lambda^2 - 2\lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} & -r^{\lambda-1} \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)} \\ r^{\lambda-1} \lambda e^{i\theta(\lambda-1)} & r^{\lambda-1} \lambda^2 e^{i\theta(-\lambda+1)} & r^{\lambda-1} \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)} \end{bmatrix}$$

สุดท้าย

$$\begin{bmatrix} \mu_{jr} \\ \mu_{j\theta} \\ \sigma_{jrr} \\ \sigma_{jr\theta} \\ \sigma_{j\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RJ_j^*(1,1) / \mu_j \\ IJ_j^*(1,1) / \mu_j \\ RJ_j^*(2,1) \\ IJ_j^*(2,1) \\ RJ_j^*(3,1) \end{bmatrix} c_k = \{V_j(\lambda_k)\} c_k \quad (3.25)$$

จากสมการที่ 3.25 แต่ละค่าลักษณะเฉพาะในรูปของจำนวนจริงจะสามารถให้เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ ($V_j(\lambda_k)$) หรือสมการสนามความเค้น โดยติดค่าสัมประสิทธิ์ c_k เป็นจำนวนจริง (ค่านี้สามารถคำนวณได้จากวิธี RWCIM โดยแสดงในหัวข้อที่ 3.2.3) และจากสมการที่ 3.25 สามารถคำนวณค่าความเข้มของความเค้นได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\sigma_{ij} = \frac{Q_{ij}}{r^{1-\lambda_k}} = \frac{Q_{ij}}{r^{\alpha_1}} \quad (3.26)$$

โดยที่ Q_{ij} เป็นค่าความเข้มของความเค้นและ λ_k เป็นค่าลักษณะเฉพาะในรูปของจำนวนจริงในเทอมเด่นซึ่งทำให้ค่าลำดับเอกฐานเป็นเทอมเด่น และตัวห้อย ij แสดงในระบบพิกัดเชิงขั้วซึ่งแสดงได้ตามสมการที่ 3.26ก.

$$\sigma_{rr} = \frac{Q_{rr}}{r^{1-\lambda_k}}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{Q_{r\theta}}{r^{1-\lambda_k}} \quad \text{และ} \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{Q_{\theta\theta}}{r^{1-\lambda_k}} \quad (3.26ก)$$

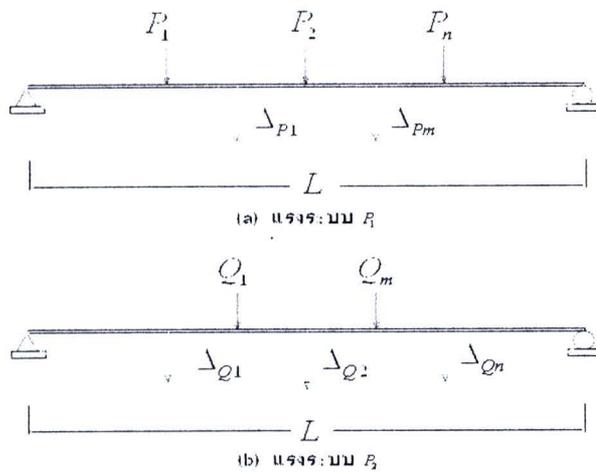
จากสมการที่ 3.25 และ 3.26 สามารถเขียนสมการในรูปความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ c_k กับค่าความเข้มของความเค้นได้ดังต่อไปนี้

$$\{V_j(\lambda_k)\} c_k = \frac{Q_{ij}}{r^{1-\lambda_k}} = \frac{Q_{ij}}{r^{\alpha_1}} \quad (3.27)$$

หมายเหตุ สมการทั้งหมดนี้แสดงอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วและค่าความเข้มของความเค้นที่คำนวณได้จะอยู่ในโหมดรวมระหว่างโหมดเปิดและโหมดเฉือน

3.2.2 ทฤษฎีรีซิปโปรคอล

จากรูปที่ 3.2 พิจารณาโครงสร้างที่มีความยืดหยุ่นเชิงเส้นแรงกระทำทั้งสองระบบแสดงในรูปของเมทริกซ์ P_I และ P_{II} ตามลำดับ การขจัดอันเนื่องมาจากแรงกระทำทั้งสองแสดงในรูปของ U_I และ U_{II} ตามลำดับ ถ้าระบบแรงกระทำ P_I ถูกนำมาใช้ก่อนและตามด้วยระบบแรงกระทำ P_{II} งานเนื่องจากแรงกระทำภายนอกสามารถเขียนสมการได้ดังนี้



รูปที่ 3.2 พิจารณาโครงสร้างที่มีความแรงกระทำทั้งสองระบบแสดงในรูป P_i และ P_{ii} ตามลำดับ

$$W_{i,ii} = \frac{1}{2} P_i^T U_i + \frac{1}{2} P_{ii}^T U_{ii} + P_i^T U_{ii} \quad (3.28)$$

โดยที่สัญลักษณ์ i, ii แสดงถึงลำดับของระบบของแรงกระทำ ในทำนองเดียวกันถ้าระบบแรงกระทำ P_{ii} ถูกนำมาใช้ก่อน จะเขียนสมการได้ดังนี้

$$W_{ii,i} = \frac{1}{2} P_{ii}^T U_{ii} + \frac{1}{2} P_i^T U_i + P_{ii}^T U_i \quad (3.29)$$

เนื่องจากพลังงานศักย์ (Potential Energy, U) ที่ได้มาทั้งสองกรณีนี้จะต้องมีค่าเท่ากัน โดยไม่ขึ้นกับลำดับของแรงที่กระทำ

ดังนั้น
$$U = W_{i,ii} = W_{ii,i} \quad (3.30)$$

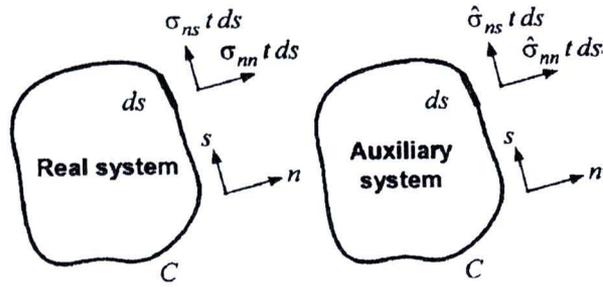
สุดท้าย
$$P_i^T U_{ii} = P_{ii}^T U_i \quad (3.31)$$

จากสมการที่ 3.31 จะสอดคล้องกับทฤษฎีบทปฏิสัมพันธ์ของ Betti นั่นคืองานที่เกิดจากแรงกระทำระบบ P_i ของการขจัด U_{ii} มีค่าเท่ากับงานที่เกิดจากแรงกระทำระบบ P_{ii} ของการขจัด U_i โดยที่ U_i และ U_{ii} เป็นการขจัดของวัสดุเนื่องจากแรงระบบ P_i และ P_{ii} ตามลำดับ

3.2.3 วิธีวิธีหิพโปรคอลเวิร์คคอนทัวร์อินทิกรัล (RWCIM)

วิธีวิธีหิพโปรคอลเวิร์คคอนทัวร์อินทิกรัล (RWCIM) ได้พัฒนาโดย Stern และคณะ (1976) โดยพิจารณาค่าความเข้มของความเค้นในรอยแตกร้าว (Stress intensity factors, K) รูปร่างของมุมวัสดุที่เปิดอ้าและรอยแตกร้าวตามผิวรอยต่อของวัสดุ

ต่อมา Carpenter และ Byer (1987) ได้ประยุกต์ใช้วิธีการนี้ในปัญหาของสองวัสดุที่บากร่องรูปตัววี

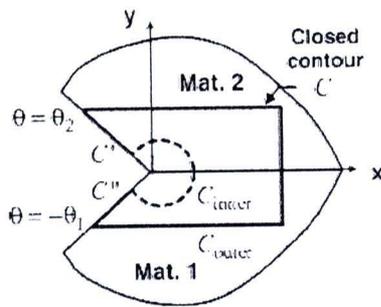


รูปที่ 3.3 ระบบจริงและระบบเสมือน (อัศววัชร เล่นวารีย์, 2002)

จากรูปที่ 3.3 แสดงความยืดหยุ่นเชิงเส้นของวัสดุแบบ 2 มิติ โดยมีความหนาเท่ากับ t ซึ่งมีแรงกระทำของทั้งสองระบบตามวิถี C (ทิศทางของแรงกระทำจะอยู่ในพิสัยตั้งฉากกับวิถี C หรือพิสัย $n-s$) และจากทฤษฎีรีขิพโปรคอลลจะได้

$$\int_C (\hat{\sigma}_{nn} u_n + \hat{\sigma}_{ns} u_s - \sigma_{nn} \hat{u}_n - \sigma_{ns} \hat{u}_s) ds = 0 \quad (3.32)$$

โดยที่ u_n และ \hat{u}_n เป็นการขจัดในแกน n , u_s และ \hat{u}_s เป็นการขจัดในแกน s และการอินทิเกรทวิถี C ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจะต้องสอดคล้องกับระบบพิสัย $n-s$



รูปที่ 3.4 ลิ้มของสองวัสดุทั่วไปและเส้นคอนทัวร์ (อัศววัชร เล่นวารีย์, 2002)

แทนค่ามุมลงในวิธี RWCIM ของปัญหาความยืดหยุ่นของลิ้มของสองวัสดุ วิถี C ที่แสดงในรูปที่ 3.4 จะเขียนอยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$C = C_{OUTER} + C' + C'' + C_{INNER} \quad (3.33)$$

วิถี C' และ C'' เป็นความเค้นอิสระ (traction free surface) จากสมการที่ (3.32) จะได้

$$\int_{C_{OUTER}} (\hat{\sigma}_{nn} u_n + \hat{\sigma}_{ns} u_s - \sigma_{nn} \hat{u}_n - \sigma_{ns} \hat{u}_s) ds + \int_{C_{INNER}} (\hat{\sigma}_{nn} u_n + \hat{\sigma}_{ns} u_s - \sigma_{nn} \hat{u}_n - \sigma_{ns} \hat{u}_s) ds = 0 \quad (3.34)$$

จาก Stern และคณะ (1976), Carpenter และ Byer (1987) ความเค้นและการขจัดตามวิถี C_{INNER} และ C_{OUTER} สำหรับในระบบเสมือนสามารถใช้ค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = -\lambda_1$ โดยที่ $-\lambda_1$ อยู่ในรูปของจำนวนจริง สำหรับในระบบจริงค่าความเค้นและการขจัดจากการวิเคราะห์จาก

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะใช้ตามวิธี C_{OUTER} และค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = \lambda_1$ จะใช้ตามวิธี C_{INNER} ดังนั้นการอินทิเกรตวิธี C_{INNER} เป็น

$$\int_{C_{INNER}} (\hat{\sigma}_{nn} \hat{\mu}_n + \hat{\sigma}_{ss} \hat{\mu}_s - \hat{\sigma}_{nn} \hat{\mu}_n - \hat{\sigma}_{ss} \hat{\mu}_s) ds = - \int_{\theta=-\theta_1}^{\theta=\theta_2} \left(\{V_j(+\lambda_1)\}^T [I_2] \{V_j(-\lambda_1)\} \right) c_1 c_{-1} r_{inner} d\theta \quad (3.35)$$

โดยที่ c_1 และ c_{-1} เป็นตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่าซึ่งมีความสอดคล้องกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $V_j(+\lambda_1)$ และ $V_j(-\lambda_1)$

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

และ

$$j = \begin{cases} 1, & \text{if } \theta \leq 0 \\ 2, & \text{if } \theta > 0 \end{cases}$$

Gibson (1994) พิจารณาผลอินทิเกรตวิธี C_{outer} โดยใช้แปลงผลการวิเคราะห์ความเค้นและการขจัดทางระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในระบบพิกัด $x-y$ และผลการวิเคราะห์ความเค้นและการขจัดจากวิธีคอมเพล็กซ์โพเทนเชียลหรือค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $V_j(+\lambda_1)$ ในระบบพิกัด $r-\theta$ เป็นระบบพิกัด $n-s$ ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_s \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{ss} \end{bmatrix} = a[Y] = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2(\gamma) & 2\cos(\gamma)\sin(\gamma) & \sin^2(\gamma) \\ 0 & 0 & -\sin(\gamma)\cos(\gamma) & (\cos^2(\gamma) - \sin^2(\gamma)) & \sin(\gamma)\cos(\gamma) \end{bmatrix} [Y] \quad (3.37)$$

จากสมการที่ 3.37 เมทริกซ์ a คือเมทริกซ์แปลงระบบพิกัด $x-y$ และระบบพิกัด $r-\theta$ ให้อยู่ในระบบพิกัด $n-s$ ซึ่งมุม γ ในการแปลงระบบพิกัดนั้นจะแสดงอยู่ในภาคผนวก ก. และ $[Y]$ คือเมทริกซ์ความเค้นและการขจัด (สนามความเค้น) โดยวิเคราะห์ผลมาจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ($[Y]_{FEM}$) และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $V_j(+\lambda_1)$ สำหรับผลการวิเคราะห์ทางระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถจัดอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$[Y]_{FEM} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

อินทิกรัล C_{OUTER} เขียนในรูปสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\int_{C_{OUTER}} (\hat{\sigma}_m u_n + \hat{\sigma}_s u_s - \hat{\sigma}_m \hat{u}_n - \hat{\sigma}_s \hat{u}_s) ds = \int_{C_{OUTER}} ([Y_{FEM}^{ns}]^T [I_1] [Y_{eig}^{ns}]) c_{-1} ds \quad (3.39)$$

โดยที่ $[Y_{FEM}^{ns}]$ และ $[Y_{eig}^{ns}]$ คือผลของสนามความเค้นในระบบพิกัด $n-s$ โดยมาจาก $[Y_{FEM}]$ และ $V_j(+\lambda_j)$ ตามลำดับ

จากสมการที่ (3.34), (3.35), และ (3.39) จะได้

$$GI.c_{-1} - QI.c_1.c_{-1} = 0 \quad (3.40)$$

โดยที่ $c_1 = GI / QI \quad (3.41)$

$$QI = - \int_{\theta=-\theta_1}^{\theta=\theta_2} (\{V_j(+\lambda_j)\}^T [I_2] \{V_j(-\lambda_j)\}) r_{inner} d\theta \quad (3.42)$$

$$GI = \int_{C_{OUTER}} ([Y_{FEM}^{ns}] [I_1] [Y_{eig}^{ns}]) ds \quad (3.43)$$

3.3 คำจำกัดความและความสัมพันธ์พื้นฐานสำหรับการทดลองภายใต้แรงกระทำซ้ำซาก

ในหัวข้อนี้จะอธิบายความหมายของตัวแปรที่เกี่ยวกับการทดลองภายใต้แรงกระทำเป็นรอบแอมพลิจูดคงที่ (เฉพาะส่วนที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้) ซึ่งจำเป็นต้องทราบดังนี้

1. แรงกระทำซ้ำซากแอมพลิจูดคงที่หรือแรงกระทำเป็นรอบแอมพลิจูดคงที่ (constant amplitude fatigue load) คือ แรงกระทำซ้ำซากที่มีขนาดของแรงกระทำสูงสุด P_{max} และแรงกระทำต่ำสุด P_{min} คงที่ แต่ความถี่และรูปคลื่นสามารถเปลี่ยนแปลงได้ แสดงดังรูปที่ 3.5

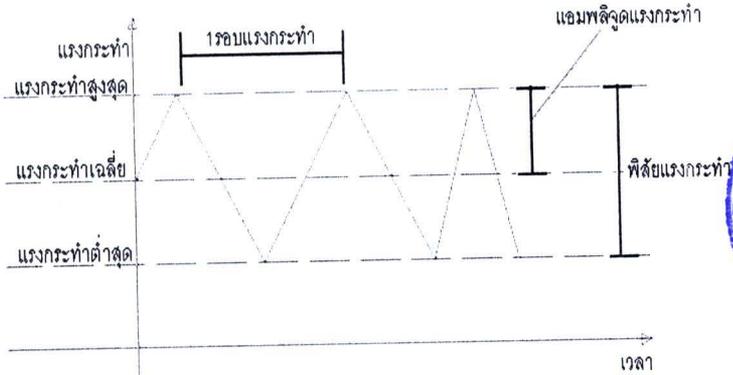
2. วัฏจักรของแรงกระทำ (load cyclic) หรือคาบ (period) หรือความถี่ของแรงกระทำกรณีแรงกระทำซ้ำซากแอมพลิจูดคงที่คือ ระยะเวลาที่ขนาดของแรงกระทำมีการเปลี่ยนแปลงจากค่าๆ หนึ่งจนกลับมาค่าเดิมอีกครั้ง

3. ช่วงของแรงกระทำ (load range, ΔP) คือ ผลต่างระหว่างจุดยอดและจุดห้วงซึ่งแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิดคือ 1. พิสัยบวก (positive range) คือ ช่วงที่แรงกระทำมีขนาดเพิ่มขึ้นตามเวลา และ 2. พิสัยลบ (negative range) คือ ช่วงที่แรงกระทำมีขนาดลดลงตามเวลา

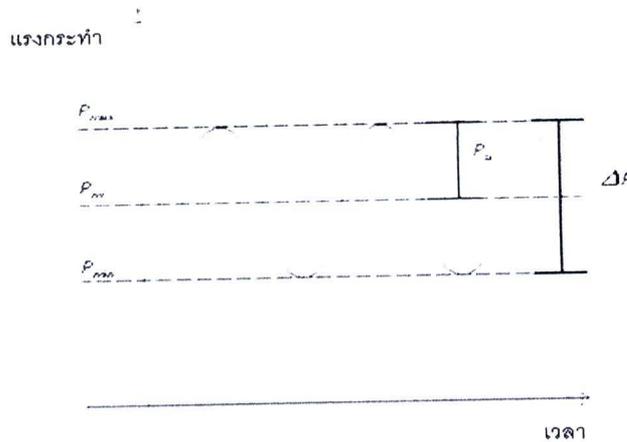
4. แอมพลิจูดแรงกระทำ (load amplitude, P_u) คือ ครึ่งหนึ่งของพิสัยแรงกระทำ

5. แรงกระทำเฉลี่ย (mean load, P_m) คือ ค่าเฉลี่ยของแรงกระทำสูงสุดและแรงกระทำต่ำสุดสำหรับแรงกระทำซ้ำซากแอมพลิจูดคงที่หรือค่าเฉลี่ยแรงกระทำที่จุดยอดและจุดห้วงสำหรับแรงกระทำซ้ำซากแอมพลิจูดคงที่

6. อัตราส่วนแรงกระทำ (load ration, R) คือ อัตราส่วนของแรงกระทำต่ำสุดและแรงกระทำสูงสุด



รูปที่ 3.5 แรงกระทำเป็นรอบแอมพลิจูดคงที่ (จिरพงค์ กสิวิทย์อำนาจ, 2553)



รูปที่ 3.6 สัญลักษณ์ของตัวแปรที่ใช้กำหนดลักษณะแรงกระทำเป็นรอบแอมพลิจูดคงที่ (จिरพงค์ กสิวิทย์อำนาจ, 2553)

สำหรับแรงกระทำเป็นรอบแอมพลิจูดคงที่แสดงดังรูปที่ 3.6 ความสัมพันธ์ที่ได้จากนิยามข้างต้นมีดังนี้

$$\Delta P = P_{\max} - P_{\min} \quad (3.44ก)$$

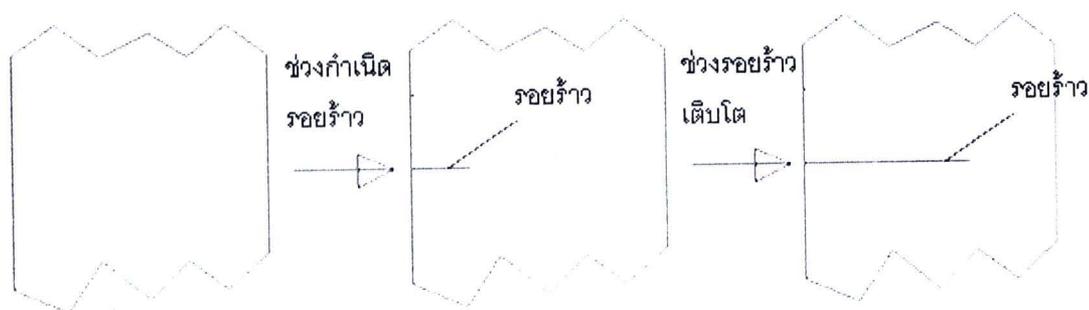
$$P_m = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} \quad (3.44ข)$$

$$P_a = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} \quad (3.44ค)$$

$$R = \frac{P_{\min}}{P_{\max}} \quad (3.44ด)$$

3.3.1 ความเสียหายล้าและแนวทางของกลศาสตร์การแตกหัก

แรงกระทำซ้ำๆ (แรงกระทำเป็นรอบแอมพลิจูด) จะทำให้วัสดุเกิดความเสียหายสะสมไปเรื่อยๆ ในแต่ละรอบแรงกระทำ ความเสียหายนี้เรียกว่า "ความเสียหายล้า (fatigue damage)" จำนวนรอบแรงกระทำนับจากตอนเริ่มต้นซึ่งวัสดุไม่มีความเสียหายสะสมอยู่เลยจนถึงขณะที่ถือว่าวัสดุแตกหักอย่างสมบูรณ์เรียกว่า "อายุความล้า (fatigue life)" โดยทั่วไปแล้วกระบวนการสะสมความเสียหายล้าของวัสดุแบ่งได้ 3 ช่วงแสดงดังรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 กระบวนการเกิดความเสียหายล้า (จิรพงศ์ กสิวิทย์อำนวย, 2553)

1. ช่วงกำเนิดรอยร้าว (crack initiation period) เริ่มนับจากตอนที่วัสดุไม่มีรอยร้าวจนถึงตอนที่วัสดุมีรอยร้าวขนาดที่ตรวจพบได้ปรากฏขึ้น ขนาดรอยร้าวนี้เรียกว่า "ขนาดรอยร้าวกำเนิด (crack initiation size)" และจำนวนรอบแรงกระทำในช่วงนี้เรียกว่า "อายุการกำเนิดรอยร้าว (crack initiation life)"
 2. ช่วงที่รอยร้าวเติบโต (crack propagation period) เริ่มนับจากรอยร้าวเติบโตจากขนาดรอยร้าวกำเนิด จนถึงขนาดรอยร้าววิกฤติและเรียกจำนวนรอบในช่วงนี้ว่า "อายุการเติบโตของรอยร้าว (crack propagation life)"
 3. ช่วงแตกหัก (fracture period) เริ่มนับจากรอยร้าวเติบโตอย่างไร้เสถียรภาพจนกระทั่งวัสดุเกิดการแตกหักโดยสมบูรณ์
- ดังนั้นอายุความล้าของวัสดุ (N) จะมีค่าเท่ากับผลรวมของอายุการกำเนิดรอยร้าวกับอายุการเติบโตของรอยร้าว