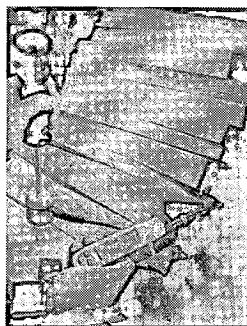


บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความสำคัญของการวัดค่าความชื้นไม้

ค่าความชื้นเป็นตัวบอกถึงปริมาณน้ำในเนื้อวัสดุซึ่งเป็นตัวแปรที่สำคัญที่ต้องการวัดเพื่อนำไปใช้ประโยชน์เพราะความชื้นมีผลต่อคุณสมบัติของวัสดุทั้งการยืดหดตัว ความคงทนต่อสภาพแวดล้อม ในอุตสาหกรรมอาหารความชื้นเป็นตัวแปรสำคัญที่บอกถึงคุณภาพของผลิตภัณฑ์ ระยะเวลาในการเก็บรักษา ทางการเกษตรความชื้นมีส่วนสำคัญต่อการเก็บรักษาผลผลิต การต้านทานเชื้อราในเมล็ดพืช อัตราการงอกของเมล็ดพืชรวมถึงความชื้นในดินก็มีส่วนต่อการเจริญเติบโตของพืชด้วย ทางอุตุนิยมวิทยาการวัดความชื้นของบรรยากาศมีความจำเป็นสำหรับการพยากรณ์สภาพภูมิอากาศ และเป็นตัวแปรในการกำหนดสภาพอากาศในแต่ละพื้นที่ ในอุตสาหกรรมป่าไม้ความชื้นเป็นตัวกำหนดคุณสมบัติของไม้ การหดตัวและพองตัวของไม้ ความต้านทานต่อแมลง ความคงทนต่อสภาพแวดล้อม ซึ่งจำเป็นจะต้องทราบความชื้นของไม้ก่อนที่จะนำไปใช้ประโยชน์ ในห้องปฏิบัติการความชื้นเป็นตัวแปรหนึ่งที่จะต้องทำการวัดเพราะค่าความชื้นจะมีผลต่อการศึกษาคุณสมบัติและใช้ประกอบกับข้อมูลอื่นๆเพื่อที่จะศึกษาคุณสมบัติ พฤติกรรม การเปลี่ยนแปลง โดยเฉพาะในทางเคมีและชีววิทยา ด้านล่างแสดงเครื่องวัดความชื้นที่ใช้วัดความชื้นในเนื้อไม้



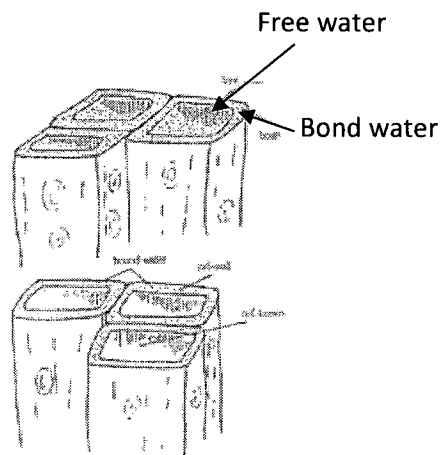
ภาพที่ 2.1 ตัวอย่างเครื่องวัดความชื้นในไม้

2.1.2 คุณสมบัติของไม้ (Wood properties)

การที่จะนำไม้ไปใช้ประโยชน์จะต้องทราบคุณสมบัติของไม้เพื่อจะเลือกใช้ไม้ให้ถูกต้องและมีประสิทธิภาพ เหมาะสมกับงานแต่ละประเภทซึ่งคุณสมบัติของไม้ประกอบด้วย

- ความหนาแน่น (Density) หมายถึงมวลของไม้ต่อปริมาตร ค่าโดยปกติค่าความหนาแน่นของไม้จะวัดที่ความชื้นเท่ากับ 12 เปอร์เซ็นต์

- ค่าความถ่วงจำเพาะ (Specific gravity) หมายถึง น้ำหนักอบแห้งของเนื้อไม้หารด้วยน้ำหนักของน้ำที่มีปริมาตรเท่ากับปริมาตรของไม้เมื่ออบแห้งแล้วหรือเมื่อไม้สด มีหลายปัจจัยที่ทำให้ไม้มีความหนาแน่นและความถ่วงจำเพาะไม่เท่ากัน ได้แก่ สภาพภูมิอากาศที่ไม้เจริญเติบโต สภาพภูมิประเทศ ชนิดของไม้ ความชื้น อุณหภูมิ กระ皮และแก่น อัตราการเจริญเติบโต สารแทรก เป็นต้น ความชื้น (Moisture content) ความชื้นในเนื้อไม้ถือว่าเป็นปัจจัยสำคัญในการนำไม้ไปใช้ประโยชน์ความชื้นในเนื้อไม้แบ่งได้เป็น 2 ส่วนคือน้ำที่อยู่ในผนังเซลล์ (Bound water) และน้ำที่อยู่ในช่องว่างภายในเซลล์ (Free water) การแห้งตัวของไม้จะเริ่มจากน้ำในช่องว่างภายในเซลล์จะลดลงก่อนปริมาณความชื้นในไม้ขณะที่ผนังเซลล์ยังมีน้ำอึดตัวอยู่แต่น้ำที่ช่องว่างภายในเซลล์แห้งหมดแล้วเรียกว่าจุดหมาด (Fiber saturation point ,FSP) ซึ่งเป็นจุดที่สำคัญเพราะมีน้ำในช่องว่างภายในเซลล์เท่านั้นที่มีผลต่อน้ำหนักของไม้แต่น้ำในผนังเซลล์จะมีผลต่อการหดตัวและพองตัวของไม้จุดหมาดของไม้จะมีค่าความชื้นอยู่ระหว่าง 20-30 เปอร์เซ็นต์ ด้านล่างแสดงน้ำภายในเซลล์และน้ำที่ผนังเซลล์



ภาพที่ 2.2 น้ำภายในเซลล์และน้ำที่ผนังเซลล์

2.1.3 การพิจารณาค่าความชื้นในไม้

ค่าความชื้นในไม้จะพิจารณาจากปริมาณน้ำในเนื้อไม้ขณะเปียกเปรียบเทียบกับปริมาณน้ำในเนื้อไม้ขณะที่แห้งแล้วโดยทั่วไปนิยมวัดน้ำหนักโดยค่าที่วัดได้จะเป็นร้อยละเปรียบเทียบกับน้ำหนักแห้งของ

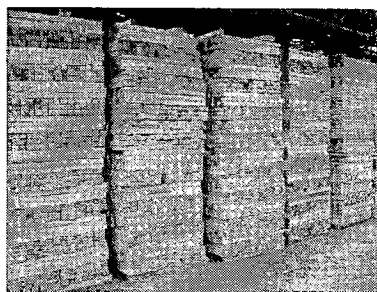
ไม้ปัจจุบันมีเครื่องมือที่สามารถความชื้นของไม้โดยสามารถบอกค่าออกมาเป็นเปอร์เซ็นต์ความชื้นต่อน้ำหนักแห้ง ซึ่งโดยธรรมชาติของไม้แล้วจะมีน้ำอยู่ภายในเซลล์เพื่อหล่อเลี้ยงต้นไม้ซึ่งน้ำหนักของน้ำภายในเซลล์เหล่านี้อาจจะมากกว่าน้ำหนักของเซลล์ไม้ หลังจากตัดต้นไม้มาใช้งานไม้จะเริ่มสูญเสียน้ำออกจากเซลล์โดยจะมีการคายน้ำออกมาอย่างรวดเร็วในตอนแรกและจะค่อยๆลดอัตราการคายน้ำลง ซึ่งหากปล่อยให้ไม้แห้งเองตามธรรมชาติอาจจะต้องใช้เวลามากกว่าจะสามารถนำไม้มาผลิตเป็นผลิตภัณฑ์ได้โดยการหัดตัวของไม้จะเริ่มขึ้นเมื่อไม้มีความชื้นประมาณ 25-30 เปอร์เซ็นต์และจะเริ่มหดตัว จนกว่าจะไม้มีความชื้นภายในไม้เลยในทางอุตสาหกรรมจึงนิยมนำไม้มาอบเพื่อไล่ความชื้นและให้ทันต่อความต้องการในการใช้งาน มีการทำอุตสาหกรรมไม้กันอย่างกว้างขวาง มีผลิตภัณฑ์หลายชนิดที่ทำจากไม้โดยมูลค่าของผลิตภัณฑ์จากไม้พบว่ามียอดการเติบโตที่สูงโดยจะสังเกตได้จากข้อมูลทางสถิติ

ลำดับ	สินค้า	2541	2542	2543	2544
1.	เฟอร์นิเจอร์ไม้	17,766.1	21,682.1	27,833.2	20,240.0
2.	ผลิตภัณฑ์ไม้	11,976.4	12,301.6	14,130.5	11,047.8
	2.1 เครื่องใช้ทำด้วยไม้	3,731.8	3,574.3	3,574.3	3,426.7
	2.2 กรอบไม้	207.2	208.0	223.6	153.7
	2.3 รูปแกะสลัก,เครื่องประดับ	136.0	141.3	169.0	205.0
	2.4 อุปกรณ์ก่อสร้างทำด้วยไม้	468.9	691.4	4 851.6	635.7
3.	ไม้และผลิตภัณฑ์ไม้แผ่น	4,513.3	6,880.6	9,294.4	7,525.4
	3.1 ไม้แปรรูปเป็นแผ่นหนาเกิน 6 มิลลิเมตร	472.4	1,418.8	2,211.5	1,638.7
	3.2 แผ่นไม้วีเนียร์	471.5	374.1	336.1	289.2
	3.3 ไม้และไม้แผ่นอื่นๆ	1,908.3	3,163.8	4,397.5	3,499.7
	รวม	41,651.9	50,435.7	63,934.2	48,661.9
4.	กระดาษเยื่อกระดาษและผลิตภัณฑ์	16,346.0	15,691.4	17,603.7	14,523.6
	รวม	57,997.9	66,397.1	81,537.9	63,135.5

ตารางที่ 2.1 สถิติการส่งออกอุตสาหกรรมที่ใช้ไม้เป็นวัตถุดิบ

2.1.4 อุตสาหกรรมการแปรรูปไม้ (Lumber recovery)

การแปรรูปไม้เป็นการนำไม้มาผ่านกระบวนการเพื่อให้ได้ ขนาด คุณสมบัติตามที่ต้องการเพื่อนำไปใช้ประโยชน์ โรงงานแปรรูปไม้จะรับไม้ท่อนเข้าสู่กระบวนการผลิตโดยทำการซังน้ำหนักรีดหรือวัดปริมาตรของไม้ก่อน โดยพิจารณาจากไม้ 1 ต้นจะมีปริมาตรเท่ากับ 1.30 ลบ.ม. เมื่อไม้เข้าสู่โรงงานจะแปรรูปและนำไม้เข้าอัดน้ำยาและสารเคมีป้องกันแมลงและเชื้อราโดยใช้น้ำยาพวกบอเรตหรือโบรอนอัดเข้าเนื้อไม้แบบเต็มเซลล์ก่อนทำการอบไม้ในการอัดน้ำยาจะใช้น้ำยาพวก Timbor , Boric, Borax, Cellbor ใช้เวลาในการอัดน้ำยา 1-2 ชั่วโมงโดยใช้ความดัน 150-200 ปอนด์ต่อตารางนิ้ว หลังจากผ่านการอบน้ำยามาแล้วจะนำไม้เข้าเตาอบซึ่งส่วนใหญ่มักจะเป็นเตาอบแบบไอน้ำโดยจะอบไม้ให้ได้ความชื้น 8-12 เปอร์เซ็นต์เวลาในการอบประมาณ 7-15 วันซึ่งจะขึ้นกับความหนา ขนาดเตาและความชื้นของไม้ก่อนเข้าเตาอบ ขณะทำการอบจะมีการวัดความชื้นของไม้ด้วยหลังจากผ่านกระบวนการอบและรักษาเนื้อไม้แล้วจะถูกไสผิวหน้าให้เรียบก่อนการนำไปผลิตเป็นเฟอร์นิเจอร์จำเป็นที่จะต้องมีการตรวจสอบคุณภาพไม้เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของการอัดน้ำยาเคมีเข้าไปในเนื้อไม้ให้ได้ปริมาณตามมาตรฐานและเพียงพอในการป้องกันเชื้อราและแมลงทำลายเนื้อไม้ในการทดสอบจะผสมสารเคมี Chrome Azurol S powder, Anhydrous ,Sodium Acetate และน้ำกลั่นบริสุทธิ์ละลายให้เข้ากันจากนั้นจะทำการไสผิวหน้าไม้ที่จะทำการทดสอบแล้วใช้น้ำยาเคมีทาตรงบริเวณผิวหน้าไม้ที่ไสจากนั้นทิ้งไว้แล้วสังเกตสีที่เปลี่ยนแปลงค่าความเข้มของสีจะเป็นตัวบอกระดับปริมาณน้ำยาเคมีที่เราอัดเข้าไปในเนื้อไม้อย่างความเข้มมากแสดงว่าน้ำยาเคมีที่เราอัดซึมเข้าไปในเนื้อไม้ได้ดีหลังจากผ่านกระบวนการอบแห้งและวัดความชื้นแล้วไม้ก็จะถูกนำไปใช้งานเพื่อสร้างเป็นผลิตภัณฑ์ เช่น เฟอร์นิเจอร์ ผลิตภัณฑ์ไม้เช่นกรอบรูป เครื่องใช้ ไม้แผ่น ของเล่นเด็ก เชื้อเพลิง เชื้อกระดาษ ฯลฯ



ภาพที่ 2.3 อุตสาหกรรมการแปรรูปไม้

2.1.5 ผลของค่าความชื้นต่อคุณสมบัติของไม้

- กลสมบัติของไม้จะเพิ่มขึ้นเมื่อความชื้นของไม้ลดลง กลสมบัติได้แก่ ค่าความแข็ง ความถ่วงจำเพาะ ความเหนียวจากการตัดด้านล่างแสดงค่ากลสมบัติของไม้แต่ละชนิด

ชนิดของไม้			ความ ชื้น (%)	ความ ถ่วง จำ เพาะ	ความแข็งแรง			ความ ดัด x100	ความ เหนียว จากการ เคาะ	ความ แข็ง กก.
					การ ตัด	การ บีบ	การ เชือด			
1.	ตะเคียนทอง	(Hopea odorata Roxb.)	12	0.80	1,172	520	148	1,202	4.70	649
2.	พนอง	(Shorea hypochra Hance)	14	0.59	940	489	138	1,026	2.90	443
3.	ยาง	(Dipterocarpus sp.)	13	0.70	888	394	164	902	2.14	470
4.	สยาขาว	(Shorea Leprosula Miq.)	12	0.51	846	428	106	992	4.02	336
5.	สยาแดง	(Shorea curtisii Dyer)	11.8	0.41	817	429	74	668	1.71	222
6.	ตะเคียนขน	(Hopea minutiflora Fisch.)	10.2	0.62	958	513	159	922	1.55	474
7.	ยางเสียน	(Dipterocarpus costatus)	12	0.83	1,440	661	177	1,333	4.03	772
8.	พินจำ	(Vatica cinerea King)	12	1.06	1,960	866	258	1,853	4.92	1270
9.	หลวง	(Dipterocarpus tuberculatus Roxb.)	12	0.86	1,297	552	152	1,319	3.34	734
10.	รัง	(Pentacme suavis A.DC.)	12	1.00	1,352	621	126	1,431	3.42	755
11.	เหียง	(Dipterocarpus obtusifolius Teijsm.)	12	0.90	1,200	580	131	1,355	3.00	716
12.	แอ็ก	(Shorea glauca King)	13	0.78	1,497	532	151	1,370	4.80	723
13.	ตะเคียนทราย	(Shorea gratissima Dyer.)	12.4	0.76	1,243	560	-	1,243	3.46	744
14.	ยุง	(Dipterocarpus grandiflorus Bl.)	13	0.76	1,150	490	176	1,120	2.88	555
15.	ชันพู	(Hopea recopei Pierre)	47.4	1.23	1,226	518	133	1,260	5.47	586
16.	หงอนไก่หลังขาว	(Hopea helferi Brandis)	20.3	0.97	1,162	526	205	1,200	6.74	787
17.	กะบาก	(Anisoptera oblonga Dyer)	12	0.60	656	384	96	1,061	3.57	336
18.	ไขเขี้ยว	(Parashorea stellata Kurz)	12	0.54	909	459	105	1,136	1.98	382

19.	เคี่ยม	(<i>Cotylelobium lanceolatum</i> Craib)	12	0.91	1,489	707	196	1,489	4.01	992
20.	เคี่ยมคenang	(<i>Shorea sericeiflora</i> Fisch & Hutch.)	12	0.72	1,438	602	158	1,434	4.02	683
21.	ชัน	(<i>Shorea thorelii</i> Pierre)	12	0.84	1,341	630	149	1,623	4.37	687
22.	ตะเคียนชันดาแมว	(<i>Balanocarpus heimii</i> King)	12	0.90	1,753	760	180	1,784	4.34	830
23.	ตะเคียนราก	(<i>Hopea avellanea</i> Heim)	12	0.70	1,166	584	186	1,296	3.13	646
24.	ตะเคียนหิน	(<i>Hopea ferrea</i> Pierre)	12	0.98	1,609	679	191	1,650	3.25	1142
25.	เต็ง	(<i>Shorea obtusa</i> Wall.)	12	1.05	1,732	723	143	1,751	6.10	964
26.	พะยอม	(<i>Shorea talura</i> Roxb.)	9.74	0.84	1,170	682	193	1,581	3.76	667

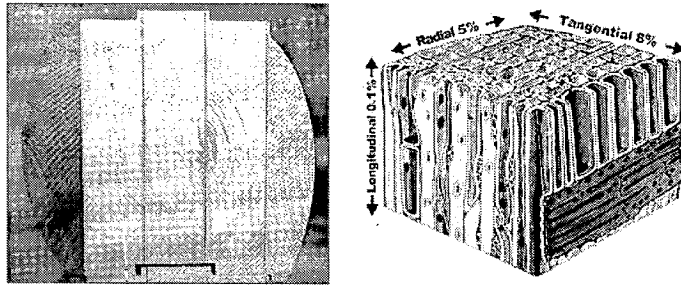
ตารางที่ 2.2 ค่ากลสมบัติของไม้แต่ละชนิด

- ความทนทานต่อแมลงและเห็ดราจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อความชื้นลดลงโดยทั่วไปไม้ที่มีความชื้นน้อยจะมีความทนทานต่อสภาพแวดล้อมดีกว่าไม้ที่ชื้นมากแมลงจะเข้าทำลายไม้ได้ยากเพราะไม้มีความแข็งเพิ่มขึ้นอีกประการหนึ่งเมื่อไม้มีความชื้นน้อยจะทำให้สภาพของไม้ไม่เหมาะสำหรับการเจริญเติบโตของเห็ดราทำให้เกิดราได้ยากขึ้น

- ค่าการติดกาวจะดีขึ้น เมื่อค่าความชื้นของไม้ลดลงเนื่องจากกาวส่วนใหญ่ที่ใช้เป็นกาวที่อาศัยการแพร่กระจายไปบนผิวของไม้กลไกการติดกาวจะเกิดขึ้นจากการระเหยหรือสูญเสียน้ำทำให้ละลายออกจากแนวกาว ดังนั้นเมื่อไม้มีความชื้นสูงจะต้องใช้เวลาในการติดกาวนานเพราะน้ำในแนวกาวจะถูกดูดซึมเข้าสู่เนื้อไม้ได้ช้าลงและทำให้เนื้อกาวในแนวกาวเข้าสู่เนื้อไม้มากขึ้นทำให้เนื้อกาวในแนวกาวมีน้อยเกิดรอยต่อไม่แน่น

- การหดตัวและพองตัวเมื่อไม่มีการสูญเสียน้ำจากผนังเซลล์จะทำให้ไม้หดตัว ในทางตรงกันข้ามเมื่อไม่มีความชื้นในผนังเซลล์เพิ่มขึ้นในระดับที่ต่ำกว่าจุดหมาดไม้ก็จะเกิดการพองตัวการหดตัวและพองตัวของจะเกิดขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงความชื้นของเนื้อไม้ในช่วงที่ต่ำกว่าจุดหมาด การหาค่าการหดตัวและพองตัวของเนื้อไม้หาได้จาก

$$\text{การหดตัว, การพองตัว (เปอร์เซ็นต์)} = \frac{(\text{ขนาดหรือปริมาตรที่เปลี่ยนแปลง}) \times 100}{\text{ขนาดหรือปริมาตรที่เริ่มต้น}}$$



ภาพที่ 2.4 การหดตัวและพองตัวของไม้ด้านต่างๆ

การหดตัวเฉลี่ยของไม้ของไม้แต่ละชนิดตั้งแต่ไม้สดจนถึงไม้ที่อบแห้งจะพิจารณาการหดตัว 3 ด้าน คือ การหดตัวตามรัศมี การหดตัวตามเส้นสัมผัสอัตราส่วนของการหดตัวทั้ง 2 แนว ตารางที่ 3 แสดงข้อมูลการหดตัวของไม้

Wood Species	% Radial Shrinkage	% Tangential Shrinkage	Tangential/Radial
Alder, Red	4.4	7.3	1.7
Ash, Black	5.0	7.8	1.6
Ash, Blue	3.9	6.5	1.7
Ash, Green	4.6	7.1	1.5
Ash, Oregon	4.1	8.1	2.0
Ash, White	4.9	7.8	1.6
Aspen, Bigtooth	3.3	7.9	2.4
Aspen, Quaking	3.5	6.7	1.9
Basswood	6.6	9.3	1.4
Beech, American	5.5	11.9	2.2

ตารางที่ 2.3 ตัวอย่างการหดตัวเฉลี่ยของไม้แต่ละชนิด

- ค่าความชื้นสมดุล เมื่อไม้ถูกปล่อยให้อยู่ในสถานะของอากาศไม้ก็จะปรับตัวให้ความชื้นมีค่าสมดุลกับความชื้นในบรรยากาศปริมาณนี้เป็นความชื้นสมดุลในการที่จะลดการเปลี่ยนแปลงความชื้นของเนื้อไม้ให้น้อยที่สุดซึ่งจะทำให้ลดการเปลี่ยนแปลงขนาดของไม้ที่เกิดขึ้นเนื่องจากการหดตัวและพองตัวของไม้

จึงต้องพิจารณาความชื้นสมดุลประกอบกันด้วย โดยประเทศไทยจะมีความชื้นสมดุลอยู่ในช่วง 8-12 เปอร์เซ็นต์ ในการเลือกใช้ไม้กับงานในสภาพพื้นที่ที่แตกต่างกันนั้นจะมีการพิจารณาค่าความชื้นของไม้ประกอบกันด้วย ดังข้อมูลที่แสดงค่าความชื้นของไม้ที่ใช้ในงานเฟอร์นิเจอร์ในแต่ละสถานที่ เช่น บริเวณภายนอกอาคารค่าความชื้นโดยเฉลี่ยจะอยู่ที่ 16-20 เปอร์เซ็นต์ ภายในอาคารจะอยู่ที่ 12-15 เปอร์เซ็นต์ และในพื้นที่อากาศแห้งแล้งความชื้นจะลดลง 11-12 เปอร์เซ็นต์ค่าความชื้นจะต้องไม่เกินค่าที่กำหนดเกินกว่า 4 เปอร์เซ็นต์

2.1.6 การหาค่าความชื้นของเนื้อไม้

สามารถหาได้ 2 วิธี คือ

- การอบแห้ง (Overdry Method) ทำโดยการนำไม้มาชั่งน้ำหนักก่อนแล้วบันทึกค่าไว้จากนั้นก็ให้นำไม้ไปอบแห้งแล้วนำออกมาชั่งน้ำหนักอีกครั้งเพื่อเปรียบเทียบแล้วนำผลที่ได้ไปคำนวณหาค่าความชื้น

$$MC = \left(\frac{W_m - W_0}{W_0} \right) \times 100$$

เมื่อ MC คือ ปริมาณความชื้นมีหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์

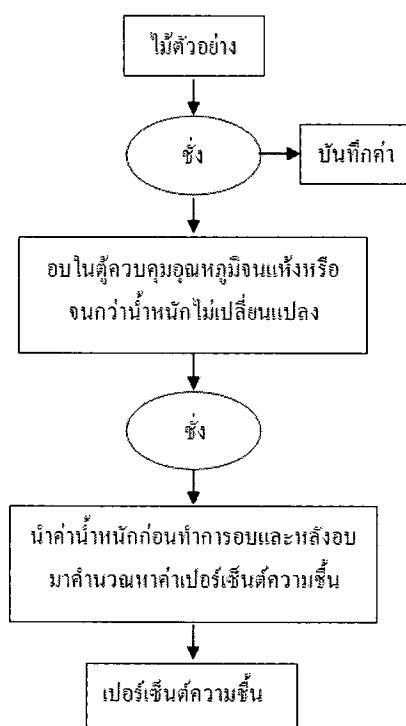
W_m คือ น้ำหนักของไม้ที่มีความชื้น

W_0 คือ น้ำหนักแห้งของไม้

- การใช้เครื่องวัดความชื้น เครื่องวัดความชื้นมีหลายแบบทั้งแบบที่มีขั้วโพรบ 2 อันสำหรับกดลงไปบนเนื้อไม้ และแบบที่ต้องสัมผัสกับผิวไม้ แบบที่ไม่ต้องสัมผัสผิว เป็นต้น

2.1.7 หลักการของเครื่องวัดค่าความชื้นในไม้

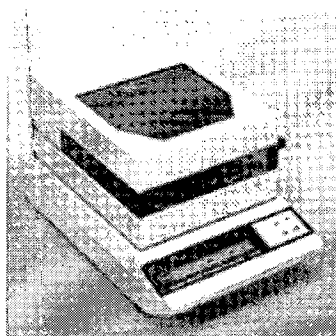
การวัดค่าความชื้นทางตรงจะอาศัยการอบแล้วพิจารณาค่าน้ำหนักก่อนอบและหลังอบเพื่อนำมาใช้คำนวณหาเปอร์เซ็นต์ความชื้น เนื่องจากความชื้นเป็นปริมาณน้ำหนักของน้ำต่อน้ำหนักของไม้ทั้งหมดการวัดค่าความชื้นสามารถทำได้ดังนี้



ภาพที่ 2.5 ขั้นตอนการหาค่าความชื้นโดยการอบแห้ง

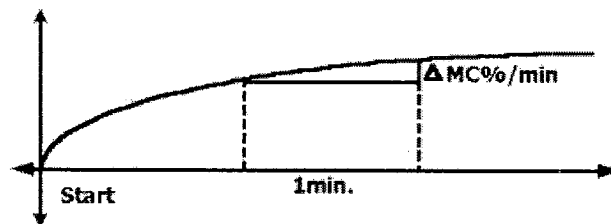
ตัวเครื่องวัดความชื้นแบบ โดยตรงนี้จะออกแบบให้สามารถวัดค่าและควบคุมปัจจัยที่เกี่ยวข้องได้โดยจะประกอบด้วย

1. เครื่องชั่งละเอียด
2. อุปกรณ์ให้ความร้อนที่สามารถควบคุมอุณหภูมิให้คงที่ได้
3. วงจรอิเล็กทรอนิกส์ที่ทำหน้าที่ควบคุมอุณหภูมิ ตั้งเวลา ประมวลผลการทำงาน แสดงค่าความชื้นและอุณหภูมิขณะเครื่องวัดค่า



ภาพที่ 2.6 เครื่องวัดความชื้น โดยตรง

กระบวนการทำงานเมื่อใส่ตัวอย่างที่บดละเอียดแล้วลงไปในตัวเครื่องจะทำการชั่งน้ำหนักแล้วระบบประมวลผลจะทำการบันทึกค่าน้ำหนักเริ่มต้นไว้ จากนั้นวงจรควบคุมจะเริ่มให้ความร้อนอุปกรณ์ให้ความร้อนนี้ ได้แก่ หลอดอินฟราเรด หลอดฮาโลเจนหรือคลื่นไมโครเวฟ การเพิ่มอุณหภูมินี้สามารถกำหนดได้หลายแบบทั้งแบบที่เพิ่มอุณหภูมิให้ถึงค่าที่กำหนดแบบรวดเร็วและแบบที่ค่อยๆเพิ่มอุณหภูมิจนกว่าจะถึงจุดที่กำหนด หรือเพิ่มความร้อนขึ้นเป็นแบบขั้นบันได เมื่อเริ่มให้ความร้อนกับตัวอย่าง น้ำหนักของตัวอย่างจะเริ่มลดลงตลอดเวลาส่วนประมวลผลจะทำการเก็บค่าน้ำหนักที่ลดลงเปรียบเทียบกับน้ำหนักที่ชั่งได้ในตอนแรกและคิดคำนวณออกมาเป็นค่าความชื้นตลอดเวลา เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นค่าความชื้นที่วัดได้จะมีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงแรกอัตราการเพิ่มขึ้นของเปอร์เซ็นต์ความชื้นจะมีอัตราเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วเมื่อตัวอย่างเริ่มแห้งอัตราการเพิ่มขึ้นของเปอร์เซ็นต์ความชื้นจะเพิ่มขึ้นช้าลงและคงที่ในที่สุดเมื่อตัวอย่างแห้งสนิท ตัวเครื่องสามารถเลือกฟังก์ชันการทำงานให้หยุดทำงานเมื่อค่าเปอร์เซ็นต์ความชื้นเปลี่ยนแปลงน้อยกว่าค่าที่กำหนดเพื่อลดระยะเวลาในการทดสอบ



ภาพที่ 2.7 ค่าเปอร์เซ็นต์ความชื้นเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น

ข้อดีของเครื่องวัดความชื้นแบบวัดได้โดยตรง

1. ใช้เวลาในการทดสอบน้อย
2. สามารถวัดค่าเปอร์เซ็นต์ความชื้นได้สะดวก
3. ใช้พลังงานน้อย

ข้อเสีย

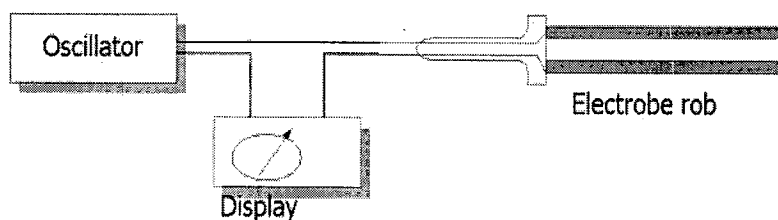
1. สามารถทดสอบตัวอย่างได้เพียงครั้งละตัวอย่างเท่านั้น

2. ตัวอย่างที่จะใช้ทดสอบต้องทำการบดก่อนเข้าเครื่อง
3. การใช้งานจะต้องระมัดระวังเนื่องจากมีส่วนประกอบของเครื่องซึ่งละเอียดรวมอยู่ด้วย
4. มีราคาแพง

2.1.8 การวัดค่าความชื้นโดยอ้อม

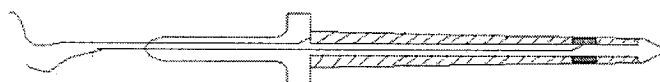
- การวัดค่าความชื้นโดยใช้หลักการค่าความนำไฟฟ้า ประกอบด้วยวงจรกำเนิดความถี่ที่มีค่าความถี่และแรงดันไฟฟ้าคงที่ ป้อนให้กับขั้วโลหะ 2 ขั้วที่มีระยะห่างคงที่ เมื่อนำขั้วโลหะทั้งสองมาสัมผัสกับไม้ สัญญาณไฟฟ้าจะไหลผ่านไม้ได้มากถ้ามีความชื้นมาก จะนำไฟฟ้าได้ดี ถ้ามีความชื้นน้อยกระแสไฟฟ้าจะไหลผ่านได้น้อยลง ปริมาณของกระแสหรือแรงดันไฟฟ้าจะแปรผันโดยตรงกับค่าความชื้นของไม้จะนำค่าแรงดันหรือกระแสไฟฟ้านี้มาทดสอบเปรียบเทียบเป็นค่าเปอร์เซ็นต์ความชื้นได้ เครื่องแบบนี้จะแบ่งตามชนิดของขั้วอิเล็กโทรดได้ 3 แบบคือ

1. แบบแท่งอิเล็กโทรดแยกกัน ขั้วไฟฟ้าทั้งสองจะเป็นแท่งโลหะไร้สนิมยาวประมาณ 30 เซนติเมตร วางห่างกันประมาณ 2 - 3 เซนติเมตร มีด้ามจับทำด้วยฉนวนไฟฟ้า เวลาใช้จะแท่งหรือเสียบแท่งอิเล็กโทรดทั้งสองเข้าไปในเนื้อวัสดุตัวอย่างที่ต้องการวัด



ภาพที่ 2.8 ส่วนประกอบเครื่องวัดความชื้นแบบอิเล็กโทรดแยก

2. แบบแท่งอิเล็กโทรดร่วม ใช้งานเหมือนแบบ แท่งอิเล็กโทรดแยกแต่มีข้อเสียก็คือแท่งจะโตกว่าเสียบเข้าไปในวัสดุตัวอย่างที่จะทดสอบยากและเกิดรูใหญ่กว่า



ภาพที่ 2.9 ส่วนประกอบเครื่องวัดความชื้นแบบอิเล็กโทรดร่วม

3. แบบวัดค่าความชื้นของไม้โดยอาศัยหลักการค่าไดอิเล็กตริกของสาร

เมื่อนำแผ่นโลหะ 2 แผ่นมาวางใกล้กัน จะทำให้เกิดเป็นอุปกรณ์ไฟฟ้าที่เรียกว่าตัวเก็บประจุ เมื่อนำแบตเตอรี่มาแตะที่แผ่นโลหะทั้งสองประจุไฟฟ้าจากแบตเตอรี่จะมาสะสมที่แผ่นโลหะและเมื่อเอาแบตเตอรี่ออกไป แผ่นโลหะทั้งสองก็ยังมีประจุไฟฟ้าสะสมอยู่ แผ่นโลหะทั้งสองที่วางใกล้กันนี้จึงกลายเป็นอุปกรณ์ไฟฟ้าที่เราเรียกว่าตัวเก็บประจุ ความสามารถในการเก็บประจุไฟฟ้าของแผ่นโลหะทั้งสอง จะได้มากหรือน้อยขึ้นอยู่กับ ขนาดของแผ่นโลหะ ระยะห่างระหว่างแผ่นโลหะและค่าไดอิเล็กตริกตรงกลางที่อยู่ระหว่างแผ่นโลหะทั้งสอง

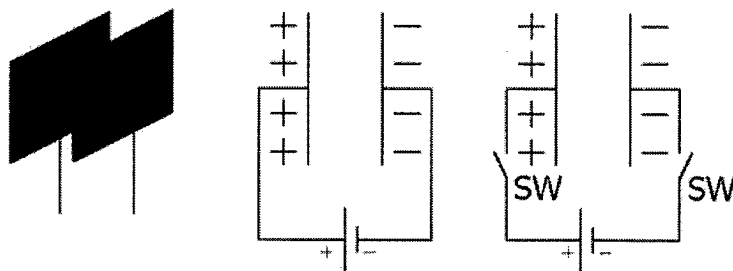
$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

เมื่อ C คือค่าความจุไฟฟ้า

ϵ_0 คือค่าไดอิเล็กตริกอากาศ

A คือพื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะ

d คือระยะห่างระหว่างแผ่นโลหะ

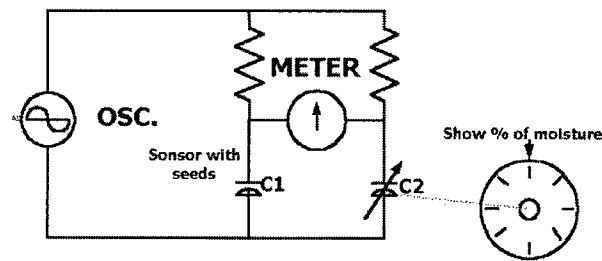


ภาพที่ 2.10 แบบโครงสร้างหัวโพรบวัดค่าไดอิเล็กตริก

เมื่อเรานำตัวอย่างที่จะทดสอบใส่ลงระหว่างแผ่นโลหะทั้งสอง จะได้ตัวเก็บประจุที่มีตัวอย่างที่จะทดสอบเป็นไดอิเล็กตริกแทนที่อากาศและเราพบว่าถ้า ตัวอย่างมีความชื้นมากค่าไดอิเล็กตริกจะเพิ่มขึ้นหรือค่าความจุของตัวเก็บ ประจุจะเพิ่มขึ้น จากหลักการนี้ เราสามารถนำมาออกแบบเป็นเครื่องมือวัดความชื้นได้

ส่วนประกอบของเครื่องจะประกอบด้วย

1. วงจรกำเนิดความถี่สูง
2. ขั้วโลหะที่เป็นแผ่นตัวนำไฟฟ้า
3. ส่วนวงจรอิเล็กทรอนิกส์เพื่อการแสดงผล



ภาพที่ 2.11 ตัวอย่างวงจรเครื่องวัดความชื้นอย่างง่าย

C1 คือตัวเก็บประจุที่จะที่เกิดจากการนำเอาตัวอย่างที่จะทดสอบวางไว้ระหว่างแผ่นเพลทตัวนำทั้งสองค่าของตัวเก็บประจุจะแปรผันตรงกับค่าความชื้นในวัสดุ C2 คือตัวเก็บประจุอีกตัวหนึ่งที่ปรับเพิ่มค่าความจุไฟฟ้าหรือลดค่าความจุไฟฟ้าได้ ใช้สำหรับเปรียบเทียบค่าความจุไฟฟ้ากับ C1 ถ้า C1 และ C2 มีค่าความจุไฟฟ้าเท่ากันเข็มของ มิเตอร์จะชี้อยู่ตรงกลาง แต่ถ้าค่าความจุไฟฟ้าของ ตัวเก็บประจุ C1 จะเพิ่มหรือลดตามความชื้นของตัวอย่างทดสอบเข็มมิเตอร์จะไม่ชี้ตรงกลางเราจะปรับค่าความจุของตัวเก็บประจุ C2 ให้มีค่าเพิ่ม หรือลดเท่ากับตัวเก็บประจุ C1 เมื่อค่าความจุไฟฟ้าเท่ากันเข็มมิเตอร์จะชี้ตรงกลางเหมือนเดิมที่แกนหมุนของตัวเก็บประจุ C2 จะต่อกับหน้าปัดแสดงตัวเลขเปรียบเทียบแสดงค่าเป็นความชื้นเปอร์เซ็นต์ได้ เครื่องวัดความชื้นแบบตัวเก็บประจุนี้ มีข้อดีตรงที่สามารถวัดความชื้นได้รวดเร็ว ตัวอย่างทดสอบไม่เสียหาย

2.1.9 ผลกระทบของอุณหภูมิที่มีผลต่อความแม่นยำในการวัดความชื้น

เนื่องจากเครื่องที่วัดหาค่าปริมาณความชื้นของตัวอย่างทดสอบได้โดยอ้อมนั้นมักใช้การวัดคุณสมบัติทางไฟฟ้าของตัวอย่างทดสอบนั้นๆมาเทียบกับค่าความชื้นที่ควรวัดได้ โดยปกติแล้วคุณสมบัติทางไฟฟ้าของตัวอย่างทดสอบนั้นจะเปลี่ยนไปตาม อุณหภูมิที่เปลี่ยนไป ไม่ว่าจะอาศัยคุณสมบัติทาง

ไฟฟ้าใดๆตัวอย่างนั้นก็ตาม เช่น ถ้าอุณหภูมิของตัวอย่างสูงขึ้นจะทำให้ตัวอย่างนั้นมีความนำไฟฟ้าสูงขึ้น หรือมี ความต้านทานต่ำลง และมีค่าไดอิเล็กตริกสูงขึ้นเช่นกัน ดังนั้นเครื่องวัดความชื้นที่ดีจะต้องมีส่วนที่ทำหน้าชดเชยค่าความชื้นที่ อ่านได้อันเนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปด้วย

2.2 ทฤษฎีคลื่นสนามไฟฟ้า

2.2.1 สมการกฎของคูลอมบ์

พื้นฐานทางด้านไฟฟ้าและจากการวิเคราะห์เวกเตอร์เพื่อการวิเคราะห์และอธิบายปรากฏการณ์ทางไฟฟ้าจากทฤษฎีของสนามไฟฟ้าสถิตย์ที่อยู่ภายในที่ว่างอิสระสนามเหล่านี้สามารถพบได้ในธรรมชาติซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์กับอากาศและบรรยากาศของกาชชนิดอื่นๆ จากการที่คูลอมบ์ได้ค้นพบว่าแรงกระทำระหว่างวัตถุ 2 ชิ้นที่อยู่ในสุญญากาศหรือในที่ว่างสุญญากาศที่วางอยู่ห่างกันในระยะที่มากกว่าขนาดของวัตถุทั้งสองนั้นหลายๆจะมีค่าแปรผันตรงกับค่าของวัตถุทั้งสองและแปรผกผันกับระยะห่างระหว่างวัตถุทั้งสองยกกำลังสอง ตามสมการ

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

เมื่อ Q_1 และ Q_2 คือค่าประจุของประจุทั้งสองส่วน R คือระยะห่างระหว่างประจุทั้งสอง k เป็นค่าคงที่ Q มีหน่วยเป็นคูลอมบ์และ R มีหน่วยเป็นเมตร แรงจะมีหน่วยเป็นนิวตัน ค่าคงที่ของ k มีค่าเท่ากับ

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

ค่า ϵ_0 เป็นค่าความยินยอมทางไฟฟ้าของที่ว่างอิสระ มีค่าเท่ากับ $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$

และจากกฎของคูลอมบ์จะทำให้ได้ค่าของสมการเป็น

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

2.2.2 ความเข้มสนามไฟฟ้า

เมื่อพิจารณาประจุที่วางอยู่ ณ ตำแหน่งที่แน่นอนกำหนดให้ประจุนั้นเป็น Q_1 เมื่อเคลื่อนประจุที่สองเข้าไปใกล้ๆกับประจุตัวแรกจะเกิดแรงที่กระทำต่อประจุที่สองตลอดทุกทิศทางที่ประจุเคลื่อนที่ไป

อาจกล่าวได้ว่าประจุตัวที่สองเป็นตัวทดสอบสนามของแรงที่ปรากฏอยู่ ซึ่งจะทำให้สามารถหาแรงที่ประจุทดสอบโดยกฎของคูลอมบ์ได้

$$F_l = \frac{Q_l Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_l$$

$$\frac{F_l}{Q_l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_l$$

ทางด้านซ้ายของสมการจะเป็นฟังก์ชันของ Q_l มีทิศทางเดียวกับเส้นเชื่อมระหว่างประจุ Q_l กับประจุทดสอบสมการข้างต้นเป็นการอธิบายถึงเวกเตอร์สนามเรียกว่าความเข้มของสนามไฟฟ้า(Electric Field Intensity)

ความเข้มสนามไฟฟ้าคือเวกเตอร์ของแรงต่อหน่วยประจุทดสอบที่ไม่ได้ทำการวัดจากการทดลองโดยหาค่าของแรงที่กระทำต่อประจุทดสอบขนาด 1 คูลอมบ์

สมการของสนามไฟฟ้าคือ

$$E = \frac{F_l}{Q_l}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_l$$

สมการความสัมพันธ์ของความเข้มสนามไฟฟ้าเป็นความสัมพันธ์ของความเข้มสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุแบบจุดเดียว Q_l ที่วางในสุญญากาศ ในการหาค่าความสัมพันธ์ของความเข้มสนามไฟฟ้าสำหรับประจุรูปแบบอื่นๆสามารถแยกพิจารณาได้แตกต่างออกไป ในกรณีของประจุแบบจุดเดียวจะได้

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R$$

เมื่อ R คือขนาดของเวกเตอร์ R ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ชี้ตรงจากจุดที่วางประจุ Q_l ไปถึงตำแหน่งหรือจุดที่พิจารณาหาค่าสนามไฟฟ้า E และ a_R คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ R เริ่มต้นการวิเคราะห์ด้วยการวางประจุ Q_l ไว้ที่จุดกำเนิดของพิกัดทรงกลมเวกเตอร์หนึ่งหน่วย a_R จะเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวรัศมี a_r และ R ก็คือรัศมี r ของรูปทรงกลม ดังนั้น

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$$

หรือ

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

จะพบว่ามีส่วนประกอบสนามในแนวรัศมีเพียงอย่างเดียวเพื่อให้เข้าใจเราจะใช้ความสัมพันธ์ของกำลังสองผกผัน(Inverse-square law) สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ของประจุ Q ที่จุดกำเนิดอยู่ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนได้เป็น

$$R = r = xa_x + ya_y + za_z \text{ และ } a_R = a_r = (xa_x + ya_y + za_z) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ดังนั้น

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} a_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} a_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} a_z \right)$$

หาไม่มีการวิเคราะห์ทางเวกเตอร์แล้ว ข้อมูลข้างต้นในสมการจำเป็นที่จะต้องแยกออกเป็น 3 สมการซึ่งแต่ละสมการจะใช้สำหรับแต่ละส่วนประกอบ เพื่อให้ได้สมการจะต้องแยกความเข้มสนามไฟฟ้าออกเป็น 3 ส่วนประกอบ โดยการหาภาพฉายของขนาดสนามในแต่ละแกนด้วยความสัมพันธ์ทางเวกเตอร์ หากพิจารณาประจุที่ไม่ได้วางที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดใดๆ สนามจะไม่เป็นรูปทรงกลมสมมาตร(หรือไม่เป็นรูปทรงกระบอกสมมาตร ถ้าไม่ได้ใส่ประจุเชิงเส้นบนแกน z) เราสามารถใช้ระบบคาร์ทีเซียนสำหรับประจุ Q ที่วางไว้ที่ตำแหน่ง $r' = x'a_x + y'a_y + z'a_z$ ดังแสดงในรูปจะพบว่าตำแหน่งใดๆที่จุด $r = xa_x + ya_y + za_z$ หาได้โดยการแทน R ด้วย $r - r'$ จะได้

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|} = \frac{Q(r - r')}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^3}$$

$$= \frac{Q[(x - x')a_x + (y - y')a_y + (z - z')a_z]}{4\pi\epsilon_0 [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

เราได้กำหนดเวกเตอร์ของสนามเป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ของเวกเตอร์ตำแหน่งซึ่งจะเน้นโดยการให้เป็นสัญลักษณ์ในข้อกำหนดด้วย $E(r)$ สมการข้างต้นจึงกลายเป็นกรณีพิเศษซึ่ง $x' = y' = z' = 0$ เนื่องจากแรงคูลอมบ์เป็นเชิงเส้น ความเข้มสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุแบบจุด 2 ประจุ Q_1 ที่วางอยู่ที่ตำแหน่ง r_1 และ Q_2 ที่วางอยู่ที่ตำแหน่ง r_2 คือผลบวกของแรงกระทำโดยลัมพบบนประจุทดสอบ Q ที่ได้รับจากประจุ Q_1 กับ Q_2 หรือ

$$E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |r-r_1|^2} a_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |r-r_2|^2} a_2$$

เมื่อ a_1 และ a_2 เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้ทิศทางของ $(r-r_1)$ และ $(r-r_2)$ ตามลำดับ หากมีการใส่ประจุในตำแหน่งอื่นๆเพิ่มเข้าไปอีกค่าความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุ n จุดจะมีค่าตามสมการ

$$E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |r-r_1|^2} a_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |r-r_2|^2} a_2 + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 |r-r_n|^2} a_n$$

สมการสามารถเขียนให้สั้นลงด้วยวิธีการใช้เครื่องหมาย Σ สำหรับการบวกและจำนวนเต็มในการบวกเริ่มตั้งแต่ $m=1$ เทอมเปลี่ยนแปลงไปจนกระทั่งถึง n เทอมดังนี้

$$E(r) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 |r-r_m|^2} a_m$$

2.2.3 สนามเนื่องจากประจุที่กระจายอย่างสม่ำเสมอในปริมาตรหนึ่ง

หากพิจารณาความหนาแน่นประจุเชิงปริมาตร (Volume charge density) ซึ่งค่าความหนาแน่นนี้เปรียบเสมือนการพิจารณาความหนาแน่นของน้ำ ที่ประกอบด้วยอะตอมและโมเลกุลกับอนุภาคที่เป็นส่วนประกอบ ในการพิจารณานั้นมักต้องการผลลัพธ์คือค่ากระแส ศักย์ไฟฟ้า ประจุในอุปกรณ์ไฟฟ้า เราแทนค่าความหนาแน่นประจุเชิงปริมาตรด้วย ρ_v มีหน่วยเป็นคูลอมบ์ต่อลูกบาศก์เมตร (C/m^3) เมื่อพิจารณาประจุขนาดเล็ก ΔQ ภายในปริมาตรเล็กๆ Δv จะได้

$$\Delta Q = \rho_v \Delta v$$

สามารถนิยามค่า ρ_v ในทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยการใส่ขอบเขตจำกัดหรือลิมิต (Limiting process) ลงไปในสมการได้เป็น

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v}$$

ดังนั้นค่าประจรรวมภายในปริมาตรที่แน่นอนค่าหนึ่งสามารถหาได้จากการอินทิเกรตปริมาตรนั้นๆ

$$Q = \int_v \rho_v dv$$

2.2.4 สนามสำหรับเส้นประจุ(Field of line charge)

ประจุที่มีการกระจายปริมาตรเป็นเส้นเล็กๆ โดยเส้นประจุมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเล็กมากเรากำหนดให้ประจุเหล่านี้อยู่ในประเภที่มีการกระจายเป็นประจุเชิงเส้นที่มีความหนาแน่นประจุต่อความยาวเป็น ρ_L C/m การวิเคราะห์ประจุที่มีการกระจายแบบเชิงเส้นโดยสมมติให้ประจุเส้นตรงวางอยู่ในแนวแกน z ในพิภคทรงกระบอกเส้นประจุมีความยาวจาก $-\infty$ จนถึง ∞ ดังแสดงในรูปและสมมติให้สนามไฟฟ้า E ที่เกิดจากประจุเส้นนี้แผ่ออกมารอบๆ โดยเป็นสนามที่ที่ได้จากประจุเส้นยาวอย่างสม่ำเสมอมีความหนาแน่นต่อหน่วยความยาวเป็น ρ_L ข้อแรกเราจะพิจารณาความสมมาตรเพื่อใช้เป็นแนวทางในการคำนวณซึ่งจะมีส่วนประกอบเฉพาะ 2 ประการคือ (1) ด้วยพิภคที่ใช้อยู่สนามจะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงที่ระยะพิภคคงที่ (2) สนามในบางส่วนประกอบนั้นจะไม่มีค่า คำตอบของสองปัญหาจะเป็นตัวบอกว่าส่วนประกอบของสนามในพิภคใดบ้างที่มีค่าและเปลี่ยนแปลงหรือเป็นศูนย์ หากสมมติเราเคลื่อนไหวไปรอบเส้นประจุโดยหมุนตามมุม ϕ ขณะที่รักษาระยะให้ ρ และ z คงที่ จะมองเห็นเส้นประจุปรากฏอย่างเดิมในทุกๆ มุมที่เปลี่ยนค่าไป หรือกล่าวได้ว่ามีความสมมาตรตามแนวตั้งแสดงว่าไม่มีสนามใดๆ แปรตามมุม ϕ เมื่อทำซ้ำโดยการเปลี่ยนการเคลื่อนที่ให้ ρ และ ϕ เป็นค่าคงที่บ้างแต่มีการเคลื่อนที่ขึ้นและลงตามแนวแกน z ผลที่ได้พบว่าเหมือนกันกับครั้งแรก ถ้ากำหนดให้ ϕ และ z คงที่แต่ให้มีการเคลื่อนที่ตามแนว ρ จะพบว่าค่าที่ได้เปลี่ยนแปลงไปสนามมีค่าลดลงเมื่อระยะตามแนว ρ มีค่าเพิ่มขึ้นซึ่งเป็นไปตามการคาดคะเนตามกฎของคูลอมบ์ ดังนั้นจึงใช้วิธีการกำจัดตัวแปรที่ไม่จำเป็นออกไป ด้วยเหตุผลที่ว่าสนามแปรค่าตามแนว ρ เท่านั้น เมื่อพิจารณาต่อไปว่าถ้าการเพิ่มความยาวของเส้นประจุทุกๆ หน่วยความยาวเล็กๆ เปรียบเสมือนเป็นการวางประจุแบบจุดแต่ละประจุที่วางต่อกันไปมีผลทำให้การกระจายความเข้มสนามไฟฟ้ามีค่าเพิ่มขึ้นไปตามจำนวนประจุที่วางต่อกันนั้น (โดยสมมติว่าเป็นประจุเชิงเส้นแบบประจุบวก) ไม่มีส่วนใดๆ ของประจุที่ทำให้ได้ส่วนประกอบสนามตามแนวแกน ϕ ดังนั้น E_ϕ จึงมีค่าเป็นศูนย์แต่อย่างไรก็ตามส่วนของเส้นประจุยังคงทำให้เกิดส่วนประกอบสนามทั้ง E_ρ และ E_z อยู่ดีแต่ด้วยชิ้นส่วนของเส้นประจุเล็กๆ ทั้งที่อยู่ด้านเหนือและด้านใต้ของจุดกำเนิดที่ระยะห่างจากจุดกำเนิดเท่าๆ กันทำให้เกิดความเข้มสนาม E_z ที่ตำแหน่งใดๆ รวมกันมีค่าหักล้างกันหมดไป เราจะพบว่า มีเพียงส่วนประกอบ E_ρ เท่านั้นที่เหลืออยู่และแปรค่าไปตาม ρ จากนั้นจึงหาค่าส่วนประกอบของสนามนี้เพียงอย่างเดียว เราเลือกจุด $P(0,y,0)$ บนแกน y ในการหาค่าสนามเพราะจุดนี้เป็นจุดที่ใช้เป็นตำแหน่งทั่วไปได้อย่างสมบูรณ์แบบ การสังเกตการณ์เปลี่ยนแปลงของสนามตามแนว ϕ และ z เมื่อใช้สมการหาค่าการเพิ่มขึ้นของสนามที่จุด P เนื่องมาจากการเพิ่มขึ้นของชิ้นส่วนของประจุ $dQ = \rho_L dz'$ จะได้

$$dE = \frac{\rho_L dz' (r - r')}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^{3/2}}$$

เมื่อ

$$r = ya_y = \rho a_p$$

$$r' = z' a_z$$

ดังนั้น

$$dE = \frac{\rho_L dz' (\rho a_p - z' a_z)}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

เนื่องจากว่ามีเพียงส่วนประกอบของ E_p เท่านั้นที่เหลืออยู่เราจึงทำการให้ง่ายขึ้นได้เป็น

$$dE_p = \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

เมื่ออินทิเกรตโดยใช้ตารางหรือโดยการเปลี่ยนตัวแปร $z' = \rho \cot \theta$ หาค่าได้เป็น

$$E_p = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \rho \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$E_p = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

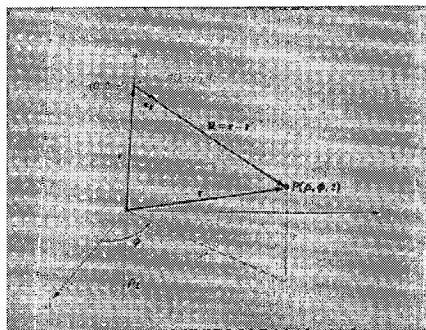
เมื่อใช้การแปลงตัวแปรที่มีอยู่เป็นมุม θ เพื่ออินทิเกรตโดยให้ $z' = \rho \cot \theta$ ด้วยวิธีการแทนค่านี้จะได้ค่าต่างๆได้เป็น

$dz' = -\rho \csc^2 \theta d\theta$ ดังนั้น $R = \rho \csc \theta$ เพื่อให้เป็นรูปแบบอินทิกรัลอย่างง่ายดังนี้

$$dE_p = \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta = \frac{-\rho_L \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho}$$

$$E_p = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{\pi}^0 \sin \theta d\theta = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \cos \theta \Big|_{\pi}^0$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$



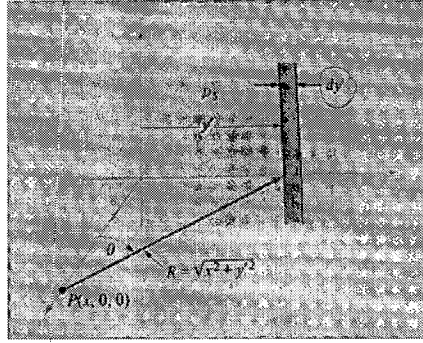
ภาพที่ 2.12 การอินทิเกรตโดยไม่คำนึงถึงปริมาตร

สำหรับเส้นประจุที่มีความยาวอนันต์

สนามที่แผ่ออกไปทั่วบริเวณห่างจากเส้นประจุ เมื่อเทียบกับประจุแบบจุดที่มีค่าลดลงกับระยะทางยกกำลังสอง จะพบว่าระยะห่างที่เท่ากันสนามที่เกิดจากเส้นประจุจะมีค่ามากกว่าสนามเนื่องจากจุดของประจุ หลังจากวิเคราะห์สนามที่เกิดจากเส้นประจุจะพบว่าไม่มีเส้นประจุใดๆวางไว้ที่แกน z เพียงที่เดียวเสมอไป

2.2.5 สนามเนื่องจากประจุชนิดแผ่น(Field of Sheet of Charge)

ประจุแบบพื้นฐานอีกชนิดหนึ่งคือแผ่นประจุขนาดกว้างยาวอนันต์มีการกระจายความหนาแน่นประจุต่อหน่วยพื้นที่เป็น $\rho_s \text{ C/m}^2$ ตัวอย่างเช่นการประมาณค่าประจุที่อยู่ผิวของตัวนำ จะพบว่าประจุคงที่ปรากฏอยู่บนผิวดำนำแต่ไม่ปรากฏอยู่ภายในเนื้อตัวนำ ดังนั้น ρ_s จึงรู้จักกันโดยทั่วไปว่าเป็นความหนาแน่นประจุเชิงพื้นผิวทำให้รูปแบบความหนาแน่นประจุมีกันครบชุดซึ่งได้แก่ประจุแบบจุด แบบเชิงเส้น ประจุแบบเชิงผิว และแบบเชิงปริมาตรหรือ Q , ρ_l , ρ_s และ ρ_v ตามลำดับ ต่อไปเราจะใส่แผ่นประจุในระนาบ yz และทำการพิจารณาความสมมาตรอีกเช่นเดียวกันกับครั้งที่แล้วตามรูปจะเห็นว่าสนามไม่เปลี่ยนแปลงตาม y และ z จากนั้นจะพบว่าส่วนของประจุเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในตำแหน่งที่สมมาตรกันนั้นจะทำให้สนามที่เป็นส่วนประกอบของแกน y กับ z จากนั้นจะพบว่าส่วนของประจุเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในตำแหน่งที่สมมาตรกันนั้นจะทำให้สนามที่เป็นส่วนประกอบของแกน y และ z มีค่าหักล้างกันหมดไปจึงเหลือเฉพาะสนาม E_x เท่านั้นที่ต้องหาค่า และในส่วนประกอบของสนามนี้เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น จากนั้นจึงทำการหาค่าส่วนประกอบที่ว่านี้



ภาพที่ 2.13 ประจุแผ่นขนาดกว้างยาวอนันต์วางบนระนาบ yz จุด P ใดๆ อยู่บนแกน x และเส้นประจุมีความกว้างเชิงอนุพันธ์ใช้สำหรับเป็นชิ้นส่วนประจุเพื่อการคำนวณสนามที่จุด P

แผ่นประจุขนาดกว้างยาวอนันต์วางอยู่ในระนาบ yz จุด P ใดๆ อยู่บนแกน x และเส้นประจุมีความกว้างเชิงอนุพันธ์ใช้สำหรับเป็นชิ้นส่วนของประจุเพื่อคำนวณหาสนามที่จุด P โดยที่

$$dE = \rho_s dy' a_R / (2\pi\epsilon_0 R)$$

สนามที่คำนวณมาได้จากเส้นประจุโดยการแบ่งส่วนของแผ่นประจุเป็นเส้นประจุที่มีความกว้างเชิงอนุพันธ์ดังแสดงในรูปความหนาแน่นประจุเชิงเส้นหรือความหนาแน่นประจุต่อหน่วยความยาวเป็น $\rho_L = \rho_s dy'$ และระยะห่างจากประจุเส้นถึงจุด P ใดๆบนแกน x มีค่าเป็น $R = \sqrt{x^2 + y'^2}$ ปริมาณส่วนหนึ่งของ E_x ที่หาได้จากแผ่นประจุที่แบ่งเป็นเส้นอนุพันธ์เล็กๆนี้จึงกลายเป็น

$$dE_x = \frac{\rho_s dy'}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y'^2}} \cos\theta = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \frac{xdy'}{x^2 + y'^2}$$

เมื่อรวมผลที่ได้จากแผ่นเส้นประจุเชิงอนุพันธ์เล็กๆทั้งหมด ได้เป็น

$$dE_x = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdy'}{x^2 + y'^2} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \left[\tan^{-1} \frac{y'}{x} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

ถ้าทำการเลือกจุด P ที่ตำแหน่งด้านบนบนแกน x มีค่าลบ จะได้

$$E_x = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

เพื่อลดความยุ่งยากในการใส่เครื่องหมายให้สนามและมักจะหาสนามจากประจุที่มีค่าเป็นบวกโดยกำหนดไปด้วยเวกเตอร์หนึ่งหน่วย a_N ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบของประจุและมีทิศพุ่งออกจากระนาบประจุ จะได้

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_N$$

จะพบว่าสนามมีขนาดและทิศทางคงที่ ไม่ว่าเราจะพิจารณาในที่ห่างไกลจากแผ่นระนาบผิวของประจุออกไปไกลแค่ไหนก็ตาม ในกรณีของแผ่นประจุที่กว้างยาวอนันต์อีกแผ่นหนึ่งมีประจุเป็นลบและมีความหนาแน่นประจุผิวเป็น $-\rho_s$ วางอยู่ที่ระนาบ $x=a$ เราอาจจะหาค่าสนามรวมได้โดยรวมสนามที่ได้จากประจุแต่ละแผ่นที่ระนาบ $x > a$

$$E_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E = E_+ + E_- = 0$$

ส่วนที่ $x < 0$

$$E_+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E = E_+ + E_-$$

เมื่อ $0 < x < a$

$$E_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x$$

แล้ว

$$E = E_+ + E_- = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} a_x$$

ซึ่งเป็นคำตอบของสนามที่อยู่ระหว่างแผ่นตัวนำคู่ขนานสองตัวของตัวเก็บประจุแบบมีช่องว่างเป็นอากาศ มีความกว้างและยาวของแผ่นตัวนำมากกว่าระยะห่างระหว่างตัวนำทั้งสองซึ่งมีช่องว่างเป็นอากาศจึงพิจารณาได้ว่าไม่มีสนามใดๆ รั่วออกมาด้านข้างที่ขอบของแผ่นตัวนำทั้งสอง ซึ่งในความเป็นจริงสนามภายนอกของตัวเก็บประจุไม่เป็นศูนย์ แต่การวิเคราะห์ข้างต้นพิจารณาในทางอุดมคติเรามักคิดว่าสนามภายนอกมีค่าน้อยจนสามารถตัดทิ้งได้

2.2.6 สนามเส้นกระแสและการเขียนรูปแทนเส้นสนาม(Streamlines and Sketches of Fields)

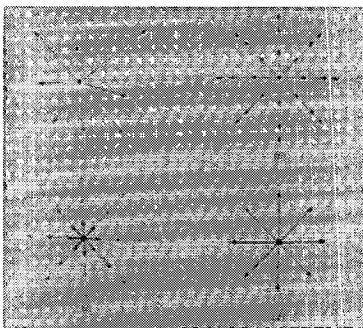
หลังจากที่ได้วิเคราะห์สมการผลลัพธ์ของความสัมพันธ์ทางเวกเตอร์ของสนามไฟฟ้าสำหรับประจุรูปแบบต่างๆแล้ว ในการหาขนาดและทิศทางของสนามจากสมการซึ่งสามารถทำได้ง่าย เราไม่สามารถนำเอาวิธีนี้ไปใช้ได้เสมอไปเนื่องจากการแก้ปัญหาโดยใช้รูปแบบประจูปอย่างง่ายไม่สามารถใช้

กับรูปแบบการกระจายประจุแบบอื่นได้ เพราะเมื่อระบบของตัวเก็บประจุมีความซับซ้อนมากขึ้นจะทำให้มองเห็นภาพสนามได้ยาก เมื่อพิจารณาประจุเส้น

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} a_\rho$$

จากรูปแสดงหน้าตัดด้านบนของเส้นประจุซึ่งพยายามเขียนรูปของสนามโดยใช้ส่วนของเส้นทึบเป็นตัวแทนของสนามที่มีความยาวแปรตามขนาดของสนาม และชี้ไปตามทิศทางของสนาม E และเมื่อวาดโดยเน้นให้มีความสมมาตรในเส้นแนวตำแหน่งต่างๆ และเขียนเส้นให้มีความยาวมากในตำแหน่งที่มีความหนาแน่นมาก ในการบรรยายถึงรูปแบบจะแสดงเพียงแค่ทิศทางของ E โดยจะเขียนเส้นตรงยาวต่อเนื่องจากประจุไปในทุกทิศทางที่ขนานกับสนาม E การกระจายของเส้นตรงเป็นไปอย่างสมมาตรและแสดงให้เห็นความสมมาตรในแกนตั้งและหัวลูกศรใช้แสดงทิศทาง บางครั้งเรียกเส้นที่ว่าเป็นว่าสนามเส้นกระแส(Streamline)และเส้นฟลักซ์และทิศทางของเส้นยังคงใช้เหมือนกัน หากมีประจุบวกทดสอบเล็กๆ วางอยู่ที่จุดใดๆภายในสนามนี้จะทำให้มันเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร่งที่มีทิศทางไปตามสนามเส้นกระแสที่ลากผ่านจุดนั้นๆ จะพบว่าในเรื่องขนาดของสนามจะมีขนาดแปรผกผันกับระยะห่างระหว่างเส้นกระแสซึ่งถ้าเส้นกระแสดกกันมากแสดงว่ามีความเข้มของสนามไฟฟ้าสูงและในกรณีของสนามเส้นกระแสของประจุแบบจุดการวาดแสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามที่ด้านเข้าหรือออกจากกระดาศจะมีความยุ่งยาก ดังนั้นการร่างภาพสนามของเส้นกระแสจึงมีเพียงสองมิติซึ่งจำเป็นที่จะต้องกำหนดตัวแปรที่ระนาบใดระนาบหนึ่งให้คงที่ เช่น $E_z = 0$ สนามเส้นกระแสก็จะถูกจำกัดไว้ที่ระนาบที่ z มีค่าคงที่แล้วทำการร่างภาพสนามเส้นกระแสที่แปรตามระนาบอื่นๆ เส้นร่างกระแสนามอีกแบบหนึ่งตามรูปส่วนประกอบของ E_x และ E_y ชี้ไปตามจุดต่างๆด้วยรูปร่างที่วาดมาได้นั้นหามาได้จาก

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx}$$



ภาพที่ 2.14 แบบร่างของเส้นกระแสสนามแบบต่างๆ

จากการที่ฟังก์ชันของ E_x และ E_y (และค่าคงที่อื่นๆหามาได้จากสมการอนุพันธ์) ทำให้สามารถนำไปหาสมการของสนามเส้นกระแสได้ เมื่อพิจารณาถึงสนามที่ได้จากประจุเส้นที่มีความหนาแน่นประจุ

$$\rho_L = 2\pi\epsilon_0$$

$$E = \frac{1}{\rho} a_\rho$$

กรณีเขียนในพิกัดฉาก

$$E = \frac{x}{x^2 + y^2} a_x + \frac{y}{x^2 + y^2} a_y$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_x}{E_y} = \frac{y}{x} \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

ดังนั้น

$$\ln y = \ln x + C_1$$

จากสมการเราจะหาสนามเส้นกระแสได้จาก $y = Cx$

หากต้องการหาสมการของสนามเส้นกระแสเฉพาะที่หนึ่งโดยผ่านจุดใดๆ สามารถทำได้โดยการแทนพิกัดของจุดนั้นลงในสมการแล้วคำนวณหาค่าคงที่ C สนามเส้นกระแสแต่ละเส้นจะสัมพันธ์กับค่า C เสมอ

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

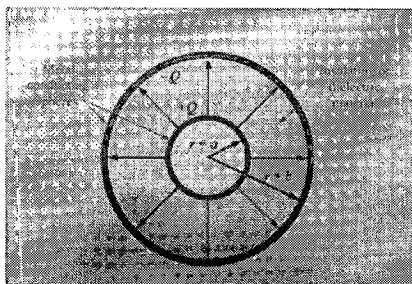
จากแนวความคิดของสนามเส้นกระแสหรือเส้นแรงซึ่งแสดงซึ่งแสดงทิศทางของแรงที่จุดต่างๆบนประจุทดสอบเส้นแรงเหล่านี้มักเรียกว่าเส้นฟลักซ์หรือฟลักซ์(Flux) การสร้างเส้นฟลักซ์ที่ไหลออกมาจากประจุจุดอย่างสมมาตรสามารถทำได้เช่นเดียวกันกับสนามเส้นกระแสและแสดงให้เห็นว่าฟลักซ์นี้จะปรากฏในบริเวณที่มีสนามไฟฟ้าอยู่

2.2.7 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า(Electric Flux Density)

การทดลองของฟาราเดย์ที่ใช้เครื่องมือซึ่งประกอบด้วยครึ่งทรงกลม 2 อันที่ยึดติดหรือถอดออกจากกันได้ช่องระหว่างทรงกลมทั้งสองนั้นมีฉนวนหรือไดอิเล็กตริกแทรกอยู่ ฟาราเดย์พบว่าประจุไฟฟ้าทั้งหมดที่เปลือกผิวของทรงกลมชั้นนอกนั้นมีขนาดเท่ากับประจุไฟฟ้าเริ่มต้นที่ใส่เข้าไปในทรงกลมชั้นในโดยไม่ต้องคำนึงถึงฉนวนที่ใส่กันไว้ระหว่างทรงกลมทั้งสองซึ่งสามารถสรุปได้ว่ามีฟลักซ์จากทรงกลมชั้นในพุ่งออกไปยังทรงกลมชั้นนอกการทดลองยังแสดงให้เห็นว่าประจุบวกขนาดใหญ่ค่าหนึ่งที่อยู่ภายในทรงกลมนั้นจะเหนี่ยวนำประจุลบค่าเท่ากันนั้นลงบนผิวทรงกลมชั้นนอกทำให้เกิดการแปรผันโดยตรงระหว่างฟลักซ์ไฟฟ้าและประจุไฟฟ้าบนทรงกลมชั้นในถ้าฟลักซ์ไฟฟ้านั้นใช้สัญลักษณ์ ψ (psi) และประจุไฟฟ้าทั้งหมดบนทรงกลมชั้นในใช้สัญลักษณ์ Q ดังนั้นจากการทดลองจึงพบว่า

$$\psi = Q$$

ฟลักซ์ไฟฟ้า ψ วัดในหน่วยคูลอมบ์(Culomb)เส้นทางต่างๆของฟลักซ์ไฟฟ้าที่สร้างจากประจุไฟฟ้า Q คูลอมบ์เป็นไปอย่างสม่ำเสมอทั่วผิวที่มีพื้นที่ $4\pi a^2$ ดังนั้นความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผิวนี้จึงมีค่า $\psi/4\pi a^2$ หรือ $Q/4\pi a^2$ C/m² ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า(Electric flux density)แทนด้วย D เป็นสนามเวกเตอร์



ภาพที่ 2.15 ฟลักซ์ไฟฟ้าบริเวณระหว่างทรงกลม 2 ชั้นที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันซึ่งมีประจุไฟฟ้า ทิศทางและขนาดของ D ไม่เป็นฟังก์ชันของไดอิเล็กตริกที่แทรกอยู่ระหว่างทรงกลมทั้งสอง

จากรูปจะเห็นว่าความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้ามีทิศทางตามแนวรัศมีโดยมีค่าเท่ากับ

$$D]_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} a_r \quad \text{ทรงกลมชั้นใน}$$

$$D]_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} a_r \quad \text{ทรงกลมชั้นนอก}$$

และที่ระยะ r ระหว่างผิวทรงกลมทั้งสองหรือ $a \leq r \leq b$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$

ถ้าลองให้ทรงกลมชั้นในมีขนาดเล็กลงเรื่อยๆจนกลายเป็นจุดแต่ยังคงมีประจุ Q เท่าเดิมความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าที่ระยะทาง r เมตรจากจุดนั้นจะมีค่าเท่ากับ

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$

ฟลักซ์จำนวน Q คือเส้นที่พุ่งออกมาจากประจุไฟฟ้าอย่างสมมาตรผ่านผิวทรงกลมที่จินตนาการขึ้นมา โดยมีพื้นที่ $4\pi a^2$ เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้กับความเข้มสนามไฟฟ้าที่แผ่ออกมาจากประจุดไฟฟ้าในที่ว่างอิสระในสมการก่อนหน้า

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$$

จะได้ความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้าในที่ว่างอิสระเป็น

$$D = \epsilon_0 E$$

แม้สมการข้างบนจะใช้กับอวกาศแต่ก็ไม่ได้จำกัดเฉพาะสำหรับประจุดไฟฟ้าเท่านั้นในกรณีสำหรับการกระจายประจุเชิงปริมาตรทั่วไปในที่ว่างอิสระจะได้สมการเป็น

$$E = \int_v \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R$$

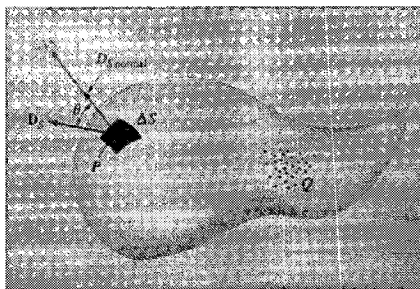
ความสัมพันธ์ได้พัฒนามาจากประจุไฟฟ้าเดี่ยวทำให้สมการข้างต้น หากค่า D ได้เป็น

$$D = \int_v \frac{\rho dv}{4\pi R^2} a_R$$

สมการข้างต้นจึงเป็นจริงสำหรับรูปแบบต่างๆของประจุไฟฟ้าในที่ว่างอิสระเรานิยามสมการข้างบนว่าเป็นนิยามของ D ในที่ว่างอิสระ เนื่องจาก D เป็นตัวแปรที่แปรผันตรงกับ E ในที่ว่างอิสระแต่เพราะเนื่องจาก D เกิดขึ้นมาจากแนวความคิดของฟลักซ์ซึ่งเป็นแนวความคิดใหม่ที่สำคัญและเพราะ D ที่ได้มามีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับสนาม E เนื่องจากค่าของ ϵ_0 น้อยมากและอีกประการหนึ่งก็จะเป็นการดีกว่าถ้าได้ทราบถึงค่า D ก่อนที่จะนำมาใช้กับसारไดอิเล็กตริก

2.2.8 กฎของเกาส์ (Gauss's Law)

การทดลองของฟาราเดย์สรุปได้ว่าสนามไฟฟ้าที่ผ่านผิวทรงกลมในจินตนาการที่สร้างอยู่ระหว่างทรงกลมร่วมทั้งสองจะเท่ากับประจุที่บรรจุอยู่ในผิวทรงกลมที่จินตนาการนั้นประจุที่บรรจุอยู่ภายในนี้จะกระจายออกมาที่ผิวทรงกลมชั้นในหรืออาจจะรวมกันเป็นประจุจุดไฟฟ้าที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมที่จินตนาการขึ้นมาก็ได้อย่างไรก็ตามเนื่องจากฟลักซ์ไฟฟ้า 1 คูลอมบ์สร้างมาจากประจุไฟฟ้า 1 คูลอมบ์ ดังนั้นที่ตัวนำไฟฟ้าชั้นในอาจจะเป็นรูปลูกบาศก์หรือแท่งก็ได้และประจุทั้งหมดที่ถูกเหนี่ยวนำออกมาที่ผิวทรงกลมชั้นนอกนั้นยังคงมีค่าเท่าเดิมแน่นอนว่าความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้านั้นจะเปลี่ยนจากการกระจายที่สมมาตรไปยังรูปทรงที่ไม่ทราบค่านั้นแต่ประจุ $+Q$ บนแท่งประจุไฟฟ้าจะเหนี่ยวนำประจุไฟฟ้า $-Q$ คูลอมบบนทรงกลมที่ล้อมรอบ ประจุไฟฟ้า $+Q$ บนแท่งประจุไฟฟ้าจะสร้าง $\psi = Q$ เส้นฟลักซ์ที่เหนี่ยวนำ $-Q$ คูลอมบบนผิวด้านนอกนั้นจากการวิเคราะห์ตามกฎของฟาราเดย์นำมาซึ่งกฎของเกาส์ซึ่งนิยามว่าฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผิวปิดใดๆจะมีค่าเท่ากับประจุไฟฟ้าทั้งหมดที่อยู่ภายในพื้นที่ผิวปิดนั้นๆหากจินตนาการว่าการกระจายของประจุไฟฟ้าที่อยู่เป็นกลุ่มของประจุจุดไฟฟ้าล้อมรอบด้วยผิวปิดในรูปแบบใดๆผิวปิดนั้นอาจจะเป็ผิวปิดของเนื้อสารจริงๆ แต่ความจริงแล้วจะเป็นพื้นผิวปิดใดๆถ้ามีประจุไฟฟ้าอยู่ภายในทั้งหมด Q จะมีเส้นฟลักซ์ไฟฟ้า Q คูลอมบ์ผ่านผิวที่ปิดล้อมเวกเตอร์ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า D ที่จุดทุกจุดบนผิวนั้นมีขนาด D โดยตัวอักษร S แสดงให้เห็นว่า D จะต้องพิจารณาบนผิวโดยทั่วไปแล้ว D จะแปรเปลี่ยนไปตามขนาดของทิศทางจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งบนพื้นผิวปิดนั้นๆ



ภาพที่ 2.16 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า D_s ที่จุด P อันเนื่องมาจากประจุ Q

เมื่อพิจารณาถึงองค์ประกอบที่เพิ่มเข้ามาของผิว ΔS ซึ่งใกล้จะเป็นส่วนประกอบของระนาบและการอธิบายองค์ประกอบผิวนี้ต้องทราบถึงขนาด ΔS และการจัดวางในอวกาศหรืออีกนัยหนึ่งคือ องค์ประกอบผิวที่เพิ่มเข้ามานี้เป็นปริมาณเวกเตอร์โดย ΔS จะมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่สัมผัสทั้งหมด และมีทิศตั้งฉากและพุ่งออกมาจากผิวปิด การพุ่งออกจากผิวปิดและการพุ่งออกจึงเป็นนิยามที่ถูกต้องกำหนดไว้ การพิจารณาองค์ประกอบพื้นผิว ΔS ที่จุด P ใดๆ โดยให้ D_s ทำมุม θ กับ ΔS

$$\Delta\psi = \text{ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่าน } \Delta S = D_{s_normal}\Delta S = D_s \cos\theta\Delta S = D_s \cdot \Delta S$$

จากนิยามของผลคูณแบบจุดจะพบว่า ฟลักซ์ไฟฟ้าทั้งหมดที่ผ่านผิวปิดนั้นจะได้มาจากผลรวมของเส้นฟลักซ์ที่องค์ประกอบผิว ΔS

$$\psi = \int d\psi = \oint_{\text{closed surface}} D_s \cdot dS$$

ผลรวมที่ได้จากการอินทิเกรตคือการอินทิเกรตผิวปิด (Closed surface integration) เนื่องจากว่า องค์ประกอบผิว ΔS เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ 2 พิกัดเสมอเช่น $dx dy$ $\rho d\phi dp$ หรือ $r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ โดยมีผลการอินทิเกรตเป็นอินทิเกรตสองชั้นตัว

อักษรย่อ S เป็นตัวบอกว่าเป็นอินทิเกรตเชิงพื้นผิวและเรียกพื้นผิวปิดนั้นว่าพื้นผิวเกาส์เซียน (Gaussian Surface) ดังนั้นสมการคณิตศาสตร์บนผิวปิดตามกฎของเกาส์คือ

$$\psi = \oint_s D_s \cdot dS = \text{ประจุที่อยู่ภายในผิวปิด} = Q$$

โดยที่ประจุที่อยู่ในนั้นอาจจะเป็นประจุจุดไฟฟ้าหลายตัว หรือเส้นประจุไฟฟ้า แผ่นประจุไฟฟ้า หรือก้อนประจุไฟฟ้าก็ได้ ซึ่งรูปแบบสมการที่นิยมใช้จะเป็น

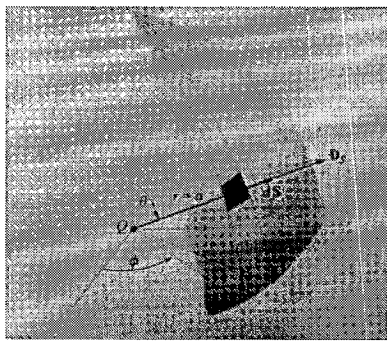
$$Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv$$

หรืออาจจะนำกฎของเกาส์มาเขียนในรูปแบบการกระจายประจุแบบทั่วไปได้คือ

$$\oint_S D_s \cdot dS = \int_{vol} \rho_v dv$$

ความหมายทางคณิตศาสตร์คือฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวปิดใดๆจะเท่ากับประจุที่อยู่ภายในผิวปิดนั้นการใช้กฎของเกาส์ในการทดลองของฟาราเดย์คือการวางประจุจุดไฟฟ้า Q ที่จุดกำเนิดในพิสัยทรงกลมแล้วเลือกผิวปิดเป็นทรงกลมที่มีรัศมี a สนามไฟฟ้าของประจุจุดที่ได้พิจารณาแล้วจะมีค่า

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$$



ภาพที่ 2.17 การประยุกต์กฎของเกาส์ในการหาสนามไฟฟ้าที่พุ่งออกมาจากประจุ Q บนผิวปิดทรงกลม

ดังนั้น

$$D = \epsilon_0 E$$

ก่อนหน้านี้เราจะได้ว่า

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$

ดังนั้นที่ผิวทรงกลมจึงมีค่า

$$D_s = \frac{Q}{4\pi a^2} a_r$$

จะได้องค์ประกอบเชิงอนุพันธ์ของพื้นที่ผิวทรงกลมมีค่าเป็น

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

หรือ

$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi,$$

ดังนั้น

$$D_s \cdot dS = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin \theta d\theta d\phi \cdot \hat{a}_r = \frac{Q}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi$$

จึงทำให้การอินทิเกรตบนผิวปิดเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi$$

เมื่อเลือกขอบเขตของการอินทิเกรตเพื่อให้ครอบคลุมผิวปิดทั้งหมดของทรงกลมจะได้รับการอินทิเกรตเท่ากับ

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{Q}{4\pi} (-\cos \theta)_0^\pi d\phi \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi} d\phi = Q$$

จากผลที่ได้แสดงว่าฟลักซ์ไฟฟ้า Q คูณลบที่ผ่านผิวปิดนั้นมีค่าเท่ากับประจุที่อยู่ภายในผิวปิดนั้น

2.2.9 ไคเวอร์เจนซ์(Divergence)

ไคเวอร์เจนซ์เป็นโอเปอเรเตอร์ที่ใช้ในการสืบหาค่าทางฟิสิกส์ มีนิยามว่า

$$\text{ไคเวอร์เจนซ์ของ } A = \text{div} A = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint A \cdot dS}{\Delta v}$$

และมักจะเขียนย่อด้วย $\text{div } A$ ไคเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ใดๆจะมีความหมายทางฟิสิกส์คือเป็นโอเปอเรเตอร์ที่แสดงด้วยเทอมทางขวามือของสมการข้างบนเมื่อพิจารณา A เป็นสมาชิกในตระกูลของความหนาแน่นฟลักซ์ของเวกเตอร์เพื่อช่วยในการแปลความหมายทางฟิสิกส์ ไคเวอร์เจนซ์ของความหนาแน่นฟลักซ์ของเวกเตอร์ A จะเป็นฟลักซ์ที่ไหลออกมาจากพื้นที่ผิวย่อยปิดต่อหน่วยปริมาตรเมื่อปริมาตรลดลงจนมีค่าเป็นศูนย์ ไคเวอร์เจนซ์ที่เป็นบวกสำหรับปริมาณเวกเตอร์นั้นบ่งบอกถึงการเป็นแหล่งจ่าย(Source)ของปริมาณเวกเตอร์ที่จุดนั้น ในทำนองเดียวกันไคเวอร์เจนซ์ที่เป็นค่าลบแสดงว่ามีการดึง(Sink)ของเวกเตอร์นั้น เมื่อเขียนสมการใหม่จะได้

$$\text{div} D = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right)$$

ความสัมพันธ์ที่ได้มีได้อยู่ในรูปของประจุไฟฟ้าเลยแต่เป็นรูปแบบที่ได้จากนิยามทางฟิสิกส์ของไดเวอร์เจนซ์กับองค์ประกอบเชิงอนุพันธ์ของปริมาตรในพิกัดฉาก ถ้าใช้ส่วนประกอบของปริมาตรในเชิงอนุพันธ์ของระบบพิกัดแบบต่างๆจะได้สมการเป็น

$$\text{div } D = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \quad (\text{พิกัดฉาก})$$

$$\text{div } D = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{พิกัดทรงกระบอก})$$

$$\text{div } D = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{พิกัดทรงกลม})$$

ไดเวอร์เจนซ์นั้นเป็นโอเปอเรเตอร์สำหรับเวกเตอร์แต่มีผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ในลักษณะที่คล้ายกับผลคูณจุดหรือผลคูณสเกลาร์ที่เป็นการคูณของเวกเตอร์สองตัวแล้วให้ปริมาณสเกลาร์ออกมา ความจริงแล้วไดเวอร์เจนซ์บอกให้เราทราบว่าฟลักซ์ไฟฟ้าจำนวนเท่าไรที่ออกมาจากปริมาตรย่อยบนพื้นฐานต่อหน่วยปริมาตรโดยไม่ได้รวมถึงทิศทางการไหลของ ฟลักซ์นั้นๆ

2.2.10 โอเปอเรเตอร์ ทางเวกเตอร์ ∇ และทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์

(The vector operator ∇ and The divergence theorem)

เนื่องจากไดเวอร์เจนซ์เป็นโอเปอเรเตอร์ทางเวกเตอร์ที่ให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นปริมาณสเกลาร์ เช่นเดียวกันกับผลคูณจุดของเวกเตอร์ซึ่งมีความเป็นไปได้ว่าจะหาอะไรบางอย่างมาคูณกับ D แล้วให้ค่าผลลัพธ์ออกมาเป็น

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

จะพบว่าค่าดังกล่าวไม่สามารถหาได้จากผลคูณจุดแต่จะต้องเป็นโอเปอเรเตอร์อย่างหนึ่งมาคูณ ด้วยเหตุนี้เราจึงกำหนดให้ ∇ เป็นโอเปอเรเตอร์ทางเวกเตอร์นั้น

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

โอเปอเรเตอร์ทางสเกลาร์ที่คล้ายกันนี้มีอยู่ 2-3 วิธีสำหรับใช้ในการแก้สมการอนุพันธ์เช่นเรามักจะใช้ D แทน $\frac{d}{dx}$, D^2 แทน $\frac{d^2}{dx^2}$ และ D^n แทน $\frac{d^n}{dx^n}$ เป็นต้น เรากำหนดว่า ∇ สามารถใช้แทนโอเปอเรเตอร์ต่างๆได้ โดยมีข้อยกเว้นที่สำคัญข้อหนึ่งคือจะให้ค่าเป็นอนุพันธ์ย่อยแทนที่จะเป็นผลคูณสเกลาร์ เมื่อพิจารณา $\nabla \cdot D$ จะกำหนดด้วย

$$\nabla \cdot D = \left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \right) \cdot (D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z)$$

เมื่อตัดเทอมของเวกเตอร์หน่วยที่เป็นศูนย์ออกไปจะได้สมการเป็น

$$\nabla \cdot D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

ซึ่งเรียกว่าเป็นไดเวอร์เจนซ์ของ D จะได้

$$\text{div } D = \nabla \cdot D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

ประโยชน์ของ $\nabla \cdot D$ จะได้ว่ารูปสมการของอนุพันธ์ย่อยที่ถูกต้องและเขียนได้เร็วกว่าในเฉพาะพิกัดฉากเท่านั้น ในอีกแง่หนึ่ง $\text{div } D$ ทำให้ทราบถึงการแปลความหมายของไดเวอร์เจนซ์ นอกจากนี้โอเปอเรเตอร์ของเวกเตอร์ ∇ ไม่ได้ใช้เพียงแต่ไดเวอร์เจนซ์เท่านั้นแต่ยังใช้กับโอเปอเรเตอร์อื่นด้วยเช่น ∇u เมื่อ u คือ ปริมาณสเกลาร์ใดๆที่ทำให้

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} a_x + \frac{\partial u}{\partial y} a_y + \frac{\partial u}{\partial z} a_z$$

โอเปอเรเตอร์ ∇ ไม่มีรูปแบบเฉพาะในระบบพิกัดอื่นถ้าเราพิจารณา ∇ ในพิกัดทรงกระบอกดังนั้น $\nabla \cdot D$ ซึ่งใช้แทนไดเวอร์เจนซ์ของ D ในพิกัดทรงกระบอกคือ

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

จะพบว่าเราไม่มีรูปแบบเฉพาะสำหรับ ∇ เพียงแบบเดียวที่จะทำให้ผลรวมของค่าอนุพันธ์ย่อยซึ่งหมายความว่ายังไม่สามารถเขียน ∇u เป็นสมการใดๆได้ ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์เป็นทฤษฎีที่สะดวกในการพิจารณาความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า เมื่อพิจารณาโดยเริ่มจากกฎของเกาส์

$$\oint_S D \cdot dS = Q$$

จาก

$$Q = \int_V \rho_v dv$$

แทน

$$\rho_v \text{ ด้วย } \nabla \cdot D = \rho_v$$

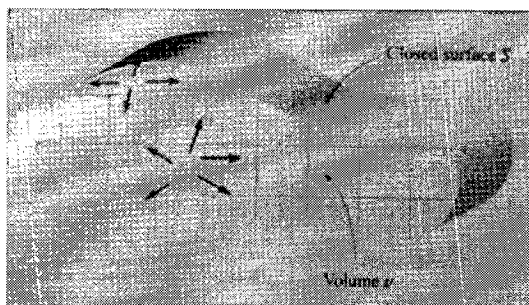
จะได้

$$\oint_S D \cdot dS = Q = \int_V \rho_v dv = \int_V \nabla \cdot D dv$$

สมการความสัมพันธ์ระหว่างเทอมแรกกับเทอมสุดท้ายคือ ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์

$$\oint_S D \cdot dS = \int_V \nabla \cdot D dv$$

ซึ่งมีนิยามว่า ผลการอินทิเกรตของส่วนประกอบตั้งฉากของสนามเวกเตอร์ใดๆ บนผิวปิดนั้นจะเท่ากับผลการอินทิเกรตของไดเวอร์เจนซ์ของสนามเวกเตอร์ที่พุ่งออกมาจากปริมาตรที่ปิดล้อมโดยผิวปิดนั้น



ภาพที่ 2.18 แสดงทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์สำหรับฟลักซ์ทั้งหมดที่พุ่งผ่านผิวปิด

ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์เป็นจริงสำหรับสนามเวกเตอร์ใดๆ ถึงแม้ว่าเราจะหามาได้จากความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า D และสามารถนำไปประยุกต์กับสนามอื่นได้ ประโยชน์ของการแปลงระหว่างอินทิเกรต 3 ชั้นในปริมาตรก่อนหนึ่งมาเป็นอินทิเกรต 2 ชั้นของผิวที่ปิดล้อมปริมาตรนั้น ซึ่งทำให้การแก้ปัญหาทำได้ง่ายขึ้นมาก ประโยชน์ของทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ทำให้เห็นภาพทางกายภาพได้มากขึ้น หากเราพิจารณาปริมาตร v ซึ่ง(แสดงตามรูป)ล้อมรอบด้วยผิวปิด S การแบ่งปริมาตรออกมาเป็นส่วนประกอบเล็กๆขนาดต่างๆกันจำนวนมากและพิจารณาแค่ 1 เซลล์ แสดงให้เห็นว่าฟลักซ์จากเซลล์นั้นไหลเข้าหรือพุ่งออกจากเซลล์ไปยังเซลล์ข้างเคียงถ้าเซลล์นั้นไม่มีส่วนของผิวภายนอก สรุปได้ว่าไดเวอร์เจนซ์ของความหนาแน่นของฟลักซ์ที่ผ่านปริมาตรนั้นจะให้ผลเช่นเดียวกันกับการพิจารณาฟลักซ์สุทธิที่ตัดผ่านผิวปิดนั้น

2.2.11 พลังงานและศักย์ไฟฟ้า

การศึกษาของคูโลมบ์เพื่อจะนำมาใช้ในการหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่บริเวณใดๆ สำหรับสนามเนื่องจากประจุอย่างง่ายชนิดต่างๆและใช้กฎของเกาส์ในการประยุกต์ใช้คำนวณหาสนามที่ได้จากประจุที่มีการกระจายเป็นรูปทรงสมมาตรการใช้กฎของเกาส์เป็นวิธีการที่ง่ายสำหรับกรณีประจุแบบสมมาตรโดยเฉพาะ เนื่องจากการอินทิเกรตจะกระทำเพียงพื้นที่ส่วนย่อยของพื้นที่ผิวปิดที่ได้เลือกไว้เท่านั้น กฎของคูโลมบ์มีความสามารถสูงที่จะนำไปใช้แก้ปัญหาต่างๆซึ่งกฎของเกาส์ไม่สามารถแก้ปัญหาได้การใช้กฎของคูโลมบ์นั้นมีความยุ่งยากและซับซ้อนในการใช้งานมากกว่าด้วยเหตุนี้จึงทำให้สามารถหาค่าความเข้มสนามไฟฟ้าได้อย่างแม่นยำสนามเวกเตอร์จะต้องหาได้โดยตรงจากการกระจายประจุ ถ้าเราสามารถหาฟังก์ชันสเกลาร์ซึ่งหาได้จากการอินทิเกรตเพียงชั้นเดียวแล้วนำมาคำนวณหาสนามไฟฟ้า ฟังก์ชันสเกลาร์นี้เป็นที่รู้จักกันในนามของศักย์ไฟฟ้า(Potential)ซึ่งจะพบว่าศักย์ไฟฟ้าสามารถนำไปบรรยายทางกายภาพได้ดีกว่าการให้นิยามของตัวแปรในกลุ่มของสนามไฟฟ้า ศักย์ไฟฟ้าเป็นเครื่องมือสำหรับนำไปหาสนามไฟฟ้าด้วยการอินทิเกรตสเกลาร์

2.2.12 พลังงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุจุดภายใต้สนามไฟฟ้า

(Energy Expended in Moving a Point Charge in an Electric Field)

ความเข้มสนามไฟฟ้ามีนิยามเป็นแรงที่กระทำต่อประจุทดสอบ 1 หน่วยที่ตำแหน่ง ซึ่งต้องการทราบค่าเวกเตอร์ของสนามนี้ ถ้าเราทำการเคลื่อนประจุทดสอบด้านหรือสวนทางกับทิศทางของสนามไฟฟ้าเราจะต้องใช้แรงที่มีทิศตรงกันข้ามกับแรงที่ได้จากสนามนั้น จึงทำให้เกิดพลังงานหรือเกิดงานขึ้นจากการกระทำนี้ต้องการให้ประจุเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวกับสนามไฟฟ้าพลังงานที่ได้จะกลายเป็นค่าติดลบคือเราไม่ได้งานหรือเราไม่ได้งานแต่สนามเป็นตัวกระทำแทน เช่นหากต้องการเคลื่อนประจุ Q ให้ได้ระยะทาง dL ภายใต้สนามไฟฟ้า E แรงที่กระทำต่อประจุ Q จากสนาม E มีค่าเป็น

$$F_E = QE$$

โดย F_E เป็นแรงที่เกิดจากสนามไฟฟ้า ส่วนประกอบของแรงในทิศทางเดียวกัน dL ซึ่งจะต้องหาค่าออกมาเป็น

$$F_{EL} = F \cdot a_L = QE \cdot a_L$$

เมื่อ a_L เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง dL แรงที่เราจะต้องใส่เข้าไปเพื่อเคลื่อนประจุนี้จะต้องมีค่าเท่ากับแรงจากสนามแต่มีทิศตรงกันข้ามเป็น

$$F_{\text{appl}} = -QE \cdot a_L$$

และพลังงานที่ใช้ไปสำหรับการกระทำนี้เท่ากับผลคูณของแรงกับระยะทาง นั่นคือ งานเชิงอนุพันธ์ที่ได้จากแหล่งพลังงานภายนอกสำหรับการเคลื่อนประจุ $Q = -QE \cdot a_L dL = -QE \cdot dL$

$$\text{หรือ } dW = -QE \cdot dL$$

เมื่อเราแทน $a_L dL$ ด้วยตัวแปรอย่างง่ายเป็น dL ปริมาณพลังงานเชิงอนุพันธ์อาจจะมีค่าเป็นศูนย์หากค่า Q E หรือ dL เป็นศูนย์หรือในอีกกรณีหนึ่งคือ E กับ dL มีทิศทางตั้งฉากซึ่งกันและกันหรือประจุจะเคลื่อนไปในทิศที่ตั้งฉากกับสนามไฟฟ้า เมื่อพิจารณาประจุภายใต้สนามไฟฟ้าพลังงานที่ได้จากการเคลื่อนประจุในระยะทางจำกัดค่าหนึ่งสามารถคำนวณได้จากการอินทิเกรต พลังงานที่ได้โดยการเคลื่อนประจุภายในสนามไฟฟ้า

$$W = -Q \int_{\text{initial}}^{\text{final}} E \cdot dL$$

โดยที่เส้นทางการอินทิเกรตจะต้องถูกกำหนดขึ้นก่อนการอินทิเกรตเพื่อหาค่างานโดยสมมติว่าประจุนั้นอยู่ในสถานะหยุดนิ่งตั้งแต่ตำแหน่งเริ่มต้น ไปจนถึงตำแหน่งสุดท้ายของการอินทิเกรต

2.2.13 ความต่างศักย์และศักย์ไฟฟ้า(Definition of potential Difference and Potential)

เรานิยามวิธีการหาความสัมพันธ์ของงานโดยแหล่งพลังงานจากภายนอกที่ใช้ในการเคลื่อนประจุ Q จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งภายใต้สนาม E ค่าใดๆ ส่วนนิยามของความต่างศักย์และงานนั้นจะใช้วิธีการเช่นเดียวกันกับการนิยามความเข้มสนามไฟฟ้า ซึ่งเป็นแรงที่กระทำต่อประจุทดสอบ 1 หน่วยและความต่างศักย์ไฟฟ้า V คืองาน(จากแหล่งพลังงานภายนอก)ที่ใช้ในการเคลื่อนประจุทดสอบบวกหนึ่งหน่วยจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งภายใต้สนามไฟฟ้างั้น

$$\text{ความต่างศักย์} = V = - \int_{\text{initial}}^{\text{final}} E \cdot dL$$

ความต่างศักย์ V_{AB} หมายถึงความต่างศักย์ระหว่างจุด A กับจุด B ซึ่งเป็นงานในการเคลื่อนย้ายประจุหนึ่งหน่วยจากจุด B ที่เป็นจุดตั้งต้นไปยังจุด A ที่เป็นจุดปลายซึ่งเปรียบเสมือนว่าจุดตั้งต้น B เป็นจุดที่มักจะถูกกำหนดให้อยู่ใกล้ถึงระยะอนันต์ในขณะที่จุด A เป็นตำแหน่งที่แน่นอนของประจุหนึ่งที่เราจะทำการพิจารณา เราวัดความต่างศักย์ในหน่วยจูลต่อคูลอมบ์ซึ่งเป็นการนิยามโวลต์ที่เป็นหน่วยร่วมกับแรงดันไฟฟ้าคือ V ดังนั้นความต่างศักย์ระหว่างจุด A ถึงจุด B จึงมีค่าเป็น

$$V_{AB} = - \int_B^A E \, dL$$

และงานนั้นจะมีค่าเป็นบวกเมื่อการเคลื่อนที่ประจุบวกจาก B ไป A ซึ่งหากพิจารณาเส้นประจุเราจะพบว่างานที่กระทำในการเคลื่อนที่ประจุจาก $\rho = b$ จนถึง $\rho = a$ มีค่าเป็น

$$W = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

ดังนั้นความต่างศักย์ระหว่างจุดที่ $\rho = a$ ถึง $\rho = b$ จึงมีค่าเป็น

$$V_{ab} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

เราสามารถใช้นิยามนี้หาค่าความต่างศักย์โดยวิธีการอื่นระหว่างจุด A และจุด B ที่ระยะรัศมี r_A และ r_B จากประจุ Q ตามลำดับโดยเลือกวงประจุ Q ไว้ที่จุดกำเนิด

$$E = E_r a_r = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$$

และ $dL = dr a_r$

เราจะได้

$$V_{AB} = - \int_B^A E \, dL = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

ถ้า $r_A > r_B$ ความต่างศักย์ V_{AB} มีค่าเป็นบวกแสดงว่างานที่ได้นั้นต้องใช้พลังงานจากแหล่งพลังงานภายนอกมานำประจุบวกเคลื่อนที่จากระยะ r_B ไปยัง r_A โดยปรกติแล้วจะกล่าวถึงศักย์ไฟฟ้าหรือศักย์ค่าสัมบูรณ์ที่จุดใดๆ มากกว่าความต่างศักย์ระหว่างจุด 2 จุด แต่จะต้องวัดเทียบกับจุดอ้างอิงที่พิจารณาว่า ศักย์ไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจุดอ้างอิงค่าศูนย์ในทางปฏิบัติหรือการวัดทางฟิสิกส์นั้นคือกราวด์ (Ground) ซึ่งหมายถึงศักย์ที่บริเวณผิวเปลือกโลกนั่นเองในทางทฤษฎีมักจะยึดว่าผิวนี้เป็นระนาบอนันต์ที่มี ศักย์ไฟฟ้าเป็นศูนย์ จุดอ้างอิงอีกแบบหนึ่งที่นิยมอ้างอิงถึงก็คือ จุดอ้างอิงที่ระยะอนันต์การนำไปใช้มัก

ปรากฏอยู่ในทฤษฎีการประมาณสถานการณ์ทางฟิสิกส์ที่อยู่ห่างไกลจากผิวโลกมาก ในบางโอกาสได้มีการนำเอารัศมีของผิวทรงกระบอกมาเป็นจุดอ้างอิงศูนย์ถ้าเป็นทรงกระบอกแบบสมมาตรเนื่องจากการแสดงค่าที่จุดระยะอนันต์ไม่สะดวก เป็นต้น และเรามักจะนิยามความต่างศักย์ระหว่างจุด A กับจุด B เมื่อทั้งสองจุดมีศักย์อ้างอิงศูนย์ที่ตำแหน่งเดียวกัน

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

2.2.14 สนามศักย์ไฟฟ้าของระบบประจุ(The Potential Field of a System of Charges)

ศักย์ไฟฟ้าที่จุดๆหนึ่งกำหนดโดยงานที่ได้รับเมื่อทำการเคลื่อนประจุทดสอบหนึ่งหน่วยจากจุดอ้างอิงมายังบริเวณที่พิจารณาเราได้นำเองแรงนั้นมานิยามเป็นศักย์ไฟฟ้าซึ่งไม่ขึ้นกับเส้นทางใดในการเคลื่อนย้ายประจุและสนามแปรเป็นเชิงเส้นกับประจุทำให้สามารถใช้หลักการซ้อนทับ(Superposition)มาประยุกต์ใช้ซึ่งในขั้นตอนต่อไปจะพิจารณาว่าศักย์เนื่องจากระบบประจุที่มีค่าที่จุดใดๆ ไม่ขึ้นกับเส้นทางในการเคลื่อนที่ประจุทดสอบไปยังจุดนั้นๆ ซึ่งในกรณีของสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุจุดเดียวซึ่งหาค่ามาจากประจุ Q_1 ที่วางอยู่ที่ตำแหน่ง r_1 เมื่อหาระยะห่างจาก Q_1 ไปยังจุด r ได้เป็น $|r-r_1|$ เมื่อคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้าโดยให้ค่าศักย์อ้างอิงศูนย์ที่จุดระยะอนันต์ได้ค่าเป็น

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |r-r_1|}$$

ศักย์ไฟฟ้ารวมที่เกิดจากประจุจุด 2 ค่า Q_1 ที่ r_1 และ Q_2 ที่ r_2 เป็นฟังก์ชันเพียง $|r-r_1|$ กับ $|r-r_2|$ เท่านั้น ซึ่งเป็นระยะของจุดที่พิจารณาห่างจาก Q_1 และ Q_2 ตามลำดับ

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |r-r_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |r-r_2|}$$

จะพบว่าเมื่อเพิ่มประจุเข้าไปเรื่อยๆ ศักย์ไฟฟ้าจะมีค่าเพิ่มตามจำนวน n ของประจุจุดคือ

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |r-r_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |r-r_2|} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 |r-r_n|}$$

ถ้าประจุแต่ละจุดอ้างอิงถึงประจุในปริมาตรหนึ่งที่มีขนาดเล็กๆ โดยมีการกระจายความหนาแน่นอย่างสม่ำเสมอในปริมาตรนั้นมีค่าเป็น

$$V(r) = \frac{\rho_v(r_1)\Delta v_1}{4\pi\epsilon_0|r-r_1|} + \frac{\rho_v(r_2)\Delta v_2}{4\pi\epsilon_0|r-r_2|} + \dots + \frac{\rho_v(r_n)\Delta v_n}{4\pi\epsilon_0|r-r_n|}$$

หากให้จำนวนประจุที่เพิ่มเข้าไปเข้าใกล้อนันต์สมการจะกลายเป็นความสัมพันธ์ทางอินทิกรัล

$$V(r) = \int_v \frac{\rho_v(r')dv'}{4\pi\epsilon_0|r-r'|}$$

เมื่อต้องการหาค่าสนามศักย์ที่ระยะห่างจากประจุแบบจุด จากสมการข้างต้นจะพบว่า ศักย์ไฟฟ้า $V(r)$ เทียบกับศักย์อ้างอิงศูนย์ที่จุดอนันต์และวัดจากงานที่กระทำในการนำประจุหนึ่งหน่วยจากอนันต์ภายใต้สนามไฟฟ้ามายังจุด r ที่หาค่าศักย์นั้นก่อนประจุที่มีความหนาแน่น $\rho_v(r')$ และส่วนของปริมาตรเชิงอนุพันธ์ dv' รวมกันกลายเป็นประจุที่อยู่ภายในปริมาตรเชิงอนุพันธ์ $\rho_v(r')dv'$ อยู่ที่ตำแหน่ง r' ส่วนระยะ $|r-r'|$ คือระยะจากจุดที่เป็นแหล่งจ่ายไปยังจุดที่พิจารณาสนามศักย์อินทิกรัลที่ได้เป็นแบบ 3 ชั้น(เชิงปริมาตร) ถ้าประจุกระจายอยู่ในรูปแบบเส้นประจุหรือกระจายออกเป็นแผ่นประจุแล้วศักย์ไฟฟ้าที่หาได้จะมาจากการอินทิเกรตไปตามแนวเส้นประจุหรือตามพื้นที่ผิวของประจุนั้นคือ

$$V(r) = \int \frac{\rho_L(r')dL'}{4\pi\epsilon_0|r-r'|}$$

$$V(r) = \int_s \frac{\rho_s(r')dS'}{4\pi\epsilon_0|r-r'|}$$

สมการการอินทิเกรตของศักย์ไฟฟ้าจะอยู่ในเทอมของการกระจายของประจุที่มีความคล้ายคลึงกันมากเมื่อเทียบกับสมการความเข้มสนามไฟฟ้าคือ

$$E(r) = \int_{vol} \frac{\rho_v(r')dv'}{4\pi\epsilon_0|r-r'|^2} \frac{r-r'}{|r-r'|}$$

และจากข้อกำหนดที่ว่าจะไม่มีการใดๆเกิดขึ้นเมื่อทำการเคลื่อนประจุจนครบรอบในเส้นทางหนึ่ง

$$\oint E \cdot dl = 0$$

สมการข้างต้นจะเป็นจริงเสมอในเงื่อนไขสำหรับสนามสถิตย์ สนามใดที่เป็นสนามอนุรักษ์ (Conservative field) เมื่ออินทิเกรตตรงเส้นทางปิดของสนามจะมีค่าเป็นศูนย์

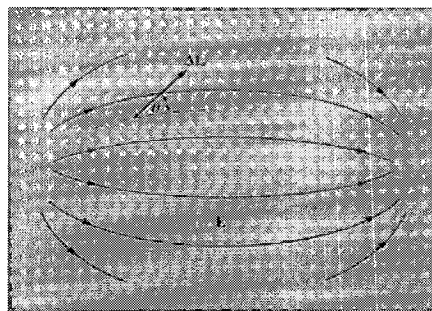
2.2.15 เกรเดียนต์ของศักย์ไฟฟ้า(Potential Gradient)

ในการคำนวณหาศักย์ไฟฟ้าเราสามารถหาได้โดยตรงจากความเข้มสนามไฟฟ้าด้วยการอินทิเกรตตามเส้นทางที่กำหนดและสามารถหาได้จากการกระจายอย่างง่ายของประจุเองโดยการ

อินทิเกรตเชิงปริมาตรของประจุแต่ในทางปฏิบัติแล้วเราไม่สามารถทราบค่าของสนามและการกระจายของประจุได้เสมอไป จากข้อมูลที่บรรยายถึงผิวที่มีศักย์เท่ากัน 2 ผิวสมมติว่ามีแผ่นตัวนำคู่ขนานกันสองแผ่นที่มีหน้าตัดเป็นวงกลมมีศักย์ไฟฟ้าที่ตรงข้ามกันหากต้องการทราบค่าของการเก็บประจุของตัวนำทั้งสองหรือตัวแปรประจุและกระแสที่กระจายอยู่บนตัวนำนั้น ปริมาณเหล่านี้อาจจะหามาได้จากสนามศักย์ไฟฟ้าและเป้าหมายหลักคือการหาวิธีที่ง่ายสำหรับการหาค่าความเข้มสนามไฟฟ้าจากศักย์ไฟฟ้าโดยตรง จากสมการความสัมพันธ์ทางการอินทิเกรตเชิงเส้นของปริมาณทั้งสอง

$$V = -\int E \cdot dL$$

จะง่ายกว่าถ้าเราพิจารณาค่าในทางกลับกันโดยหา V จาก E



ภาพที่ 2.19 เวกเตอร์ความยาวที่เพิ่มขึ้นเป็น ΔL ทำมุม θ กับสนาม E

จากสมการอาจจะใช้ทิศทางของ ΔL ไปตามสนาม E ที่มีค่าคงที่ค่าหนึ่งซึ่งอาจจะเป็นผลให้เกิดความต่างศักย์ ΔV ในย่านความยาวนี้เป็น

$$\Delta V = -E \Delta L$$

เมื่อพิจารณาพื้นที่ในปริมาตรหนึ่งดังรูปซึ่งทั้ง E และ V มีค่าเปลี่ยนไปเมื่อเลื่อนจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งจากสมการให้เลือกเวกเตอร์ของความยาว $\Delta L = \Delta L a_L$ ที่สนามไฟฟ้า E มีค่าเพิ่มขึ้นในทิศทาง a_L คูณด้วยขนาดของสนาม(เป็นการคูณแบบจุด)เพื่อหาค่าความต่างศักย์ระหว่างจุดตั้งต้นและจุดสุดท้ายของ ΔL ถ้าเราให้มุมระหว่าง ΔL กับ E มีค่าเป็น θ จะได้

$$\Delta V = -E \Delta L \cos \theta$$

หากสมมติว่าจุดอ้างอิงเริ่มต้นอยู่ที่ศูนย์และจุดปลายอยู่ที่ (x, y, z) เราทราบว่าผลการอินทิเกรตได้เป็นฟังก์ชันเดียวกันกับจุดปลาย (x, y, z) เพราะว่าสนาม E เป็นสนามอนุรักษ์ ดังนั้น V จึงมีค่าเป็นฟังก์ชันของ (x, y, z) อย่างเดียวกัน เราจะได้

$$\frac{dV}{dL} = -E \cos \theta$$

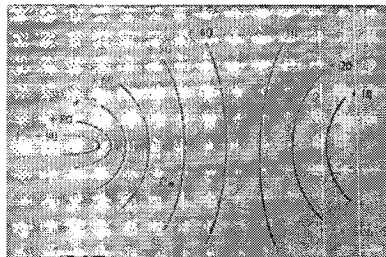
เราใส่ ΔL ในทิศทางใดเพื่อให้ได้ ΔV มีค่าสูงสุดและพึงระวังว่า E เป็นค่าที่เรากำหนดที่จุดที่เราทำงานอยู่โดยมีค่าขึ้นกับทิศของ ΔL แต่ขนาดของ ΔL เป็นค่าคงที่ ส่วนตัวแปรในที่นี้คือ a_L ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ ΔL จึงเห็นได้ว่าการเพิ่มค่าสูงสุดในทางบวกของศักย์ไฟฟ้า $\Delta V_{\max}$ จะเกิดขึ้นเมื่อ $\cos \theta$ เป็น -1 หรือที่จุด ΔL มีทิศทางตรงข้ามกับ E ซึ่งสามารถเขียนเงื่อนไขได้เป็น

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} = E$$

ซึ่งจะพบความสัมพันธ์ที่สำคัญ 2 ประการสำหรับ E กับ V ที่จุดใดๆ

1. ขนาดของความเข้มสนามไฟฟ้าหาได้จากอัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุดของศักย์ไฟฟ้าต่อระยะทาง
2. ขนาดสูงสุดนี้หาได้เมื่อระยะทางที่เพิ่มขึ้นมีทิศตรงข้ามกับทิศของ E หรืออาจกล่าวได้ว่าทิศของ E มีทิศตรงข้ามกับทิศของศักย์ไฟฟ้าที่มีค่าเพิ่มขึ้น

ความสัมพันธ์ของศักย์ไฟฟ้าแสดงดังรูป จากข้อมูลที่ได้ของสนามศักย์ไฟฟ้าคือเส้นหรือผิวสมศักย์ในสองมิติเราจะพิจารณาข้อมูลของความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด P โดยที่จุด P วางแนวการเพิ่มค่าระยะทางสั้นๆ ΔL ไปในทิศทางต่างๆโดยเน้นเฉพาะแนวที่ศักย์มีค่าเปลี่ยนแปลงจากค่าที่ได้ศักย์มีค่าเพิ่มขึ้นไปในทิศทางด้านซ้ายและจากคุณสมบัติข้อ 2 ความเข้มสนามไฟฟ้าจะมีทิศจะมีทิศในทางตรงข้ามคือไปทางขวามือของจุด P ขนาดที่ได้หาจากผลหารของศักย์ไฟฟ้าที่เปลี่ยนไปกับระยะทาง



ภาพที่ 2.20 สนามศักย์ไฟฟ้าที่แสดงโดยผิวสมศักย์ ที่จุดต่างๆบนผิวสมศักย์

สนาม E ตั้งฉากกับผิวสมศักย์

ทิศทางที่ศักย์เพิ่มขึ้นนี้จะตั้งฉากกับเส้นสมศักย์และจะเป็นจริงถ้าให้ ΔL วางขนานไปตามเส้นสมศักย์จะทำให้ $\Delta V = 0$ จากนิยามของผิวสมศักย์จะได้

$$\Delta V = -E \Delta L = 0$$

เนื่องจากไม่มีค่า E หรือ ΔL ที่เป็นศูนย์ดังนั้น E จะต้องตั้งฉากกับ ΔL หรือตั้งฉากกับผิวศักย์ไฟฟ้าที่เท่ากัน ดังนั้นจะต้องคำนวณหาข้อมูลของสนามศักย์ไฟฟ้าก่อน และเมื่อจะพิจารณาทิศทางของ ΔL ที่ทำให้ศักย์ไฟฟ้ามีค่าเพิ่มขึ้นสูงสุด เทอมของสนามศักย์ไฟฟ้าซึ่งเป็นไปได้มากกว่าเทอมของความเข้มสนามไฟฟ้างั้นจึงมีการใส่เวกเตอร์หน่วย a_N ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวสมศักย์ที่ชี้ตรงไปยังทิศทางที่มีศักย์ไฟฟ้าสูงกว่าความเข้มสนามไฟฟ้าจึงเขียนในเทอมของศักย์ไฟฟ้าได้

$$E = \left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} a_N$$

แสดงว่าขนาดของ E ได้จากอัตราการเปลี่ยนแปลงต่อระยะทางสูงสุดของ V และทิศของ E เป็นทิศทางตั้งฉากกับผิวสมศักย์(ในทิศที่ศักย์มีค่าลดลง) ดังนั้น $dV/dL|_{\max}$ จะเกิดขึ้นเมื่อ ΔL มีทิศทางเดียวกับ a_N เราอาจจะเขียนสมการนี้ได้เป็น

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} = \frac{dV}{dN}$$

$$E = \frac{dV}{dN} a_N$$

ซึ่งอธิบายความหมายทางฟิสิกส์เพื่อหาค่าความเข้มสนาม E จากศักย์ไฟฟ้า กระบวนการหา V จาก E นี้ไม่มีความเป็นหนึ่ง(Unique)เพราะค่าทั้งสองไม่ได้เป็นชนิดเดียวกันแต่เนื่องจากการหาความสัมพันธ์ระหว่างสนามสเกลาร์กับสนามเวกเตอร์นั้นสามารถใช้ได้กับการวิเคราะห์ทางเวกเตอร์ได้เสมอ การกระทำต่อ V เพื่อให้ได้ค่า $-E$ คือเกรเดียนต์(Gradient)โดยเกรเดียนต์ของสนามสเกลาร์ T มีนิยามเป็น

$$\text{เกรเดียนต์ของ } T = \text{grad } T = \frac{dT}{dN} a_N$$

เมื่อ a_N คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิวสมศักย์ซึ่งมีการตั้งฉากกับจุดที่เลือกในทิศทางที่ T มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยการใช้เทอมใหม่นี้เราจึงเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง V กับ E ได้เป็น

$$E = -\text{grad } V$$

เนื่องจากเคยแสดงให้เห็นแล้วว่า V เป็นฟังก์ชันที่แน่นอนของ x, y, z จึงอาจใช้อนุพันธ์รวมได้เป็น

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

แต่เราเคยมี

$$dV = -E \cdot dL = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

ดังนั้นสมการทั้งสองจะเป็นจริงที่ทุกๆค่าของ dx, dy, dz

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

เมื่อเอาผลลัพธ์นี้มารวมกันทางเวกเตอร์จะได้เป็น

$$E_z = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z \right)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการและจัดรูปใหม่จะได้เกรเดียนต์ของฟังก์ชันเป็น

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$$

เกรเดียนต์ของสเกลาร์จะให้ค่าเป็นเวกเตอร์ ความสัมพันธ์ทางเกรเดียนต์เป็นคำอธิบายอย่างหนึ่งในทางฟิสิกส์จากสมการแสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงตามระยะทางสูงสุดของปริมาณสเกลาร์และทิศทางที่ได้เมื่อค่าสูงสุดเกิดขึ้นนั้นก็เป็ธรรมชาติทางเวกเตอร์ของเกรเดียนต์เอง

2.2.16 โอเปอเรเตอร์เวกเตอร์

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

เมื่อนำไปใส่เป็นโอเปอเรเตอร์กระทำกับสเกลาร์ T เป็น ∇T จะได้

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} a_x + \frac{\partial T}{\partial y} a_y + \frac{\partial T}{\partial z} a_z$$

เขียนได้เป็น $\nabla T = \text{grad } T$

ทำให้เขียนสมการระหว่าง E กับ V ได้เป็น

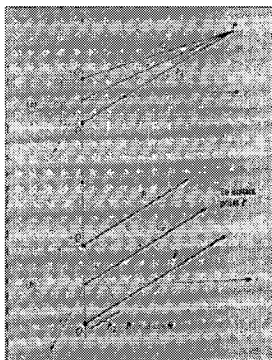
$$E = -\nabla V$$

นอกจากนี้เกรเดียนต์ยังสามารถเขียนได้ในเทอมของอนุพันธ์ย่อยในระบบพิกัดอื่นๆ ทั้งพิกัดทรงกลม และพิกัดทรงกระบอก

2.2.17 ไดโพล(Dipole)

สนามเนื่องจากไดโพล เป็นสนามที่มีความสำคัญเนื่องจากเป็นพฤติกรรมพื้นฐานสำหรับสารไดอิเล็กตริกที่มีต่อสนามไฟฟ้า และได้มีการปรับให้เข้ากับวิธีการคำนวณโดยใช้วิธีภาพจำลองและได้มาจากการพิจารณาหลักการเรื่องของศักย์ไฟฟ้า ไดโพลไฟฟ้านั้นเป็นชื่อของหระจุไฟฟ้าคู่หนึ่งที่มีขนาดเท่ากันแต่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามวางห่างกันด้วยระยะทางใกล้มากเมื่อเทียบกับระยะทางระหว่างประจุทั้งสองไปยังจุด P ที่ เป็นจุดที่ต้องการหาค่าสนามและศักย์ไฟฟ้าประจุไดโพลแสดงดังรูป ระยะห่างระหว่างประจุทั้งสองไปยังจุด P อธิบายได้โดยใช้หลักของระบบพิกัดทรงกลม r, θ และ $\phi = 90^\circ$ ซึ่งอยู่ในมุมมองที่สมมาตรตามแนวราบประจุบวกและประจุลบทั้งสองมีระยะห่างต่อกัน d และมีพิกัดฉากเป็น

$(0, 0, d/2)$ และ $(0, 0, -d/2)$ ตามลำดับ การจะหาความเข้มสนามไฟฟ้าโดยการรวมค่าของสนามที่ได้จากประจุทีละประจุเข้าด้วยกันหรือหาค่าศักย์ไฟฟ้าก่อนเป็นอย่างไรก็ง่ายกว่าวิธีแรก แต่ทั้ง 2 วิธีสามารถหาค่าหนึ่งจากอีกค่าหนึ่งได้



ภาพที่ 2.21 โครงสร้างของไดโพลไฟฟ้า ที่อยู่ในทิศ a_z สำหรับระยะทางจากไดโพลไปยังจุด P

หากเลือกหาค่าสนาม E ก่อนเราจำเป็นต้องพิจารณา 2 ส่วนประกอบซึ่งอยู่ในระบบพิกัดทรงกลม(เพราะจากความสมมาตรทำให้ทราบว่า E_θ มีค่าเป็นศูนย์) จากนั้นจะสามารถหาค่า V จาก E ด้วยการอินทิเกรตเชิงเส้นและในตอนสุดท้ายจะมีการกำหนดศักย์อ้างอิงศูนย์ด้วย เนื่องจากการอินทิเกรตเชิงเส้นสามารถหาได้จากเฉพาะความต่างศักย์ที่จุด 2 จุดที่อยู่ปลายทางของเส้นทางอินทิกรัลเท่านั้น ในอีกทางหนึ่งเราอาจจะเลือกคำนวณศักย์ไฟฟ้าก่อนซึ่งจะเป็นวิธีการที่ง่าย ที่เป็นเช่นนี้ก็เนื่องมาจากเราหาศักย์ไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งแต่ละจุดก่อน แล้วนำมารวมกันในเชิงสเกลาร์และเนื่องจากทิศทางของเวกเตอร์ E ที่ขึ้นกับตำแหน่งที่พิจารณานั้นจะคำนวณได้ง่ายโดยใช้ค่าลบของเกรเดียนต์ V ซึ่งวิธีการนี้ทำได้ง่ายกว่าซึ่งจะให้ระยะจาก Q และ $-Q$ ไปยังจุด P ไปยัง R_1 และ R_2 ตามลำดับสามารถเขียนศักย์ไฟฟ้าได้เป็น

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

จะสังเกตได้ว่าที่ระนาบ $z=0$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างประจุทั้งสองและเป็นจุดที่อยู่ในแนวซึ่ง $R_1 = R_2$ เสมอ ดังนั้นจึงมีศักย์ไฟฟ้ารวมเป็นศูนย์ที่ทุกๆ จุดตามแนวนี้นั้นจนถึงระยะอนันต์

สำหรับระยะซึ่งเป็นจุดที่ $R_1 = R_2$ และผลคูณของ $R_1 R_2$ ที่เป็นตัวหารอาจจะแทนได้ด้วย r^2 ซึ่งเทอมนี้ไม่อาจประมาณค่าได้เพื่อไม่ให้เกิดความผิดพลาดในคำตอบเมื่อศักย์ไฟฟ้าเข้าใกล้ศูนย์ขณะที่เราพิจารณาที่ระยะห่างไกลมาจากประจุไดโพลเมื่อพิจารณาจะเห็นว่า $R_1 - R_2$ อาจประมาณค่าอย่างง่ายๆโดยให้ $R_1 R_2$ ขนานกัน จะได้

$$R_1 - R_2 = d \cos \theta$$

จะได้ผลลัพธ์สุดท้ายเป็น

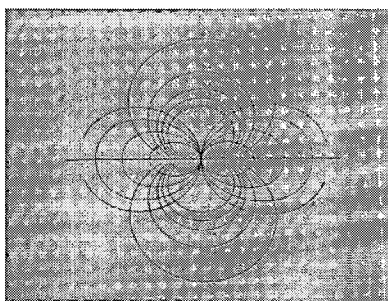
$$V = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

โปรดสังเกตอีกครั้งที่ระนาบ $z=0(\theta=90^\circ)$ เป็นระนาบที่มีศักย์เป็นศูนย์ โดยการใช้ความสัมพันธ์เกรเดียนต์ในระบบพิกัดทรงกลม

$$E = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}a_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}a_\phi\right)$$

$$\text{จะได้ } E = -\left(\frac{Qd\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}a_r - \frac{Qd\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}a_\theta\right)$$

$$\text{หรือ } E = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta a_r + \sin\theta a_\theta) \text{ ซึ่งเป็นสนามที่ระยะใดๆ จากไดโพล}$$



ภาพที่ 2.22 สนามไฟฟ้าสถิตของจุดไดโพลที่มีโมเมนต์อยู่ในทิศ a_z พร้อมกับผิวสมศักย์ 6 ค่า

สนามศักย์ไฟฟ้าที่จะนำไปวาดเป็นแบบร่างที่เลือกเฉพาะไดโพลที่มี $Qd/(4\pi\epsilon_0)=1$ และจะได้ $\cos\theta = Vr^2$ เมื่อนำไปวาดเป็นเส้นดังรูปจะพบว่าแต่ละเส้นสอดคล้องกับเส้นสมศักย์สำหรับที่ $V=0, +0.2, +0.4, +0.6, +0.8, +1$ แกนของไดโพลอยู่ในแนวตั้งซึ่งมีประจุบวกอยู่ด้านบน เส้นกระแสของสนามไฟฟ้าหาได้จาก

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{rd\theta}{dr} = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$

หรือ

$$\frac{dr}{r} = 2\cot\theta d\theta$$

จากนั้นจะได้ $r = C_1 \sin^2\theta$

เส้นกระแสในแนวนอนในรูปนี้วาดสำหรับค่า $C_1=1, 1.5, 2$ และ 2.5

สนามศักย์ไฟฟ้าของไดโพลตามสมการอาจจะเขียนได้ง่ายขึ้นโดยการนิยามไดโพลโมเมนต์(dipole moment)ขึ้นมาใช้งานโดยในขั้นแรกการกำหนดเวกเตอร์ระยะห่างระหว่างประจุไดโพลมีทิศทาง จาก $-Q$ จนถึง $+Q$ เป็น d แล้วกำหนดให้ไดโพลโมเมนต์เป็น Qd โดยใช้สัญลักษณ์แทนด้วย p ดังนั้น

$$p = Qd$$

หน่วยของ p คือ $C \cdot m$

เนื่องจากว่า $d \cos \theta = d \cos \theta$ จะได้

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะเขียนในรูปสมการทั่วไปได้เป็น

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^2} p \cos \theta \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

เมื่อ r คือระยะห่างระหว่างจุด p ที่พิจารณาสนาม และ r' คือระยะระหว่างจุดกึ่งกลางของไดโพล จากสมการเป็นสมการที่ไม่ขึ้นกับระบบพิกัดใดๆ เมื่อไดโพลโมเมนต์ p นำมาใช้ในการพิจารณาอีกครั้งในสารไดอิเล็กตริก ทั้งไดโพลโมเมนต์และศักย์ไฟฟ้าจะไม่แปรตามค่า Q ที่เพิ่มขึ้นและ d ที่ลดลง เนื่องจากว่าเป็นผลคูณของประจุและระยะห่างระหว่างประจุ ปรากฏว่าผลคูณนี้ยังเป็นค่าคงที่อยู่ที่ข้อจำกัดของไดโพลแบบจุดก็คือเมื่อเราให้ระยะ d เข้าใกล้ศูนย์และขนาดของ Q เข้าใกล้ค่าอนันต์เพราะว่าผลคูณ p ต้องเป็นค่าจำกัด

เมื่อย้อนกลับมาสนใจผลลัพธ์ของสนามอีกครั้งจะพบว่าสนามศักย์ไฟฟ้าจะแปรผกผันกับระยะห่างไดโพลกำลังสอง ส่วนสนามไฟฟ้าแปรผกผันกับระยะห่างจากไดโพลยกกำลังสาม สนามทั้งสองลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเปรียบเทียบกับสนามที่ได้จากประจุแบบจุด แต่หากพิจารณาว่าประจุที่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามวางอยู่ใกล้กันมากถ้าพิจารณาระยะที่ห่างออกไปมากก็จะมองคล้ายกับว่าประจุรวมมีค่าเป็นศูนย์ลุลอมบ์ หากจัดให้มีประจุสมมาตรเป็นจำนวนมากจะทำให้สนามแปรผกผันกับระยะทางยกกำลังสูงขึ้นไปเรื่อยๆ เรียกการกระจายประจุแบบนี้ว่ามัลติโพล(Multipole)ซึ่งมีการคำนวณค่าประมาณโดยใช้อนุกรมอนันต์สำหรับหาโครงสร้างประจุแบบนี้

2.2.18 สารไดอิเล็กตริก

เมื่อพิจารณาสารที่เป็นฉนวนหรือสารไดอิเล็กตริก(dielectrics) ซึ่งจะแตกต่างจากสารที่เป็นตัวนำ ในทางอุดมคติคือ ไม่มีประจุอิสระซึ่งสามารถเคลื่อนที่ได้ในเนื้อสารซึ่งจะทำให้เกิดกระแสเหนี่ยวนำ ดังนั้นประจุทั้งหมดจะถูกกักอยู่ในโมเลกุลหรือโครงข่ายของโมเลกุลด้วยแรง庫ลอมบ์ ดังนั้นเมื่อใส่ สนามไฟฟ้าเข้าไปในเนื้อสารจะทำให้ประจุเคลื่อนตัวหรือบิดตัวเพียงเล็กน้อยแต่ไม่เคลื่อนที่ออกนอก ตำแหน่งปกติ ซึ่งจะสร้างเป็นชุดของโครงสร้างไดโพลไฟฟ้า(electric dipole) เกิดขึ้น สิ่งที่เกิดขึ้นนี้ สามารถอธิบายต่อไปถึงการวัดค่าความยินยอมทางไฟฟ้าสัมพัทธ์ (Relative Permeability) หรือค่าไดอิเล็กตริก (Dielectric Constant) และเมื่อเกิดการแยกออกเป็นสองขั้วหรือโพลาริเซชัน (Polarization) ของตัวกลางซึ่งจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าทั้งขนาดและทิศทางที่แตกต่างกันไปของ ชนิดสารไดอิเล็กตริกที่ถูกกระตุ้นด้วยสนามไฟฟ้านั้น ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จะแตกต่างจากค่าที่วัดได้จากที่ว่างอิสระ นอกจากนั้นยังมีการสร้างเงื่อนไขขอบเขตต่างๆสำหรับสนามที่สัมผัสกับผิวที่บริเวณรอยต่อ ระหว่างสารไดอิเล็กตริก 2 ชนิดเพิ่มเติมเพื่อที่จะอธิบายความแตกต่างของสารเหล่านั้น

จากการเคลื่อนที่หรือการบิดตัวของประจุทำให้เกิดการสะสมพลังงานขึ้นและจากหลักการนี้ สามารถนำมาออกแบบสร้างตัวเก็บประจุ(Capacitor) และจากการตอบสนองของสารไดอิเล็กตริก โดยเฉพาะอย่างยิ่งต่อสนามที่แปรตามเวลา ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีความสำคัญมากต่อการทำความเข้าใจ ปรากฏการณ์ต่างๆทางฟิสิกส์ ซึ่งจะนำไปสู่การพัฒนาเครื่องมือที่จะนำมาใช้ให้เกิดประโยชน์ต่อไป เนื่องจากสารส่วนใหญ่มีคุณสมบัติที่เป็นได้ทั้งไดอิเล็กตริกและตัวนำ ซึ่งแปลว่าสารไดอิเล็กตริก อาจจะมีความเป็นตัวนำแฝงอยู่เล็กน้อยและสารบางอย่างที่พิจารณาว่าเป็นตัวนำอาจจะมีคุณสมบัติของ ไดอิเล็กตริกแฝงอยู่ด้วยเช่นกันซึ่งจะมีประโยชน์ต่อการวิเคราะห์ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นภายในเนื้อสารได้ จากการวิเคราะห์สารไดอิเล็กตริกสามารถนำไปสู่การพิจารณาตัวเก็บประจุโดยเฉพาะการหาค่าความจุ ไฟฟ้าจากโครงสร้างระหว่างตัวนำกับไดอิเล็กตริก

2.2.19 ธรรมชาติของสารไดอิเล็กตริก

เมื่อสารไดอิเล็กตริกอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าเราสามารถพิจารณาได้เช่นเดียวกันกับที่ว่างอิสระเมื่อ มีการจัดเรียงตัวของไดโพลที่เล็กมาก ซึ่งเกิดจากประจุบวกและประจุลบของไดโพลที่ไม่เป็นระเบียบ เนื่องจากหากไม่มีประจุอิสระในเนื้อสารก็จะไม่สามารถเกิดการเหนี่ยวนำของกระแสขึ้นมาได้ผลของ

กระแสไฟฟ้าภายนอกจะส่งผลกระทบต่อประจุที่ยึดเหนี่ยวกันทางอะตอมและโมเลกุล สามารถที่จะเคลื่อนที่ได้เล็กน้อย เรียกได้ว่าเป็นประจุยึดเหนี่ยว (Bound Charge) ซึ่งมีค่าตรงข้ามกับประจุอิสระ ซึ่งสามารถนำมาคำนวณค่าความนำของสาร ประจุยึดเหนี่ยวนี้จะทำตัวเป็นแหล่งจ่ายเสมือนที่จ่ายสนามไฟฟ้าสถิตได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องเสนอตัวแปรใหม่คือค่าคงที่ไดอิเล็กตริกหรือพิจารณาค่าความยินยอมไฟฟ้าจากกรณีของค่าความยินยอมไฟฟ้าในที่ว่างอิสระจากวิธีการที่ต่างออกไปเราสามารถนำไปใช้สร้างทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสารไดอิเล็กตริกโดยให้ความสำคัญกับโพลาริเซชัน P ค่าความยินยอมไฟฟ้า ϵ และค่าความยินยอมไฟฟ้าสัมพัทธ์ ϵ_r รวมทั้งการพัฒนาสมการความสัมพันธ์ระหว่างค่าเหล่านี้ สารไดอิเล็กตริกทั้งหมดมีคุณสมบัติเป็นคุณสมบัติร่วมไม่ว่าจะเป็นสารที่มีสถานะของแข็ง ก๊าซ ผลิต คุณสมบัติเหล่านี้คือความสามารถในการเก็บพลังงานไฟฟ้า การเก็บพลังงานไฟฟ้านี้จะหมายถึงการเคลื่อนตำแหน่งภายในที่ประจุยึดเหนี่ยวค่าบวกและลบต้านกับแรงอะตอมในโมเลกุลปกติ การเคลื่อนหรือบิดตัวต้านกับแรงที่ควบคุมอยู่นี้เปรียบเสมือนการยืดตัวของสปริงเพื่อดำเนินพลังงานศักย์ แหล่งจ่ายพลังงานนี้คือสนามไฟฟ้าจากภายนอก ส่วนการเคลื่อนที่ของประจุเพียงเล็กน้อยนี้อาจจะเกิดขึ้นจากกระแสที่กระชากจากแบตเตอรี่ซึ่งเป็นตัวกลางตัวสร้างสนาม กลไกที่ทำให้ประจุเคลื่อนที่จะแตกต่างกันไปตามความแตกต่างของสารไดอิเล็กตริกบางโมเลกุลที่อยู่ในทอมของโมเลกุลแบบมีขั้ว อาจจะมีการเคลื่อนตัวอย่างถาวรระหว่างศูนย์กลางแรงโน้มถ่วงของประจุบวกและลบจากนั้นประจุแต่ละคู่จะทำตัวเป็นไดโพลปกติไดโพลจะจัดเรียงตัวกันอย่างอิสระในทิศทางที่ไม่เป็นระเบียบตลอดทั่วทั้งภายในเนื้อสารและจะมีการจัดเรียงโมเลกุลตามสนามที่จ่ายมาจากภายนอกในทิศทางเดียวกัน สนามที่มีความเข้มมากจะทำให้เกิดการเคลื่อนของประจุบวกและประจุลบมากขึ้น เมื่อโมเลกุลที่ไม่มีขั้ว (non-polar molecule) จะไม่มีการจัดเรียงกันเป็นไดโพลจนกว่าจะมีการใส่สนามไฟฟ้าเข้าไปประจุทั้งบวกและลบจะเคลื่อนไปในทิศทางตรงกันข้ามตามทิศทางที่สวนกับการเหนี่ยวนำโดยสนามภายนอกนั้นและทำให้เกิดไดโพลขึ้นซึ่งจะจัดเรียงกันไปตามสนามไฟฟ้า ไดโพลชนิดต่างๆสามารถอธิบายได้ด้วยไดโพลโมเมนต์ (Dipole moment) p ที่ได้กำหนดขึ้นมาจาก $p = Qd$

เมื่อ Q คือขนาดของประจุบวกในกลุ่มประจุที่จับกันเป็นไดโพล และ d คือเวกเตอร์ของระยะระหว่างประจุลบและประจุบวกซึ่ง p มีหน่วยเป็นคูลอมบ์-เมตร

หากพิจารณาปริมาตรในหนึ่งหน่วยมีจำนวนไดโพลอยู่ n ไดโพลจะพบว่าภายในปริมาตร Δv มีจำนวนไดโพลทั้งหมด $n\Delta v$ ไดโพล ไดโพลโมเมนต์ทั้งหมดที่ได้เป็นผลรวมทางเวกเตอร์ดังนี้

$p_{total} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i$ ถ้าไดโพลทั้งหมดถูกจัดเรียงอยู่ในทิศทางเดียวกัน p_{total} จะมีค่าขึ้นอยู่กับปริมาณที่พิจารณา อย่างไรก็ตามในการจัดเรียงแบบไม่เป็นระเบียบก็ยังคงเป็นผลทำให้ p_{total} มีค่ารวมเป็นศูนย์ จากนิยามของโพลาไรเซชัน(Polarization) คือจำนวนไดโพลโมเมนต์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

$$p = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i$$

มีหน่วยเป็นคูลอมบ์ต่อตารางเมตร เมื่อให้ p เป็นเสมือนสนามแบบสม่ำเสมอ แม้ว่า p จะเป็นส่วนประกอบที่ไม่สามารถระบุออกมาอย่างชัดเจน ณ จุดใดจุดหนึ่งภายในอะตอมหรือโมเลกุลใดก็ตาม ควรทำความเข้าใจว่าค่าของมันเป็นค่าเฉลี่ยในปริมาตรที่ลุ่มขึ้นมาปริมาตรหนึ่งโดยให้เป็น Δv ที่มีขนาดใหญ่เพียงพอสำหรับการเป็นที่อยู่ของโมเลกุลจำนวนหนึ่งและมีขนาดเล็กพอที่จะไม่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าภายในปริมาตรนั้นได้ ในการแสดงถึงความหนาแน่นประจุยึดเหนี่ยวในปริมาตรหนึ่งพิจารณาเช่นเดียวกันกับความหนาแน่นประจุอิสระภายในปริมาตรหนึ่งที่เป็นแหล่งกำเนิดของสนามภายนอกทำให้ได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกันกับกฎของเกาส์พิจารณาเช่นเดียวกันกับความหนาแน่นประจุอิสระภายในปริมาตรหนึ่งที่เป็นแหล่งกำเนิดของสนามภายนอกทำให้ได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกันกับกฎของเกาส์ การพิจารณาเช่นนี้จะต้องกำหนดให้ไดอิเล็กตริกมีโมเลกุลที่ไม่มีการเรียงตัวไม่มีโมเลกุลใดที่มีไดโพลโมเมนต์และโพลาไรเซชันมีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดทั้งก้อนเนื้อสาร บริเวณใดๆในก้อนไดอิเล็กตริกเมื่อเลือกพื้นที่ผิวเล็กๆซึ่งกำหนดให้เป็น ΔS แล้วใส่สนามไฟฟ้า E เข้าไปสนามไฟฟ้านี้จะทำให้เกิดไดโพลโมเมนต์ $p = Qd$ ในแต่ละโมเลกุลโดยที่ทั้ง p และ d ทำมุม θ กับผิว ΔS จากนั้นจะพิจารณา การขยายส่วนที่มีการเคลื่อนที่ของประจุยึดเหนี่ยวที่อยู่ระหว่างผิว ΔS แต่ละประจุเป็นส่วนประกอบที่ได้จากโครงสร้างของไดโพลมีการเคลื่อนที่ด้วยระยะทาง $1/2d \cos \theta$ ในทิศทางตั้งฉากกับผิว ดังนั้น ประจุบวกใดๆมีตำแหน่งเริ่มต้นที่ชั้นใต้ผิว ΔS และเคลื่อนขึ้นไปอยู่ภายในระยะ $1/2d \cos \theta$ ของผิวที่หน้าตัด ΔS ที่มีค่าเพิ่มขึ้น และประจุลบก็จะมีตำแหน่งเริ่มต้นที่ชั้นเหนือผิว ΔS และเคลื่อนที่ลงไปยังอยู่ภายในระยะ $1/2d \cos \theta$ จากผิว ΔS ที่พื้นที่หน้าตัด ΔS มีค่าลดลงเนื่องจากว่ามีจำนวน n โมเลกุลต่อปริมาตรจึงทำให้จำนวนประจุทั้งหมดที่หน้าตัดของผิวด้านบนมีค่าเท่ากับ $nQd \cos \theta \Delta S$ หรือ $\Delta Q_+ = nQd \cos \theta \Delta S$ เมื่อ Q_+ เป็นตัวบ่งบอกว่ามันเป็นประจุยึดเหนี่ยวซึ่งไม่ใช่ประจุอิสระเราจึงหาค่าในเทอมของโพลาไรเซชันได้เป็น $\Delta Q_+ = P \cdot \Delta S$ ความหมายของ ΔS เป็นปริมาณเวกเตอร์ของผิวปิดภายในสารไดอิเล็กตริกแล้ว

ΔS จะมีทิศทางพุ่งออกและมีประจุที่เป็นประจุยึดเหนี่ยวรวมที่เพิ่มขึ้นในผิวปิดนี้หาได้จากการอินทิเกรตภายในผิวปิดนั้น

$$Q_b = -\oint_S P \cdot dS$$

จากสมการข้างต้นเราสามารถสร้างนิยามของความหนาแน่นฟลักซ์ขึ้นมาใหม่เพื่อนำไปใช้กับตัวกลางต่างๆที่ไม่ใช่ที่ว่างอิสระ สามารถเริ่มจากการเขียนกฎของเกาส์ในเทอมของ $\epsilon_0 E$ และ Q_r ซึ่งเป็นประจุทั้งหมดที่รวมทั้งประจุยึดเหนี่ยวและประจุอิสระที่อยู่ภายใน ได้เป็น $Q_r = \oint_S \epsilon_0 E \cdot dS$ เมื่อ $Q_r = Q_b + Q$

และ Q คือประจุอิสระรวมภายในผิวปิด S และเมื่อรวมเอาสมการ 3 สมการข้างต้นเข้าด้วยกันจะได้สมการสำหรับประจุอิสระภายใต้ผิวปิดนั้นได้เป็น

$$Q_r = Q_b + Q = \oint_S \epsilon_0 (E + P) \cdot dS$$

เราสามารถกำหนดให้ D อยู่ในเทอมทั่วไปได้เป็น

$$D = \epsilon_0 E + P$$

เมื่อนำเทอม D รวมกับสมการที่ใช้กับสารที่มีปรากฏการณ์โพลาไรซ์เซชันภายในจะได้สมการเป็น

$$Q = \oint_S D \cdot dS$$

เมื่อ Q เป็นประจุอิสระที่อยู่ภายใน และหากแยกความหนาแน่นของประจุชนิดต่างๆในปริมาตรที่พิจารณาได้

$$Q_b = \int_v \rho_b \cdot dv$$

$$Q = \int_v \rho_v \cdot dv$$

$$Q_r = \int_v \rho_r \cdot dv$$

จากทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์สามารถสร้างสมการข้างต้นให้อยู่ในรูปแบบสมการความสัมพันธ์ทางไดเวอร์เจนซ์ได้เป็น

$$\Delta \cdot P = -\rho_b$$

$$\Delta \cdot \epsilon_0 E = -\rho_r$$

$$\Delta \cdot D = \rho_v$$

การนำสมการไปใช้งานจำเป็นจะต้องทราบถึงความสัมพันธ์ของความเข้มสนามไฟฟ้า E และโพลาไรเซชัน P เสียก่อนซึ่งในความสัมพันธ์นี้ต้องเป็นฟังก์ชันของชนิดเนื้อสารแต่ละจะจำกัดการวิเคราะห์ให้อยู่ในกลุ่มของสารพวกไอโซโทรปิก(isotropic)หรือพวกที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทางซึ่งเป็นสารพวกที่มี E และ P ขึ้นแก่กันอย่างเชิงเส้นในสารไอโซโทรปิกนี้เวกเตอร์ของ E และ P จะขนานกันไปเสมอซึ่งเป็นไปตามการจัดทิศทางของสนามเอง ในการใช้งานนั้นนิยมใช้สาร ไดอิเล็กทริกที่เป็นเชิงเส้น การใส่สนามที่มีความเข้มพอประมาณจึงมีคุณสมบัติเป็นทิศทางเดียวแต่สาร โครงผลึกเดี่ยวอาจจะเป็นสารแอนไอโซโทรปิก(anisotropic)หรือมีคุณสมบัติขึ้นกับทิศทางเนื่องจากโครงสร้างของสารจะมีโครงสร้างที่ซ้ำกันเป็นช่วงๆในเนื้อสาร ซึ่งเป็นผลให้ไดโพลโมเมนต์จัดเรียงตัวกันตามแกนของผลึกได้ง่ายกว่าแต่อาจจะไม่เรียงกันตามทิศทางของสนามที่ใส่เข้าไปก็ได้ สารพวกเฟอร์โรอิเล็กทริก(Ferroelectric) หรือสารที่จ่ายสนามไฟฟ้าได้เองในตัวนั้นมีความสัมพันธ์ระหว่าง E กับ P ไม่เพียงแต่จะเป็นเชิงเส้นเท่านั้นแต่ยังมีปรากฏการณ์ฮิสเทอรีซิส(Hysteresis)ซึ่งโพลาไรเซชันที่เกิดขึ้นจากความเข้มสนามไฟฟ้าที่ใส่เข้าไปจะขึ้นกับค่าคงที่ที่ค้างที่อยู่ภายในสารนั้นด้วย ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่าง E และ P คือ

$$P = \chi_e \epsilon_0 E$$

เมื่อ χ_e เป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วยเรียกว่า อิเล็กทริกซัสเซปทิลิตี(Electric susceptibility)หรือสภาพความไวทางไฟฟ้าของสาร เมื่อปรับรูปสมการและหาความสัมพันธ์จะได้

$$D = \epsilon_0 E + \chi_e \epsilon_0 E = (\chi_e + 1) \epsilon_0 E$$

$$\epsilon_r = \chi_e + 1$$

เป็นปริมาณอีกค่าหนึ่งที่ไม่มีหน่วยเช่นกันและเรียกว่าค่าความยินยอมไฟฟ้าสัมพัทธ์(Relative permittivity) หรือค่าคงที่ไดอิเล็กทริกของสาร(Dielectric constant)ของเนื้อสาร ดังนั้นจะได้

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E \quad \text{เมื่อ } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

เมื่อ ϵ คือค่าความยินยอมไฟฟ้า(Permittivity) ของสาร

สารไดอิเล็กทริกที่ไม่ใช่สารเนื้อเดียวไม่สามารถเขียนบรรยายในเทอมของสภาพความไวทางไฟฟ้าหรือความยินยอมทางไฟฟ้าอย่างง่ายได้เราพบว่าแต่ละส่วนประกอบของ D เป็นฟังก์ชันของทุกส่วนประกอบ

ของ E และ D ซึ่งมีค่าเท่ากับ ϵE ซึ่งมีลักษณะเป็นสมการของเมตริกซ์ ซึ่งแต่ละส่วนประกอบของ D และ E เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 3×1 และ ϵ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 3×3

$$D_x = \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z$$

$$D_y = \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z$$

$$D_z = \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z$$

แต่ละส่วนของเมตริกซ์จะขึ้นอยู่กับ การเลือกแนวแกนของพิกัดในสารที่ไม่ใช่เนื้อเดียว การเลือกแกนที่แน่นอนจะทำให้ได้เมตริกซ์อย่างง่ายอันหนึ่ง

เนื่องจาก D และ E และ P อาจจะไม่ขนานกันเสมอไปถึงแม้ว่า $D = \epsilon_0 E + P$ จะเป็นสมการที่ใช้กับสารที่ไม่เป็นเนื้อเดียวก็ตาม เรายังคงใช้ $D = \epsilon_0 E$ เท่านั้น โดยแปรความหมายสมการให้เป็นแบบสมการเมตริกซ์

และจะเน้นไปที่สารเนื้อเดียวแบบเชิงเส้นเท่านั้น หากพิจารณาค่าความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าซึ่งจะมีค่าขึ้นอยู่กับประจุอิสระถึงแม้ว่าจะเป็นความสัมพันธ์แบบจุดหรือแบบอินทิกรัลก็ตาม จากกฎของเกาส์

$$\nabla \cdot D = \rho_v$$

$$\oint D \cdot dS = Q$$

2.2.20 เงื่อนไขขอบเขตที่รอยต่อสำหรับสารไดอิเล็กตริกสมบูรณ์ (Boundary Condition for Perfect Dielectric Material)

ในการวิเคราะห์สารไดอิเล็กตริกสองชนิดที่ต่างกันที่วางติดกันหรือสารไดอิเล็กตริกกับตัวนำ ในกรณีของสารไดอิเล็กตริกกับตัวนำสำหรับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) ในบริเวณพื้นผิวด้านหน้าของตัวนำซึ่งมีสนามในแนวขนานกับผิวมีค่าเป็นศูนย์ ความหนาแน่นฟลักซ์ในทิศทางตั้งฉากมีค่าเท่ากับประจุที่ผิวตัวนำนั้น การหาคำตอบสามารถพิจารณาจากพฤติกรรมของสนามที่ผิวสัมผัสของสารไดอิเล็กตริก เมื่อพิจารณาผิวสัมผัสระหว่างไดอิเล็กตริกสองชนิดที่มีค่าความยินยอมทางไฟฟ้าเป็น

ϵ_1 และ ϵ_2 ในบริเวณของสารชนิดแรกและสารชนิดที่สองตามลำดับเมื่อพิจารณาตามรูป จะได้ ส่วนประกอบในแนวนอนเป็น

$$\oint E \cdot dL = 0$$

เมื่อวนรอบเส้นทางปิดเล็กๆทางด้านซ้ายของรูปจะได้ผลลัพธ์เป็น

$$E_{\tan 1} \Delta w - E_{\tan 2} \Delta w = 0$$

ส่วนของเส้นทางย่อยที่อินทิกรัลเชิงเส้นมีส่วนประกอบ E ในแนวตั้งฉากตามทิศ Δh เราจะไม่พิจารณา เพราะ Δh มีค่าเข้าใกล้ศูนย์และเนื่องจากเส้นทางปิดนี้ครอบคลุมเฉพาะบริเวณที่ผิวสัมผัสเท่านั้น ทำให้ได้ สมการเป็น

$$E_{\tan 1} = E_{\tan 2}$$

จากกฎแรงดันไฟฟ้าของเคิร์ชฮอฟฟ์จะสรุปได้ว่าความต่างศักย์ระหว่างจุดสองจุดที่ผิวสัมผัสที่ห่างกัน ด้วยระยะทาง Δw มีค่าเท่ากันทั้งเหนือผิวสัมผัสและใต้ผิวสัมผัสของรอยต่อ ถ้าความเข้มสนามไฟฟ้าในแนวนอนมีความต่อเนื่องเมื่อข้ามผิวย่อยต่อแล้ว D ในแนวนอนจะไม่ต่อเนื่องเพราะ

$$\frac{D_{\tan 1}}{\epsilon_1} = E_{\tan 1} = E_{\tan 2} = \frac{D_{\tan 2}}{\epsilon_2}$$

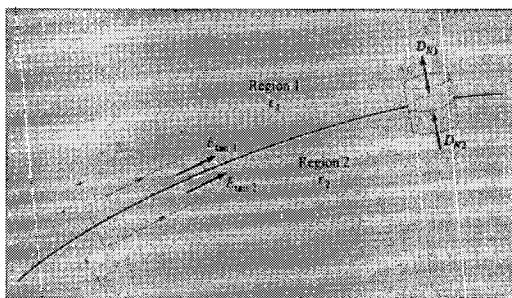
$$\frac{D_{\tan 1}}{D_{\tan 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

เงื่อนไขตรงผิวสัมผัสที่รอยต่อของส่วนประกอบในแนวตั้งฉากสามารถหาได้โดยใช้กฎของเกาส์กับ กล่องเล็กๆที่แสดงไว้ในด้านขวาของผิวสัมผัส โดยให้แต่ละด้านของกล่องมีขนาดเล็กมากโดยมีฟลักซ์ไฟฟ้าทะลุผ่านด้านบนและด้านล่างของกล่องมีค่าผลต่างเป็น

$$D_{N1} \Delta S - D_{N2} \Delta S = \Delta Q = \rho_s \Delta S$$

จากนั้นจะได้

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_s$$



ภาพที่ 2.23 ผิวสัมผัสที่รอยต่อระหว่างสารไดอิเล็กตริกสมบูรณ์ 2 ชนิดที่มีค่าความยอมไฟฟ้า ϵ_1, ϵ_2

เราจะไม่พิจารณาความหนาแน่นประจุที่ผิวเพราะได้กำหนดให้โพลาริเซชันของสารไดอิเล็กตริกที่ได้รับผลมาจากสนามไฟฟ้าแปรเป็นค่าคงที่ไดอิเล็กตริก ดังนั้นจึงพิจารณาค่าคงที่ไดอิเล็กตริกแทนการพิจารณาประจุยึดเหนี่ยวผลที่ได้จึงเปรียบเสมือนไม่มีประจุที่ผิว และไม่มีประจุอิสระที่ผิวของไดอิเล็กตริกสมบูรณ์ ประจุที่ว่าจะเกิดขึ้นได้เมื่อมีการใส่ประจุเพิ่มเข้าไป ดังนั้นจะเกิดความไม่สมดุลของประจุรวมขึ้นภายในสารไดอิเล็กตริกเราจึงสามารถสมมติให้ ρ_s มีค่าเป็นศูนย์ที่ผิวสัมผัสได้ซึ่งจะเป็นข้อยกเว้นพิเศษในการพิจารณาครั้งนี้เท่านั้น และจะได้

$$D_{N1} = D_{N2}$$

ในส่วนประกอบของ D มีความต่อเนื่องในแนวตั้งฉากผลที่ได้คือ

$$\epsilon E_{N1} = \epsilon E_{N2}$$

และจะพบว่าส่วนประกอบของ E ในแนวตั้งฉากมีความไม่ต่อเนื่อง จากเงื่อนไขดังกล่าวเมื่อนำเอามาพิจารณาร่วมกันจะแสดงให้เห็นการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ D และ E ที่ผิวสัมผัส ถ้าให้ D_1 (และ E_1) วางทำมุม θ_1 กับเส้นตั้งฉากของระนาบผิวสัมผัสดังในรูปเนื่องจากส่วนประกอบของ D ในแนวตั้งฉากมีความต่อเนื่อง

$$D_{N1} = D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2 = D_{N2}$$

อัตราส่วนของส่วนประกอบในแนวขนานในสมการจะมีค่าเป็น

$$\frac{D_{\tan 1}}{D_{\tan 2}} = \frac{D \sin \theta_1}{D \sin \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

หรือ

$$\epsilon_2 D_1 \sin \theta_1 = \epsilon_1 D_2 \sin \theta_2$$

หารและจัดรูปสมการจะได้

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

จากสมการหาสมมติให้ $\epsilon_1 > \epsilon$ เพราะฉะนั้น $\theta_1 > \theta_2$

ทิศทางของ E บนแต่ละด้านของผิวสัมผัสจะมีทิศทางเดียวกันกับ D เพราะว่า $D = \epsilon E$ ขนาดของ D ในบริเวณที่สองอาจจะหาได้โดยตรงจากสมการ

$$D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2 \theta_1}$$

และขนาดของ E_2 จะเป็น

$$E_2 = D_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \cos^2 \theta_1}$$

จากการวิเคราะห์สมการแสดงว่า D มีค่ามากกว่าในบริเวณที่มีค่าอินยอมทางไฟฟ้าสูงกว่า(ยกเว้นในกรณี
ที่ $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$ ซึ่งขนาดจะไม่มีเปลี่ยนแปลง)และ E มีค่าสูงกว่าในบริเวณที่มีค่าความอินยอมไฟฟ้าต่ำ
กว่า(ยกเว้นในกรณีที่ $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ ซึ่งขนาดจะไม่มีเปลี่ยนแปลง)จากเงื่อนไขรอยต่อสมการ
ความสัมพันธ์ของขนาดและทิศทางทำให้เราสามารถหาสนามที่รอยต่อด้านใดด้านหนึ่งได้ถ้าหากทราบ
สนามที่รอยต่ออีกด้านหนึ่ง เงื่อนไขที่ผิวสัมผัสตรงรอยต่อของสารไดอิเล็กตริกเป็นเงื่อนไขที่ง่ายเริ่มจา
การที่เราทราบ D และ E เป็นศูนย์ทั้งคู่ภายในตัวนำและจะพบว่าส่วนประกอบขนาดของทั้ง E และ D
จะต้องเป็นศูนย์ด้วยทั้งคู่ของสมการ

$$\oint E \cdot dL = 0 \text{ และ } D = \epsilon E$$

จากกฎของเกาส์

$$\oint_s E \cdot dS = Q$$

ทำให้ทราบว่าทั้ง E และ D ตั้งฉากกับผิวดำนำแล้ว $D_N = \rho_s$ และ $E_N = \rho_s / \epsilon$ เราจะเห็นว่าเงื่อนไขรอยต่อที่
ได้พัฒนามาจากเงื่อนไขที่แล้วสามารถนำมาพิจารณาใช้กับรอยต่อของตัวนำมีว่างอิสระสอดคล้องกับ
เงื่อนไขสำหรับรอยต่อของตัวนำไดอิเล็กตริกด้วยโดยแทนค่า ϵ_0 ด้วย ϵ ดังนั้น

$$D_t = E_t = 0$$

$$D_N = \varepsilon E_N = \rho_s$$

การเปลี่ยนแปลงภายในตัวนำและที่ผิวตัวนำมีประจุที่ผิวได้อย่างไร จากกฎของโอห์ม

$$J = \sigma E$$

และจากสมการความต่อเนื่องของกระแส

$$\nabla \cdot J = \frac{-\partial \rho_v}{\partial t}$$

เนื่องจากทั้ง J และ ρ_v ต่างก็เป็นปริมาณที่ประกอบด้วยประจุอิสระ เราจะได้

$$\nabla \cdot \sigma E = \frac{-\partial \rho_v}{\partial t}$$

หรือ

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon} D = \frac{-\partial \rho_v}{\partial t}$$

เมื่อพิจารณาตัวกลางเป็นสารเนื้อเดียวกันทั้ง σ และ ε จะไม่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งที่วิเคราะห์

$$\nabla \cdot D = -\frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

เมื่อนำสมการของแมกซ์เวลล์มาช่วยพิจารณาจะได้ว่า

$$\rho_v = -\frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

สมมติ σ ไม่เป็นฟังก์ชันของ ρ_v แต่ในความเป็นจริงแล้ว σ แปรตามทั้ง ρ_v และความสามารถในการเคลื่อนที่ (Mobility) ของมันแต่เราจะสมมติให้สมการมีความง่ายขึ้น เมื่ออินทิเกรตโดยตรงจะได้

$$\rho_v = \rho_0 e^{-(\sigma/\varepsilon)t}$$

เมื่อ ρ_0 คือความหนาแน่นของประจุที่เวลา $t=0$ สมการนี้แสดงถึงการลดลงของความหนาแน่นของประจุแบบเอกซ์โปเนนเชียลทุกขณะที่เวลาเปลี่ยนไปด้วยค่าเวลาคงตัวเป็น σ/ε ซึ่งมักจะเรียกกันว่าเวลาในการผ่อนคลายประจุ (Relaxation time) ซึ่งสามารถนำมาคำนวณเพื่อพิจารณาว่าวัสดุเป็นตัวนำชนิดดีหรือชนิดเลวได้ การลดลงอย่างรวดเร็วของประจุในวัสดุเป็นตัวบ่งชี้ว่าวัสดุเป็นตัวนำที่ดี และความหนาแน่นประจุจะมีค่าเป็นศูนย์ภายในตัวนำที่ดี

สารที่นำมาใช้งานทางฟิสิกส์นั้นจะไม่มีสารไดอิเล็กตริกชนิดใดเลยที่ปราศจากประจุอิสระสารทั้งหมด มีค่าความนำที่ไม่เป็นศูนย์และประจุที่อยู่ภายในตัวกลางเหล่านั้นจะเคลื่อนที่ออกมาที่ผิวในที่สุด

2.2.21 ค่าความจุไฟฟ้า

เมื่อพิจารณาตัวนำสองแผ่นภายในที่ว่างระหว่างตัวนำทั้งสองมีสารไดอิเล็กตริกเนื้อเดียวบรรจุอยู่ (ดังรูป) ตัวนำ M_2 ใส่ประจุไว้ด้วย Q และตัวนำ M_1 ก็ใส่ประจุตรงข้ามที่มีจำนวนเท่ากันลงไปด้วยไม่มีประจุอื่นนอกจากนี้ จะพบว่าประจุรวมทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจากประจุจะกระจายอยู่บนผิวตัวนำเป็นความหนาแน่นประจุที่ผิวและสนามไฟฟ้าจะมีทิศตั้งฉากกับผิวตัวนำเสมอตัวนำแต่ละด้านจะเป็นผิวสมศักย์เนื่องจาก M_1 เป็นประจุบวก ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าจึงมีทิศชี้จาก M_2 ไปยัง M_1 และ M_2 มีศักย์เป็นบวกมากกว่ากล่าวได้ว่างานที่ได้เป็นการเคลื่อนประจุจาก M_1 ไปยัง M_2 และเมื่อกำหนดให้ความต่างศักย์ระหว่าง M_2 และ M_1 เป็น V_0 เราจะนิยามให้ค่าการเก็บประจุหรือความจุไฟฟ้า (Capacitance) ของระบบตัวนำไฟฟ้าทั้งสองเป็นอัตราส่วนระหว่างขนาดของประจุรวมบนตัวนำแต่ละตัวนำกับความต่างศักย์ระหว่างตัวนำทั้งสองนั้นเป็น

$$C = \frac{Q}{V_0}$$

เมื่อคำนวณค่า Q จากอินทิกรัลเชิงผิวของตัวนำประจุบวกและหาค่า V_0 โดยการเคลื่อนประจุบวกหนึ่งหน่วยจากผิวด้านตัวนำลบไปยังตัวนำบวกสามารถนำเอาสมการมาเขียนในเทอมของอินทิกรัลได้เป็น

$$C = \frac{\oint \epsilon E \cdot dS}{-\int E \cdot dL}$$

ค่าความจุไฟฟ้าจะไม่ขึ้นกับศักย์และประจุรวมเมื่ออัตราส่วนของค่าทั้งสองเป็นค่าคงที่ ถ้าค่าความหนาแน่นประจุมีค่าเพิ่มขึ้นตามแฟกเตอร์ N แล้วกฎของเกาส์จะชี้ให้เห็นว่าค่าความหนาแน่นฟลักซ์หรือความเข้มสนามไฟฟ้าก็มีค่าเพิ่มขึ้นตาม N ไปด้วยในขณะที่ค่าความต่างศักย์ก็เป็นเช่นเดียวกัน ค่าความจุไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันของเพียงขนาดและรูปร่างกายภาพของระบบตัวนำและค่าความยินยอมทางไฟฟ้าของสารไดอิเล็กตริกชนิดเนื้อเดียวเท่านั้น ค่าความจุไฟฟ้าจะนิยมนวัดกันในหน่วยฟารัด (Farad, F) โดยที่ฟารัดนิยามมาจากหน่วยคูลอมบ์โดยทั่วไปแล้วค่าความจุไฟฟ้ามักมีค่าเป็นปริมาณที่เล็กมากของหน่วยฟารัด

ดังนั้นค่าที่ใช้งานจริงมักอยู่ในช่วงของหน่วยไมโครฟารัด(μF)นาโนฟารัด(nF)และพิโคฟารัด(pF)เป็นส่วนใหญ่

กรณีระบบตัวนำสองชั้นที่มีรูปทางแบบง่ายที่มีลักษณะเหมือนกันทุกประการเช่นตัวนำแผ่นคู่ขนานกว้างยาวอนันต์ที่ห่างกันเป็นระยะเท่ากับ d ดังแสดงในรูปกำหนดให้แผ่นตัวนำล่างวางที่ระนาบ z เท่ากับศูนย์และแผ่นตัวนำบนวางที่ระนาบ z เท่ากับ d มีประจุกระจายอย่างสม่ำเสมอบนตัวนำแต่ละตัวเท่ากับ $\pm\rho_s$ ที่ตัวนำแต่ละแผ่นจึงมีสนามสม่ำเสมอ

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon} a_z$$

เมื่อค่าความยินยอมทางไฟฟ้าของสารไดอิเล็กตริกเนื้อเดียวกันเป็น ϵ และ

$$D = \rho_s a_z$$

ประจุที่ระนาบของแผ่นตัวนำตัวล่างต้องมีค่าเป็นบวกเนื่องจาก D มีทิศชี้ขึ้นและค่าในส่วนประกอบตั้งฉากของ D คือ

$$D_N = D_z = \rho_s$$

เป็นค่าที่เท่ากับความหนาแน่นประจุที่ผิวนั่นเอง ส่วนที่ระนาบตัวนำแผ่นบน

$$D_N = -D_z$$

และความหนาแน่นประจุที่ผิวนี้มีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับที่ระนาบผิวล่าง ความต่างศักย์ระหว่างระนาบผิวบนกับผิวล่างเป็น

$$V_0 = - \int_{\text{upper}}^{\text{lower}} E \cdot dL = - \int_d^0 \frac{\rho_s}{\epsilon} dz = \frac{\rho_s}{\epsilon} d$$

เนื่องจากผลรวมค่าของค่าประจุที่ผิวของแผ่นตัวนำแต่ละตัวมีค่าเป็นอนันต์ ค่าความจุไฟฟ้าจึงมีค่าเป็นอนันต์ด้วย การนำไปประยุกต์ใช้งานเพิ่มเติมคือการหาคำตอบจากการพิจารณาให้พื้นที่ของแผ่นตัวนำแต่ละแผ่นมีค่าจำกัดเป็น s ซึ่งมีขนาดกว้างมากกว่า d สนามไฟฟ้าและประจุยังคงกระจายอยู่อย่างสม่ำเสมอที่ทุกจุดบนแผ่นตัวนำทั้งสองโดยละเว้นการกระจายที่ขอบของแผ่นตัวนำ ซึ่งบริเวณที่พิจารณา

นี้มีการกระจายของสนามไฟฟ้าและประจุ ทำให้ค่าประจุไฟฟ้ารวมที่ได้มีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดน้อยมากทำให้ผลลัพธ์สามารถหาได้จากชุดสมการต่อไปนี้

$$Q = \rho_s S$$

$$V_0 = \frac{\rho_s}{\epsilon} d$$

หรือเราอาจพิจารณาให้สมการคือค่าความจุไฟฟ้าของส่วนของระนาบที่มีพื้นที่ S ในระนาบกว้างยาวประมาณอนันต์และสามารถหาค่าพลังงานสะสมในตัวเก็บประจุได้ค่าเป็น

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^d \int \frac{\epsilon \rho_s^2}{\epsilon^2} dz dS = \frac{1}{2} \frac{\rho_s^2}{\epsilon} S d = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} \frac{\rho_s^2}{\epsilon^2}$$

$$W_E = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

จะพบว่าพลังงานสะสมในตัวเก็บประจุที่ได้จากค่าความต่างศักย์ที่คงที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุนั้นมีค่าเพิ่มขึ้นตามค่าคงที่ไดอิเล็กตริกของสารตัวกลางที่ใช้

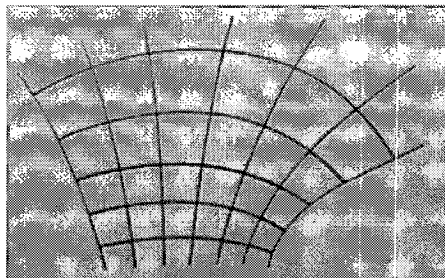
2.2.22 การใช้ภาพร่างของสนามในการประมาณค่าความจุไฟฟ้าสำหรับกรณีสองมิติ

ในการหาค่าความจุไฟฟ้าของระบบตัวนำแบบต่างๆหากไม่สามารถอธิบายในระบบปกติเดียวได้ ดังนั้นจำเป็นที่จะต้องใช้การวิเคราะห์แบบอื่นเข้ามาช่วย วิธีที่นิยมใช้กันมากคือวิธีการแบบคำนวณเชิงเลข(Numerical Determination)ของค่าสนามหรือศักย์ไฟฟ้าบนตารางภายในบริเวณที่พิจารณา และวิธีใช้ภาพร่างเส้นสนามและผิวสมศักย์โดยให้อยู่ในรูปอย่างง่ายในการวิเคราะห์แบบนี้จะให้ค่าความแม่นยำน้อยลงไปบ้างเมื่อเทียบกับวิธีที่รัดกุมยิ่งกว่า แต่ข้อดีของวิธีนี้คือสามารถคำนวณค่าความจุไฟฟ้าได้อย่างรวดเร็ว ขณะที่รูปแบบทางกายภาพของโครงสร้างสนามยังคงเป็นไปตามเงื่อนไข

คำตอบที่ได้มีค่าความแม่นยำพอสมควรเมื่อผู้ร่างภาพมีความชำนาญสามารถหาค่าความจุไฟฟ้าได้ถูกต้องพอสมควร(มีความผิดพลาดอยู่ระหว่าง 5 ถึง 10 เปอร์เซ็นต์)ในการวิเคราะห์จำเป็นต้องทำตามกฎและขั้นตอนการคำนวณอย่างเคร่งครัดในวิธีนี้จะใช้กับกรณีที่สนามไม่แปรไปตามทิศทางที่ตั้งฉากกับระนาบที่วาดเท่านั้น ขั้นตอนการพิจารณาเกี่ยวข้องกับพื้นฐานหลายประการได้แก่

1. ขอบหรือผิวของตัวนำเป็นผิวสมศักย์

2. ความเข้มสนามไฟฟ้าและความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าตั้งฉากกับผิวสมศักย์ทั้งคู่
3. ทั้ง E และ D ตั้งฉากกับผิวของตัวนำจึงทำให้ขนาดของส่วนประกอบทางแนวขนานกลายเป็นศูนย์
4. เส้นฟลักซ์ไฟฟ้าหรือเส้นกระแส(Streamlines) มีจุดเริ่มต้นที่ตัวประจุโดยพุ่งออกจากประจุตั้งนั้นในที่ว่างอิสระหรือสารไดอิเล็กตริกซ์เนื้อเดียวซึ่งไม่มีประจุนั้นจะมีจุดเริ่มต้นและพุ่งออกจากรอยต่อผิวตัวนำทั้งสิ้น



ภาพที่ 2.24 ภาพวาดตัวอย่างเส้นฟลักซ์ไฟฟ้า

จากนั้นจะรวบรวมเอาข้อกำหนดข้างต้นนำมาเขียนเส้นกระแสลงบนภาพร่างที่แสดงเป็นผิวสมศักย์ ในรูปแสดงผิวรอยต่อตัวนำสองผิวและเส้นสมศักย์ต่างๆที่มีค่าความต่างศักย์ระหว่างกันคงที่เราควรจำไว้ว่าเส้นเหล่านี้เป็นเพียงภาคตัดขวางของผิวสมศักย์เท่านั้นซึ่งเป็นรูปทรงกระบอก(แต่อาจจะไม่กลม) เนื่องจากการไม่มีการเปลี่ยนแปลงใดๆในทิศทางตั้งฉากจากพื้นผิวภาพร่างที่วาด เมื่อสุ่มเลือกเส้นกระแสหรือเส้นฟลักซ์ที่จุด A บนผิวของตัวนำที่มีศักย์เป็นบวกมากกว่ามันจะพุ่งออกตั้งฉากกับผิวสมศักย์และต้องตัดผ่านผิวสมศักย์ระหว่างตัวนำแต่ละตัว ด้วยมุมที่เป็นจริงดังที่แสดงในรูปเส้นฟลักซ์นี้จะลากต่อไปยังอีกตัวนำหนึ่งตามกฎเพียงข้อเดียวจะได้เส้นตัดขวางกับเส้นสมศักย์เป็นรูปจตุรัสไม่ว่าจะหมุนกระดาษไปด้านไหนก็ตาม การที่จะหาค่าได้เที่ยงตรงที่สุดขึ้นอยู่กับว่าจะต้องวาดเส้นให้ได้ตัดกันตั้งฉากที่สุด ดังวิธีการเดียวกันหากจะเริ่มวาดที่จุด B ถ้าจะวาดเส้นกระแสอีกเส้นหนึ่งที่มีจุดปลายอยู่ที่ B' และแปลความหมายของเส้นกระแสทั้งสองนี้ นิยามของเส้นกระแสคือเส้นที่ขนานกันไปตลอดกับความเข้มสนามไฟฟ้าหรือความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า เนื่องจากเส้นกระแสขนานกับความหนาแน่นฟลักซ์ ดังนั้นอีกความหมายหนึ่งความหนาแน่นฟลักซ์ก็ขนานกับเส้นกระแสและจะไม่มีฟลักซ์ไฟฟ้าใดตัดกับเส้นกระแสเลย ถ้ามีประจุ $5 \mu C$ บนผิวระหว่างจุด A กับ B จะปรากฏว่ามีฟลักซ์ $5 \mu C$ ในบริเวณนี้และฟลักซ์ทั้งหมดก็จะเชื่อมอยู่ระหว่าง A' กับ B' ด้วยดังนั้นเส้นกระแสคู่หนึ่งอาจจะเรียกว่าเป็นหลอดฟลักซ์ (Flux tube) เพราะว่าโครงสร้างทางกายภาพซึ่งทำหน้าที่เหมือนกับหลอดที่นำเอาฟลักซ์พุ่งออกจากตัวนำหนึ่งไปยังอีกตัวนำหนึ่งโดยไม่มีการรั่วไหลออกไปนอกหลอดนี้เลย ต่อไปจะวาดเส้นกระแสที่สามโดย

เริ่มต้นที่จุด C ซึ่งจะวาดได้ง่ายในความหมายทางคณิตศาสตร์ควรจะให้จำนวนฟลักซ์ในหลอด BC เท่ากับฟลักซ์ในหลอด AB ความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุดกึ่งกลางของเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด A กับจุด B อาจหาได้จากการประมาณค่าโดยสมมติให้ค่าของฟลักซ์ในหลอด AB เป็น $\Delta\psi$ ซึ่งจะเขียนเป็นความสัมพันธ์ความหนาแน่นฟลักซ์ได้เป็น $\Delta\psi / \Delta L$ เมื่อหลอดนี้มีความลึกเข้าไปในเนื้อกระดาษ 1 m ส่วน ΔL คือความยาวของเส้นที่เชื่อมจาก A ไปยัง B หาขนาดของ E ได้เป็น

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta\psi}{\Delta L}$$

บางครั้งอาจจะหาขนาดค่าความเข้มสนามไฟฟ้าได้โดยหาความต่างศักย์ระหว่างจุด A กับ A_1 ถ้าสมมติให้ระยะที่ว่าเป็น ΔL_N และหาค่าความต่างศักย์ที่มีค่าเพิ่มขึ้นสมมติเป็น ΔV ดังนั้นจะได้

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta L_N}$$

ค่าที่หาได้นี้จะมีความเที่ยงตรงสูงสุดที่ตำแหน่งตรงกลางระหว่างจุด A กับ A_1 ในขณะที่ค่าที่หามาได้ก่อนหน้านี้จะมีความเที่ยงตรงสูงสุดที่จุดกึ่งกลางระหว่างส่วนย่อยของ A ถึง B ถ้าเส้นสมศักย์ที่วาดอยู่ใกล้กันมาก (ΔV มีค่าน้อย) และเส้นกระแสมีระยะห่างกันน้อยด้วย ($\Delta\psi$ มีค่าน้อย) จะพบว่าความเข้มสนามไฟฟ้าจากทั้งสองวิธีมีค่าเท่ากัน ดังนั้น

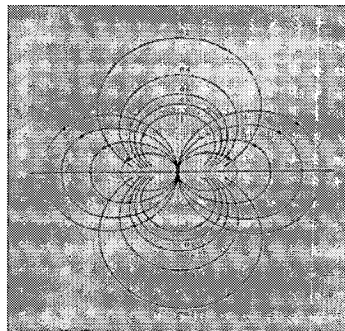
$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta\psi}{\Delta L} = \frac{\Delta V}{\Delta L_N}$$

การวาดภาพร่างที่ผ่านมาราสมมติว่าอยู่ภายในตัวกลางของสารเนื้อเดียว (ϵ เป็นค่าคงที่) จะได้ความต่างศักย์ระหว่างผิวสมศักย์สองผิวใดๆเป็นค่าคงที่และจำนวนฟลักซ์ต่อหลอดฟลักซ์เป็นค่าคงที่ด้วย ($\Delta\psi$ เป็นค่าคงที่) ด้วยความสอดคล้องจากเงื่อนไขทั้งหมดนี้จะพบว่า

$$\frac{\Delta L}{\Delta L_N} = \text{ค่าคงที่} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta\psi}{\Delta V}$$

ตัวแปรที่เท่ากันนี้เกิดขึ้นทุกๆจุดที่เราวาดดังนั้นจึงสรุปได้ว่าอัตราส่วนที่เป็นค่าคงที่นั้นจะเป็นส่วนที่ประกอบขึ้นจากระยะห่างระหว่างเส้นกระแสที่วัดจากระยะผิวสมศักย์กับระยะระหว่างเส้นสมศักย์ที่วัดตามเส้นกระแส อัตราส่วนนี้จะต้องเป็นค่าเดียวกันที่ทุกๆจุดที่พิจารณาไม่ใช่เป็นที่ค่าความยาวระหว่างตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง ระยะความยาวที่ว่าจะต้องมีค่าลดลงในบริเวณที่มีความเข้มสนามมากกว่า เนื่องจาก ΔV เป็นค่าคงที่ ค่าอัตราส่วนอย่างง่ายที่นิยามใช้คือหนึ่งและเส้นกระแสจากจุด B ไปยัง B' ดังในรูปหากเริ่มต้นที่จุดซึ่งมี $\Delta L = \Delta L_N$ เนื่องจากอัตราส่วนของระยะเหล่านี้ถูกทำให้เป็นหนึ่งเส้นกระแส

และเส้นสมศักย์หารด้วยสนามที่อยู่ในบริเวณช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส เทอมที่มีความหมายเป็นภาพร่างเชิงระนาบซึ่งแตกต่างไปจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจริงเพราะแต่ละด้านเป็นเส้นโค้งและมีขนาดแตกต่างกันเล็กน้อยแต่ก็จะมองเห็นเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้ถ้าหากทำให้มีขนาดเล็กลงผิวเหล่านี้มีจำนวนเพิ่มมากขึ้นในระบบสามแกนซึ่งจะทำให้รูปแบบระนาบเดียวของเรากลายเป็นรูปจัตุรัสฐานโค้ง (Curvilinear squares) เมื่อทำการร่างเส้นกระแสเส้นอื่นให้ครบโดยวาดให้เป็นช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มมากที่สุดเท่าที่จะทำได้ตามรูป ความแตกต่างระหว่างผลที่ได้จากแผนภาพสนามที่ใช้วิธีการวาดรูปให้เป็นจัตุรัสฐานโค้งในตัวอย่างคือการเขียนผิวศักย์ไฟฟ้าที่อยู่ตรงกลางรูปเหลี่ยมไว้ ทั้งเส้นกระแสและเส้นสมศักย์จะต้องเขียนไว้บนภาพตอนเริ่มต้นซึ่งวาดไว้เฉพาะรอยต่อของผิวดำนำเท่านั้น มีคำตอบเดียวที่เป็นไปได้ซึ่งอาจจะพิสูจน์ได้ในเวลาต่อมาด้วยทฤษฎีความเป็นหนึ่งเดียว (uniqueness theorem) สำหรับสมการลาปลาซและกฎเริ่มต้นเมื่อเริ่มเขียนเส้นกระแสขึ้นมาเส้นหนึ่งก็จะมีเส้นสมศักย์ลากอยู่ข้างในเมื่อลากเส้นกระแสอื่นเพิ่มเข้าไปก็จะประกอบกันเข้าเป็นรูปจัตุรัสฐานโค้งอย่างสมบูรณ์ซึ่งอาจจะพบว่าไม่สามารถทำจัตุรัสได้อย่างถูกต้องบริเวณมุมความผิดพลาดจากการวาดจะถูกแก้ไขต่อไป



ภาพที่ 2.25 ภาพวาดเส้นกระแสที่วาดให้ตั้งฉากกับตัวนำและประกอบเข้าเป็นจัตุรัสฐานโค้ง

2.2.23 การแพร่กระจายในตัวนำ: ปรากฏการณ์ความลึกผิว

(Propagation in good conductor : Skin effect)

ในการแพร่กระจายคลื่นแบบมีความสูญเสีย พฤติกรรมของตัวนำที่ดี (Good conductor) เมื่อมีคลื่นระนาบสม่ำเสมอเคลื่อนที่อยู่ในตัวมัน สารที่มีการสูญเสียสูงคือมีเทนเจนต์การสูญเสียที่ $\epsilon''/\epsilon' \gg 1$ เมื่อเอาเกณฑ์การตัดสินใจนี้มาใช้กับตัวนำที่ดีจะทำให้ได้เกณฑ์การตัดสินใจเพิ่มเข้ามาคือ $\sigma/\omega\epsilon' \gg 1$ เช่นเดียวกันกับที่ได้พิจารณาการลดทอนที่เกิดขึ้นกับคลื่นที่เคลื่อนที่ผ่านเข้าไปในตัวนำที่ดี การประมาณ

ค่าแบบใหม่ในการ สำหรับการลดทอน ค่าอิมพีแดนซ์ภายในเนื้อสาร ซึ่งเป็นการปรับปรุงมาจากการวิเคราะห์ในตัวนำที่ดี คลื่นที่เกี่ยวข้องกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ใส่เข้าไปในไดอิเล็กตริกซึ่งแนบติดกับที่ผิวตัวนำนั้นในกรณีนี้คลื่นจะมีการแพร่กระจายไปตามผิว ส่วนสนามที่ปรากฏอยู่ภายในตัวนำนั้นจะสูญเสียไปกับการลดทอนที่กระจายออกไปในรูปของการก่อตัวเป็นสร้างเป็นค่าความนำขึ้นมา สนามทั้งหมดนั้นจะถูกลดทอนเพิ่มขึ้นตามระยะทางที่เดินทางไปตามระยะทางที่เดินทางไปตามผิว ซึ่งตัวอย่างที่เห็นได้คือกลไกการสูญเสียทางความต้านทานของสายส่ง ซึ่งทำให้เกิดเป็นพารามิเตอร์ความต้านทาน R ขึ้นมา จากการพิจารณาว่าตัวนำที่ดีควรมีค่าความนำสูง และนำกระแสได้มาก พลังงานที่เกิดขึ้นในการเดินทางของคลื่นเมื่อเดินทางผ่านสารที่มีความไม่ต่อเนื่องโดยการแพร่กระจายของคลื่นนั้นมีผลทำให้เกิดการสูญเสียทางด้านความต้านทาน หากพิจารณาค่าแทนเจนต์การสูญเสีย จะเห็นว่าอัตราส่วนของความหนาแน่นกระแสนำต่อกระแสกระจัดต่อสารตัวนำนั้นกำหนดโดย $\sigma / \omega \epsilon'$ และสมการทั่วไปของค่าคงที่ในการแพร่กระจายคือ

2.3 หลักการวัดค่าทางไฟฟ้าและส่วนประสมผล

2.3.1 การวัดค่าความจุไฟฟ้าของตัวเก็บประจุ แบบอาศัยการคายประจุของตัวเก็บประจุ(RC Time constant)

การต่อวงจรตัวเก็บประจุนุกรมกับตัวต้านทานจะทำให้ตัวเก็บประจุคายประจุผ่านตัวต้านทานเมื่อสับสวิตช์จากค่าเวลาที่วัดได้จะเป็นไปตามสมการ

การประจุกระแสไฟฟ้าผ่านตัวต้านทาน R ไปยังตัวเก็บประจุ C จะเกิดขึ้นเมื่อสับสวิตช์ประจุไฟฟ้าจะมีค่าเพิ่มขึ้นและมีค่าคงที่สูงสุดอยู่ที่ค่าหนึ่งและหากให้ประจุไฟฟ้ามีค่า q ที่เวลาหนึ่ง (transient charge) เมื่อสับสวิตช์ไปอีกทางหนึ่งตัวเก็บประจุจะคายประจุผ่านตัวต้านทาน R ซึ่งทำให้กระแสไฟฟ้า I ไหลผ่านตัวต้านทาน ค่ากระแสจะหาได้จาก dq/dt จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความต่างศักย์ กระแสได้เป็น

$$E = V_c + iR$$

$$E = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E - q/C}{R} = \frac{(CE - q)}{RC}$$

$$\frac{dq}{(CE - q)} = \frac{dt}{RC}$$

ที่เวลา $t=0$, $q=0$ เมื่อเวลาผ่านไป ที่ t ใดๆ ประจุที่ตัวเก็บประจุ C มีค่าเท่ากับ q จะพบว่า

$$\int_0^q \frac{dq}{(CE - q)} = \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\int_0^q \frac{d(CE - q)}{CE - q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\int_{CE}^{CE-q} \frac{du}{u} = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln(CE - q) - \ln(CE) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln \left[\frac{CE - q}{CE} \right] = -\frac{t}{RC}$$

$$CE - q = CE e^{-t/RC}$$

$$q = CE(1 - e^{-t/RC})$$

$$V_c = E(1 - e^{-t/RC})$$

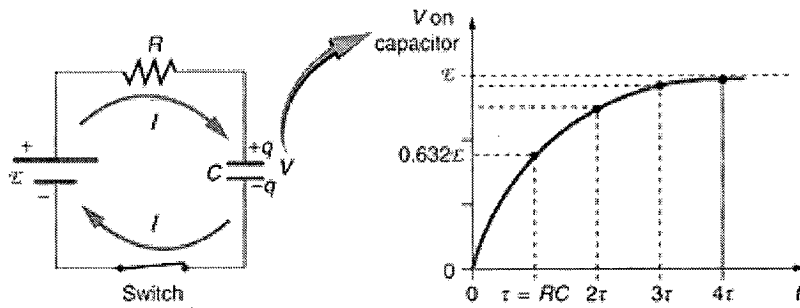
จากสมการพบว่า RC มีเทอมในส่วนของเวลา ค่า RC จะมีค่าคงที่สำหรับวงจรไฟฟ้าในแต่ละวงจรซึ่งจะเขียนค่า RC ด้วย T ซึ่งเป็นค่า time constant เมื่อ $t=RC$ จะได้สมการ

$$V_c = E(1 - e^{-1})$$

$$V_c = \frac{E(e-1)}{e}$$

$$V_c = 0.632E$$

เมื่อประจุไฟฟ้าเคลื่อนผ่านตัวต้านทาน R มาออกกันอยู่ในตัวเก็บประจุเป็นเวลา $t = RC$ จะมีตัวเก็บประจุสะสมอยู่จะพบว่าความต่างศักย์คร่อมตัวเก็บประจุมีค่าเป็น $0.632E$ จากรูปจะเป็นการเปลี่ยนแปลงของ V_c ที่เวลาใดๆ



ภาพที่ 2.26 การคายประจุของตัวเก็บประจุ

ขณะที่ตัวเก็บประจุมีประจุอยู่เต็มที่จะได้ค่าความต่างศักย์คร่อมตัวเก็บประจุเท่ากับ $V_c = E$ เมื่อเกิดการคายประจุผ่านจากตัวเก็บประจุผ่าน ตัวต้านทาน R จะเกิดการไหลของกระแสไฟฟ้า $i = dq/dt$ และมีค่าความต่างศักย์คร่อมตัวเก็บประจุเท่ากับ $q/C = V_c$ จะได้ความสัมพันธ์

$$V_c + iR = 0$$

$$\frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

ที่เวลาเริ่มต้น $t=0$ ประจุภายในตัวเก็บประจุมีค่าเท่ากับ Q เมื่อเวลาผ่านไป t ประจุที่สะสมที่ตัวเก็บประจุจะมีค่าเป็น q จากคำตอบของสมการจะหาค่าได้เช่นเดียวกันกับสมการข้างต้นจะได้สมการเป็น

$$q = Q.e^{-t/RC}$$

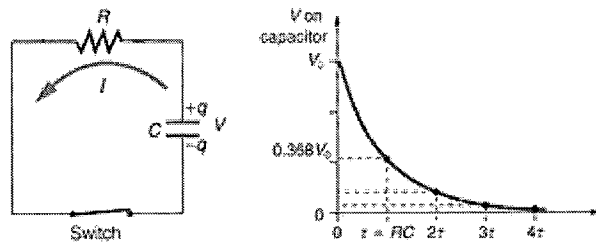
หารสมการด้วย C ทั้งสองข้างของสมการ

$$V_c = E.e^{-t/RC}$$

ที่ $t = RC = T$ จะได้

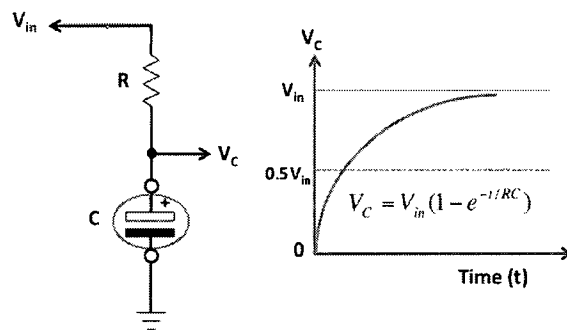
$$V_c = 0.368E$$

จะได้กราฟความสัมพันธ์ดังรูป



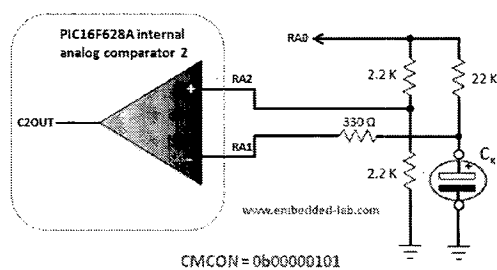
ภาพที่ 2.27 แสดงการคายประจุเมื่อสับสวิตช์

จากการเปลี่ยนแปลงของค่าประจุภายในตัวเก็บประจุข้างต้นสามารถนำมาออกแบบวงจรสำหรับวัดค่าความจุของตัวเก็บประจุได้



ภาพที่ 2.28 แสดงค่าแรงดันเมื่อทำการชาร์จประจุ

วงจรด้านล่างเป็นหลักการวัดค่าตัวเก็บประจุโดยอาศัยวงจรคอมพาราเตอร์ภายในตัวไมโครคอนโทรลเลอร์ร่วมกับโมดูลไทม์เมอร์เพื่อจับเวลาและคำนวณค่าความจุของตัวเก็บประจุ



ภาพที่ 2.29 แสดงการต่อวงจรคอมพาราเตอร์ในขาไมโครคอนโทรลเลอร์

หลักการวัดค่าความจุไฟฟ้าโดยอาศัยการวัดค่าไฟฟ้ากระแสสลับร่วมกับวงจรบริดจ์

ในการวัดค่าความจุไฟฟ้าโดยใช้แรงดัน ac นั้นอาศัยวงจรวัดค่าแบบบริดจ์ร่วมกับการวัดค่าโดยกระบวนการจะทำการจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับผ่านเข้าไปยังตัวเก็บประจุซึ่งในที่นี้อาจจะเป็นโครงสร้างแบบอื่นที่มีลักษณะของตัวเก็บประจุโดยการต่อขา

2.3.2 ระบบไมโครคอนโทรลเลอร์และการใช้งาน

ในไมโครคอนโทรลเลอร์ PIC18F458 เป็นไมโครคอนโทรลเลอร์อีกเบอร์หนึ่งของตระกูล PIC (Peripheral Interface Controller) ในปัจจุบันซึ่งมีศักยภาพในการทำงานสูงและในคุณสมบัติของไมโครคอนโทรลเลอร์เบอร์นี้คือประกอบไปด้วยความสามารถหรือฟังก์ชันในการใช้งานต่างๆ ไว้ในตัวมันเอง เช่น มีโมดูล (Module) แปลงสัญญาณแอนะล็อกเป็นดิจิทัล (Analog To Digital Converter)

USART, SPI, I²C, PWM อื่นๆ มีโมดูลที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่คือ Can Module, ECCP ซึ่งเป็นคุณสมบัติใหม่ของไมโครคอนโทรลเลอร์ตระกูล PIC โดยมีในไมโครคอนโทรลเลอร์ PIC18F458 และเบอร์อื่นๆของไมโครคอนโทรลเลอร์ตระกูล PIC 18FXXX และยังสามารถใช้งานตรงที่หน่วยความจำโปรแกรมเป็นหน่วยความจำแบบแฟลช (Flash Program Memory) ซึ่งสามารถเขียนและลบข้อมูลได้ด้วยสัญญาณไฟฟ้าได้นับหลายพันครั้ง ข้อเด่นอีกประการหนึ่งของไมโครคอนโทรลเลอร์เบอร์นี้ในเรื่องความเร็ว PIC18F458 สามารถทำงานได้ที่ความถี่สัญญาณนาฬิกาสูงถึง 40 เมกะเฮิร์ตซ์ (MHz) มีวงจร PLL (Phase Lock Loop) ซึ่งเป็นวงจรควบคุมความถี่อยู่ภายในโดยสามารถเลือกโดยการโปรแกรมซอฟต์แวร์ ซึ่งสามารถควบคุมค่าความถี่ที่รับเข้ามาได้ถึง 4 เท่าของสัญญาณนาฬิกาจากภายนอกทั้งยังทำงานในลักษณะของไปป์ไลน์ (Pipe Line) ทำให้มีความเร็วในการทำงานมากกว่าสี่เท่าตัวไปที่มีค่าความถี่เดียวกัน โดยลักษณะการทำงานจะใช้สัญญาณนาฬิกาเพียง 1 หรือ 2 ไซเคิล (Cycle) ต่อคำสั่งเท่านั้น และหน่วยความจำไม่ถูกแบ่งเป็นเพจ (Page) อีกต่อไปในการเขียนโปรแกรมจึงง่ายโดยไม่ต้องเลือกแบงก์ (Bank)

คุณสมบัติของไมโครคอนโทรลเลอร์ PIC18F458

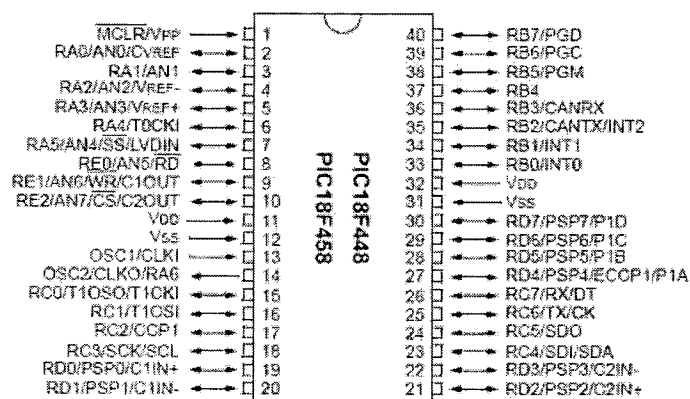
สามารถสรุปคุณสมบัติของไมโครคอนโทรลเลอร์ PIC18F458 ได้ดังนี้

มีชุดคำสั่ง 75 คำสั่ง

1. ซีพียูเป็นแบบ RISC (Reduce Instruction Set Computer)
2. เป็นซีพียู 16 บิต
3. หน่วยความจำ SRAM 1536 ไบต์ (Byte)
4. หน่วยความจำโปรแกรม 32 กิโลไบต์ (Kbyte)
5. หน่วยความจำอีอีพรอม 256 ไบต์
6. รับความถี่สัญญาณนาฬิกาตั้งแต่ไฟตรงถึง 40 เมกะเฮิร์ตซ์
7. มีวงจร PLL (Phase Lock Loop) ซึ่งคูณค่าความถี่ของสัญญาณนาฬิกา 4 เท่าของสัญญาณอินพุต
8. ตอบสนองการอินเตอร์รัพต์ (interrupt) ได้ถึง 21 แห่ง
9. มีขารับสัญญาณอินเตอร์รัพต์จากภายนอก 3 ขา คือ RB0/INT0, RB1/INT1, RB2/INT2
10. เลือกลำดับความสำคัญของการอินเตอร์รัพต์จากอุปกรณ์ต่อพ่วงได้
11. กระแสซิงค์ (Synchronous) และซอร์ส (Source) ของพอร์ต (Port) สูงสุด 25 มิลลิแอมป์
12. มีโมดูลไทมเมอร์ 4 ตัวดังนี้
 - 12.1 ไทมเมอร์ 0 ขนาด 8/16 บิต เป็นไทมเมอร์ / เคาน์เตอร์พร้อมปริสเกลเลอร์ 8 บิต
 - 12.2 ไทมเมอร์ 1 ขนาด 16 บิต เป็นไทมเมอร์ / เคาน์เตอร์พร้อมปริสเกลเลอร์ 8 บิต
 - 12.3 ไทมเมอร์ 2 ขนาด 8 บิต มีปริสเกลเลอร์ โพสต์สเกลเลอร์ และรีจิสเตอร์คาบเวลา (Period Register) เป็นตัวเปรียบเทียบค่ากับไทมเมอร์ 2 อยู่ภายในตัว
 - 12.4 ไทมเมอร์ 3 ขนาด 16 บิต เป็นไทมเมอร์ / เคาน์เตอร์
13. มีโมดูล CCP (Capture/Compare/PWM) 1 ชุด ส่วนตรงจับสัญญาณ (Capture) ขนาด 16 บิต ความละเอียดสูงสุด 6.25 นาโนวินาที ส่วนเปรียบเทียบสัญญาณ (Compare) ความละเอียดสูงสุด 100 นาโนวินาที และส่วนมอดูเลชันทางความกว้างของพัลส์ (Pulse Width Modulation : PWM) ความละเอียดสูงสุดที่ 10 บิต
14. มีโมดูล ECCP (Enhanced Capture/Compare/PWM) 1 ชุด ทำงานคล้ายกับโมดูล CCP แต่จะต่างกันตรงที่จะใช้งานในการควบคุมมอเตอร์
15. มีโมดูล MSSP (Master Synchronous Serial Port) ใช้งานเป็นวงจรเชื่อมต่ออุปกรณ์อนุกรมทำงานได้ 2 โหมด คือ SPI และ I²C
16. มีโมดูลสื่อสารอนุกรม USART (Universal Synchronous Asynchronous Receiver Transmitter)

17. มีโมดูลแปลงสัญญาณแอนาลอกเป็นดิจิทัล (Analog To Digital Converter) อยู่ภายในความละเอียด 8 บิต 8 ช่อง
18. มีโมดูลเปรียบเทียบแรงดันแอนาลอก (Comparator Voltage Referent Module) ภายใน
19. สามารถเลือกโหมดการป้องกันข้อมูลได้ (Code Protection)
20. ทำงานที่ไฟเลี้ยง 2.0V ถึง 5.0V
21. สามารถโปรแกรมด้วยแรงดันไฟต่ำได้ LVP (Low Voltage Programming)
22. ฟังก์ชันการทำงานโปรแกรมเป็นแบบ ICSP (In Circuit Serial Programming)
23. มีเพาเวอร์ออนรีเซต (Power On Reset : POR) เพาเวอร์อัพไทมเมอร์ (Power Up Timer : PWRT) และ ออสซิลเลเตอร์สตาร์ทอัพไทมเมอร์ (Oscillator Start Up Timer : OST)
24. มีวอตช์ด็อกไทมเมอร์ (Watch Dog Timer : WDT) ทำให้มีความเชื่อมั่นในการทำงานสูง
25. มีโหมดการประหยัดพลังงาน (Sleep Mode)
26. มีฟังก์ชันตรวจสอบแรงดันไฟเลี้ยง (Brown Out Reset : BOR)
27. มีสแต็ก (Stack) 31 ระดับ มีพอร์ตอินพุตเอาต์พุต 5 พอร์ต คือ A,B,C,D และ E รวมแล้วพอร์ตการใช้งานทั้งหมด 34 บิต โดยพอร์ต A มีจำนวน 7 บิต RA0-RA6 พอร์ต B มี 8 บิต คือ RB0-RB7 พอร์ต C และ D มีจำนวน 8 บิต คือ RC0-RC7 และ RD0-RD7 พอร์ต E มีจำนวน 3 บิต คือ RE0-RE2

PIC18F458 มีขาทั้งหมด 40 ขาในตัวถังแบบ PDIP และ 44 ขาในตัวถังแบบ TQFP ซึ่งแต่ละขาจะมีหน้าที่การใช้แตกต่างกันออกไปและมีขนาดขาอินพุตและเอาต์พุตทั้งหมด 34 ขา ซึ่งทั้ง 34 ขา สามารถเลือกใช้งานเป็นอินพุตได้หมด ดังรูป แสดงการจัดขาตัวถังแบบ PDIP



ภาพที่ 2.30 แสดงโครงสร้างการจัดขาของไมโครคอนโทรลเลอร์ PIC18F458

ไมโครคอนโทรลเลอร์ PIC18F458 เป็นไมโครคอนโทรลเลอร์ที่พัฒนาสถาปัตยกรรมมาจากเบอร์อื่นๆ ของตระกูล PIC เช่น PIC16F877 ซึ่งถือว่ามีคุณสมบัติใกล้เคียงกันกับ PIC18F458 แต่จะต่างกันตรงมีฟังก์ชันและโมดูลต่างๆ ที่เพิ่มเติมเข้ามาและที่เห็นได้ชัดคือ PIC18F458 นั้นเป็นไมโครคอนโทรลเลอร์ 16 บิต ที่มีชุดคำสั่งทั้งหมด 75 คำสั่ง ซึ่งยังไม่รวมคำสั่งใดเรียกที่พื้ที่มากับโปรแกรม MPLAB ไมโครคอนโทรลเลอร์ PIC18F458 เป็นไมโครคอนโทรลเลอร์ที่มีสถาปัตยกรรมแบบฮาร์วาร์ด (Harvard Architecture) โดยมีลักษณะของสถาปัตยกรรมแบบนี้จะเป็นการแยกหน่วยความจำข้อมูลออกจากกันทำให้การทำงานได้เร็วขึ้นและนอกจากการจัดสถาปัตยกรรมแบบนี้จะเป็นการแยกหน่วยความจำข้อมูลออกจากกันทำงานได้เร็วขึ้นและนอกจากการจัดสถาปัตยกรรมแบบนี้แล้วในตระกูลไมโครคอนโทรลเลอร์ตระกูล PIC ยังมีลักษณะเด่นอีกอย่างหนึ่งคือมีการทำงานเป็นแบบเปปไลน์ (Pipe Line) ซึ่งมีลักษณะการทำงานคือสามารถเฟตซ์ (Fetch) คำสั่งถัดไปได้ในขณะที่กำลังเอ็กคิวต์ (Execute) อยู่ทำให้การทำงานของไมโครคอนโทรลเลอร์ PIC18F458 มีการทำงานที่เร็วขึ้นโครงสร้างจะมีบางส่วนที่คล้ายคลึงกับ PIC16F887 สิ่ง queเพิ่มเติมขึ้นมามีอีกหนึ่งตัวมีขนาด 16 บิต คือไทเมอร์ 3 รวมแล้วเป็นจำนวน 4 ตัวและหน่วยความจำก็ได้เพิ่มขนาดขึ้นด้วย PIC 16F877 มีหน่วยความจำโปรแกรมเพียง 8 กิโลไบต์ หน่วยความจำข้อมูล 368 กิโลไบต์ ส่วน PIC18F458 มีมาถึง 32 กิโลไบต์และมีหน่วยความจำข้อมูล 1536 ไบต์ สำหรับหน่วยความจำอีพรอมยังคงเท่าเดิมคือ 256 กิโลไบต์สถาปัตยกรรมและการทำงานของไมโครคอนโทรลเลอร์ตระกูล PIC โดยรวมแล้วจะมีส่วนการทำงานพื้นฐานที่เหมือนกัน

การทำงานของไมโครคอนโทรลเลอร์เริ่มจากการป้อนไฟเลี้ยงและป้อนสัญญาณนาฬิกาให้แก่ตัวมันจากนั้นซีพียูจะติดต่อกับหน่วยความจำโปรแกรม เพื่อที่จะอ่านข้อมูลคำสั่งแล้วทำงานตามคำสั่งที่บรรจุอยู่ในหน่วยความจำโปรแกรม เมื่อไมโครคอนโทรลเลอร์ทำงานตามคำสั่งที่กำหนดในข้อมูลของชุดคำสั่งจะถูกนำไปเก็บไว้ในรีจิสเตอร์คำสั่ง (Instruction Register) จากนั้นจะถูกส่งไปยังวงจรถอดรหัสเพื่อทำการควบคุมไทเมอร์ทั้งหมดภายในตัวไมโครคอนโทรลเลอร์ทำงานตามคำสั่ง (Instruction Register) จากนั้นจะถูกส่งไปควบคุมหน่วยคำนวณคณิตศาสตร์ (Arithmetic Logic Unit : ALU) โดยผ่านทางด้านวงจรมัลติเพล็กซ์ (Multiplex) ด้วยการกำหนดจังหวะการทำงานของไมโครคอนโทรลเลอร์ PIC18F458 เป็นหน้าที่ของส่วนกำเนิดจังหวะการทำงาน (Timing Generation) ซึ่งจะทำงานสัมพันธ์กับไทเมอร์ 3 ตัว ออสซิลเลเตอร์สตาร์ตอัพไทเมอร์ วอตช์ด็อกไทเมอร์ และเพาเวอร์อัพไทเมอร์

การเขียนโปรแกรมบนไมโครคอนโทรลเลอร์

ในการเขียนโปรแกรมให้ไมโครคอนโทรลเลอร์ทำงานนั้นจะมีรูปแบบและเงื่อนไขในการเขียนโปรแกรมเฉพาะ โดยรูปแบบและเงื่อนไขนั้นคือภาษาที่ใช้เขียนโปรแกรมทำงานซึ่งในปัจจุบันก็มีให้เลือกใช้หลากหลายภาษาแล้วแต่เราจะเลือกใช้ให้เหมาะสมกับงาน

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับโปรแกรมบนไมโครคอนโทรลเลอร์

ในการเขียนโปรแกรมให้ไมโครคอนโทรลเลอร์ทำงานนั้นจะมีรูปแบบและเงื่อนไขในการเขียนโปรแกรมเฉพาะ โดยรูปแบบและเงื่อนไขนั้นคือภาษาที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมการทำงานซึ่งในปัจจุบันก็มีให้เลือกใช้หลากหลายภาษาแล้วแต่เราจะเลือกใช้ให้เหมาะสมกับงาน

2.3.3 ภาษาของการเขียนโปรแกรม

1. ภาษาเครื่อง

ภาษาเครื่องหรือแมชชีนโค้ด (Machine Code) เป็นภาษาของรากฐานการทำงานของไมโครคอนโทรลเลอร์จะเป็นรหัสเลขฐาน 2 ที่บรรจุอยู่ในพื้นที่ข้อมูลภายในตัวไมโครคอนโทรลเลอร์เป็นรหัสที่ส่วนประมวลผลจะแปลงเป็นขั้นตอนการทำงาน ซึ่งหากเราจะทำความเข้าใจถึงโครงสร้างภายใน และข้อมูลชุดคำสั่งจากโรงงานผลิตด้วย แต่โชคดีที่เรามีเครื่องมือที่ทำให้เราแปลงจากภาษาเครื่องได้นั้นคือ ภาษาแอสเซมบลีซึ่งเราจะอธิบายถัดไป

2. ภาษาแอสเซมบลี

ภาษาแอสเซมบลี (Assembly language) เป็นภาษาที่มีระดับสูงกว่าภาษาเครื่องโดยเราจะใช้ในการเขียนโปรแกรมเพื่อหลีกเลี่ยงการเขียนรหัสภาษาเครื่อง หมายความว่าในการเขียนโปรแกรมเราจะมีคำสั่งที่คล้ายกับภาษาของมนุษย์ในการเขียนโปรแกรมไมโครคอนโทรลเลอร์ให้ทำงานตามขั้นตอน ซึ่งตัวโปรแกรมภาษาแอสเซมบลีจะทำหน้าที่แปลงภาษาที่มนุษย์เขียนภาษาเครื่องทำให้มีความสะดวกมากขึ้น

3. ภาษาเบสิก

ภาษาเบสิก (basic language) เป็นภาษาระดับสูงกว่าภาษาแอสเซมบลี เนื่องจากการเขียนโปรแกรมด้วยภาษาแอสเซมบลีนั้นผู้เขียนจำเป็นต้องมีความรู้การทำงานภายในของตัวไมโครคอนโทรลเลอร์อยู่บ้างทำให้ผู้จะพัฒนาโปรแกรมต้องมาศึกษาการทำงานภายใน

ไมโครคอนโทรลเลอร์ก่อนซึ่งต้องอาศัยเวลา และพื้นฐานความรู้ ดังนั้นภาษาเบสิกจึงเป็นทางเลือกเพื่ออำนวยความสะดวกในการเขียนโปรแกรมเพราะเป็นภาษาที่ง่ายมากเหมาะกับผู้ที่จะเริ่มก่อกั้นแต่ข้อด้อยสำหรับภาษาเบสิกคือความเร็วในการทำงานของโปรแกรมค่อนข้างช้าและไม่ยืดหยุ่นในการทำงาน ทำให้ในปัจจุบันไม่นิยมนำภาษาเบสิกมาเขียนโปรแกรมเพื่อพัฒนาระบบควบคุมด้วยไมโครคอนโทรลเลอร์

4. ภาษาซี

ภาษาซี (C language) เป็นภาษาระดับสูงคล้ายกับภาษาเบสิกแต่ภาษาซีจะเป็นภาษาที่มีลักษณะเป็นโครงสร้างทำให้เกิดความยืดหยุ่นในการเขียนโปรแกรมมากกว่าภาษาเบสิก อีกทั้งเราสามารถใช้ภาษาซีในการเข้าใจโครงสร้างภายในของไมโครคอนโทรลเลอร์เร็วกว่าภาษาเบสิก แต่ผู้เขียนโปรแกรมจำเป็นต้องมีความรู้และมีประสบการณ์ในการเขียนโปรแกรมแบบโครงสร้าง

จากที่กล่าวมาข้างต้นเป็นเพียงแค่ตัวอย่างของภาษาที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมอย่างแพร่หลาย ซึ่งในปัจจุบันก็มีอีกหลายภาษาที่ถูกคิดค้นขึ้นมา หากเรามีความสนใจก็สามารถศึกษาหาข้อมูลเพิ่มเติมได้ ซึ่งในอนาคตก็คงจะมีการพัฒนาภาษาโปรแกรมให้มีสมรรถนะเพิ่มมากขึ้น

2.3.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. การพัฒนาโทรมาตรตรวจวัดความชื้นในดินแบบอัตโนมัติ (Development of Automatic Soil Moisture Telemetry) วิษณุ ศรีวงษา การประชุมวิชาการ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ครั้งที่ 6

2. การพัฒนาเครื่องวัดความชื้นในดินทดแทนการนำเข้าจากต่างประเทศ เพื่อจัดการดินและน้ำชลประทานในดินทรายอย่างมีประสิทธิภาพ (Development of Soil Moisture Meter for Improvement of Soil and Irrigation Water Management in Sandy Soil)

สมบุญ มั่นความดี , พงจิตต์ ศรีสุข , สุภัทตรา นุชนารถ

กลุ่มงานดินด้านวิทยาศาสตร์ กลุ่มวิจัยและพัฒนาด้านวิทยาศาสตร์ สำนักวิจัยและพัฒนากรมชลประทาน

3. การพัฒนาเครื่องมือวัดความชื้นในดินแบบวัดความต้านทานไฟฟ้าเพื่อการเกษตร (Development of Instrument to Measure Soil Moisture by Evaluating Electrical Resistance for Agricultural Purpose)

ศักดิ์ชัย เล้าภากรณ์ วิศวกรรมทรัพยากรน้ำ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

4. การพัฒนาอุปกรณ์สำหรับการวัดความชื้นของเนื้อลำไย โดยใช้วงจรสร้างสัญญาณนาฬิกา (Development of a Device for Moisture Measurement of Longan Flesh Using Clock Generator)
กฤษณะ มงคลเกิด สาขาวิชาวิศวกรรมพลังงาน ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
5. โรงเพาะเห็ดฟางควบคุมความชื้นและอุณหภูมิด้วยไมโครคอนโทรลเลอร์ ชัยสิทธิ์ ระดับ 1 , ณวีวรรณ สิงห์โหนด 2 , ศักดิ์ศรี แก่นสม 3 , จักรตรา โขมะสรานนท์ สาขาเทคโนโลยีไฟฟ้า คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร