

ภาคผนวก

บทความวิจัยที่จะส่งตีพิมพ์ในวารสารมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร

ผลประสานของตัวดำเนินการ \diamond_c^k ที่สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์
ของมาร์เคอริสซ์

The convolutions of the operator \diamond_c^k related to the
diamond kernel of Marcel Riesz

สุดประไทย บุพศิริ
Sudprathai Bupasiri

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร
Faculty of Education Mathematics Program,
Sakon Nakhon Rajabhat University,
e-mail : sudprathai1@hotmail.co.th

บทคัดย่อ

สำหรับการวิจัยในครั้งนี้เป็นการพิจารณาสมการ $\diamond_c^k u(x) = \delta(x)$ เมื่อ \diamond_c^k เป็นตัว
ดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k ครั้ง และนิยามโดย

$$\diamond_c^k = \left[\frac{1}{c^4} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^2 \right]^k, u(x) \text{ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

เป็นปริภูมิยูคลีเดียน $p + q = n, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ และ $\delta(x)$ เป็นดิสตรีบิวชันไดเรคเดลตา $u(x)$ เป็น
ผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการ \diamond_c^k ที่สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริส จุดประสงค์หลัก
ของการศึกษาในครั้งนี้จะเป็นการศึกษาผลประสานของผลเฉลยมูลฐาน $u(x)$

Abstract

In this paper, we consider the equation $\diamond_c^k u(x) = \delta(x)$ where \diamond_c^k is introduce
and name as the operator related to the diamond operator iterated k - times and is

defined by $\diamond_c^k = \left[\frac{1}{c^4} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^2 \right]^k, u(x)$ is a generalized function,

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ the n - dimensional Euclidean space, $p + q = n, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ and
 $\delta(x)$ is the Dirac-delta distribution. Now $u(x)$ is the elementary solution of the

operator \diamond_c^k and related to the diamond kernel of Marcel Riesz. The main part of this work is studying the convolution of $u(x)$.

1 บทนำ

พิจารณาสมการ

$$\diamond_c^k u(x) = \delta(x) \quad (1.1)$$

เมื่อ \diamond_c^k เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k ครั้ง และนิยามโดย

$$\diamond_c^k = \left[\frac{1}{c^d} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^2 \right]^k \quad (1.2)$$

(Bupasiri and Nonlaopon. 2010) ได้แสดงว่าผลประสานของดิस्टริบิวชัน $u(x) = (-1)^k S_{\alpha,c}(x)$

* $R_{\alpha,c}(x)$ เป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการ (1.1) เมื่อ $R_{\alpha,c}(x)$ และ $S_{\alpha,c}(x)$ นิยามในสมการ (2.3)

และ (2.4) ตามลำดับ เมื่อ $\alpha = 2k$ จะได้ $u(x)$ สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์

2 ความรู้พื้นฐาน

นิยาม 2.1 ให้ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ และ

$$u = c^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2) - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2, \quad p + q = n$$

กำหนด $\Gamma_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, u > 0\}$ เป็นอาณาบริเวณภายในของกรวยเปิด และ $\bar{\Gamma}_+$ แทน

โคลสเซอร์ของฟังก์ชันแกมมา สำหรับจำนวนเชิงซ้อน α ใดๆ, นิยามฟังก์ชัน

$$R_{\alpha,c}(u) = \begin{cases} \frac{u^{(\alpha-n)/2}}{K_n(\alpha)}, & x \in \Gamma_+ \\ 0, & x \notin \Gamma_+ \end{cases} \quad (2.1)$$

; เมื่อ $K_n(\alpha)$ เป็นค่าคงตัว ซึ่ง

$$K_n(\alpha) = \frac{\pi^{(n-1)/2} \Gamma((2+\alpha-n)/2) \Gamma((1-\alpha)/2) \Gamma(\alpha)}{\Gamma((2+\alpha-p)/2) \Gamma((p-\alpha)/2)}. \quad (2.2)$$

ให้ $R_{\alpha,c}(u) \subset \bar{\Gamma}_+$, เมื่อ $\text{supp } R_{\alpha,c}(u)$ เป็นซัพพอร์ตของ $R_{\alpha,c}(u)$ ฟังก์ชัน $R_{\alpha,c}$ นำเสนอโดย

(Nozaki. 1964: 72) และจะเรียกว่า ส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิกของมาร์เคอริสซ์ $R_{\alpha,c}(u)$

เป็นฟังก์ชันธรรมดา ถ้า $\text{Re}(\alpha) \geq n$ และเป็นดิस्टริบิวชันของ α ถ้า $\text{Re}(\alpha) < n$

นิยาม 2.2 ให้ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ และ

$$v = c^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2) + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2, \quad p + q = n.$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน β ใดๆ นิยามฟังก์ชัน

$$S_{\beta,c}(v) = 2^{-\beta} \pi^{-n/2} \Gamma\left(\frac{n-\beta}{2}\right) \frac{v^{(\beta-n)/2}}{\Gamma(\beta/2)} \quad (2.3)$$

ฟังก์ชัน $S_{\beta,c}(v)$ จะเรียกว่า ส่วนกลางเชิงวงรีของมาร์เคอริสซ์ $S_{\beta,c}(v)$ เป็นฟังก์ชันธรรมดาถ้า $\text{Re}(\beta) \geq n$ และเป็นดิสตรีบิวชันของ β ถ้า $\text{Re}(\beta) < n$

บทตั้ง 1 ฟังก์ชัน $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ ที่นิยามในสมการ (2.3) และ (2.1) เป็นดิสตรีบิวชันเอกพันธ์อันดับ $(\alpha-n)$ และเป็นดิสตรีบิวชันเทมเพอร์ สำหรับ $\text{Re}(\alpha) < n$

พิสูจน์ เนื่องจาก $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ สอดคล้องกับสมการออยเลอร์

$$\text{นั่นคือ } (\alpha-n)R_{\alpha,c}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} R_{\alpha,c}(x)$$

$$\text{และ } (\alpha-n)S_{\alpha,c}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} S_{\alpha,c}(x)$$

ดังนั้น $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ เป็นดิสตรีบิวชันเอกพันธ์อันดับ $(\alpha-n)$

และโดย (Donoghue.1969: 154-155) ได้แสดงว่าทุกๆดิสตรีบิวชันเอกพันธ์จะเป็นเทมเพอร์ดิสตรีบิวชันด้วย

บทตั้ง 2 (The convolution of tempered distributions)

ผลประสานของ $S_{\alpha,c}(x) * R_{\alpha,c}(x)$ หาค่าได้และเป็นดิสตรีบิวชันเทมเพอร์

พิสูจน์ เลือก $\text{Supp } R_{\alpha,c}(x) = K \subset \bar{\Gamma}_+$ เมื่อ K เป็น compact set

จะได้ว่า $R_{\alpha,c}(x)$ เป็นดิสตรีบิวชันเทมเพอร์ที่มี compact support

และโดย (Donoghue. 1969: 156-159)

จะได้ว่า $S_{\alpha,c}(x) * R_{\alpha,c}(x)$ หาค่าได้และเป็นดิสตรีบิวชันเทมเพอร์

บทตั้ง 3 กำหนดสมการ $\diamond_c^k(x) = \delta(x)$ เมื่อ \diamond_c^k เป็นตัวดำเนินการที่นิยามในสมการ (1.1)

สำหรับ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ δ เป็นดิสตรีบิวชันไดเรคต์เดลตา

จะได้ว่า $(-1)^k S_{2k,c}(x) * R_{2k,c}(x)$ เป็นผลเฉลยมูลฐานเพียงหนึ่งเดียวของสมการ เมื่อ $S_{\alpha,c}(x)$ และ

$R_{\alpha,c}(x)$ นิยามในสมการ (2.3) และ (2.1) เมื่อ $\alpha = 2k$ นอกจากนี้ $u(x)$ เป็นดิสตรีบิวชันเทมเพอร์

ด้วย

พิสูจน์ การพิสูจน์ปรากฏในบทความวิจัย (Bupasiri and Nonlaopon. 2010)

และโดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $(-1)^k S_{2k,c}(x) * R_{2k,c}(x)$ เป็นดิสตรีบิวชันเทมเพอร์ด้วย

บทตั้ง 4 (The convolutions of $R_{\alpha,c}(x)$ and $S_{\alpha,c}(x)$)

กำหนดให้ $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ นิยามในสมการ (2.3) และ (2.1) จะได้ว่า

1.) $S_{\alpha,c}(x) * S_{\beta,c}(x) = S_{\alpha+\beta,c}(x)$ เมื่อ α และ β เป็น complex parameters

2.) $R_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x) = R_{\alpha+\beta,c}(x)$ สำหรับ α และ β เป็นจำนวนเต็มคู่ ยกเว้น กรณี α และ β เป็นจำนวนเต็มคี่เท่านั้น

พิสูจน์ 1.) การพิสูจน์ปรากฏในบทความวิจัย (Donoghue. 1969: 158)

2.) ในกรณี α และ β เป็นจำนวนเต็มคู่จะแสดงได้ในบทความวิจัย (Kananthai.

1997:101-106)

ต่อไปจะเป็นการพิสูจน์ในกรณีที่ α เป็นจำนวนคี่และ β เป็นจำนวนคู่ หรือ α เป็นจำนวนคู่และ β เป็นจำนวนคี่ (Bupasiri and Nontlaopon. 2010) ได้แสดงว่า

$$\square_c^k R_{\alpha,c}(x) = R_{\alpha-2k,c}(x) \quad (2.4)$$

และ

$$\square_c^k R_{2k,c}(x) = \delta \quad (2.5)$$

เมื่อ \square_c^k เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก กระทำซ้ำกัน k ครั้ง และกำหนดโดย

$$\square_c^k = \left(\frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^k$$

สำหรับ m เป็นจำนวนคี่จะได้ว่า

$$\square_c^k R_{m,c}(x) = R_{m-2k,c}(x)$$

และ

$$R_{2k,c}(x) * \square_c^k R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

หรือ

$$(\square_c^k R_{2k,c}(x)) * R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

$$\delta * R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

หรือ

$$R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

เนื่องจาก m เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น $m-2k$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $2k$ เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าให้ $\alpha = 2k, \beta = m-2k$

จะได้ว่า

$$R_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x) = R_{\alpha+\beta,c}(x)$$

ต่อไปจะแสดงในกรณี α เป็นจำนวนคู่บวก และ β เป็นจำนวนคี่

โดย (2.4) จะได้ว่า

$$\square_c^k R_{0,c}(x) = R_{-2k,c}(x) \quad \text{หรือ} \quad \square_c^k \delta = R_{-2k,c}(x)$$

เมื่อ $R_{0,c}(x) = \delta$

เนื่องจาก

$$R_{-2k,c}(x) * \square_c^k R_{m,c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x) \quad \text{สำหรับ } m \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

หรือ

$$(\square_c^k \delta) * \square_c^k R_{m,c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

$$\delta * \square_c^k R_{m,c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

$$R_{m-2(2k),c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

ให้ $\alpha = -2k, \beta = m - 2k$

เนื่องจาก α เป็นจำนวนเต็มคู่บวก และ β เป็นจำนวนเต็มคี่
จะได้ว่า

$$R_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x) = R_{\alpha+\beta,c}(x)$$

3 ทฤษฎีบทหลัก

ทฤษฎีบท 3.1

กำหนดให้ $T_{m,c}(x)$ เป็นดีสทริบิวชันที่สัมพันธ์กับส่วนกลางโดมอนต์ของมาร์เคอริสซ์ นิยาม
ในสมการ (1.3) แล้วจะได้ว่า $T_{m,c}(x)$ เป็นดีสทริบิวชันเทมเพอร์ และ

$$T_{m,c}(x) = T_{m-r,c}(x) * T_{r,c}(x) \quad (3.1)$$

เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ และ $r < m$

นอกจากนี้ ถ้า $l = m - r, n = r$ จะได้ว่า

$$T_{l,c}(x) * T_{n,c}(x) = T_{l+n,c}(x) \text{ สำหรับ } l+n=m$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $T_{m,c}(x) = (-1)^m S_{2m,c}(x) * R_{2m,c}(x), \quad (m=0,1,2,\dots)$

ดังนั้น โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $T_{m,c}(x)$ เป็นดีสทริบิวชันเทมเพอร์

โดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า $\diamond_c^m T_{m,c} = \delta$

จึงได้ว่า $\diamond_c^r \diamond_c^{m-r} T_{m,c} = \delta$ สำหรับ $m > r$

และโดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า

$$\diamond_c^{m-r} T_{m,c}(x) = (-1)^m S_{2r,c}(x) * R_{2r,c}(x),$$

คอนโวลูชันทั้งสองข้างของสมการด้วย

$$(-1)^{m-r} S_{2(m-r),c}(x) * R_{2(m-r),c}(x),$$

จะได้ว่า

$$(-1)^{m-r} S_{2(m-r),c}(x) * R_{2(m-r),c}(x) *$$

$$\diamond_c^{m-r} T_{m,c}(x) = (-1)^{m-r} S_{2(m-r),c}(x) * R_{2(m-r),c}(x) * (-1)^m S_{2r,c}(x) * R_{2r,c}(x),$$

หรือ

$$\diamond_c^{m-r} [(-1)^{m-r} S_{2(m-r),c}(x) * R_{2(m-r),c}(x)] * T_{m,c}(x)$$

$$= (-1)^m S_{2(m-r),c}(x) * S_{2r,c}(x) * R_{2(m-r),c}(x) * R_{2r,c}(x)$$

เนื่องจาก

$S_{2m,c}(x)$ และ $R_{2m,c}(x)$ เป็นดิस्टริบิวชันเทมเพอร์และเป็นสมาชิกในปริภูมิของ convolution algebra u' โดยบทตั้ง 3 และ 4 จะได้ว่า

$$\delta * T_{m,c}(x) = (-1)^m S_{2m,c}(x) * R_{2m,c}(x), \quad T_{m,c}(x) = (-1)^m S_{2m,c}(x) * R_{2m,c}(x),$$

จากสมการ (3.1) จะได้ว่า

$$T_{m,c}(x) = T_{m-r,c}(x) * T_{r,c}(x)$$

ให้ $l = m - r$, $n = r$ จะได้ว่า

$$T_{l,c}(x) * T_{n,c}(x) = T_{l+n,c}(x) = T_{m,c}(x)$$

ทฤษฎีบท 3.2

กำหนดให้ $T_{m,c}(x)$ นิยามในสมการ (1.3) แล้ว $T_{m,c}(x)$ เป็นสมาชิกของปริภูมิ u' ของ convolution algebra และมี $T_{m,c}^{*-1}(x)$ เป็นอินเวอร์สของ $T_{m,c}(x)$ ซึ่ง

$$T_{m,c}(x) * T_{m,c}^{*-1}(x) = \delta = T_{m,c}^{*-1}(x) * T_{m,c}(x)$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $T_{m,c}(x) = (-1)^m S_{2m,c}(x) * R_{2m,c}(x)$,

เป็นดิस्टริบิวชันเทมเพอร์ตามบทตั้ง 2 และ

supports ของ $S_{2m,c}(x)$ และ $R_{2m,c}(x)$ เป็น compact

จึงทำให้ $S_{2m,c}(x)$ และ $R_{2m,c}(x)$ เป็นสมาชิกของปริภูมิ u' ของ convolution algebra

โดย (Zemanian, 1965: Theorem 6.2.1, 151) จะมี $T_{m,c}^{*-1}(x)$ เป็นอินเวอร์สเพียงตัวเดียว ซึ่ง

$$T_{m,c}(x) * T_{m,c}^{*-1}(x) = \delta = T_{m,c}^{*-1}(x) * T_{m,c}(x)$$

4 กิตติกรรมประกาศ

ผู้แต่งขอขอบพระคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร ที่ให้ทุนสนับสนุนการวิจัยสำหรับบุคลากรมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร

5 เอกสารอ้างอิง

A.H. Zemanian. (1965). Distribution and Transform Analysis. New York : Mc Graw-Hill.

W.F. Donoghue. (1969). Distribution and Fourier Transform. Academic Press :New York.

S. Bupasiri and K. Nonlaopon. (2010). On the solution of n-dimensional of operator related to the diamond operator. FJMS., 45, 69-80.

A. Kananthai. (1997). On the distribution related to the ultra-hyperbolic equation. Comput. Appl. Math. 84, 101-106.

Y. Nozaki. (1964). On Riemann-Liouville integral of ultra-hyperbolic type. Kodai Mathematical Seminar Reports, 6(2), 69-87.