บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ เป็นการสร้างทฤษฎีบทการหาผลประสานของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์

ขั้นตอนดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆที่เกี่ยวข้องผลประสานของดิสตริบิวชัน
2. ค้นคว้าหาเอกสารบทความวิจัย ตำรา และ เอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่กำลังดำเนินการวิจัยอยู่จาก แหล่งข้อมูลต่างๆ ทั้งในฐานข้อมูลระดับชาติหรือนานาชาติ
3. โดยการอาศัยความรู้พื้นฐานที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีตามข้อ 1 – 2 และประสบการณ์ที่ได้จากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและปรึกษากับนักวิจัยที่ปรึกษาและนักวิจัยชาวต่างประเทศที่มีความเชี่ยวชาญ ในทฤษฎีดิสตริบิวชันและหาแนวทางในการคิดค้นทฤษฎีใหม่ๆที่เกี่ยวกับผลประสานของดิสตริบิวชัน
4. สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาผลประสานที่เป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการ $\Diamond_c^k u(x) = \delta(x)$
5. สร้างและพิสูจน์ทฤษฎีเกี่ยวกับการหาอินเวอร์สของส่วนกลางของ $T_{m,c}(x) = S_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x)$ ที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\Diamond_c^k$
6. สรุปผล เตรียมเอกสารสำหรับการตีพิมพ์ และเขียนรายงานการวิจัย

ต่อไปจะเป็นเครื่องมือที่จำเป็นสำหรับการสร้างทฤษฎีบทการหาผลประสานของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์ ได้แก่ **บทตั้ง** (lemma) ต่างๆดังนี้

บทตั้งที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์

บทตั้ง 1 ฟังก์ชัน $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ ที่นิยามในสมการ (2.3) และ (2.1) เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์อันดับ $(\alpha - n)$ และเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ สำหรับ $\mathrm{Re}(\alpha) < n$

พิสูจน์ เนื่องจาก $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ สอดคล้องกับสมการออยเลอร์

นั่นคือ $$(\alpha - n)R_{\alpha,c}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} R_{\alpha,c}(x)$$

และ $(\alpha-n)S_{\alpha,c}(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}S_{\alpha,c}(x)$

ดังนั้น $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์อันดับ $(\alpha-n)$

และโดย (Donoghue. 1969:154-155) ได้แสดงว่าทุกๆเป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์จะเป็นเทมเพอร์ดิสตริบิวชันด้วย

บทตั้ง 2 (The convolution of tempered distributions)

ผลประสานของ $S_{\alpha,c}(x)*R_{\alpha,c}(x)$ หาค่าได้และเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์

พิสูจน์ เลือก Supp $R_{\alpha,c}(x)=K\subset\overline{\Gamma}_+$ เมื่อ K เป็น compact set

จะได้ว่า $R_{\alpha,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มี compact support

และโดย (Donoghue. 1969:156-159)

จะได้ว่า $S_{\alpha,c}(x)*R_{\alpha,c}(x)$ หาค่าได้และเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์

บทตั้ง 3 กำหนดสมการ $\Diamond_c^k u(x)=\delta(x)$ เมื่อ $\Diamond_c^k$ เป็นตัวดำเนินการที่นิยามในสมการ ( )สำหรับ $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$, k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ δ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา จะได้ว่า $(-1)^k S_{2k,c}(x)*R_{2k,c}(x)$ เป็นผลเฉลยมูลฐานเพียงหนึ่งเดียวของสมการ เมื่อ $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ นิยามในสมการ (2.3) และ (2.1) เมื่อ $\alpha=2k$ นอกจากนี้ $u(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

พิสูจน์ การพิสูจน์ปรากฏในบทความวิจัย (Bupasiri and Nonlaopon. 2010)

และโดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $(-1)^k S_{2k,c}(x)*R_{2k,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

บทตั้ง 4 (The convolutions of $R_{\alpha,c}(x)$ and $S_{\alpha,c}(x)$)

กำหนดให้ $S_{\alpha,c}(x)$ และ $R_{\alpha,c}(x)$ นิยามในสมการ (2.3) และ (2.1) จะได้ว่า

1.) $S_{\alpha,c}(x)*S_{\beta,c}(x)=S_{\alpha+\beta,c}(x)$ เมื่อ α และ β เป็น complex parameters

2.) $R_{\alpha,c}(x)*R_{\beta,c}(x)=R_{\alpha+\beta,c}(x)$ สำหรับ α และ β เป็นจำนวนเต็มคู่ ยกเว้น กรณี α และ β เป็นจำนวนเต็มคี่เท่านั้น

พิสูจน์ 1.) การพิสูจน์ปรากฏในบทความวิจัย (Donoghue. 1969:158)

2.) ในกรณี α และ β เป็นจำนวนเต็มคู่จะแสดงได้ในบทความวิจัย (Kananthai. 1997:101-106)

ต่อไปจะเป็นการพิสูจน์ในกรณีที่ α เป็นจำนวนคี่และ β เป็นจำนวนคู่ หรือ α เป็นจำนวนคู่และ β เป็นจำนวนคี่ (Bupasiri and Nonlaopon. 2010) ได้แสดงว่า

$$\Box_c^k R_{\alpha,c}(x)=R_{\alpha-2k,c}(x) \qquad (2.4)$$

และ

$$\Box_c^k R_{2k,c}(x)=\delta \qquad (2.5)$$

เมื่อ $\Box_c^k$ เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก กระทำซ้ำกัน k ครั้ง และกำหนดโดย

$$\square_c^k = \left(\frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i} - \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j} \right)^k$$

สำหรับ m เป็นจำนวนคี่จะได้ว่า

$$\square_c^k R_{m,c}(x) = R_{m-2k,c}(x)$$

และ

$$R_{2k,c}(x) * \square_c^k R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

หรือ

$$(\square_c^k R_{2k,c}(x)) * R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

$$\delta * R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

หรือ

$$R_{m,c}(x) = R_{2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

เนื่องจาก m เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น m-2k เป็นจำนวนเต็มคี่ และ 2k เป็นจำนวนเต็มบวก
ถ้าให้ $\alpha = 2k, \beta = m - 2k$
จะได้ว่า

$$R_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x) = R_{\alpha+\beta,c}(x)$$

ต่อไปจะแสดงในกรณี α เป็นจำนวนคู่บวก และ β เป็นจำนวนคี่
โดย (2.4) จะได้ว่า

$$\square_c^k R_{0,c}(x) = R_{-2k,c}(x) \quad \text{หรือ} \quad \square_c^k \delta = R_{-2k,c}(x)$$

เมื่อ $R_{0,c}(x) = \delta$
เนื่องจาก

$$R_{-2k,c}(x) * \square_c^k R_{m,c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x) \text{ สำหรับ m เป็นจำนวนคี่}$$

หรือ

$$(\square_c^k \delta) * \square_c^k R_{m,c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

$$\delta * \square_c^k R_{m,c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

$$R_{m-2(2k),c}(x) = R_{-2k,c}(x) * R_{m-2k,c}(x)$$

ให้ $\alpha = -2k, \beta = m - 2k$
เนื่องจาก α เป็นจำนวนเต็มคู่บวก และ β เป็นจำนวนเต็มคี่
จะได้ว่า

$$R_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x) = R_{\alpha+\beta,c}(x)$$