บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ฟังก์ชันต่อเนื่องเชิงเส้นบนปริภูมิของฟังก์ชันค่าทดสอบ จะเรียกว่า **ดิสตริบิวชัน** ซึ่งในทางฟิสิกส์แล้ว ฟังก์ชันไดแรคเดลตาถือว่าเป็นดิสตริบิวชันที่มีความสำคัญมาก

(P.K. Ram. 1998) ได้นิยามคุณสมบัติฟังก์ชันไดแรคเดลตาดังต่อไปนี้

$$\delta(x-\xi)=0 \text{ สำหรับ } x \neq \xi$$

และมีสูตรทั่วไปคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi) f(x) dx = f(\xi)$$

โดยที่ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ (sufficiently smooth) ทำให้มีนักคณิตศาสตร์ได้คิดค้นทฤษฎีที่สัมพันธ์กับดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา และตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นจำนวนมาก ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่รู้จักและคุ้นเคยกันอยู่แล้ว ได้แก่ ตัวดำเนินการลาปลาซ นิยามโดย

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

ตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกนิยามโดย

$$\Box = \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)$$

เมื่อ $p+q=n$ โดยที่ n เป็นมิติของปริภูมิ R^n

บทนิยามและความรู้พื้นฐาน

1. ฟังก์ชันค่าทดสอบ (test functions)

กำหนดให้ R^n เป็นปริภูมิ n มิติซึ่งระบบคาร์ทีเซียนของพิกัดของจุด P จะเขียนแทนด้วย $x=(x_1,\dots,x_n)$ และระยะทาง r ของ P จากจุดกำเนิดคือ $r=|x|=\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{1/2}$ ให้ k เป็น n อันดับ (n-tuple) ของจำนวนที่ไม่เป็นลบซึ่ง $k=(k_1,\dots,k_n)$ ซึ่งเรียก k ว่า มัลติอิลเด็กซ์ (multiindex) ของอันดับ n จะได้ว่า

$$|k| = k_1+\cdots+k_n, \quad x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

และ

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = D_1^{k_1} \cdots D_n^{k}$$

โดยที่ $D_j = \partial / \partial x_j$, $j = 1,2,\dots,n$

ตัวอย่าง 1.1

สำหรับใน R^3 ซึ่ง $k = (3,0,4)$ จะได้ว่า

$$D^k = \frac{\partial^7}{\partial x_1^3 \partial x_3^4} = D_1^3 D_3^4$$

บทนิยาม 1.1

ซัพพอร์ต (supports) ของฟังก์ชัน $f(x)$ คือโคลสเชอร์ (closure) ของเซตของจุด x ทั้งหมดซึ่ง $f(x) \neq 0$ ซัพพอร์ต (supports) ของฟังก์ชัน $f(x)$ จะเขียนแทนด้วย supp f

ตัวอย่าง 1.2

สำหรับ $f(x) = \sin x$, $x \in R$ supp f ประกอบด้วยเส้นจำนวนจริงทั้งหมด ที่ลากผ่าน $\sin x = 0$ เมื่อ $x = n\pi$

บทนิยาม 1.2

ถ้า supp f เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded set) แล้ว f จะกล่าวว่ามีซัพพอร์ตกระชับ (compact support)

ต่อไปจะเป็นความรู้พื้นฐานในการนิยามฟังก์ชันวางนัยทั่วไป (generalized function) พิจารณาปริภูมิ D ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันค่าจริง $\varphi(x) = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ ซึ่งประกอบด้วยข้อความเหล่านี้

(1) $\varphi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้อนันต์ครั้งนิยามที่ทุกๆจุดใน R^n ฟังก์ชันที่ว่าจะเขียนแทนด้วย C^∞

(2) จะมีจำนวน A ที่ $\varphi(x) = 0$ สำหรับ $r > A$ หมายความว่า $\varphi(x)$ มีซัพพอร์ตกระชับ จะเรียก $\varphi(x)$ ว่าฟังก์ชันค่าทดสอบ (test function)

ตัวอย่าง 1.3

ซัพพอร์ตของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x \leq -1 \\ x+1, -1 < x < 0 \\ 1-x, 0 \leq x < 1 \\ 0, 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

คือ $[-1,1]$

บทนิยาม 1.3

ปริภูมิชวาร์ท (Schwartz space) ของฟังก์ชัน S บน R^n คือปริภูมิฟังก์ชัน

$$S(R^n) = \{ f \in C^\infty(R^n) \mid \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty, \forall \alpha, \beta \}$$

โดยที่ $C^{\infty}(R^n)$ เป็นเซตของฟังก์ชันปรับเรียบ (smooth function) จากเซตของจำนวนเชิงซ้อน C ไปยัง C และ $$\|f\|_{\alpha,\beta} = \|x^{\alpha}D^{\beta}f\|_{\infty}$$
โดยที่ $\|\cdot\|_{\infty}$ เป็น supremum norm

2. ดิสตริบิวชัน (distribution)

บทนิยาม 2.1

ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) t บนปริภูมิ D ของฟังก์ชันค่าทดสอบ คือการดำเนินการที่ทุกๆฟังก์ชันค่าทดสอบ $\varphi(x)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\langle t,\varphi\rangle$ ซึ่ง

$$\langle t, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2\rangle = c_1\langle t,\varphi_1\rangle + c_2\langle t,\varphi_2\rangle$$

สำหรับฟังก์ชันค่าทดสอบ φ_1 และ φ_2 และจำนวนจริง c_1, c_2

ในทางฟิสิกส์จะมีปัญหามากมายซึ่งต้องใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันไดแรคเดลตา ซึ่งมีสมบัติดังต่อไปนี้

$$\delta(x-\xi) = 0, x \neq \xi$$

$$\int_a^b \delta(x-\xi)dx = \begin{cases} 0, a,b < \xi \\ 1, a \leq \xi \leq b \end{cases}$$

และ $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi)f(x)dx = f(\xi)$$

บทนิยาม 2.2

ฟังก์ชันต่อเนื่องเชิงเส้น (continuous linear function) บนปริภูมิ D ของฟังก์ชันค่าทดสอบจะเรียกว่า **ดิสตริบิวชัน**

ตัวอย่าง 2.1 ดิสตริบิวชันเฮฟวิไซด์ (Heaviside distribution) ใน R^n คือ

$$\langle H_R, \varphi\rangle = \int_R \varphi(x)dx$$

โดยที่

$$H_R(x) = \begin{cases} 1, x \in R \\ 0, x \notin R \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2.2 ดิสตริบิวชันไดแรคเดลตาใน R^n คือ

$$\langle \delta(x-\xi), \varphi(x)\rangle = \varphi(\xi)$$

สำหรับ ξ เป็นจุดตรึง (fix point)ใน R^n

บทนิยาม 2.3

ดิสตริบิวชัน E จะกล่าวว่าเป็นผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อย L ถ้า

$$LE = \delta$$

3. ฟังก์ชันแกมมา (gamma function)

บทนิยาม 3.1

ฟังก์ชันแกมมาเขียนแทนด้วย Γ ซึ่งนิยามโดย

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

โดยที่ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ $\mathrm{Re}(z) > 0$

ประพจน์ 3.1 กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

(1) $z\Gamma(z+1) = \Gamma(z+1) \qquad z \neq 0,-1,-2,\ldots$

(2) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z} \qquad z \neq 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

(3) $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) \qquad z \neq 0,-1,-2,\ldots$

4. สมบัติของผลประสาน (convolution) ของดิสตริบิวชัน

บทนิยาม 4.1

ผลประสานของ $f*g$ ของ $f(t)$ และ $g(t)$ ใน R^n นิยามโดย

$$f*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

ตัวอย่าง 4.1

$$f*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

และ

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \end{cases}$$

เนื่องจาก

$$f*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

จะได้ว่า

$$f*g=\begin{cases}\int_0^t l^{-\tau}\sin(t-\tau)d\tau, 0<t<\frac{\pi}{2}\\ \int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} l^{-\tau}\sin(t-\tau)d\tau, t\geq\frac{\pi}{2}\\ 0, t<0\end{cases}$$

สมบัติข้อที่ 1

$s*t=t*s$ **(สมบัติการสลับที่ของดิสตริบิวชัน)**

สมบัติข้อที่ 2

$(s*t)*u=s*(t*u)$ **(สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของดิสตริบิวชัน)**

ประพจน์ 4.1 ถ้า $s*t$ หาค่าได้ จะได้ว่า $(D^k s)*t$ และ $s*(D^k t)$ หาค่าได้ และ

$$(D^k s)*t=D^k(s*t)=s*(D^k t)$$

ถ้า L เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะได้ว่า

$$(L s)*t=L(s*t)=s*(L t)$$

บทนิยาม 4.2 ให้ $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ และ

$$u=c^2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2)-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2,\ p+q=n$$

กำหนด $\Gamma_+=\{x\in R^n : x_1>0, u>0\}$ เป็นอาณาบริเวณภายในของกรวยเปิด และ $\overline{\Gamma}_+$ แทนโคลชเชอร์ของฟังก์ชัน Γ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน α ใดๆ นิยามฟังก์ชัน

$$R_{\alpha,c}(u)=\begin{cases}\frac{u^{(\alpha-n)/2}}{K_n(\alpha)}, x\in\Gamma_+\\ 0, x\notin\Gamma_+\end{cases}\qquad(2.1)$$

เมื่อ $K_n(\alpha)$ เป็นค่าคงตัว ซึ่ง

$$K_n(\alpha)=\frac{\pi^{(n-1)/2}\Gamma((2+\alpha-n)/2)\Gamma((1-\alpha)/2)\Gamma(\alpha)}{\Gamma((2+\alpha-p)/2)\Gamma((p-\alpha)/2)}.\qquad(2.2)$$

ให้ $R_{\alpha,c}(u)\subset\overline{\Gamma}_+$, เมื่อ supp $R_{\alpha,c}(u)$ เป็นซัพพอร์ตของ $R_{\alpha,c}(u)$ นำเสนอโดย (Nozaki. 1964:72) และจะเรียก ฟังก์ชัน $R_{\alpha,1}$ ว่า **ส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิกของมาร์เคอริสซ์** $R_{\alpha,1}(u)$ เป็นฟังก์ชันธรรมดา ถ้า $\mathrm{Re}(\alpha)\geq n$ และเป็นดิสตริบิวชันของ α ถ้า $\mathrm{Re}(\alpha)<n$

บทนิยาม 4.3 ให้ $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ และ

$$v=c^2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2)+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2 \text{ เมื่อ } p+q=n.$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน β ใดๆ นิยามฟังก์ชัน

$$S_{\beta,c}(v) = 2^{-\beta}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n-\beta}{2}\right)\frac{v^{(\beta-n)/2}}{\Gamma(\beta/2)}. \qquad (2.3)$$

$S_{\beta,c}(v)$ จะเรียกว่า ส่วนกลางเชิงวงรีของมาร์เคอริสซ์ $S_{\beta,c}(v)$ เป็นฟังก์ชันธรรมดาถ้า $\mathrm{Re}(\beta) \geq n$ และเป็นดิสตริบิวชันของ β ถ้า $\mathrm{Re}(\beta) < n$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

(A. Kananthai. 1999) ได้ศึกษาผลเฉลยมูลฐานของสมการอยู่ในรูปของ

$$\Box_{c_1}^k \Box_{c_2}^k u(x) = \delta(x)$$

จะได้ว่า

$$u(x) = S_{2k}^H(x) * T_{2k}^H(x)$$

เป็นผลเฉลยมูลฐาน โดยที่ * แทนผลประสานของ $S_{2k}^H(x)$ และ $T_{2k}^H(x)$ ตามลำดับ นอกจากนี้ยังพบว่า ถ้า $k=1, p=1$ $x_1 = t$ (time) c_1 และ c_2 เป็น velocity จะได้ผลเฉลยมูลฐานของสมการคลื่นอิลาสติก (elastic wave) อันดับ 4 เมื่อ

$$S_{2k}^H(x) = \begin{cases} \dfrac{V^{(2k-n)/2}}{K_n(2k)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

โดยที่ $V = c_1^2(x_1^2 + \cdots + x_p^2) - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$,
$W = c_2^2(x_1^2 + \cdots + x_p^2) - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$
c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวบวก

(G. Sritanratana และ A. Kananthai. 2004) ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการ

$$\Diamond_{c_1}^k \Diamond_{c_2}^k u(x) = f\left(x, \triangle_{c_1}^{k-1} \Box_{c_2}^k \Diamond_{c_2}^k u(x)\right)$$

โดยที่ $\Diamond_{c_1}^k \Diamond_{c_2}^k$ เป็นผลคูณของตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k ครั้ง นิยามโดย

$$\Diamond_{c_1}^k = \left[\frac{1}{c_1^4}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]^k$$

และ

$$\Diamond_{c_2}^k = \left[\frac{1}{c_2^4}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]^k$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวบวก, k เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ, $p+q=n$ เป็นมิติของปริภูมิยู

คลิเดียน $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ $f(x, \triangle_{c_1}^{k-1}\square_{c_2}^{k}\Diamond_{c_2}^{k} u(x))$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนด เราพบว่า $u(x)$ ของสมการจะแปรเปลี่ยนตามเงื่อนไขของ f และ $\triangle_{c_1}^{k-1}\square_{c_2}^{k}\Diamond_{c_2}^{k} u(x)$ ในกรณีเฉพาะ $u(x)$ ยังสัมพันธ์กับสมการคลื่นอิลาสติกซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของ p,q และ k

(A. Kananthai. 2001) ศึกษาผลเฉลยมูลฐานของสมการ $\Diamond^k u(x)=f(x)$ ซึ่งสัมพันธ์กับสมการคลื่น โดยที่ $\Diamond^k$ เป็นตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k ครั้ง นิยามโดย

$$\Diamond^k = \left[\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]^k$$

โดยที่ $p+q=n$ เป็นมิติของปริภูมิยูคลิเดียน $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$ k เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป จะพบว่า $u(x)$ เปลี่ยนไปตามเงื่อนไขของ p และ q นอกจากนี้ผลเฉลยยังสัมพันธ์กับสมการลาปลาซและสมการคลื่น

K. Nonlaopon และ A. Kananthai ได้ศึกษาคุณสมบัติของส่วนกลาง (kernel) ของตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับสมการความร้อน (heat equations) และสมการคลื่น (wave equations) ซึ่งตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับสมการความร้อนอยู่ในรูป

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c^2(-\Delta)^k u(x,t)$$

ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0)=f(x)$ $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$ เป็นปริภูมิยูคลิเดียนมิติที่ n f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $t\in[0,\infty)$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก

M.A. Telleze และ A. Kananthai ได้ศึกษาแฟมิลี่ของดิสตริบิวชัน $K_{\alpha,\beta}$ ที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์และยังศึกษาคุณสมบัติของ $K_{\alpha,\beta} * K_{\alpha',\beta'}$

K. Nonlaopon และ A. Kananthai ได้ศึกษาส่วนกลางความร้อนของอัลตราไฮเพอร์โบลิกที่สัมพันธ์กับสเปกตรัม ซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c^2\square^k u(x,t)$$

ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0)=f(x)$ $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$ เป็นปริภูมิยูคลิเดียนมิติที่ n f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $t\in(0,\infty)$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก

(H. Yildirim, M.Z. Sarikaya และ S. Ozturk. 2004) ได้ค้นพบตัวดำเนินการใหม่ซึ่งใช้แนวคิดของการค้นพบตัวดำเนินการไดมอนด์ โดยให้ชื่อว่า **ตัวดำเนินการเบสเซลไดมอนด์** (Bessel diamond operators) ซึ่งได้แสดงว่าสมการ

$$\Diamond_B^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r \Diamond_B^r \delta(x)$$

มีผลเฉลยที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับค่าของ p,q และ n

(S. Bupasiri และ K. Nonlaopon. 2010) ยังอาศัยแนวคิดของสมการที่อยู่ในรูปแบบ

$$\Diamond^k u(x)=\sum_{r=0}^{m} C_r \Diamond^r \delta(x)$$

พัฒนาและศึกษาโดยนิยามตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์และศึกษาสมการที่อยู่ในรูป

$$\Diamond_c^k u(x)=\sum_{r=0}^{m} C_r \Diamond_c^r \delta(x)$$

(A. Kananthai. 1998) **ได้ศึกษาผลประสานของส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์ของ**สมการ

$$T_m(x)=T_{m-r}(x)*T_r(x)$$

โดยที่ r เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบและ $r<m$ และยังศึกษาผลประสานของสมการ

$$T_m(x)*T_m^{*-1}(x)=T_m^{*-1}(x)*T_m(x)=\delta$$

เมื่อ $$T_m(x)=(-1)^m S_{2m}(x)*R_{2m}(x), m=0,1,2,\ldots$$

โดยที่ $$S_{2m}(x)=2^{-2m}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n-2m}{2}\right)\frac{|x|^{2m-n}}{\Gamma(m)}$$

เป็นส่วนกลางเชิงวงรี (elliptic) ของมาร์เคอริสซ์ และ

$$R_{2m}(x)=\begin{cases}\dfrac{V^{(2m-n)/2}}{K_n(2m)}, x\in\Gamma_+\\ 0, x\notin\Gamma_+\end{cases}$$

เป็นส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิกของมาร์เคอริสซ์

(S. Bupasiri และ K. Nonlaopon. 2009) ยังค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก ซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Box_c^r u(x)=f(x)$$

โดยที่ $\Box_c^r$ เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก กระทำซ้ำกัน r ครั้ง $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป

จะได้ว่า $$u(x)=f(x)*R_{2m,c}^H(x)*\left[C_m R_{0,c}^H(x)+w(x)R_{2,c}^H(x)\right]^{*-1}$$

เป็นผลเฉลยแบบอ่อนของสมการ $\sum_{r=0}^{m} C_r \Box_c^r u(x)=f(x)$

(S. Bupasiri. 2010) ยังค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซ ซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \triangle^r u(x)=f(x)$$

โดยที่ $\triangle^{r}$ เป็นตัวดำเนินการลาปลาซ กระทำซ้ำกัน r ครั้ง $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป

จะได้ว่า
$$u(x)=f(x)*R_{2m}^{e}(x)*\left[(-1)^{m}C_{m}R_{0}^{e}(x)+w(x)R_{2}^{e}(x)\right]^{*-1}$$

เป็นผลเฉลยแบบอ่อนของสมการ $\sum_{r=0}^{m}C_{r}\triangle^{r}u(x)=f(x)$

(S. Bupasiri. 2010) สมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ ซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m}C_{r}\triangle_{c}^{r}u(x)=f(x)$$

โดยที่ $\triangle_{c}^{r}$ เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ กระทำซ้ำกัน r ครั้ง $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป

จะได้ว่า

$$u(x)=f(x)*R_{2m,c}^{e}(x)*\left[(-1)^{m}C_{m}R_{0,c}^{e}(x)+w(x)R_{2,c}^{e}(x)\right]^{*-1}$$

เป็นผลเฉลยแบบอ่อนของสมการ $\sum_{r=0}^{m}C_{r}\triangle_{c}^{r}u(x)=f(x)$

จากการศึกษาที่กล่าวมาข้างต้น ผลเฉลยของสมการล้วนเป็นผลประสาน(convolutions) ของดิสตริบิวชัน นอกจากนี้ A. Kananthai ก็ขยายไปศึกษาผลประสานของ**ส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอร์ริสซ์**ของสมการ

$$T_{m}(x)=T_{m-r}(x)*T_{r}(x)$$

โดยที่ r เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบและ $r<m$ และยังศึกษาผลประสานของสมการ

$$T_{m}(x)*T_{m}^{*-1}(x)=T_{m}^{*-1}(x)*T_{m}(x)=\delta$$

เมื่อ
$$T_{m}(x)=(-1)^{m}S_{2m}(x)*R_{2m}(x), m=0,1,2,...$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการที่อยู่ในรูป

$$\Diamond^{k}u(x)=\delta(x)$$

โดยที่ $\Diamond^{k}$ เป็นตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k-ครั้ง

โดยที่
$$S_{2m}(x)=2^{-2m}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n-2m}{2}\right)\frac{|x|^{2m-n}}{\Gamma(m)}$$

เป็นส่วนกลางเชิงวงรีของมาร์เคอริสซ์ และ

$$R_{2m}(x) = \begin{cases} \dfrac{v^{(2m-n)/2}}{K_n(2m)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

เป็นส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิกของมาร์เคอริสซ์