บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

A. Kananthai (1997) มีบทบาทในทางคณิตศาสตร์ไทยเป็นอย่างมาก ได้คิดค้นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ขึ้นมาใหม่ โดยให้ชื่อว่าตัว**ดำเนินการไดมอนด์** (diamond operator) ซึ่งมีบทบาทสำคัญมากในการหาผลเฉลย (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่มีความสัมพันธ์กับตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีอยู่แล้ว ได้แก่ ตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplace operator) และตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก (ultra-hyperbolic operator) โดยได้นิยามตัวดำเนินการไดมอนด์ดังนี้

$$\Diamond = \left[\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]$$

ซึ่งพบความสัมพันธ์ดังกล่าวคือ

$$\Diamond = \triangle\Box = \Box\triangle$$

โดยที่

$$\triangle = \left[\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right] \quad \text{สำหรับ } p+q=n$$

และ

$$\Box = \left[\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right] \quad \text{สำหรับ } p+q=n$$

เป็นตัวดำเนินการลาปลาซและตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกตามลำดับ

ในส่วนของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกนั้น S.E. Trione ได้ค้นพบผลเฉลยมูลฐาน (elementary solutions) ของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกและในเวลาเดียวกัน M.A. Tellez ได้แสดงให้เห็นว่าการเกิดผลเฉลยของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกนั้น จะขึ้นอยู่กับค่าของ p, q และ n ว่าเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ ในการค้นพบผลเฉลยของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกเป็นการขยายความรู้ของสมการคลื่นให้กว้างขวางขึ้น

ต่อมา A. Kananthai (2000) ได้ศึกษาผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกที่อยู่ในรูป

$$\Box^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r \Box^r \delta$$

C_r เป็นค่าคงที่ และ δ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา (Dirac- delta distributions) และยังค้นพบผลเฉลยของสมการในรูป

$$\Diamond^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r \Diamond^r \delta(x)$$

แปรเปลี่ยนไปตามค่าของ k และ m ด้วย

ต่อมาไม่นานนัก A. Kananthai ก็ได้พัฒนาตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกและได้นิยามตัวดำเนินการใหม่เป็น

$$\Box_{c_1}^k = \left(\frac{1}{c_1^2}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^k \quad \text{และ} \quad \Box_{c_2}^k = \left(\frac{1}{c_2^2}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^k$$

โดยที่ $\Box_{c_1}^k$ และ $\Box_{c_2}^k$ เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก กระทำซ้ำกัน k ครั้งและได้ศึกษาผลเฉลยมูลฐานของสมการ

$$\Box_{c_1}^k \Box_{c_2}^k u(x) = \delta(x)$$

โดยที่ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ $\delta(x)$ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา และพบผลเฉลยมูลฐานของสมการ $\Box_{c_1}^k \Box_{c_2}^k u(x) = \delta(x)$

$$u(x) = S_{2k}^H(x) * T_{2k}^H(x)$$

โดยที่ $*$ แทนผลประสาน (convolutions) ของสองฟังก์ชัน $S_{2k}^H(x)$, $T_{2k}^H(x)$ ซึ่งนิยามโดย

$$S_{2k}^H(x) = \begin{cases} \dfrac{V^{(2k-n)/2}}{K_n(2k)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

$$T_{2k}^H(x) = \begin{cases} \dfrac{W^{(2k-n)/2}}{K_n(2k)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

โดยที่ $V = c_1^2(x_1^2 + \cdots + x_p^2) - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$,

$W = c_2^2(x_1^2 + \cdots + x_p^2) - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$

c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวบวก

ในกรณีเฉพาะ ถ้า $k = 1, p = 1$ $x_1 = t$ (time) c_1 และ c_2 เป็น velocity จะทำให้คำตอบเป็นผลเฉลยมูลฐานของคลื่นอิลาสติก (elastic wave)

ที่สำคัญ A. Kananthai (2000) ได้ศึกษาผลประสานของส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์ (diamond kernel of Marcel Riesz) ของสมการ

$$T_m(x) = T_{m-r}(x) * T_r(x)$$

โดยที่ r เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบและ $r < m$ และยังศึกษาผลประสานของสมการ

$$T_m(x) * T_m^{*-1}(x) = T_m^{*-1}(x) * T_m(x) = \delta$$

เมื่อ $$T_m(x) = (-1)^m S_{2m}(x) * R_{2m}(x), m = 0,1,2,\ldots$$

โดยที่ $$S_{2m}(x) = 2^{-2m}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n-2m}{2}\right)\frac{|x|^{2m-n}}{\Gamma(m)}$$

เป็นส่วนกลางเชิงวงรีของมาร์เคอริสซ์ (elliptic kernel of Marcel Riesz) และ

$$R_{2m}(x) = \begin{cases} \dfrac{V^{(2m-n)/2}}{K_n(2m)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

เป็นส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิกของมาร์เคอริสซ์ (ultra-hyperbolic kernel of Marcel Riesz)

ตัวดำเนินการไดมอนด์ยังถูกพัฒนาโดย G. Sritanratana และ A. Kananthai (2007) และได้พัฒนาตัวดำเนินการใหม่ที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์ซึ่งอยู่ในรูป

$$\Diamond_{c_1}^k = \left[\frac{1}{c_1^4}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]^k$$

และ

$$\Diamond_{c_2}^k = \left[\frac{1}{c_2^4}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2\right]^k$$

โดยที่ $\Diamond_{c_1}^k$ และ $\Diamond_{c_2}^k$ เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์, $p+q=n$ เป็นมิติของปริภูมิยูคลิเดียน c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวบวก (positive constant) และยังค้นพบผลเฉลยมูลฐานของสมการที่อยู่ในรูป

$$\Box_{c_1}^k u(x) = \delta(x) \text{ และ } \Box_{c_2}^k u(x) = \delta(x)$$

$$\triangle_{c_1}^k u(x) = \delta(x) \text{ และ } \triangle_{c_2}^k u(x) = \delta(x)$$

นอกจากนี้ S. Bupasiri และ K. Nonlaopon (2010) ยังใช้แนวคิดของรูปแบบสมการ

$$\Diamond^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r \Diamond^r \delta(x)$$

พัฒนารูปแบบของสมการใหม่เป็น

$$\Diamond_c^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} C_r \Diamond_c^r \delta(x)$$

และประเภทของผลเฉลยของสมการจะขึ้นอยู่กับค่าของ k และ m

S. Bupasiri และ K. Nonlaopon (2009) ยังค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนของสมการโดยใช้แนวคิดของรูปแบบสมการ

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Box^r u(x) = f(x)$$

พัฒนารูปแบบของสมการใหม่เป็น

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \, \Box_c^r \, u(x) = f(x)$$

จากการศึกษาที่กล่าวมาข้างต้น ผลเฉลยของสมการล้วนเป็นผลประสาน(convolutions) ของดิสตริบิวชัน นอกจากนี้ A. Kananthai ก็ขยายไปศึกษาผลประสานของ**ส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอร์ริสซ์**ของสมการ

$$T_m(x) = T_{m-r}(x) * T_r(x)$$

โดยที่ r เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบและ $r < m$ และยังศึกษาผลประสานของสมการ

$$T_m(x) * T_m^{*-1}(x) = T_m^{*-1}(x) * T_m(x) = \delta$$

เมื่อ

$$T_m(x) = (-1)^m S_{2m}(x) * R_{2m}(x), m = 0,1,2,...$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการที่อยู่ในรูป

$$\Diamond^k u(x) = \delta(x)$$

โดยที่ $\Diamond^k$ เป็นตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k-ครั้ง

โดยที่

$$S_{2m}(x) = 2^{-2m} \pi^{-n/2} \Gamma\left(\frac{n-2m}{2}\right) \frac{|x|^{2m-n}}{\Gamma(m)}$$

เป็นส่วนกลางเชิงวงรีของมาร์เคอริสซ์ และ

$$R_{2m}(x) = \begin{cases} \dfrac{V^{(2m-n)/2}}{K_n(2m)}, x \in \Gamma_+ \\ 0, x \notin \Gamma_+ \end{cases}$$

เป็นส่วนกลางอัลตราไฮเพอร์โบลิก (ultra-hyperbolic kernel) ของมาร์เคอริสซ์

ในการวิจัยครั้งนี้จึงเป็นการศึกษาผลประสานของดิสตริบิวชันของผลเฉลยมูลฐานที่เกิดจากตัวดำเนินการ $\Diamond_c^k$ ที่สัมพันธ์กับ**ส่วนกลางไดมอนด์ของมาเคอริสซ์**ของสมการที่อยู่ในรูป

$$\Diamond_c^k \, u(x) = \delta(x)$$

และยังขยายแนวคิดไปศึกษาอินเวอร์ส (inverst) ของผลเฉลยดังกล่าวในพีชคณิตผลประสาน (convolution algebra) อีกด้วย

นอกจากนี้ยังหาผลคูณแฟมิลี่ของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\Diamond_c^k$ โดยจะศึกษาสมบัติของผลประสานของดิสตริบิวชัน

$$T_{m,c}(x) = S_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x) \qquad (1.1)$$

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. หาความสัมพันธ์ส่วนกลางไดมอนด์ของมาร์เคอริสซ์
2. ศึกษาผลประสานของผลคูณของแฟมิลี่ของดิสตริบิวชันที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\Diamond_c^k$

3. หาอินเวอร์สของส่วนกลางของ $T_{m,c}(x) = S_{\alpha,c}(x) * R_{\beta,c}(x)$ ที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการ $\Diamond_c^k$

ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาผลประสานของดิสตริบิวชันของผลเฉลยมูลฐานที่เกิดจากสมการ

$$\Diamond_c^k\, u(x) = \delta(x)$$

โดยที่

$$\Diamond_c^k = \left[\frac{1}{c^4} \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^2 \right]^k$$

เป็นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการไดมอนด์ กระทำซ้ำกัน k ครั้ง $p+q=n$ เป็นมิติของปริภูมิยูคลิเดียน $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ $\delta(x)$ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1 ได้องค์ความรู้และทฤษฎีใหม่ๆที่เกี่ยวกับผลประสานของดิสตริบิวชันและนำไปใช้เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

2 การนำไปประยุกต์ใช้ในแขนงวิชาทฤษฎีดิสตริบิวชัน ทฤษฎีตัวดำเนินการและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

3 เป็นการเผยแพร่ผลงานวิจัยทางคณิตศาสตร์เพื่อตีพิมพ์ในระดับนานาชาติและนำไปใช้ประโยชน์อย่างต่อเนื่อง