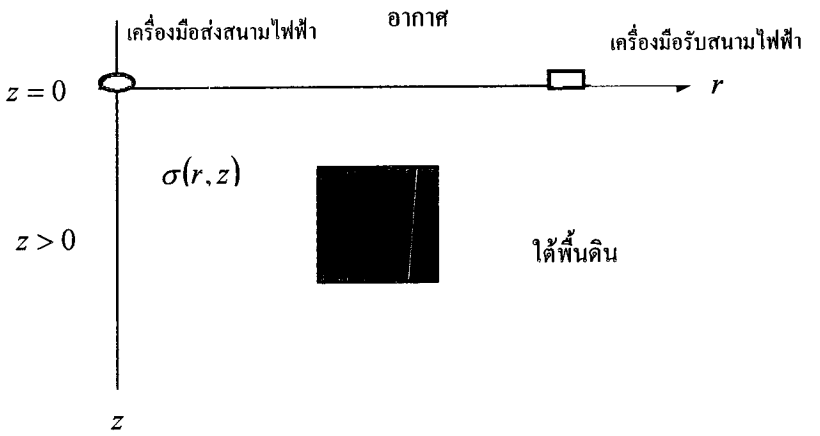
บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้เราจะแสดงวิธีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และแสดงการหาคำตอบโดยใช้วิธีสมการเชิงผลต่างในการหาค่าสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งต่าง ๆ

พิจารณาภาพที่ 2 เป็นแบบจำลองเชิงเรขาคณิตของโครงสร้างพื้นโลก ให้ z คือ ระยะความลึกของวัตถุใด ๆ จากระดับพื้นผิวโลก (เมตร) บริเวณที่ $z = 0$ กำหนดให้มีเครื่องมือส่ง-รับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า และที่ระยะห่างจากเครื่องมือส่ง-รับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า มีเครื่องมือรับสนามไฟฟ้าซึ่งอยู่ห่างจากเครื่องมือส่งเป็นระยะทาง r เมตรและบริเวณที่ $z > 0$ คือระยะทางที่ลึกลงไปภายใต้พื้นดิน และภายใต้พื้นดินมีวัตถุนำไฟฟ้าอยู่ 1 ชิ้น กำหนดให้พื้นดินมีสภาพ นำไฟฟ้า $\sigma(r,z)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร r และ z



ภาพที่ 2 ภาพจำลองโครงสร้างพื้นโลก

จากสมการของแมกซ์เวลล์ ซึ่งเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กและเขียนได้ในระบบพิกัดทรงกระบอก (r,ϕ,z) คือ

$$\frac{\partial E}{\partial z} = i\omega\mu H_r \tag{3-1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rE}{\partial r} = -i\omega\mu H_z \tag{3-2}$$

และ

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = (\sigma + i\varepsilon\omega)E + J_p \tag{3-3}$$

โดยที่ E หมายถึง สนามไฟฟ้า

H_r หมายถึง สนามแม่เหล็กในแนวแกน r

H_z หมายถึง สนามแม่เหล็กในแนวแกน z

J_p เป็นค่าความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าบนขดลวดวงแหวนที่เป็นแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีค่าดังสมการ

$$J_p = \frac{I(\omega)a\delta(r-a)\delta(z+h)}{r}$$

ω ความถี่เชิงมุม

$I(\omega)$ เป็นกระแสไฟฟ้าที่ไหลในขดลวดวงแหวนที่ใช้เป็นแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

σ เป็นค่าสภาพนำไฟฟ้าของวัตถุใด ๆ

ε เป็นค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของวัตถุใด ๆ

ε_0 เป็นค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของของสุญญากาศ มีค่าประมาณ 8.85×10^{-12} c^2/N-M^2, F/m.

μ เป็นค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของวัตถุใด ๆ

μ_0 เป็นค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศ มีค่าประมาณ 12.57×10^{-7} Wb/A-m, H/m.

ต่อไปนำสมการ (3-1), (3-2) และ (3-3) มาสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับนำไปใช้ในการหาสนามไฟฟ้า $E(r,\phi,z)$

จากสมการ (3-1) เมื่อหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร z จะได้

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(i\omega\mu H_r\right)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = i\omega\mu\frac{\partial H_r}{\partial z}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \qquad (3\text{-}4)$$

จากสมการ (3-2) เมื่อหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร r จะได้

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rE}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(-i\omega\mu H_z\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left[r\frac{\partial E}{\partial r}+E\frac{\partial r}{\partial r}\right]\right)=-i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{1}{r}E\right)=-i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}E\right)=-i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}+E\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=-i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E=-i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

ดังนั้น

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r}=\frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E\right) \qquad (3\text{-}5)$$

แทนสมการ (3-4) และ (3-5) ในสมการ (3-3) จะได้

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=i\omega\mu\eta E+i\omega\mu J_p \qquad (3\text{-}6)$$

และเมื่อกำหนดให้พื้นดินมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันของตัวแปร r และ z จะได้ $\eta=\sigma\left(r,z\right)+i\omega\varepsilon$

ในลำดับต่อไปเราจะใช้วิธีสมการเชิงผลต่างมาใช้ในการแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยจะทำการประมาณอนุพันธ์ย่อยด้วยผลหารเชิงผลต่างในสมการ (3-6) ซึ่งผลหารเชิงผลต่างกำหนด ดังนี้

$$E=E(r,z)$$

$$\frac{\partial E}{\partial r}\approx\frac{E(r+h,z)-E(r,z)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} \approx \frac{E(r+h,z)-2E(r,z)+E(r-h,z)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \approx \frac{E(r,z+k)-2E(r,z)+E(r,z-k)}{k^2}$$

ดังนั้นสมการ (3-6) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{E(r+h,z)-2E(r,z)+E(r-h,z)}{h^2}+\frac{1}{r}\frac{E(r+h,z)-E(r,z)}{h}+\frac{E(r,z+k)-2E(r,z)+E(r,z-k)}{k^2}$$
$$=i\omega\mu\eta E(r,z)+i\omega\mu J_p+\frac{1}{r^2}E(r,z)$$

$$\frac{rh[E(r+h,z)-2E(r,z)+E(r-h,z)]+h^2[E(r+h,z)-E(r,z)]}{rh^3}+\frac{E(r,z+k)-2E(r,z)+E(r,z+h)}{k^2}$$
$$=i\omega\mu\eta E(r,z)+i\omega\mu J_p+\frac{1}{r^2}E(r,z)$$

$$\frac{rh[E(r+h,z)+E(r-h,z)]+h^2E(r+h,z)}{rh^2}+\frac{E(r,z+k)+E(r,z-k)}{k^2}-\left[\frac{2rhE(r,z)+h^2E(r,z)}{rh^3}+\frac{2E(r,z)}{k^2}\right]$$
$$=i\omega\mu\eta E(r,z)+i\omega\mu J_p+\frac{1}{r^2}E(r,z)$$

$$\frac{rh[E(r+h,z)+E(r-h,z)]+h^2E(r+h,z)}{rh^3}+\frac{E(r,z+k)-E(r,z-k)}{k^2}$$
$$-\left[\frac{2k^2rhE(r,z)+k^2h^2E(r,z)+2rh^3E(r,z)}{rh^3k^2}\right]=i\omega\mu\eta E(r,z)+i\omega\mu J_p+\frac{1}{r^2}E(r,z)$$

$$\frac{k^2rh[E(r+h,z)+E(r-h,z)]+k^2h^2E(r+h,z)+rh^3[E(r,z+k)+E(r,z-k)]}{rh^3k^2}-i\omega\mu J_p$$
$$=\frac{2k^2rhE(r,z)+k^2h^2E(r,z)+2rh^3E(r,z)}{rh^3k^2}+i\omega\mu\eta E(r,z)+\frac{1}{r^2}E(r,z)$$

$$\frac{\left(k^2rh+k^2h^2\right)E(r+h,z)+k^2rhE(r-h,z)+rh^3E(r,z+k)+rh^3E(r,z-k)}{rh^3k^2}-i\omega\mu J_p$$
$$=E(r,z)\left[\frac{r^2\left(2k^2rh+k^2h^2+2rh^3\right)+r^3h^3k^2i\omega\mu\eta+rh^3k^2}{r^3h^3k^2}\right]$$

ถ้ากำหนดให้ $c=\dfrac{r^2\left(2k^2rh+k^2h^2+2rh^3\right)+r^3h^3k^2i\omega\mu\eta+rh^3k^2}{r^3h^3k^2}$ ดังนั้นสมการข้างต้นเขียนได้เป็น

$$\therefore E(r,z)=\frac{\left(k^2rh+k^2h^2\right)E(r+h,z)+k^2rhE(r-h,z)+rh^3E(r,z+k)+rh^3E(r,z-k)}{crh^3k^2}-\frac{i\omega\mu J_p}{c} \quad (3\text{-}7)$$

ค่าของ c อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นเขียนได้ใหม่ในรูป $a+bi$ ได้ ดังนี้

$$c=\frac{r^2\left(2k^2rh+k^2h^2+2rh^3\right)+rh^3k^2}{r^3h^3k^2}+\frac{r^3h^3k^2i\omega\mu\eta}{r^3h^3k^2}$$
$$=\frac{r^2\left(2k^2rh+k^2h^2+2rh^3\right)+rh^3k^2}{r^3h^3k^2}+\omega\mu\eta i$$

และเมื่อนำค่า c ไปแทนในสมการ (3-7) จะได้

$$E(r,z)=\frac{\left(k^2rh+k^2h^2\right)E(r+h,z)+k^2rhE(r-h,z)+rh^3E(r,z+k)+rh^3E(r,z-k)}{rh^3k^2\left[\dfrac{r^2\left(2k^2rh+k^2h^2+2rh^3\right)+rh^3k^2}{r^3h^3k^2}+\omega\mu\eta i\right]}$$

$$=\frac{\left(k^2rh+k^2h^2\right)E(r+h,z)+k^2rhE(r-h,z)+rh^3E(r,z+k)+rh^3E(r,z-k)}{rh^3k^2\left[\dfrac{r^2\left(2k^2rh+k^2h^2+2rh^3\right)+rh^3k^2}{r^3h^3k^2}+\omega\mu\eta i\right]}$$
$$\times\frac{\left[\dfrac{r^2\left(2k^2rh+k^2h^2+2rh^3\right)+rh^3k^2}{r^3h^3k^2}-\omega\mu\eta i\right]}{\left[\dfrac{r^2\left(2k^2rh+k^2h^2+2rh^3\right)+rh^3k^2}{r^3h^3k^2}-\omega\mu\eta i\right]}$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้สมการสำหรับการคำนวณค่าสนามไฟฟ้า ดังนี้

$$AE(r,z) = b[fE(r+h,z)+gE(r-h,z)+tE(r,z+k)+tE(r,z-k)] \\ -[fE(r+h,z)+gE(r-h,z)+tE(r,z+k)+tE(r,z-k)]\omega\mu\eta i \tag{3-8}$$

โดยที่

$$J_p = 0$$

$$b = \frac{r^2\left(2k^2rh+k^2h^2+2rh^3\right)+rh^3k^2}{r^3h^3k^2}$$

$$A = rh^3k^2[b^2+(\omega\mu\eta)^2]$$

$$f = k^2rh+k^2h^2$$

$$g = k^2rh$$

$$t = rh^3$$