บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อการค้นหาสนามไฟฟ้าในพื้นโลก โดยใช้วิธีสมการเชิงผลต่าง ในการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบ ซึ่งวิธีการนี้เป็นเทคนิควิธีการทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพสูง สามารถศึกษาภาพหน้าตัดของโครงสร้างพื้นดินได้เป็นอย่างดี และจะให้ผลการคำนวณที่ดีกว่าวิธีการที่ใช้คณิตศาสตร์อื่น ๆ ที่ปรากฏในงานวิจัยต่าง ๆ ดังนี้

Edwards and Nabighian ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อศึกษาโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น n ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และในแต่ละชั้นมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัว และมีความลึกจำกัด ยกเว้นชั้นล่างสุด ซึ่งจะมีความลึกเป็นอนันต์ โดยสามารถคำนวณหาค่าประมาณของอัตราส่วนระหว่างสนามแม่เหล็กในชั้นบนและชั้นล่างของชั้นที่อยู่ติดกันได้

Chumchob ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการค้นหาตำแหน่ง สภาพนำไฟฟ้า ความนำไฟฟ้า และส่วนหนาของกลุ่มแร่ธาตุรูปทรงกระบอกกลม 3 มิติฝังตัวอยู่ใต้พื้นผิวโลกที่มีลักษณะสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงตามความลึก โดยใช้วิธีสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ผลการวิจัยพบว่าสมการบรรยายสนามไฟฟ้าของแต่ละบริเวณถูกเขียนอยู่ในรูปของสมการอินทิกรัล
กระบวนการผันกลับได้นำสมการอินทิกรัลที่ได้ มาคำนวณหาค่าที่เหมาะสมของพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า ได้แก่ ตำแหน่ง สภาพนำไฟฟ้า ความนำไฟฟ้า และส่วนหนาของกลุ่มแร่ธาตุ โดยค่าพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าดังกล่าว มีบทบาทสำคัญในการบรรยายลักษณะโครงสร้างของบริเวณใต้พื้นผิวโลก

Ketchanwit ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อการศึกษาโครงสร้างใต้พื้นผิวโลกโดยใช้วิธีสนามแม่เหล็กไฟฟ้า แบบจำลองแบ่งพื้นโลกเป็น 3 ลักษณะ ได้แก่ แบบจำลองที่กำหนดให้ใต้พื้นผิวโลก มีลักษณะเป็นตัวกลางเนื้อเดียวและมีสภาพนำไฟฟ้าคงที่ σ_0 แบบจำลองที่สองเป็นแบบจำลองที่กำหนดให้ใต้พื้นผิวโลกแบ่งออกเป็น 2 ชั้น แต่ละชั้นมีลักษณะเป็นตัวกลางเนื้อเดียวและกำหนดให้ดินชั้นล่างมีค่าสภาพนำไฟฟ้าคงที่ σ_0 และดินชั้นบนซึ่งมีความหนา d มีสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบลดลงเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น $\sigma_0 e^{-b(z-d)}$ และ แบบจำลองสุดท้ายเป็นแบบจำลองที่กำหนดให้ใต้พื้นผิวโลกแบ่งออกเป็น 2 ชั้น แต่ละชั้นมีลักษณะเป็นตัวกลางเนื้อเดียวและกำหนดให้ดินชั้นบนซึ่งมีความหนา d มีค่าสภาพนำไฟฟ้าคงที่ σ_0 และดินชั้นล่างมีสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบลดลงเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น $\sigma_0 e^{-b(z-d)}$ โดยใช้เทคนิควิธีการทางคณิตศาสตร์ จะ

ได้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่บรรยายสนามไฟฟ้าที่ตอบสนองมาจากพื้นผิวโลกซึ่งจะนำพาข้อมูลต่าง ๆ ที่อยู่ใต้ผิวโลกขึ้นมา

Stoyer and Wait ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยวิธีการทางสภาพต้านทาน เพื่อศึกษาโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นโลก และสภาพนำไฟฟ้าของชั้นบนเป็นค่าคงตัว ส่วนชั้นล่างจะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ซึ่งนิยามโดย

$$\sigma_2(z) = c\sigma_1 e^{-b(z-h)}, \qquad z \ge h$$

เมื่อ $b, c \in \Re^+$, $\sigma_1 > 0$ แทนสภาพนำไฟฟ้าของพื้นโลกชั้นบน และ $h > 0$ แทนความลึกของพื้นโลกชั้นบน ซึ่งวัดจากพื้นผิวโลกจนถึงระนาบรอยต่อระหว่างชั้นบนและชั้นล่างของพื้นโลก

Banerjee et al. ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยวิธีการทางสภาพต้านทาน เพื่อศึกษาโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น $n+1$ ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และสภาพนำไฟฟ้าของชั้นใดชั้นหนึ่งมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ซึ่งนิยามโดย

สำหรับบาง $1 \le k \le n$

$$\sigma_{k+1}(z) = c\sigma_k e^{b(z-h_k)}, \qquad h_{k-1} \le z \le h_k$$

เมื่อ $b \in \Re, c \in \Re^+, \sigma_k > 0$ แทน สภาพนำไฟฟ้าของพื้นโลกชั้นที่ k และ $h_{k-1}, h_k > 0$ แทนความลึกของพื้นโลกชั้นที่ k-1 และ k ตามลำดับ

Siew and Yooyuanyong ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยวิธีการทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบการวัดแบบอิงความถี่ (ferquency domain) เพื่อศึกษาปัญหาย้อนกลับของการค้นหากลุ่มแร่ธาตุที่นำไฟฟ้า และมีรูปร่างคล้ายจานกลมบาง ซึ่งฝังตัวอยู่ใต้พื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นโลก และสภาพนำไฟฟ้าของชั้นบนมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ซึ่งนิยามโดย

$$\sigma_1(z) = \sigma_0 e^{-bz}, \qquad 0 \le z \le h$$

เมื่อ $b, \sigma_0 \in \Re^+$ และ $h > 0$ แทน ความลึกของพื้นโลกชั้นบน ซึ่งวัดจากพื้นผิวโลกจนถึงระนาบรอยต่อระหว่างชั้นบนและชั้นล่างของพื้นโลก โดยสมมติว่า กลุ่มแร่ธาตุดังกล่าวฝังตัวอยู่ใต้พื้นโลกชั้นล่าง ซึ่งสภาพนำไฟฟ้าของพื้นโลกชั้นนี้มีค่าน้อยมาก

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น มีการใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์หลายรูปแบบ แตกต่างกันออกไป ซึ่งงานวิจัยชิ้นนี้ได้ลองใช้วิธีสมการเชิงผลต่างหาวัตถุที่ฝังอยู่ใต้พื้นดิน ซึ่งมีความแตกต่างจากงานวิจัยชิ้นที่ผ่านมา

ทฤษฎีบทพื้นฐาน

1. **สมการเชิงผลต่าง**

บทนิยาม 1 ให้ u เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรอิสระ x ซึ่งใช้สัญลักษณ์ u_x โดยที่ $x \in S$ และ S เป็นเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สมการเชิงผลต่าง คือ สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน u_x เขียนในรูปทั่วไป ได้ดังนี้

$$u_{x+n} = f(x, u_{x+n-1}, u_{x+n-2}, \ldots, u_x)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

บทนิยาม 2 ให้ Δ เป็นตัวดำเนินการผลต่างอันดับที่หนึ่ง ซึ่งกำหนดดังนี้

$$\Delta u_x = u_{x+1} - u_x$$

และเรียก Δ^2 ว่าตัวดำเนินการผลต่างอันดับที่สอง กำหนดดังนี้

$$\begin{aligned}\Delta^2 u_x &= \Delta(\Delta u_x) = \Delta(u_{x+1} - u_x)\\ &= (u_{x+2} - u_{x+1}) - (u_{x+1} - u_x)\\ &= u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x\end{aligned}$$

และเรียก Δ^3 ว่าตัวดำเนินการผลต่างอันดับที่สาม กำหนดดังนี้

$$\begin{aligned}\Delta^3 u_x &= \Delta(\Delta(\Delta u_x)) = \Delta(\Delta(u_{x+1} - u_x))\\ &= \Delta(u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x)\\ &= (u_{x+3} - 2u_{x+2} + u_{x+1}) - (u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x)\\ &= u_{x+3} - 3u_{x+2} + 3u_{x+1} - u_x\end{aligned}$$

ในกรณีทั่วไปเรียก Δ^n ว่าตัวดำเนินการผลต่างอันดับที่ n กำหนดดังนี้

$$\begin{aligned}\Delta^n u_x &= u_{x+n} - nu_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}u_{x+n-2}\\ &\quad + \ldots + (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i-1)}{i!}u_{x+n-i}\\ &\quad + \ldots + (-1)^n u_x\end{aligned}$$

ตัวอย่างของสมการเชิงผลต่าง

$$\Delta u_x+3u_x = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

$$\Delta^2 u_x+2\Delta u_x+u_x = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

$$\Delta^2 u_x - xu_x = 2x+7 \qquad (2\text{-}3)$$

$$u_x\, \Delta^2 u_x = \frac{1}{2} \qquad (2\text{-}4)$$

$$[\Delta u_x]^{2}+[u_x]^{2} = -1 \qquad (2\text{-}5)$$

ดังนั้นจากนิยามของตัวดำเนินการผลต่างเราสามารถเขียนสมการ (1) ถึง (5) ได้ดังนี้

$$u_{x+1}+2u_x = 0 \qquad (2\text{-}1')$$

$$u_{x+2} = 0 \qquad (2\text{-}2')$$

$$u_{x+2} - 2u_{x+1}+(1-x)u_x = 2x+7 \qquad (2\text{-}3')$$

$$u_x u_{x+3} - 3u_x u_{x+2} + 3u_x u_{x+1} - u_x^2 = \frac{1}{2} \qquad (2\text{-}4')$$

$$(u_{x+1} - u_x)^2+u_x^2 = -1 \qquad (2\text{-}5')$$

บทนิยาม 3 คำตอบของสมการเชิงผลต่าง คือ ฟังก์ชัน u_x ใด ๆ ซึ่งสอดคล้องตามสมการเชิงผลต่างนั้น

<u>ตัวอย่าง</u> 1 จงแสดงว่าฟังก์ชัน u_x ซึ่งกำหนดโดย

$$u_x = 1-\frac{2}{x}, \qquad x=1,2,3,\ldots \qquad (2\text{-}6)$$

เป็นคำตอบของสมการเชิงผลต่าง

$$(x+1)u_{x+1} \div xu_x = 2x-3, \qquad x=1,2,3,\ldots \qquad (2\text{-}7)$$

พิสูจน์

การแสดงว่าสมการ (2-6) เป็นคำตอบของสมการ (2-7) ทำได้โดย การแทนสมการ (2-6) ลงในสมการ (2-7) ดังนี้

จากสมการ (2-6) เราทราบว่า

$$u_{x+1} = 1-\frac{2}{x+1}$$

ดังนั้นสมการ (2-7) เขียนได้เป็น

$$(x+1)\left(1-\frac{2}{x+1}\right)+x\left(1-\frac{2}{x}\right) = 2x-3$$

ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้

$$(x+1)-2+x-2=2x-3$$

หรือ $$2x-3 = 2x-3$$

จะเห็นได้ว่าสมการเป็นจริงเสมอ ดังนั้นสมการ (2-6) เป็นคำตอบของสมการ (2-7)

<u>**ตัวอย่าง**</u> 2 จงแสดงว่าสมการเชิงผลต่าง

$$u_{x+2}-4u_{x+1}+4u_x=0, \qquad x=0,1,2,\ldots \qquad (2\text{-}8)$$

มีคำตอบเป็น

$$u_x = 2^x(c_1+c_2x), \qquad x=0,1,2,\ldots \qquad (2\text{-}9)$$

เมื่อ c_1 และc_2 เป็นค่าคงตัว

พิสูจน์

การแสดงว่าสมการ (2-9) เป็นคำตอบของสมการ (2-8) ทำได้โดย การแทนสมการ (2-9) ลงในสมการ(2-8) ดังนี้

$$2^{x+2}[c_1+c_2(x+2)]-4\cdot 2^{x+1}[c_1+c_2(x+1)]+4\cdot 2^x(c_1+c_2x)=0 \qquad (2\text{-}10)$$

โดยการดึงตัวประกอบร่วม 2^{x+2} จะได้

$$2^{x+2}\{c_1+c_2(x+2)-2[c_1+c_2(x+1)]+c_1+c_2x\}=0$$

หรือ $$0=0$$

ดังนั้นสมการ (2-9) เป็นคำตอบของสมการ (2-8)

เราสามารถเปลี่ยนปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปของสมการเชิงผลต่างได้ โดยการแทนที่อนุพันธ์ย่อยด้วยผลหารเชิงผลต่าง ในลำดับต่อไปเราจะกล่าวถึงผลหารเชิงผลต่าง

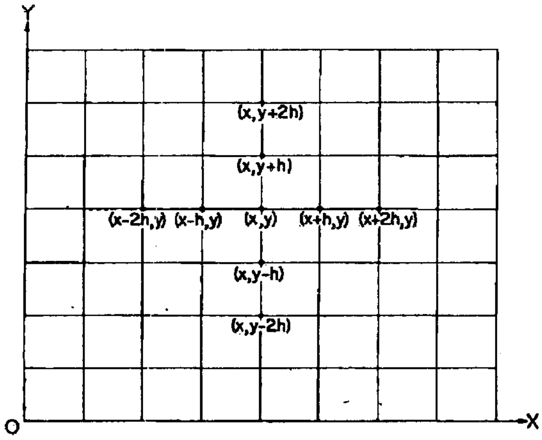
2. ผลหารเชิงผลต่าง

บทนิยาม 4 ผลหารเชิงผลต่าง คือผลหารที่เกิดจากการแบ่งผลต่างระหว่างค่าของฟังก์ชัน 2 ค่า คือ $u_{x+h}-u_x$ ด้วยผลต่างระหว่างตัวแปรอิสระ (h) ซึ่งเขียนได้เป็น $\dfrac{u_{x+h}-u_x}{h}$ เมื่อ $h=\Delta x$

ค่าลิมิตของผลหารเชิงผลต่างเมื่อ $h\to 0$ จะหมายถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน u_x เทียบกับตัวแปร x ดังนั้น ผลหารเชิงผลต่างจะเป็นค่าประมาณของอนุพันธ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ h มีค่าน้อยมาก

ผลหารเชิงผลต่างของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว ถูกสร้างโดยใช้โครงข่ายหรือแลตทิซบนระนาบ xy โดยมีโครงข่ายหรือแลตทิซเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีความกว้าง h หน่วย ความยาว k หน่วยและเพื่อให้ง่ายมักกำหนดให้ $h=k$ ดังภาพที่ 1

$$x = mh, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$
$$y = nh, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$



ภาพที่ 1 จุดตัดของชุดของเส้น

จากภาพที่ 2.1 จุดตัดของชุดของเส้น ถูกเรียกว่า จุดแลตทิซ ผลหารเชิงผลต่างอันดับที่ 1 แบบไปข้างหน้าของฟังก์ชันสองตัวแปร $u(x,y)$ เทียบกับตัวแปร x ถูกกำหนดโดย

$$\hat{u}_x = \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}, \qquad (2\text{-}11)$$

และผลหารเชิงผลต่างอันดับที่ 1 แบบย้อนหลังของฟังก์ชันสองตัวแปร $u(x,y)$ โดยเทียบกับตัวแปร x ถูกกำหนดโดย

$$\hat{u}_{\bar{x}} = \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h}, \qquad (2\text{-}12)$$

ผลหารเชิงผลต่างอันดับที่ 2 ผลต่างกลางของฟังก์ชัน $u(x,y)$ เทียบกับตัวแปร x คือ ผลหารเชิงผลต่างของผลหารเชิงผลต่างอันดับที่ 1 ในสมการ (2-11) และ สมการ (2-12) ซึ่งนิยามโดย

$$\hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{\hat{u}_x - \hat{u}_{\bar{x}}}{h} = \frac{\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} - \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h}}{h} \tag{2-13}$$

$$= \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}$$

ผลหารเชิงผลต่างของอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน $u(x,y)$ เทียบกับตัวแปร y หาได้เช่นเดียวกับวิธีการข้างต้น คือ

$$\hat{u}_y = \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}, \qquad \hat{u}_{\bar{y}} = \frac{u(x,y)-u(x,y-h)}{h}, \tag{2-14}$$

และ

$$\hat{u}_{\bar{y}y} = \frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2} \tag{2-15}$$

ผลหารเชิงผลต่างอันดับที่สูงขึ้นไป หาได้ด้วยวิธีการเดียวกับวิธีการข้างต้น

3. การแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยสมการเชิงผลต่าง

เราสามารถหาคำตอบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ โดยการแทนที่อนุพันธ์ย่อย และดำเนินการตามขั้นตอนเพื่อหาคำตอบของสมการเชิงผลต่าง คำตอบที่ได้จะอยู่ที่จุดแลตทิซ และเราสามารถกำหนดจุดเหล่านี้ให้ถี่มากหรือน้อยตามที่เราต้องการ โดยปรับลดค่า h ในการหาคำตอบ ในลำดับต่อไปเราจะพิจารณาการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยใช้สมการเชิงผลต่าง โดยเบื้องต้นจะได้แสดงตัวอย่างวิธีการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการเชิงผลต่างก่อน ดังนี้

3.1 การแปลงสมการลาปลาซให้เป็นสมการเชิงผลต่าง

สมการลาปลาซ สำหรับ 2 มิติ ซึ่งกำหนดโดย

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

เราแทนที่ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ และ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ด้วย $\hat{u}_{\bar{xx}}$ และ $\hat{u}_{\bar{yy}}$ ตามลำดับ สามารถเขียนสมการลาปลาซใน 2 มิติได้เป็น

$$\frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}+\frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}=0$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\left[u(x+h,y)+u(x,y+h)+u(x-h,y)+u(x,y-h)\right] \tag{2-16}$$

สมการนี้ใช้สำหรับหาค่าของ $u(x,y)$ ซึ่งเป็นจุดแลตทิซ โดยใช้จุดสี่จุดที่อยู่ข้างเคียง

3.2 การแปลงสมการปัวซงให้เป็นสมการเชิงผลต่าง

สมการปัวซง สำหรับ 2 มิติ ซึ่งกำหนดโดย

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4\pi\rho(x,y)$$

แทนที่ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ และ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ด้วย $\hat{u}_{\bar{xx}}$ และ $\hat{u}_{\bar{yy}}$ ตามลำดับ ดังนั้นสามารถเขียนสมการปัวซงใน 2 มิติได้เป็น

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\left[u(x+h,y)+u(x,y+h)+u(x-h,y)+u(x,y-h)\right]+\pi h^2\rho(x,y) \tag{2-17}$$

จากสมการ (2-17) จะเห็นได้ว่าค่าของ $u(x,y)$ ขึ้นอยู่กับจุดแลตทิซที่อยู่ใกล้เคียง ของ h และฟังก์ชันของ $\rho(x,y)$