

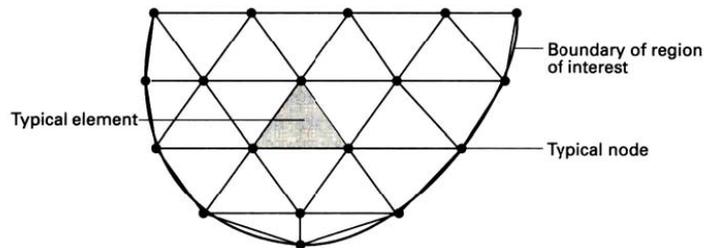
ภาคผนวก ค
การวิเคราะห์การทรุดตัวของบริเวณเชิงลาดสะพาน
โดยใช้หลักการ Finite Element Method

1. หลักการวิเคราะห์เบื้องต้น

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อใช้หาผลเฉลยของสมการทางคณิตศาสตร์ (Differential Equation) หลักการของวิธี FEM คือการประมาณโดยการแบ่งบริเวณของปัญหาออกเป็นขอบเขตย่อยๆ แล้วพิจารณาสมมูลของแรงในแต่ละชิ้นส่วนย่อยที่ละส่วน ซึ่งวิธี FEM จะประกอบไปด้วยขั้นตอนการคำนวณดังต่อไปนี้

1.1 สร้างและแบ่งขอบเขตของปัญหาเป็นพื้นที่เล็กๆ

พื้นที่เล็กๆนี้เรียกว่า Finite Element ดังภาพผนวกที่ ค1 ซึ่งในแต่ละเอลิเมนต์จะมีรูปร่างเป็นรูปหลายเหลี่ยมและเชื่อมต่อกันด้วยจุดมุม (Node) รูปร่างหลายเหลี่ยมที่นิยมใช้แสดงดังภาพผนวกที่ ค2



ภาพผนวกที่ ค1 การแบ่งของเขตปัญหาเป็นพื้นที่เล็กๆ (Fagan, 1992)

Linear elements	Quadratic elements	Cubic elements
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15

ภาพผนวกที่ ค2 อิลิเมนต์ชนิดต่างๆที่ใช้ในการคำนวณ

สำหรับอิเลเมนต์ชนิดต่าง ๆ นั้นจะมีการเก็บค่าการเคลื่อนที่ของจุดมุมเท่านั้น และค่าการเคลื่อนที่ที่จุดมุมนี้จะใช้ในการประมาณค่าการเคลื่อนที่ภายในอิเลเมนต์ ตัวอย่างเช่น ภาพผนวกที่ ค3 สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังสมการผนวกที่ ค1



ภาพผนวกที่ ค3 การเคลื่อนที่ของจุดมุมของแต่ละอิเลเมนต์

$$u(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2 \quad (ค1)$$

ฟังก์ชันการประมาณค่าการเคลื่อนที่ที่ตำแหน่งต่างๆ ดังสมการผนวกที่ ค1 เรียกว่า Shape Function ซึ่งหากเราทราบค่าการเคลื่อนที่เมื่อทำการอนุพันธ์ฟังก์ชันการเคลื่อนที่เทียบกับพิกัดก็จะทราบค่าความเครียดได้ตามที่กล่าวไว้ในส่วนของสมการความเครียด

การพิจารณาว่าจะเลือกใช้อิเลเมนต์รูปร่างแบบใดนั้นขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายอย่าง เช่น ความสามารถในการจำลองการเคลื่อนตัวของวัสดุ การจำลองลักษณะทางเรขาคณิตของพื้นที่ปัญหา เป็นต้น โดยอิเลเมนต์ที่มีพหุนามสูงกว่าก็จะให้ความแม่นยำสูงมากกว่า อิเลเมนต์ที่นิยมในงานวิศวกรรมธรณีเทคนิคสำหรับปัญหาในสองมิติใช้แบบที่ 4, 5 และ 6 ของภาพผนวกที่ ค2

1.2 สร้างเมทริกซ์ความแข็งระดับอิเลเมนต์ (Element Stiffness Matrix)

เมื่อแบ่งขอบเขตใหญ่ออกเป็นชิ้นส่วนย่อยแล้ว จะพิจารณาสมดุลของแรงที่เกิดขึ้นในแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งจะนำไปสู่สมการสมดุลของแรงชุดหนึ่ง การสร้างสมการในขั้นตอนนี้อาจจำเป็นต้องรู้ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดในแต่ละวัสดุ (Constitutive Equations) เช่น วัสดุมีพฤติกรรมตามกฎของฮุก หรือวัสดุเป็นแบบอีลาสติก-พลาสติกและมีกำลังตามเกณฑ์ของมอร์-คูลอมบี้ เป็นต้น

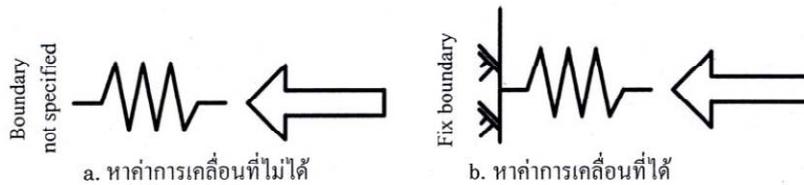
1.3 สมการสมดุลแรงของแต่ละอิเลเมนต์

เมื่อนำสมการสมดุลแรงของแต่ละอิเลเมนต์มาเขียนรวมกัน จะได้ระบบของสมการเขียนได้ดังสมการผนวกที่ ค2 โดยทั่วไปเมทริกซ์ [F] คือ เมทริกซ์ของแรงกระทำภายนอกที่มีต่อระบบปัญหา ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่ทราบค่าแล้ว ในขณะที่เมทริกซ์ความแข็งของระบบ [K] จะต้องคำนวณขึ้นมา และเมทริกซ์ของการเคลื่อนที่ของจุดมุมต่างๆ [U] จะเป็นเมทริกซ์ที่ไม่ทราบค่าซึ่งต้องแก้สมการหาค่าออกมา

$$[K][U] = [F] \tag{ค2}$$

1.4 การกำหนดสภาพแวดล้อมให้กับปัญหา

สำหรับตัวอย่างในงานวิศวกรรมธรณีเทคนิค เช่น บริเวณใดของปัญหาที่ดินไม่สามารถเคลื่อนตัว (Fixed Boundary Condition) หรือบริเวณใดที่ดินได้รับน้ำหนักกระทำ ซึ่งการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตนี้ทำให้สามารถหาค่าผกผันของเมทริกซ์ [K] ได้ ดังแสดงตัวอย่างในภาพผนวกที่ ค4 จะเห็นว่าหากเราไม่กำหนดขอบเขตของปัญหาก็จะไม่สามารถหาค่าการเคลื่อนที่ของสปริงได้ เป็นต้น



ภาพผนวกที่ ค4 ความสำคัญของเงื่อนไขขอบเขตที่มีผลต่อการหาผลเฉลยของระบบสมการ

1.5 การแก้ระบบสมการ

แก้ระบบสมการเพื่อหาค่าผลเฉลยปฐมภูมิ (Primary Solution) ซึ่งค่าการเคลื่อนตัวของจุดมุมหาได้จากสมการผนวกที่ ค3

$$[U] = [K]^{-1}[F] \tag{ค3}$$

1.6 การคำนวณหาค่าหน่วยแรงและความเครียด

จากผลเฉลยปฐมภูมิ (Primary Solution) ซึ่งหน่วยแรงและความเครียดที่หาได้นี้เรียกว่าผลเฉลยทุติยภูมิ (Secondary Solution) เนื่องจากการนำความผลเฉลยอันแรกมาหาค่าผลเฉลยจากความสัมพันธ์ของสมการอื่น โดยที่ค่าเมทริกซ์ความเครียด ([E]) ที่เกิดขึ้นสามารถหาได้จากการนำเมท

ริกซ์ของการเคลื่อนที่ของจุดมุมต่างๆ ([U]) มาคูณเข้ากับเมทริกซ์สมการคอมแพดติบิลิตี ([B]) ดังแสดงในสมการผนวกที่ ค4 และสำหรับค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้น ([σ]) สามารถหาได้จากการนำค่าความเครียดที่เกิดขึ้นมาคูณกับเมทริกซ์สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความเค้น ([C]) ดังแสดงในสมการผนวกที่ ค5 หรือเมื่อนำสมการผนวกที่ ค4 แทนลงในสมการผนวกที่ ค5 จะได้ว่าค่าหน่วยแรงสามารถหาได้จากการนำเมทริกซ์สมการคอมแพดติบิลิตีมาคูณเข้ากับเมทริกซ์สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความเค้นและเมทริกซ์ของการเคลื่อนที่ของจุดมุมต่างๆ ดังแสดงในสมการผนวกที่ ค6

$$[\epsilon] = [B][U] \quad (ค4)$$

$$[\sigma] = [C][\epsilon] \quad (ค5)$$

$$[\sigma] = [C][B][U] \quad (ค6)$$

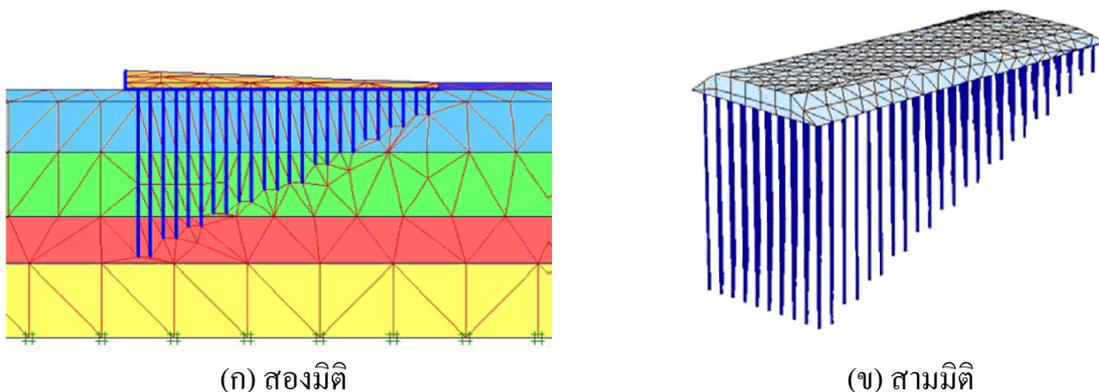
จากที่กล่าวมาข้างต้น ขั้นตอนที่สำคัญที่สุดในการคำนวณด้วยวิธี FEM คือการวิเคราะห์ผลการคำนวณว่ามีแนวโน้มความเป็นไปได้หรือมีความน่าเชื่อถือมากเพียงใด เนื่องจาก FEM เป็นเพียงเทคนิคในการแก้ปัญหาสมการคณิตศาสตร์ชนิดหนึ่งเท่านั้น ถ้าแบบจำลองพฤติกรรมของดินที่ใช้มีความไม่ถูกต้องหรือมีการจำลองสภาพปัญหาที่ไม่ถูกต้อง ผลทางตัวเลขที่ได้จากวิธีนี้ก็ไม่มี ความหมายแต่อย่างใด

2. โปรแกรมเชิงพาณิชย์สำหรับงานวิศวกรรมธรณีเทคนิค

การคำนวณด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์มีความจำเป็นต้องใช้คอมพิวเตอร์ช่วยประมวลผล และโปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับการจัดการที่สะดวกและรวดเร็ว ซึ่งโปรแกรมประเภทนี้ส่วนใหญ่ถูกสร้างขึ้นเพื่อการคำนวณที่นี้จะกล่าวถึงงานวิจัยที่นำโปรแกรมสำเร็จรูปมาใช้วิเคราะห์การทรุดตัวของคอสะพาน อาทิเช่น

อรุณสิทธิ์ และคณะ (2550) เลือกโปรแกรม PLAXIS 2D ช่วยศึกษาพฤติภาพการทรุดตัวของคันทางคอสะพานบนโครงสร้างเสาเข็มไถ่ระดับความยาวในพื้นที่ราบลุ่มแม่น้ำเจ้าพระยาตอนล่าง จำนวน 5 คอสะพานซึ่งผลการวิเคราะห์ทั้ง 5 คอสะพาน พบว่าผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกันกับค่าที่ได้จากการตรวจวัดอุปกรณ์ธรณีเทคนิคที่ได้ทำการติดตั้งนั้น ให้ค่าที่ดีในคอสะพานโครงการก่อสร้างทางหลวงหมายเลข 3268 บางพลี-บางบ่อ (เทพารักษ์) กม.17+520 และอีก 4 คอสะพานให้ค่าที่แตกต่างกันกับค่าที่ได้จากการตรวจวัดฯ

ชนกร และคณะ (2553) เลือกโปรแกรม PLAXIS 2D, 3D Foundation วิเคราะห์โครงสร้างเสาเข็มไถ่ระดับความยาวเพื่อรองรับคอสะพานทั้งห้าโครงการของกรมทางหลวง โดยมีการวิเคราะห์ในระบบสามมิติและสองมิติ ผลการวิเคราะห์พบว่าค่าการทรุดตัวของโครงสร้างที่ได้จากการวิเคราะห์ในระบบสองมิติจะมีค่ามากกว่าผลที่ได้จากการวิเคราะห์ในระบบสามมิติเล็กน้อยเมื่อเปรียบเทียบค่าการทรุดตัวที่ทำนายกับที่ตรวจวัดในสนาม ภาพผนวกที่ ค5 แสดง Finite Element Mesh ในรูปสองและสามมิติที่ใช้เป็นแบบจำลองของ Bearing Unit และ Embedded Pile ในโปรแกรม PLAXIS 2D, 3D Foundation



ภาพผนวกที่ ค5 แบบจำลองการวิเคราะห์โครงสร้างคอสะพานด้วยโปรแกรม Plaxis

(ชนกร และคณะ, 2553)

3. การวิเคราะห์การทรุดตัวของบริเวณคอสะพานโดยไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์หาค่าการทรุดตัวของคันทางบริเวณคอสะพานสามารถทำได้หลายวิธี ซึ่งวิธีการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีหนึ่งที่เป็นที่นิยมมากในปัจจุบัน เนื่องจากมีความสะดวกรวดเร็ว มีความยืดหยุ่นสูงทำให้สามารถจำลองการวิเคราะห์ตามกระบวนการและขั้นตอนการก่อสร้างได้ ในงานวิจัยนี้ได้ใช้โปรแกรม Plaxis 2D ในการวิเคราะห์การทรุดตัวของคันทางคอสะพาน โดยมีสมมติฐานการวิเคราะห์เป็นแบบ Plane Strain และเปรียบเทียบกับค่าการทรุดตัวที่ได้จากการตรวจวัดทางธรณีเทคนิค โดยทำการศึกษาคอสะพานที่ก่อสร้างแบบ Slab on Ground และแบบ Slab on Pile

3.1 พารามิเตอร์ที่ใช้ในการศึกษาทางคณิตศาสตร์

พารามิเตอร์ในแบบจำลองที่ใช้ในการศึกษาได้มาจากผลการเจาะสำรวจชั้นดินของแต่ละคอสะพาน โดยวัสดุคานคันทันทางและดินถมบนโครงสร้างคอสะพาน (Bearing Unit) ได้มาจากการศึกษาวิจัยพฤติภาพการทรุดตัวของคันทางคอสะพาน บนโครงสร้างเสาเข็มไต้ระดับความยาวในพื้นที่ราบลุ่มแม่น้ำเจ้าพระยาตอนล่าง ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์เชิงตัวเลข

ในแบบจำลอง Mohr Colomb Model ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของดิน (E_s) เป็นค่าพารามิเตอร์หนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์ซึ่งเป็นอัตราส่วนกับค่า s_u ($E_s = \alpha \cdot s_u$) Balasubramanian and Brener (1981) ได้นำเสนอค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของดินเหนียวว่าอยู่ในช่วง $E_u = 200-500 s_u$ และในดินเหนียวอ่อน (Soft Clay) Bergado et al. (1990) ได้นำเสนอว่ามีค่าในช่วง $E_u = 180-350 s_u$ และค่าพารามิเตอร์ในชั้นดิน Weathered Crust ได้จากข้อมูลการศึกษาของ Bergado et al. (2003) ดังนั้นพารามิเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณจะใช้ความสัมพันธ์เชิงประจักษ์ (Empirical Relation) กับผลการทดสอบในสนามเดียวกันทั้งหมดเพื่อสามารถนำความสัมพันธ์ดังกล่าวไปใช้ในการทำนายพฤติกรรมของคอสะพานได้ในอนาคต ซึ่งสรุปค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ได้ดังตารางผนวกที่ ค1, ค2 และ ค3

3.2 การแปลงค่าหน้าตัดของเสาเข็ม

ในการวิเคราะห์คันทางคอสะพานนี้ใช้โปรแกรมทาง Finite element แบบ 2 มิติ โดยวิเคราะห์เป็นแบบ Plain strain แต่ในความเป็นจริงเสาเข็มมีระยะห่างกันและมีดินแทรกอยู่ตรงกลางระหว่างเสาเข็มแสดงดังภาพผนวกที่ ค6 ดังนั้นจึงใช้สมการผนวกที่ ค7 สำหรับแปลงหน้าตัดของเสาเข็มเพื่อให้สอดคล้องกับพฤติกรรมแบบ 3 มิติ

$$E_{total} = \frac{(EA)_{pile} + (EA)_{soil}}{A_{total}} \quad (ค7)$$

3.3 ลักษณะแบบจำลอง (Model Geometry)

ในการสร้างแบบจำลองคันทงคอสะพานในงานวิจัยนี้ ได้ใช้โปรแกรมทาง Finite Element ในการวิเคราะห์ ในการจำลองการวิเคราะห์โครงสร้างคอสะพานแบบ Slab on Ground และแบบ Slab on Pile แสดงได้ดัง ภาพผนวกที่ ค7 และ ค8 ซึ่งลักษณะของแบบจำลองใช้ข้อมูลโครงการก่อสร้างสะพานข้ามคลองสองบนถนนกรุงเทพกรีฑา-ร่มเกล้า และโครงการก่อสร้างสะพานข้ามคลองบางตะไนยบนทางหลวงพิเศษหมายเลข 345 ตามลำดับ

3.4 ขั้นตอนการก่อสร้างในการวิเคราะห์ (Stage of Construction)

การจำลองขั้นตอนการก่อสร้างในโปรแกรมได้แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนหลัก คือ ช่วงระยะเวลาระหว่างการก่อสร้างและช่วงระยะเวลาหลังการก่อสร้างเสร็จ การวิเคราะห์ในขั้นตอนการถมดิน (Fill Material) ก่อนที่จะก่อสร้างโครงสร้างคันทงคอสะพานได้ Reset ค่าการทรุดตัวให้เท่ากับศูนย์ และในช่วงระยะเวลาหลังการก่อสร้างเสร็จ ซึ่งแสดงขั้นตอนการก่อสร้างในการวิเคราะห์โครงการก่อสร้างสะพานข้ามคลองสองบนถนนกรุงเทพกรีฑา-ร่มเกล้า และโครงการก่อสร้างสะพานข้ามคลองบางตะไนยบนทางหลวงพิเศษหมายเลข 345 ดังแสดงในภาพผนวกที่ ค9 และ ค10 ตามลำดับ

ตารางผนวกที่ ค1 พารามิเตอร์สำหรับแบบจำลองในทุกกรณีศึกษา

Material Set			Density		Permeability		Stiffness		Strength	
Identification	Material Model ^a	Type	γ_{unsat} (kN/m ³)	γ_{sat} (kN/m ³)	k_x (m/Day)	k_y (m/Day)	E_s (kPa)	ν_s	c' (kPa)	ϕ' (Deg)
Weathered crust	MC	Drained	16	16.5	0.002	0.001	2,500	0.25	50	5
Fill Material	MC	Drained	19	20	0.864	0.864	40,000	0.3	0.01	35
Soft Clay	MC	Undrained	vary	vary	0.0005	0.0005	100 s_u	0.3	UC	0.01
Medium Clay	MC	Undrained	vary	vary	0.0004	0.0004	200 s_u	0.3	SPT	0.01
Stiff Clay	MC	Undrained	vary	vary	0.0003	0.0003	300 s_u	0.3	SPT	0.01
Dense Sand	MC	Drained	vary	vary	0.0016	0.0016	60,000	0.25	0.01	38
Fill Mat. on Bearing Unit	MC	Drained	18	19	0.864	0.864	40,000	0.25	0.01	35
Fill Mat. on Embankment	MC	Drained	19	20	0.864	0.864	40,000	0.25	0.01	35

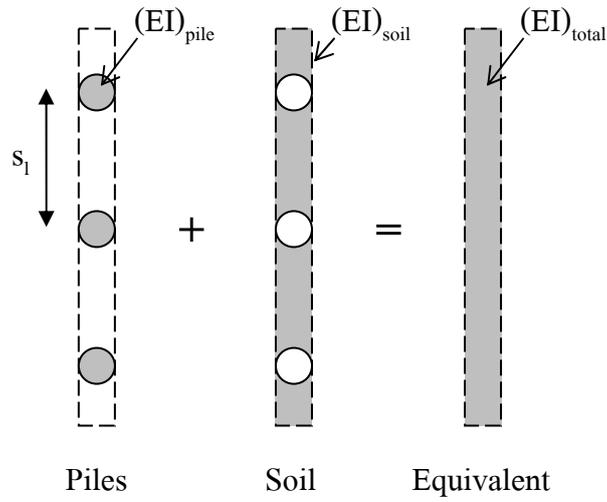
ตารางผนวกที่ ค2 Stiffness Properties สำหรับเสาเข็ม

Slab Type	Cross Section (m)	f'_c (ksc)	E (kPa)	A (m ²)	EA (kN)	EI (kN.m ²)	L_{spacing} (m)
Square Pile	0.26 x 0.26	350	28,455,304	0.0676	1,923,578	10,836	2
Square Pile	0.22 x 0.22	350	28,455,304	0.0484	1,377,237	5,555	2

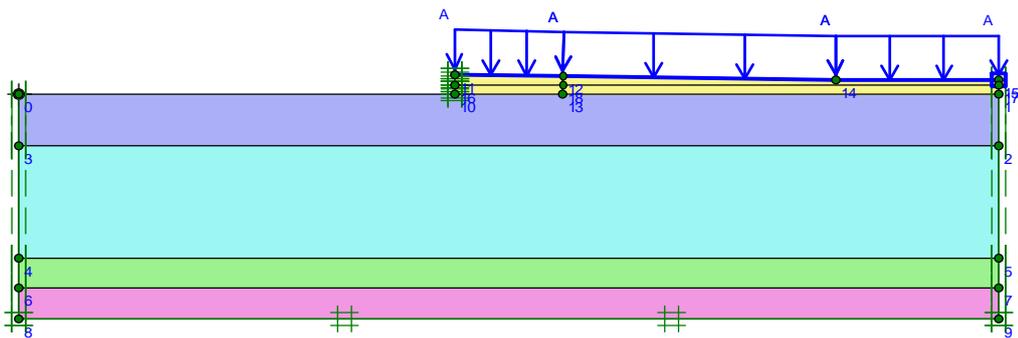
ตารางผนวกที่ ค3 Stiffness Properties สำหรับ Slab

Type	Axial Stiffness, EA (kN/m)	EI (kN.m ² /m)	Weight (kN/m)	Poisson's Ratio
Slab on ground	8,536,591	64,024	7.2	0.15
Slab on pile	6,544,720	28,851	5.52	0.15

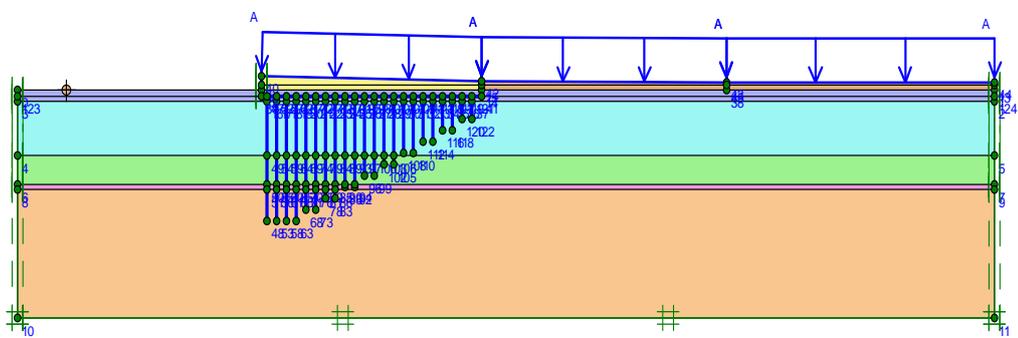
โครงการปรับปรุงการออกแบบและมาตรฐานโครงสร้างปรับการทรุดตัวบริเวณคอสะพาน (โครงการวิจัยต่อเนื่อง)



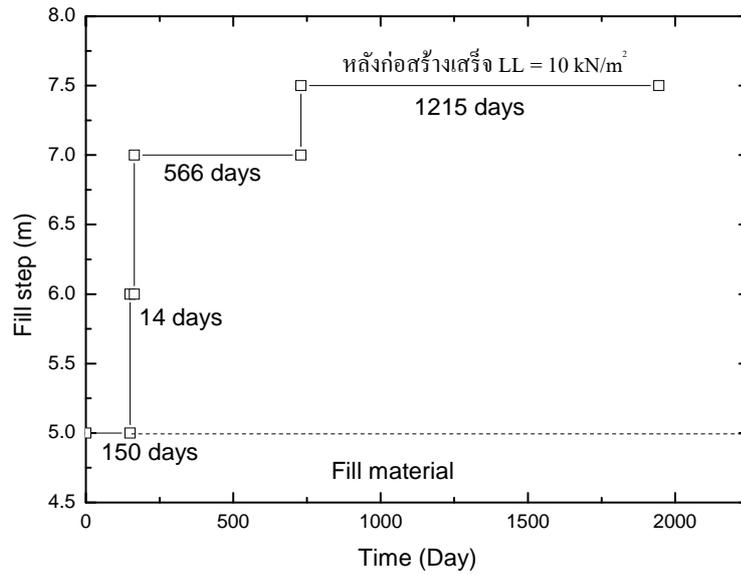
ภาพผนวกที่ ค6 การแปลงค่าหน้าตัดของเสาเข็ม



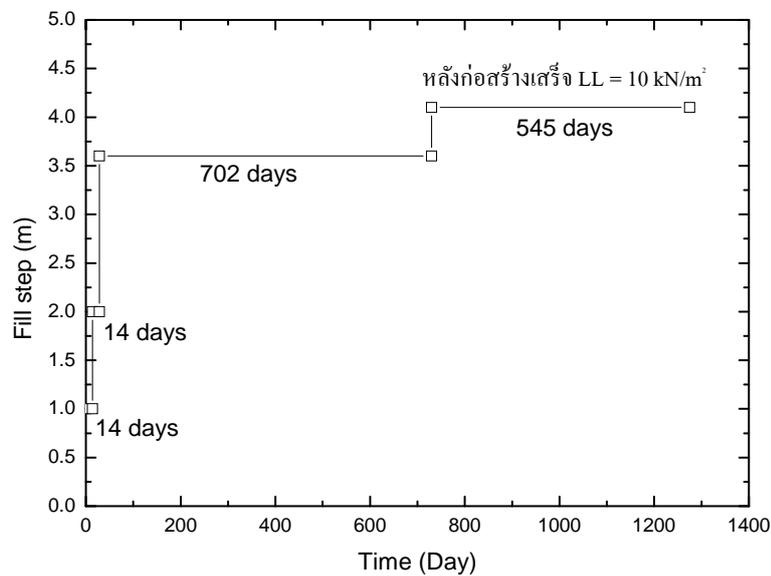
ภาพผนวกที่ ค7 ลักษณะแบบจำลองของการวิเคราะห์โครงสร้างคอสะพานแบบ Slab on Ground



ภาพผนวกที่ ค8 ลักษณะแบบจำลองของการวิเคราะห์โครงสร้างคอสะพานแบบ Slab on Pile



ภาพผนวกที่ ค9 ขั้นตอนของโครงการก่อสร้างสะพานข้ามคลองสอง



ภาพผนวกที่ ค10 ขั้นตอนของโครงการก่อสร้างสะพานข้ามคลองบางตะไนย

4. เอกสารอ้างอิง

ฉัตรกร จิตรณรงค์, สมโพธิ อยู่ไวก และ พรเกษม จงประดิษฐ์. 2553. การวิเคราะห์การทรุดตัวของคันทางคอสะพานบนโครงสร้างเสาเข็มไต้ระดับความยาวด้วยวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์. **การประชุมวิชาการโยธาแห่งชาติ ครั้งที่ 15.**

อรรถสิทธิ์ สวัสดิ์พานิช, จุฑา สุนิตย์สกุล และ ปุณณรัตน์ กัณห์สิงห์. 2550. การศึกษาพฤติกรรมทรุดตัวของคันทางคอสะพานบนโครงสร้างเสาเข็มไต้ระดับความยาวในพื้นที่ราบลุ่มแม่น้ำเจ้าพระยาตอนล่าง ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์. **รายงานฉบับที่ วพ. 256.** สำนักวิจัยและพัฒนาทาง, กรมทางหลวง.

Bergado, D. T., S. Ahmed, C. L. Sampaco and A. S. Balasubramaniam. 1990. Settlements of Bangna-Bangpakong Highway on Soft Bangkok Clay. **Journal of Geotechnical Engineering** 116: 136-155.

_____, S. Youwai, C. Teerawattanasuk and P. Visudmedanukul. 2003. The Interaction Mechanism and Behavior of Hexagonal Wire Mesh Reinforced Embankment with Silty Sand Backfill on Soft Clay. **Computers and Geotechnics** 30: 517-534.

Fagan, J. F. 1992. Intelligence: A theoretical viewpoint. **Current Directions in Psychological Science** 1: 82-86.
