**ภาคผนวก ข**

การวิเคราะห์เสถียรภาพโดยเงื่อนไขจริงบวก (PR Conditions)

จากคุณสมบัติจริงบวกของฟังก์ชันโอนย้าย $G(s)$ ที่ทำให้ตัวสังเกตมีเสถียรภาพในสมการที่ (3.10) นั้นนำมาเขียนใหม่ได้ดังนี้คือ

***PR Conditions:***

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\leq 0 \quad {}^{\exists}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{T}>0 \\ &\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{T} \end{aligned} \tag{ข.1}$$

ซึ่งเงื่อนไขนี้ต้องการเมตริกซ์ $\boldsymbol{P}$ ที่ทำให้เมทริกซ์ $\boldsymbol{Q}$ มีคุณสมบัติกึ่งลบแน่นอน(Semi-negative definite) แต่เงื่อนไขนี้จะทำให้ตัวสังเกตมีคุณสมบัติแค่เสถียรเท่านั้น แต่ไม่ได้ยืนยันว่าตัวสังเกตจะมีเสถียรภาพแบบลู่เข้า (Asymptotically stable) อย่างไรก็ตามเราจะใช้ วิธีการของเลียปูนอฟในการพิสูจน์ว่าตัวสังเกตหรือระบบประมาณจะมีเสถียรภาพแบบลู่เข้า ทุก ๆ ย่านการทำงาน ยกเว้นจุดทำงานที่ความถี่ทำงานเท่ากับศูนย์ โดยในเบื้องต้นจะนำเสนอการหาเมตริกซ์ $\boldsymbol{P}$ ที่ทำให้เมทริกซ์ $\boldsymbol{Q}$ มีคุณสมบัติกึ่งลบแน่นอนดังนี้คือ

กำหนดให้ เมทริกซ์ $\boldsymbol{P}$ เป็น

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_1\boldsymbol{I} & p_2\boldsymbol{I} \\ p_2\boldsymbol{I} & p_3\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{ข.2}$$

โดยที่เงื่อนไขจำเป็นที่ทำให้ เมทริกซ์ $\boldsymbol{P}$ มีคุณสมบัติบวกแน่นอน (Positive-definite) คือ

$$p_1>0, \quad \det P>0 \qquad \Leftrightarrow \qquad p_1>0, \quad p_1p_3>p_2^2 \tag{ข.3}$$

ซึ่งจากเงื่อนไขข้างต้นเราจะได้ $p_3>0$ ด้วยเช่นกัน

จากเงื่อนไขที่สองของสมการที่ (ข.1) และจากสมการค่าความผิดพลาดของกระแสของสมการที่ (3.1) และ (3.2) สามารถหาเงื่อนไขบังคับของ เมทริกซ์ $\boldsymbol{P}$ ได้ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} p_1\boldsymbol{I} & p_2\boldsymbol{I} \\ p_2\boldsymbol{I} & p_3\boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}/\varepsilon \\ -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_1/\varepsilon-p_2=1 \\ p_2/\varepsilon-p_3=0 \end{cases} \\ &p_1=\varepsilon(1+p_2)\ , \ p_2=\varepsilon p_3>0 \end{aligned} \tag{ข.4}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} (A_{11}+G_1)\boldsymbol{I}+G_2\boldsymbol{J} & A_{12} \\ (A_{21}+H_1)\boldsymbol{I}+H_2\boldsymbol{J} & -\varepsilon A_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1\boldsymbol{I} & p_2\boldsymbol{I} \\ p_2\boldsymbol{I} & p_3\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (A_{11}+G_1)\boldsymbol{I}-G_2\boldsymbol{J} & (A_{21}+H_1)\boldsymbol{I}-H_2\boldsymbol{J} \\ A_{12}(-\boldsymbol{J}) & -\varepsilon A_{12}(-\boldsymbol{J}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1\boldsymbol{I} & p_2\boldsymbol{I} \\ p_2\boldsymbol{I} & p_3\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \{(A_{21}+H_1)p_2+p_1(A_{11}+G_1)\}\boldsymbol{I}-\{G_2p_1+H_2p_2\}\boldsymbol{J} & * \\ p_1A_{12}(-\boldsymbol{J})-\varepsilon p_2A_{12}(-\boldsymbol{J}) & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} * \{(A_{21}+H_1)p_3+p_2(A_{11}+G_1)\}\boldsymbol{I}-\{G_2p_2+H_2p_3\}\boldsymbol{J} \\ p_2A_{12}(-\boldsymbol{J})-\varepsilon p_3A_{12}(-\boldsymbol{J}) \end{bmatrix} \quad (ข.5)$$

โดยที่ $[\ ]^T$ หมายถึง การสลับเปลี่ยน (Transpose) และจากความสัมพันธ์ใน (ข.4) แทนค่าในสมการ (ข.5) จะได้

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \{(A_{21}+H_1)p_2+p_1(A_{11}+G_1)\}\boldsymbol{I}-\{G_2p_1+H_2p_2\}\boldsymbol{J} & * \\ \varepsilon A_{12}(-\boldsymbol{J}) & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} * \{(A_{21}+H_1)p_3+p_2(A_{11}+G_1)\}\boldsymbol{I}-\{G_2p_2+H_2p_3\}\boldsymbol{J} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (ข.6)$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาค่าเมทริกซ์ $\boldsymbol{PA}$ ได้ดังนี้คือ

$$\boldsymbol{PA} = \begin{bmatrix} \{(p_1(A_{11}+G_1)+(p_2(A_{21}+H_1)\}\boldsymbol{I}+\{p_1G_2+p_2H_2\}\boldsymbol{J} & \varepsilon A_{12} \\ \{(p_2(A_{11}+G_1)+(p_3(A_{21}+H_1)\}\boldsymbol{I}+\{p_2G_2+p_3H_2\}\boldsymbol{J} & 0 \end{bmatrix} \quad (ข\ .7)$$

แทนค่าสมการที่ (ข.6) และ (ข.7) ลงในสมการ (ข.1) จะได้

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} q_1\boldsymbol{I} & q_2\boldsymbol{I} \\ q_2\boldsymbol{I} & q_3\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 2\{(A_{21}+H_1)p_2+p_1(A_{11}+G_1)\}\boldsymbol{I} & \\ \{(p_2(A_{11}+G_1)+(p_3(A_{21}+H_1)+a_{22}\}\boldsymbol{I}+\{p_2G_2+p_3H_2+\omega_m\}\boldsymbol{J} & * \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} * \{(A_{21}+H_1)p_3+p_2(A_{11}+G_1)+a_{22}\}\boldsymbol{I}-\{G_2p_2+H_2p_3+\omega_m\}\boldsymbol{J} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (ข.8)$$

โดยที่ $a_{22}=R_r/L_r$

จากเมทริกซ์ $\boldsymbol{Q}$ ที่ได้ เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่ทำให้เมทริกซ์ $\boldsymbol{Q}$ มีคุณสมบัติกึ่งลบแน่นอน คือ

$$q_1 < 0, \quad \det Q \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_1 < 0, \quad q_1 q_3 \geq q_2^2 \tag{ข.9}$$

เนื่องจาก $q_3 = 0$ (ข .8) ดังนั้นจากเงื่อนไขข้างต้นสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$q_1 < 0,\ q_2 = 0 \tag{ข.10}$$

ซึ่งจะได้

$$\left.\begin{array}{rr} (A_{21} + H_1) p_2 + p_1 (A_{11} + G_1) < 0 & a \\ (p_2 (A_{11} + G_1) + (p_3 (A_{21} + H_1) + a_{22} = 0 & b \\ p_2 G_2 + p_3 H_2 + \omega_m = 0 & c \end{array}\right\} \tag{ข.11}$$

จากเงื่อนไขที่แสดงในสมการที่ (ข .11) นั้น เราหารูปแบบทั่วไปของอัตราขยาย $G_1, G_2, H_1, H_2$ ที่ทำให้เมทริกซ์ $\boldsymbol{Q}$ มีคุณสมบัติกึ่งลบแน่นอนได้ดังนี้

จากนิยามพารามิเตอร์ $x$ ในสมการที่ (3.5) นำมาเขียนใหม่จะได้

$$G_1 = -x + \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r}{\sigma L_r} \tag{ข.12}$$

$$G_2 = -y - \omega_m \tag{ข.13}$$

*จากเงื่อนไข b*

จากความสัมพันธ์ใน (ข.4) แทนค่าในสมการที่ (ข.11) จะได้

$$(p_2 (A_{11} + G_1) + (p_3 (A_{21} + H_1) + a_{22} = 0$$

$$H_1 = -\varepsilon G_1 + \frac{a_{22}}{p_3} - \left(\varepsilon A_{11} + A_{21}\right)$$

$$\therefore H_1 = -\varepsilon G_1 - k_2 \frac{R_r}{L_r} + \frac{R_s L_r}{M} \tag{ข.14}$$

*จากเงื่อนไข a*

เมื่อแทนค่า $H_1$ จากสมการที่ (ข.12) ลงในเงื่อนไข $a$ จะได้

$$(A_{21} + H_1) p_2 + p_1 (A_{11} + G_1) < 0$$

$$(A_{21} - \varepsilon G_1 - \frac{1}{p_3} \frac{R_r}{L_r} + \frac{R_s L_r}{M}) p_2 + p_1 (A_{11} + G_1) < 0$$

จากความสัมพันธ์ใน (ข .4) แทนค่าแล้วจะได้

$$\varepsilon G_1 - \varepsilon \frac{R_r}{L_r} + \frac{R_s L_r}{M} p_2 + \varepsilon(1+p_2)A_{11} + A_{21}p_2 < 0$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ แล้วจะได้

$$G_1 < \frac{R_r}{L_r} - \frac{R_s L_r}{\varepsilon M} p_2 + (1+p_2)\left(\frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2}\right) - \frac{R_r M}{\varepsilon L_r} p_2$$

$$G_1 < \frac{R_r}{L_r} - \frac{R_s L_r}{\varepsilon M} p_2 + \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s} p_2 + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2} p_2 - \frac{R_r M}{\varepsilon L_r} p_2$$

$$G_1 < \frac{R_r}{L_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r}{L_r}\left(1 + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2}\right)$$

$$G_1 < \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r}{\sigma L_r}$$

เนื่องจาก $G_1 = -x + \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r}{\sigma L_r}$ จึงทำให้ได้

$$x > 0 \tag{ข.15}$$

*<u>เงื่อนไข c</u>*

$$p_2 G_2 + p_3 H_2 + \omega_m = 0$$

กำหนดให้ $k_2 = \frac{1}{p_3} > 0$

$$\therefore H_2 = -\varepsilon G_2 - k_2 \omega_m \tag{ข.16}$$

และ

$$k_2 > 0 \tag{ข.17}$$

จากสมการที่ (ข.12) - (ข.17) จะสรุปได้ว่าสมการของคำตอบทั่วไปของอัตราขยายป้อนกลับที่สอดคล้องกับเงื่อนไขคุณสมบัติจริงบวก คือ

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= -x + \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r}{\sigma L_r} \\ G_2 &= -y - \omega_m \\ H_1 &= -\varepsilon G_1 - k_2 \frac{R_r}{L_r} + \frac{R_s L_r}{M} \\ H_2 &= -\varepsilon G_2 - k_2 \omega_m \end{aligned}\right\} \text{ โดยที่ } x > 0,\ k_2 > 0 \text{ [2], [20]}$$

นอกจากนั้นแล้วจากเงื่อนไข $c$ และจากสมการที่ (ข.4) จะได้

$$\left.\begin{aligned} p_3 &= \frac{1}{k_2} > 0 \\ p_2 &= \varepsilon p_3 = \varepsilon / k_2 > 0 \\ p_1 &= \varepsilon(1+p_2) = \varepsilon(1+\varepsilon / k_2) \end{aligned}\right\} \qquad (ข.18)$$

และเมทริกซ์ $\boldsymbol{P}$ ที่มีคุณสมบัติบวกแน่นอนคือ

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} (1+\varepsilon / k_2)\varepsilon \boldsymbol{I} & \varepsilon / k_2 \boldsymbol{I} \\ \varepsilon / k_2 \boldsymbol{I} & 1/k_2 \boldsymbol{I} \end{bmatrix} > \boldsymbol{0} \qquad (ข.19)$$

นอกจากนั้นจะได้เมทริกซ์ $\boldsymbol{Q}$ คือ

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -2\varepsilon x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \le \boldsymbol{0} \qquad (x > 0) \qquad (ข.20)$$

ซึ่งเมทริกซ์ $\boldsymbol{Q}$ ที่ได้ก็สอดคล้องกับเงื่อนไขคุณสมบัติจริงบวก แต่อย่างไรก็ตามเนื่องจากเมทริกซ์ $\boldsymbol{Q}$ มีคุณสมบัติเพียงแค่กึ่งลบแน่นอน ดังนั้นจึงไม่สามารถยืนยันได้ว่าระบบประมาณจะมีเสถียรภาพแบบลู่เข้า ดังนั้นจะต้องใช้วิธีการของ Lyapunov ในการวิเคราะห์เสถียรภาพแบบลู่เข้า

***วิธีการของ Lyapunov***

ในเบื้องต้นเราจะเขียนรูปสมการความเร็วประมาณใหม่ดังนี้

*สมการการประมาณค่าความเร็ว:*

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_m &= (k_p + k_i \textstyle\int dt)\left\{\vec{e}_i^{\,T} \boldsymbol{J} \hat{\vec{\lambda}}_r\right\} \;;\quad k_p, k_i > 0 \\ &= k_i \textstyle\int \left\{\vec{e}_i^{\,T} \boldsymbol{J} \hat{\vec{\lambda}}_r\right\} dt + k_p \vec{e}_i^{\,T} \boldsymbol{J} \hat{\vec{\lambda}}_r \\ &= z + k_p \vec{e}_i^{\,T} \vec{w} \end{aligned} \qquad (ข.21)$$

โดยที่ $z = k_i \int \left\{\vec{e}_i^{\,T} \boldsymbol{J} \hat{\vec{\lambda}}_r\right\} dt \Leftrightarrow \dfrac{dz}{dt} = k_i \vec{e}_i^{\,T} \vec{w}$ และเวกเตอร์รีเกรสเซอร์ (Regressor vector) $\vec{w} = \boldsymbol{J} \hat{\vec{\lambda}}_r$

$$e_\omega = \hat{\omega}_m - \omega_m = z + k_p \vec{e}_i^{\,T} \vec{w} - \omega = \xi + k_p \vec{e}_i^{\,T} \vec{w} \qquad (ข.22)$$

โดยที่

$$\xi = z - \omega_m$$

ภายใต้สมมุติฐาน $\dfrac{d\omega_m}{dt} = 0$ (ซึ่งเป็นจริงในทางปฏิบัติเพราะว่าค่าความเร็วจริงทางกลเปลี่ยนแปลงช้าเมื่อเทียบกับพลวัตทางไฟฟ้าของระบบประมาณ) จะได้

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dz}{dt} - \underbrace{\frac{d\omega_m}{dt}}_{0} = k_i \vec{e}_i^{\,T} \vec{w} \qquad (ข.23)$$

กำหนดให้ฟังก์ชัน *Lyapunov* $V$ มีค่าเป็น

$$\boldsymbol{V}(\vec{e}, \xi) = \vec{e}^{\,T} \boldsymbol{P} \vec{e} + \xi^2 / k_i \qquad (ข.24)$$

หมายเหตุ: ถ้าหาก $k_p = 0$ แล้ว จากสมการที่ (ข.22) จะได้

$$e_\omega = \hat{\omega}_m - \omega_m = \xi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V}(\vec{e}, e_\omega) = \vec{e}^{\,T} \boldsymbol{P} \vec{e} + e_\omega^2 / k_i$$

เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน *Lyapunov* $\boldsymbol{V}$ ได้เป็น

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \vec{e}^{T}\boldsymbol{P}\left[\frac{d\vec{e}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{e}^{T}}{dt}\right]\boldsymbol{P}\vec{e} + \frac{2}{k_i}\xi\frac{d\xi}{dt} \qquad (ข.25)$$

สมการค่าความผิดพลาดในสมการที่ (3.1) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \boldsymbol{A}\vec{e} - \boldsymbol{B}\vec{w}e_{\omega} \Rightarrow \frac{d\vec{e}^{T}}{dt} = \vec{e}^{T}\boldsymbol{A}^{T} - \vec{w}^{T}\boldsymbol{B}^{T}e_{\omega} \qquad (ข.26)$$

แทนค่าในสมการที่ (ข.24) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} &= \vec{e}^{T}\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{A}\vec{e} - \boldsymbol{B}\vec{w}e_{\omega}\right) + \left(\vec{e}^{T}\boldsymbol{A}^{T} - \vec{w}^{T}\boldsymbol{B}^{T}e_{\omega}\right)\boldsymbol{P}\vec{e} + \frac{2}{k_i}\xi\frac{d\xi}{dt} \\ &= \vec{e}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\vec{e} - \vec{e}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\vec{w}e_{\omega} + \vec{e}^{T}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{P}\vec{e} - \vec{w}^{T}\boldsymbol{B}^{T}e_{\omega}\boldsymbol{P}\vec{e} + \frac{2}{k_i}\xi\frac{d\xi}{dt} \\ &= \vec{e}^{T}\left(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\right)\vec{e} - \left(\vec{e}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\vec{w} + \vec{w}^{T}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}\vec{e}\right)e_{\omega} + \frac{2}{k_i}\xi\frac{d\xi}{dt} \\ &= \vec{e}^{T}\boldsymbol{Q}\vec{e} - \left(\vec{e}^{T}\boldsymbol{C}^{T}\vec{w} + \vec{w}^{T}\boldsymbol{C}\vec{e}\right)e_{\omega} + \frac{2}{k_i}\xi\frac{d\xi}{dt} \\ &= \vec{e}^{T}\boldsymbol{Q}\vec{e} - 2\vec{e}_i^{T}\vec{w}e_{\omega} + \frac{2}{k_i}\xi\frac{d\xi}{dt} \qquad (ข.27)\end{aligned}$$

แทนค่าสมการที่ (ข.20)  (ข.22) และ (ข.23) ในสมการที่ (ข.27) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} &= \vec{e}^{T}\boldsymbol{Q}\vec{e} - 2\vec{e}_i^{T}\vec{w}\left(\xi + k_p\vec{e}_i^{T}\vec{w}\right) + \frac{2}{k_i}\xi\left(k_i\vec{e}_i^{T}\vec{w}\right) \\ &= \vec{e}^{T}\boldsymbol{Q}\vec{e} - 2\vec{e}_i^{T}\vec{w}\xi - 2k_p\left[\vec{e}_i^{T}\vec{w}\right]^2 + 2\vec{e}_i^{T}\vec{w}\xi \\ &= \left(-2\varepsilon x\right)\vec{e}_i^{T}\vec{e}_i - 2k_p\left[\vec{e}_i^{T}\vec{w}\right]^2 \\ &= \left(-2\varepsilon x\right)\left\|\vec{e}_i\right\|^2 - 2k_p\left[\vec{e}_i^{T}\vec{w}\right]^2 \qquad (ข.28)\end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า $\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \le \boldsymbol{0}$ และนอกจากนั้นยังกล่าวได้ว่า

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} < \boldsymbol{0} \quad \text{ถ้า} \quad \vec{e}_i \ne 0$$

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \vec{e}_i(t) \equiv 0,\ \frac{d\vec{e}_i(t)}{dt} \equiv 0$$

แต่จากสมการค่าความผิดพลาด (3.1) $\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\boldsymbol{0}$ จะเป็นจริงได้ในกรณีที่มอเตอร์ทำงานที่ความเร็วเป็นศูนย์เท่านั้น ทั้งนี้เพราะเมื่อแทน $\vec{e}_i=0$ และ $\dfrac{d\vec{e}_i}{dt}=0$ ลงในสมการที่ (3.1) จะได้

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \dfrac{d\vec{e}_\lambda}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A_{11}}+G_1\boldsymbol{I}+G_2\boldsymbol{J} & \boldsymbol{A_{12}}\\ \boldsymbol{A_{21}}+H_1\boldsymbol{I}+H_2\boldsymbol{J} & -\varepsilon\boldsymbol{A_{12}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \vec{e}_\lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}/\varepsilon\\ -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}(-\boldsymbol{J}\hat{\vec{\lambda}}_r)(\hat{\omega}_m-\omega_m) \qquad (ข.29)$$

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A_{12}}\vec{e}_\lambda+\frac{\boldsymbol{J}\hat{\vec{\lambda}}_r}{\varepsilon}(\hat{\omega}_m-\omega_m) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{0}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{R_r}{L_r}\cdot\boldsymbol{I}+\omega_m\cdot\boldsymbol{J}\right)\vec{e}_\lambda+\frac{\boldsymbol{J}\hat{\vec{\lambda}}_r}{\varepsilon}(\hat{\omega}_m-\omega_m)$$

$$\boldsymbol{0}=\omega_m\vec{e}_\lambda+\hat{\vec{\lambda}}_r(\hat{\omega}_m-\omega_m) \qquad (ข.30)$$

$$\therefore\; \omega_m\vec{e}_\lambda=-\hat{\vec{\lambda}}_r(\hat{\omega}_m-\omega_m) \qquad (ข.31)$$

และจากสมการที่ (ข.30) จะคำนวณหาค่าอนุพันธ์ของค่าความผิดพลาดของฟลักซ์ในสมการที่สองของ (ข.29) ได้เป็น

$$\frac{d\vec{e}_\lambda}{dt}=\omega_m\vec{e}_\lambda+\hat{\vec{\lambda}}_r(\hat{\omega}_m-\omega_m)=0 \qquad (ข.32)$$

ดังนั้นจะได้ว่า $\vec{e}_\lambda$ เป็นเวกเตอร์คงที่

จากสมการที่ (ข.31) และ (ข.32) สามารถสรุปได้ว่า

1. ถ้า $\omega_m\neq 0$ เวกเตอร์ฟลักซ์ $\hat{\vec{\lambda}}_r$ ก็จะหมุนไปด้วยความถี่ $\omega_m$ และเนื่องจาก $\vec{e}_\lambda$ เป็นเวกเตอร์คงที่ ทำให้เทอม $\omega_m\vec{e}_\lambda$ เป็นเวกเตอร์คงที่ด้วย (ไม่หมุน) ดังนั้นสมการที่ (ข.31) นี้จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ $\vec{e}_\lambda=0$ และ $\hat{\omega}_m-\omega_m=0$ เท่านั้นซึ่งจะหมายความว่าตัวสังเกตเต็มอันดับแบบปรับตัวมีเสถียรภาพแบบลู่เข้า กล่าวคือ $\vec{e}_i=0,\ \vec{e}_\lambda=0,\ e_\omega=0$

2. ถ้า $\omega_m=0$ จากสมการที่ (ข.31) จะได้ว่า $\hat{\omega}_m=\omega_m$ เพราะ $\hat{\vec{\lambda}}_r\neq 0$แต่อาจจะ เป็นไปได้ที่ $\vec{e}_\lambda\neq 0$ เงื่อนไขการทำงานในสภาวะหยุดนิ่ง ( $\omega_m=0$ ) หรือการทำงานที่ไฟฟ้ากระแสตรงนี้ สะท้อนถึงการขาดเงื่อนไขการกระตุ้นอย่างต่อเนื่อง (Persistency of excitation (PE) condition) ที่ความเร็วเป็นศูนย์ ซึ่งเป็นจุดทำงานที่แรงเคลื่อนเหนี่ยวนำมีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง ทำให้เราไม่สามารถสังเกตข้อมูลของเวกเตอร์ฟลักซ์ผ่านข้อมูลของกระแสได้

กล่าวโดยสรุปคือตัวสังเกตเต็มอันดับแบบปรับตัวจะมีเสถียรภาพแบบลู่เข้าที่ทุกย่านความเร็ว ยกเว้นที่ความเร็วศูนย์ซึ่งจะมีคุณสมบัติแค่เสถียรเท่านั้นไม่ลู่เข้า

นอกจากนั้นแล้วยังพิสูจน์ได้อีกว่า เสถียรภาพในช่วงแคบ (Local stability) ก็สามารถยืนยันได้เช่นกัน โดยพิจารณาจาก เงื่อนไข $[\vec{e}_i \ \vec{e}_\lambda \ \xi]^T = \boldsymbol{0},\ e_\omega = 0\ ,\hat{\vec{\lambda}}_r = \hat{\vec{\lambda}}_{re}\ ,\omega_m = \hat{\omega}_m = \omega_e$ เมื่อ $\Delta$ คือ ค่าความแตกต่าง และ $e$ คือ จุดที่ทำงานสมดุล (Equilibrium point)

จากสมการค่าความผิดพลาด ก่อนทำให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นรอบจุดทำงาน ในสมการที่ (3.1) [2] , [20]

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\vec{e}_i\\ \vec{e}_\lambda\end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11}+G_1\boldsymbol{I}+G_2\boldsymbol{J} & A_{12}\\ A_{21}+H_1\boldsymbol{I}+H_2\boldsymbol{J} & -\varepsilon A_{12}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}(\omega_m)}\begin{bmatrix}\vec{e}_i\\ \vec{e}_\lambda\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}/\varepsilon\\ -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}}\left(-\boldsymbol{J}\hat{\vec{\lambda}}_r\right)\Delta e_\omega \\ \vec{e}_i &= \underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}}\begin{bmatrix}\vec{e}_i\\ \vec{e}_\lambda\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \qquad (ข.33)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = k_i \vec{e}_i^{\,T} J \hat{\vec{\lambda}}_r \quad , \quad e_\omega = \xi + k_p \Delta \vec{e}_i^{\,T} J \hat{\vec{\lambda}}_r \qquad (ข.34)$$

หลังจากการทำให้เป็นเชิงเส้นรอบจุดทำงานแล้ว จะได้ว่า [2]

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta\vec{e}_i\\ \Delta\vec{e}_\lambda\end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11}+G_{1e}\boldsymbol{I}+G_{2e}\boldsymbol{J} & A_{12}\\ A_{21}+H_{1e}\boldsymbol{I}+H_{2e}\boldsymbol{J} & -\varepsilon A_{12}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}(\omega_e)}\begin{bmatrix}\Delta\vec{e}_i\\ \Delta\vec{e}_\lambda\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}/\varepsilon\\ -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}}\left(-\boldsymbol{J}\hat{\vec{\lambda}}_{re}\right)\Delta e_\omega \\ \Delta\vec{e}_i &= \underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}}\begin{bmatrix}\Delta\vec{e}_i\\ \Delta\vec{e}_\lambda\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \qquad (ข.35)$$

โดยที่ $\boldsymbol{A}(\omega_e)$ และ $G_{1e}, G_{2e}, H_{1e}, H_{2e}$ เป็นอัตราขยายป้อนกลับในสมการที่ (ข.33) - (ข.34) ที่ผ่านการทำให้เป็น เชิงเส้นรอบจุดทำงานแล้ว จะได้

$$\frac{d\Delta\xi}{dt} = k_i \Delta\vec{e}_i^{\,T} J \hat{\vec{\lambda}}_{re} \quad , \quad \Delta e_\omega = \Delta\xi + k_p \Delta \vec{e}_i^{\,T} J \hat{\vec{\lambda}}_{re} \qquad (ข.36)$$

จะสังเกตเห็นได้ว่า สมการเชิงเส้นของค่าความผิดพลาดในสมการที่ (ข.35) - (ข.36) มีความคล้ายคลึงกับ สมการค่าความผิดพลาดเดิม (สมการที่ (ข.33) - (ข.34)) ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่า ระบบประมาณค่าความเร็วที่นำเสนอนี้มีเสถียรภาพ สอดคล้องตาม Global stability และ Local stability