บทที่ 3
ขั้นตอนการการคำนวณด้วยวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์

ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์ (Finite Element Method : FEM) เป็นวิธีที่ใช้ในการหาผลเฉลยแบบประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์หรือสมการอินทิกรัล ดังเช่น สมการสนามแม่เหล็ก เป็นต้น และเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เนื่องจากเป็นวิธีที่สามารถวิเคราะห์งานที่มีโครงสร้างซับซ้อน หรือรูปร่างที่มีลักษณะโค้งมนได้ดี อีกทั้งประสิทธิภาพและการประมวลผลที่สูงขึ้นของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันสามารถรองรับการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์ได้ นอกจากนี้ยังสามารถจำลองผลระบบที่มีความแตกต่างกันทางด้านวัสดุได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้คือ แกนเหล็ก ขดลวด และน้ำมันหม้อแปลง ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอขั้นตอนการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์ พร้อมทั้งประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์ เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวในหม้อแปลงจำหน่ายต่อไป

1. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็ก

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย เมื่อพิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายใน 2 มิติ ตามระนาบ xy ซึ่งแปรผันตามเวลา จะสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (37) โดยสมการจะปรากฏอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation :PDE) อันดับสอง และเมื่อพิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายใน 3 มิติ ตามระนาบ xyz ซึ่งแปรผันตามเวลา จึงสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (38) คือ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)-\sigma\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t}\right)+\mathrm{J}_0=0 \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right)-\sigma\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t}\right)+\mathrm{J}_0=0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} = j\omega A \tag{39}$$

เมื่อพิจารณาใน 2 มิติ แทนค่าสมการที่ (39) ลงในสมการที่ (37) และเมื่อพิจารณาใน 3 มิติ แทนค่าสมการที่ (39) ลงในสมการที่ (38) จึงได้สมการเป็น

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{y}}\right)-j\sigma\omega\mathrm{A}+\mathrm{J}_0=0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right)-j\sigma\omega\mathrm{A}+\mathrm{J}_0=0 \tag{41}$$

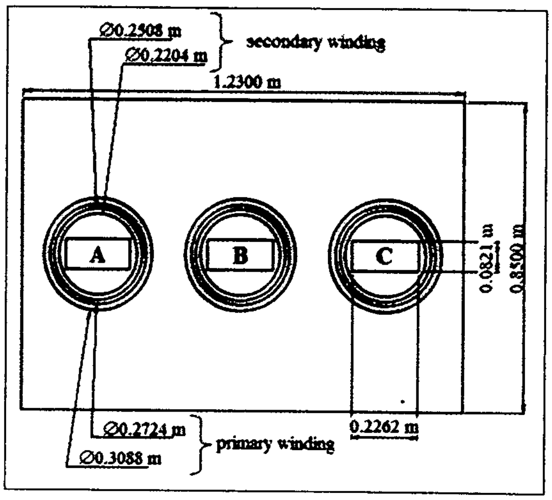
2. การคำนวณสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์

สืบเนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพื่อใช้ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็กของระบบหม้อแปลงจำหน่าย ดังแสดงในสมการที่ (40) สำหรับปัญหาในรูปแบบ 2 มิติและสมการที่ (4.14) สำหรับปัญหาในรูปแบบ 3 มิตินั้นหาผลเฉลยแม่นตรงได้ยาก ดังนั้นการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์จึงถูกนำมาใช้ในการนี้ ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนการดำเนินงานต่าง ๆ ดังนี้

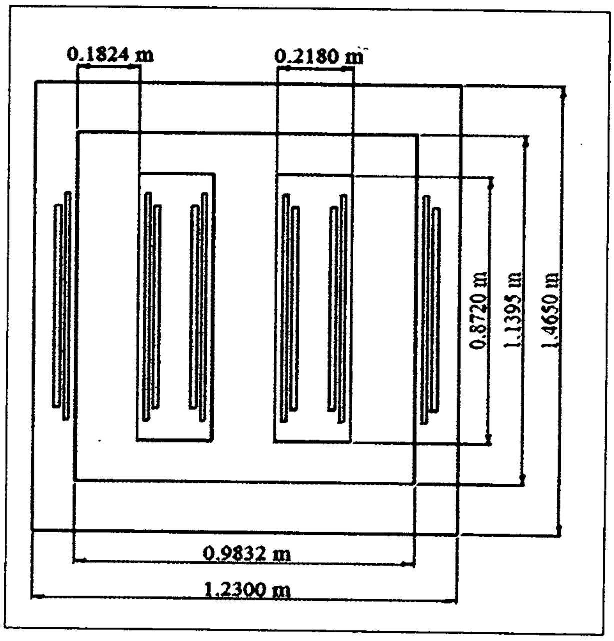
2.1 การออกแบบอิลิเมนท์ของพื้นที่ศึกษา

สำหรับงานวิจัยนี้ได้ศึกษาหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA, 22 kV/400 V มีการต่อแบบ Dy1 ซึ่งสามารถแสดงขนาดและพิกัดของหม้อแปลงจำหน่ายที่นำมาพิจารณาได้ดังรูปที่ 9 ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ศึกษาในรูปแบบ 3 มิติ เพื่อให้เห็นการจำลองผลสำหรับปัญหาที่รูปร่างมีความลึกหรือความหนา เช่น ในหม้อแปลงจำหน่ายจะสามารถแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กได้ทุกส่วนและทุกด้านของชิ้นงาน เป็นต้น การออกแบบกริดให้มีขนาดเล็กหรือใหญ่นั้น จะแปรเปลี่ยนตามความต้องการในการวิเคราะห์บริเวณพื้นที่หรือปริมาตรที่สนใจภายในส่วนต่าง ๆ ของระบบ

ขั้นตอนแรก เริ่มจากการแบ่งพื้นที่ของหม้อแปลงจำหน่ายออกเป็นอิลิเมนท์รูปสามเหลี่ยม (triangular elements) สำหรับปัญหาในแบบ 3 มิติจะเริ่มจากการแบ่งปริมาตรของหม้อแปลงจำหน่ายออกเป็นอิลิเมนท์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral elements) การออกแบบกริดเป็นอิลิเมนท์ต่าง ๆ ได้ใช้โปรแกรม Solid work โดยจะมีจำนวนโหนดและอิลิเมนท์ที่ใช้ภายในหม้อแปลงจำหน่ายเป็น 24,107 โหนด และ 132,961 อิลิเมนท์ ตามลำดับ สำหรับการออกแบบกริดของปัญหาในแบบ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยรูปที่ 10

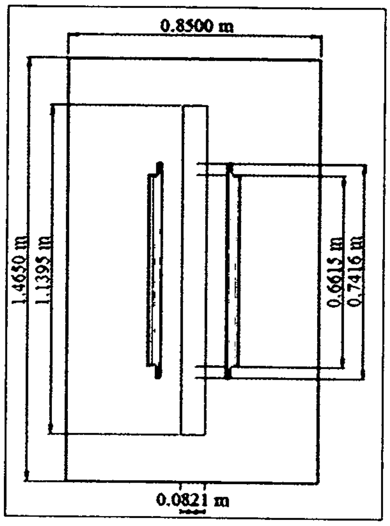


ก) ด้านบน



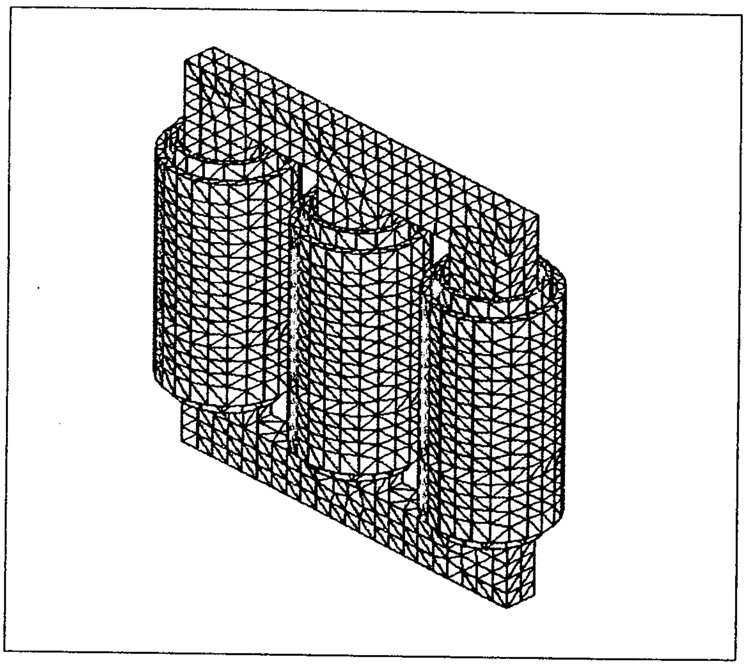
ข) ด้านหน้า

รูปที่ 9 พิกัดและขนาดของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA



ค) ด้านข้าง

รูปที่ 9 พิกัดและขนาดของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA (ต่อ)



รูปที่ 10 การแบ่งอิลิเมนท์ของหม้อแปลง ในแบบ 3 มิติ

2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนท์

กรณีที่พิจารณาระบบเป็นแบบ 3 มิติ โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลิเมนท์เป็นแบบเชิงเส้นจะได้

$$A(x,y,z) = A_1N_1 + A_2N_2 + A_3N_3 + A_4N_4 \tag{42}$$

โดยที่ N_n, $n = 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนท์ และ A_n, $n = 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4$ คือผลลัพธ์ของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กในแต่ละโหนด $1\ \ 2\ \ 3\ \ 4$ ของอิลิเมนท์ ซึ่งในกรณีอิลิเมนท์รูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อจะได้

$$N_n = \frac{1}{6V}(a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \qquad \text{เมื่อ } n = 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \tag{43}$$

โดยที่

$$a_1 = x_4(y_2z_3 - y_3z_2) + x_3(y_4z_2 - y_2z_4) + x_2(y_3z_4 - y_4z_3)$$
$$a_2 = x_4(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_4 - y_4z_1) + x_1(y_4z_3 - y_3z_4)$$
$$a_3 = x_4(y_1z_2 - y_2z_1) + x_2(y_4z_1 - y_1z_4) + x_1(y_2z_4 - y_4z_2)$$
$$a_4 = x_3(y_2z_1 - y_1z_2) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_1(y_3z_2 - y_2z_3)$$

$$b_1 = y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3)$$
$$b_2 = y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1)$$
$$b_3 = y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2)$$
$$b_4 = y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1)$$

$$c_1 = x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2)$$
$$c_2 = x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3)$$
$$c_3 = x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1)$$
$$c_4 = x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2)$$

$$d_1 = x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3)$$
$$d_2 = x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1)$$
$$d_3 = x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2)$$
$$d_4 = x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)$$

และ V คือ ปริมาตรของแต่ละอิลิเมนท์ หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธ์ดังนี้

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \tag{44}$$

2.3 การสร้างสมการอิลิเมนท์

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์ ซึ่งเป็นการสร้างสมการของอิลิเมนท์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาต่าง ๆ สำหรับปัญหาสนามแม่เหล็กของระบบ 3 มิติ มีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right)-j\sigma\omega\mathrm{A}+\mathrm{J}_0=0 \qquad (45)$$

ประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์เพื่อหาระบบสมการเชิงเส้น โดยอาศัยการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighting functions) ในปัจจุบันการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างถือเป็นวิธีที่ถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ และวิธีนี้ยังสามารถจำแนกออกไปได้อีก เช่น วิธีของกาเลอร์คิน (Galerkin) ซึ่งเมทริกซ์ที่เกิดขึ้นจากวิธีนี้ปกติแล้วจะมีความสมมาตร จึงก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้กับปัญหาขนาดใหญ่ การสร้างสมการของอิลิเมนท์ด้วยการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมีหลักการดังนี้ คือ การแทนค่าผลเฉลยโดยประมาณลงในสมการที่ (39) จะไม่ก่อให้เกิดค่าเท่ากับศูนย์ หากแต่จะมีค่าเท่ากับ R แทนดังแสดงด้วยสมการที่ (46)

$$\int_V W_n R\,dV=0 \quad , n = 1, 2, 3, 4 \qquad (46)$$

โดยเมื่อพิจารณาปัญหาเป็นแบบ 3 มิติจะได้เศษตกค้าง R ดังสมการที่ (47)

$$R=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathrm{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathrm{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathrm{z}}\right)-j\sigma\omega\mathbf{A}+\mathrm{J}_0 \qquad (47)$$

สำหรับอิลิเมนท์รูปทรงสี่หน้า จุดที่ไม่รู้ค่ามี 4 จุดซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสี่ ดังนั้นจึงต้องการ 4 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่รู้ค่า นั่นหมายถึงในสมการที่ (46) จะต้องมีค่า n = 1, 2, 3, 4 และโดยปกติจะเลือก $W_n = N_n$ ดังนั้นเมื่อแทนค่า R ด้วยสมการ (47) ลงในสมการที่ (46) จะได้

$$\int_V N_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right)-j\sigma\omega\mathbf{A}+\mathbf{J_0}\right)dV=0 \qquad (48)$$

$$\int_V N_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right)\right)dV - \int_V N_n(j\sigma\omega\mathbf{A})dV + \int_V \left(N_n\mathbf{J_0}\right)dV = 0 \qquad (49)$$

พิจารณาการอินทิเกรตทีละพจน์ของสมการที่ (49) สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วน (integrate by parts) โดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ดังนั้นจากสมการที่ (49) เมื่อ n = 1, 2, 3, 4 จึงสามารถเขียนได้เป็น

พิจารณาพจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (49) ซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอิลิเมนท์ Γ โดยค่าศักย์เชิงเวคเตอร์แม่เหล็กA ที่บริเวณขอบมีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงดังสมการที่ (50) ดังนั้นสมการที่ (49) จึงลดรูปเหลือดังสมการที่ (51) และเนื่องจากสมการที่ (51) มีทั้งหมด 4 สมการ เราสามารถเขียนสมการไฟไนท์อิลิเมนท์นี้ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (52)

$$\mathbf{A}(x,y,z)=0 \quad , \quad (x,y,z)\in\Gamma \qquad (50)$$

$$\int_V\left(\frac{\partial N_n}{\partial x}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}+\frac{\partial N_n}{\partial y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}+\frac{\partial N_n}{\partial z}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right)dV + \int_V N_n(j\omega\sigma\mathbf{A})dV = \int_V N_n\mathbf{J_0}dV \qquad (51)$$

$$\int_V\left(\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]_{4\times1}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}+\left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]_{4\times1}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}+\left[\frac{\partial N}{\partial z}\right]_{4\times1}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}\right)dV + \int_V [N]_{4\times1}(j\omega\sigma\mathbf{A})dV = \int_V [N]_{4\times1}\mathbf{J_0}dV \qquad (52)$$

และจากสมการที่ (41) จึงได้ลักษณะการกระจายของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A โดยประมาณในแต่อิลิเมนท์เป็น

$$A(x,y,z)=[N]_{1\times4}[A]_{4\times1}$$

ดังนั้น $\frac{\partial A}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]_{1\times4}[A]_{4\times1}$, $\frac{\partial A}{\partial y} = \left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]_{1\times4}[A]_{4\times1}$ และ $\frac{\partial A}{\partial z} = \left[\frac{\partial N}{\partial z}\right]_{1\times4}[A]_{4\times1}$

และสมการไฟไนท์อิลิเมนท์จึงกลายมาเป็น

$$\int_V \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]_{4\times1} \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]_{1\times4} + \left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]_{4\times1} \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]_{1\times4} + \left[\frac{\partial N}{\partial z}\right]_{4\times1} \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial N}{\partial z}\right]_{1\times4} \right) dV [A]_{4\times1} + \int_V [N]_{4\times1} j\omega\sigma [N]_{1\times4} d\Omega [A]_{4\times1} = \int_V [N]_{4\times1} \mathbf{J}_0 dV \quad (53)$$

หรือเขียนสมการไฟไนท์อิลิเมนท์สำหรับแต่ละอิลิเมนท์ที่ประกอบด้วย 4 สมการได้ดังนี้

$$[M+K]_{4\times4}\{A\}_{4\times1} = \{F\}_{4\times1} \quad (54)$$

เมทริกซ์ $[M]_{4\times4}$

จาก $$[M]_{4\times4} = \int_V [N]_{4\times1} j\omega\sigma [N]_{1\times4} dV \quad (55)$$

จากสมการที่ (42) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{1}{6V}(a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \qquad \text{เมื่อ } n = 1\ 2\ 3\ 4 \quad (56)$$

จากสมการที่ (56) และหากค่าสภาพนำทางไฟฟ้า σ มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (55) จึงกลายเป็น

$$[M]_{4\times4} = j\omega\sigma \int N_n N_m dxdydz \qquad n, m = 1\ 2\ 3\ 4 \quad (57)$$

สมการที่ (57) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบ (factorial formula) ในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรดังสมการที่ (58) โดยที่ $N_1 = L_1$ $N_2 = L_2$ $N_3 = L_3$ และ $N_4 = L_4$ จะได้

$$\int_v L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dv = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!}6V \tag{58}$$

จากสมการที่ (57) สามารถแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณีคล้ายในทำนองเดียวกันกับแบบ 2 มิติ ดังนั้นจากสมการที่ (57) เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ (58) จะได้

$$[M]_{4\times4} = \frac{\mathrm{j}\omega\sigma V}{20}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{59}$$

เมทริกซ์ $[K]_{4\times4}$

จาก$$[K]_{4\times4} = \int_V \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]_{4\times1} \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]_{1\times4} + \left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]_{4\times1} \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]_{1\times4} + \left[\frac{\partial N}{\partial z}\right]_{4\times1} \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial N}{\partial z}\right]_{1\times4} \right) dV \tag{60}$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายในดังสมการที่ (56) จึงได้

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} = \frac{b_n}{6V} \ , \quad \frac{\partial N_n}{\partial y} = \frac{c_n}{6V} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_n}{\partial z} = \frac{d_n}{6V} \qquad n = 1, 2, 3, 4 \tag{61}$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (61) ลงในสมการที่ (60) จะได้

$$[K]_{4\times4} = \frac{1}{\mu}\int \left(\frac{b_n}{6V}\frac{b_m}{6V} + \frac{c_n}{6V}\frac{c_m}{6V} + \frac{d_n}{6V}\frac{d_m}{6V} \right) dxdydz \qquad n, m = 1, 2, 3, 4 \tag{62}$$

$$= \frac{1}{36\mu V^2}\left(b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m\right)\int dxdydz$$

$$= \frac{1}{36\mu V}\left(b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m\right) \qquad n, m = 1, 2, 3, 4$$

$$[K]_{4\times4} = \frac{1}{36\mu V}\begin{bmatrix} b_1b_1+c_1c_1+d_1d_1 & b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2 & b_1b_3+c_1c_3+d_1d_3 & b_1b_4+c_1c_4+d_1d_4 \\ & b_2b_2+c_2c_2+d_2d_2 & b_2b_3+c_2c_3+d_2d_3 & b_2b_4+c_2c_4+d_2d_4 \\ & & b_3b_3+c_3c_3+d_3d_3 & b_3b_4+c_3c_4+d_3d_4 \\ Sym & & & b_4b_4+c_4c_4+d_4d_4 \end{bmatrix} \quad (63)$$

โหลดเวกเตอร์: $\{F\}_{4\times1}$

จาก $$\{F\}_{4\times1} = \int_V [N]_{4\times1}\, \mathbf{J_0}\, dV \quad (64)$$

ใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรทตลอดปริมาตรดังสมการที่ (58) จะได้

$$\{F\}_{4\times1} = \frac{\mathbf{J_0}V}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \quad (65)$$

2.4 การประกอบสมการอิลิเมนท์ขึ้นเป็นระบบ

ขั้นตอนนี้เป็นการนำสมการของแต่ละอิลิเมนท์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมของระบบ หากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนท์ย่อยซึ่งประกอบด้วย *n* จุดต่อ จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น *n* สมการ ดังแสดงได้ดังนี้

$$[M+K]_{n\times n}\{A\}_{n\times1} = \{F\}_{n\times1} \quad (66)$$

2.5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาค่าผลเฉลย

สำหรับขั้นตอนการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตในงานวิจัยนี้จะมีการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบ คือ บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลงจำหน่ายมีค่าศักย์เชิงเวคเตอร์แม่เหล็กเท่ากับศูนย์ (A=0)

2.6 การคำนวณค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการ

เมื่อทราบค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A ที่จุดต่อต่างๆ แล้ว จึงสามารถคำนวณหาค่าต่างๆ ที่สัมพันธ์กันต่อไปได้ โดยสนามแม่เหล็ก B สามารถคำนวณได้จากการเคิร์ลค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (B = $\nabla\times$A) ดังแสดงด้วยสมการ (67) ดังนั้นเมื่อพิจารณาหม้อแปลงใน 2 มิติ ตามระนาบพิกัด *xy* เมื่อมีกระแสตามแนวแกน z จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน *x* (B_x) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน *y* (B_y) รวมทั้งค่าสนามแม่เหล็กรวม ดังแสดงด้วยสมการที่ (68), (69) และ (70) ตามลำดับ

$$\mathrm{B} = \nabla \times \mathrm{A} = \left(\frac{\partial \mathrm{A_z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{A_y}}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial \mathrm{A_x}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{A_z}}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial \mathrm{A_y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A_x}}{\partial y}\right)k \tag{67}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k}{2\Delta_e} \tag{68}$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\left(\frac{b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k}{2\Delta_e}\right) \tag{69}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \tag{70}$$

เมื่อพิจารณาหม้อแปลงใน 3 มิติ ตามระนาบพิกัด xyz เมื่อมีกระแสในแนวแกน x และแนวแกน z จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน *x* (B_x) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน *y* (B_y) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน *z* (B_z) รวมทั้งค่าสนามแม่เหล็กรวม ดังแสดงด้วยสมการที่ (71), (72), (73) และ (74) ตามลำดับ

$$\mathrm{B_x} = \frac{\partial \mathrm{A_z}}{\partial y} = \frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{B_y} &= \frac{\partial \mathrm{A_x}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{A_z}}{\partial x} \\ &= \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3 + d_4 A_4}{6V} - \frac{b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4}{6V} \end{aligned} \tag{72}$$

$$\mathrm{B_z} = -\frac{\partial \mathrm{A_x}}{\partial y} = -\frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \tag{73}$$

$$\mathrm{B} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \tag{74}$$

ในบทนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย ประกอบกับคำนึงถึงคุณสมบัติต่าง ๆ ทางไฟฟ้า ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะปรากฏอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง การประยุกต์วิธีไฟไนท์อิลิเมนท์ เพื่อคำนวณหาค่า

สนามแม่เหล็กได้ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาเลอร์คิน โดยการคำนวณสนามแม่เหล็กจะพิจารณาระบบเป็นแบบความถี่เดียว รายละเอียดต่าง ๆ ในบทนี้ จะนำไปสู่การพัฒนาโปรแกรมไฟไนท์อิลิเมนท์เพื่อใช้เป็นโปรแกรมจำลองผลระบบที่จะได้กล่าวถึงในบทต่อไป