บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาเรื่องแบบจำลองการไหลแบบหนืดไม่อัดตัวที่ขึ้นกับเวลาโดยวิธีสมาชิกจำกัด ผู้ศึกษาได้ทบทวนความรู้พื้นฐานและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ตามลำดับดังนี้

1. ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์
2. ความรู้พื้นฐานทางด้านกลศาสตร์ของไหล
3. โปรแกรม FlexPDE
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

ในการศึกษาครั้งนี้มีแนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1.1 ทฤษฎีบทของกรีน (Green's Theorem)

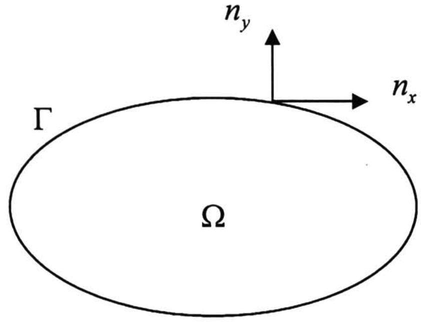
ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนโดเมน $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ให้ Γ เป็นเส้นโค้งปิดของโดเมน ดังภาพที่ 2.1 [13,20] จะได้

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v d\Omega + \int_{\Gamma} uvn_x d\Gamma \tag{2.1}$$

และ

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} v d\Omega + \int_{\Gamma} uvn_y d\Gamma \tag{2.2}$$

เมื่อ n_x และ n_y เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบของโดเมนในแนวแกน x และแนวแกน y ตามลำดับ



ภาพที่ 2.1 โดเมน ขอบของโดเมน และส่วนประกอบของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบของโดเมน

พิจารณาการหาปริพันธ์ที่เกิดจากการคูณฟังก์ชันน้ำหนักใน 2 มิติ $\int_{\Omega} w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)d\Omega$

จาก $$\int_{\Omega} w\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}d\Omega = -\int_{\Omega}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}d\Omega + \int_{\Gamma} w\frac{\partial u}{\partial x}n_x d\Gamma \quad (2.3)$$

และ $$\int_{\Omega} w\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}d\Omega = -\int_{\Omega}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}d\Omega + \int_{\Gamma} w\frac{\partial u}{\partial y}n_y d\Gamma \quad (2.4)$$

เนื่องจาก $$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n}n_x + \frac{\partial u}{\partial y}n_y \quad (2.5)$$

ดังนั้น $$\int_{\Omega} w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)d\Omega = -\int_{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\Omega + \int_{\Gamma} w\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma \quad (2.6)$$

1.2 นิยามเกรเดียนต์ (Gradient)

ให้ $\varphi(x,y,z)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกๆ จุด (x,y,z) ในบริเวณที่แน่นอนบริเวณหนึ่งของปริภูมิ (Space) แล้วเกรเดียนต์ของ φ เขียนแทนด้วย $\nabla\varphi$ หรือ $Grad\varphi$ [2] นิยามโดย

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

1.3 นิยามไดเวอร์เจนซ์ (Divergence)

ให้ $U(x,y,z) = u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$ นิยามและหาอนุพันธ์ได้ที่แต่ละจุด (x,y,z) ในบริเวณที่แน่นอนบริเวณหนึ่งของปริภูมิ (Space) แล้วไดเวอร์เจนซ์ของ U เขียนแทนด้วย $\nabla\cdot U$ หรือ $divU$ [2] นิยาม

$$\nabla\cdot U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

จากนิยามของเกรเดียนต์และนิยามไดเวอร์เจนซ์จะทำให้ได้ว่า

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

เรียกสัญลักษณ์ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ว่าตัวดำเนินการลาปลาสเซียน (Laplacian Operator)

1.4 นิยามเคิร์ล (Curl)

ถ้า $U(x,y,z)$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว เคิร์ลหรือการหมุน (Rotation) เขียนแทนด้วย $\nabla \times U$ หรือ $rotU$ [2] นิยามโดย

$$\nabla \times U = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \times (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & \mathrm{v} & \mathrm{w} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)\vec{k}$$

1.5 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor Theorem)

กำหนดให้ $f \in C^{n+1}[a,b]$ และให้ $x_0 \in [a,b]$ ดังนั้นทุกค่าของ $x \in (a,b)$ ให้ค่า $c = c(x)$ (ค่าของ c ขึ้นกับค่าของ x) นั้นขึ้นอยู่กับ x_0 และ x เช่น

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

โดยที่ $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

และ $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

1.6 แนวคิดและระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด

1.6.1 แนวคิดเกี่ยวกับระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด

ในการใช้ระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด เพื่อหาผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหา ขึ้นอยู่กับ 3 องค์ประกอบได้แก่ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations) เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) และลักษณะรูปร่าง (Geometry) ของปัญหา หากองค์ประกอบใดเปลี่ยนแปลงไป ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นก็จะมีการเปลี่ยนแปลงตามไปด้วยเช่นกัน ดังนั้นการวิเคราะห์จึงต้องมีความเข้าใจกับองค์ประกอบทั้ง 3 องค์ประกอบ รายละเอียดขององค์ประกอบทั้ง 3 มีดังต่อไปนี้

1) ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลนั้นประกอบด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่แสดงถึงสมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการอนุรักษ์พลังงาน โดยที่ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ล้วนประกอบด้วยพจน์ต่างๆที่อยู่ในรูปแบบเชิงอนุพันธ์ (Derivative Terms) เช่น ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลแบบหนืดที่ขึ้นกับเวลาใน 2 มิติ ประกอบด้วย

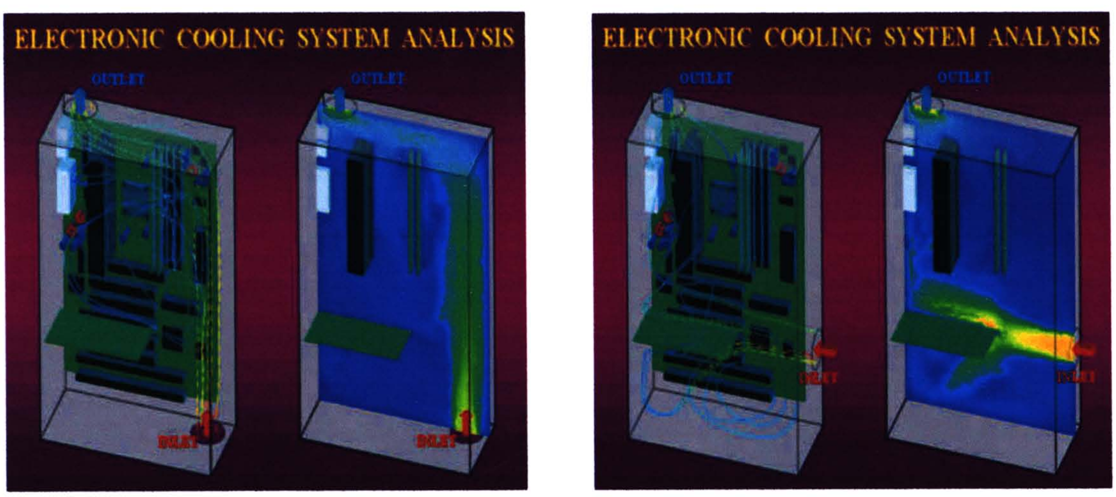
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{2.2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{2.3}$$

ในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังแสดงข้างต้นมีความซับซ้อนเนื่องจากเป็นระบบสมการที่อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) มีผลทำให้การประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

2) เงื่อนไขขอบเขต ในกระบวนการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้น เงื่อนไขขอบเขตเป็นองค์ประกอบที่สำคัญทำให้เกิดผลลัพธ์ที่มีลักษณะเปลี่ยนแปลงไปด้วย ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างกรณีศึกษาการออกแบบระบบระบายความร้อนภายในกล่องเครื่องคอมพิวเตอร์ 2 กรณี ดังแสดงในรูปที่ 2.2 กรณีแรกเมื่อติดตั้งพัดลมดูดอากาศด้านล่างของกล่องเครื่องคอมพิวเตอร์ ก่อให้เกิดลักษณะการไหลของอากาศภายในแตกต่างไปจากการติดตั้งพัดลมดูดอากาศด้านข้างของกล่องเครื่องคอมพิวเตอร์ในกรณีที่สอง เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตของการติดตั้งพัดลมในตำแหน่งที่แตกต่างกัน



ภาพที่ 2.2 แสดงขนาดความเร็วและทิศทางภายในเครื่องคอมพิวเตอร์

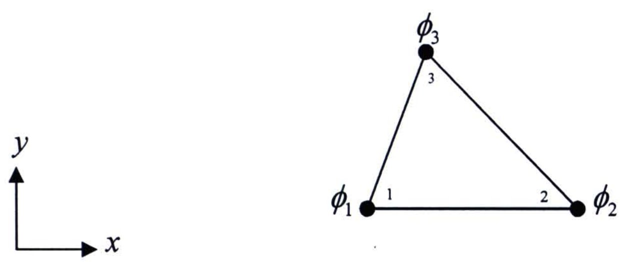
3) ลักษณะรูปร่าง รูปแบบของปัญหาด้านพลศาสตร์ของไหลโดยทั่วไปในงานวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ล้วนมีรูปร่างที่ซับซ้อน หากโดเมนมีการเปลี่ยนแปลงไปจะทำให้พฤติกรรมของการไหลที่เกิดขึ้นนั้นเปลี่ยนแปลงไปด้วย ถึงแม้ว่าระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและเงื่อนไขขอบเขตยังเป็นเช่นเดิม

1.6.2 ระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด (Finite Element Method)

วิธีการสมาชิกจำกัดประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ๆทั้งหมด 6 ขั้นตอน [1] ดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> แบ่งโดเมนออกมาเป็นสมาชิกย่อยๆ โดเมนที่แบ่งดังกล่าวอาจเป็นปัญหาที่แตกต่างกัน เช่นปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง (Elasticity Problem) ปัญหาอุณหภูมิและความร้อน (Thermal Problem) รวมทั้งปัญหาของการไหล (Fluid Problem)

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> การเลือกฟังก์ชันการประมาณค่าภายในของสมาชิก (Element Interpolation Functions) เช่นสมาชิกสามเหลี่ยม (Triangular Element) โดยสมาชิกดังกล่าวประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2, 3 ดังแสดงในภาพที่ 2.3 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งตัวไม่รู้ค่า (Nodal Unknowns) คือ ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3



ภาพที่ 2.3 สมาชิกแบบ 3 เหลี่ยมที่ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่า 3 จุดต่อ

ตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้อาจเป็นค่าการยืดหรือหดตัว (Displacement) นั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหานั้นๆซึ่งก็คือ หากทำปัญหาการยืดหยุ่นในของแข็งหรือเป็นค่าอุณหภูมิ หากทำปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรือไม่ก็อาจเป็นความเร็วของเหลวหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการไหล เป็นต้น ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนสมาชิกนี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันประมาณภายในและตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ดังนี้

$$\phi(x,y) = N_1(x,y)\phi_1 + N_2(x,y)\phi_2 + N_3(x,y)\phi_3 \tag{2.4}$$

โดยที่ $N_i(x,y)\phi_i$, i=1,2,3 คือฟังก์ชันการประมาณภายในสมาชิก สมการดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\phi(x,y) = \lfloor N_1(x,y) \;\; N_2(x,y) \;\; N_3(x,y) \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \lfloor N \rfloor_{1\times 3} \{\phi\}_{3\times 1} \tag{2.5}$$

โดยที่ $\lfloor N \rfloor$ คือ เมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณค่าการประมาณภายในสมาชิก

ϕ คือ เวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อของสมาชิกนั้น

ฟังก์ชันการประมาณภายในสมาชิกสามเหลี่ยมแบบเชิงเส้น [25] คือ

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \tag{2.6}$$

โดยที่ A แทนพื้นที่ของสมาชิกสามเหลี่ยม ซึ่งสามารถคำนวณได้จากตำแหน่งพิกัดที่จุดต่อทั้งสาม ดังนี้

$$A = \frac{1}{2}\left(x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right) \tag{2.7}$$

และค่าสัมประสิทธิ์ a_i, b_i, c_i ในสมการ (2.6) คำนวณได้ จาก

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> ทำการสร้างสมการของสมาชิก (Element Equations) ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residual) มีลำดับขั้นตอนหลักๆ ดังนี้

1) ให้สมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปเขียนอยู่ในรูป $L(\phi) = 0$

เมื่อ L คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (Difference Operator)

ϕ คือ ตัวแปรตามแม่นตรง

2) แทนผลเฉลยโดยประมาณลงในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้สมการ $L(\overline{\phi}) = R$

เมื่อ R คือค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น หรือเรียกว่าเศษตกค้าง (Residual)

ดังนั้นจากสมการ (2.5) จะเขียนได้

$$R = L(\overline{\phi}) = L\lfloor N_1(x,y) \;\; N_2(x,y) \;\; N_3(x,y) \rfloor \begin{Bmatrix} \overline{\phi_1} \\ \overline{\phi_2} \\ \overline{\phi_3} \end{Bmatrix} = L\sum_{i=1}^{m} N_i\overline{\phi_i} \tag{2.9}$$

3) คูณฟังก์ชันเศษตกค้างด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W (Weighting Function) แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมน โดยกำหนดผลลัพธ์ที่ได้ให้มีค่าเท่ากับศูนย์

$$\int_0^1 W_i R\, d\Omega = 0 \quad \text{โดยที่ i=1,2,3,...,m} \tag{2.10}$$

4) อินทิเกรตทีละส่วน (Integrate By Part)

$$\int_0^1 R d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} W_i L\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) d\Omega$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} (W_i,\ N_i,\ \phi_i) d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมน}} + \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} (W_i,\ N_i,\ \phi_i) d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขต}} \quad (2.11)$$

ขั้นตอนที่ 4 นำสมการแต่ละสมาชิกที่ได้มาประกอบกันก่อให้เกิดระบบสมการพร้อมกันขึ้น (System of Simultaneous Equations) ในรูปแบบดังนี้

$$\sum (element \text{ equations}): \quad [\mathrm{K}]_{\mathrm{sys}} \{\phi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \quad (2.12)$$

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) ลงในสมการของระบบจากนั้นจึงแก้ระบบสมการนั้นเพื่อหาคำตอบของ $\{\phi\}_{sys}$ อันประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ (Nodal Unknowns) ซึ่งอาจจะเป็นผลเฉลยของปัญหาของแต่ละลักษณะใดๆ เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 6 คำนวณหาค่าอื่นๆที่ต้องการทราบ เช่นเมื่อรู้ค่าความเร็วของการไหลก็สามารถนำไปคำนวณหาปริมาณอัตราการไหลทั้งหมดได้ เป็นต้น

1.7 เทคนิคการหาปริพันธ์เวลา (Time integral Technique)

เทคนิคการหาปริพันธ์เวลา (Time integral Technique) แบ่งออกได้เป็น 3 เทคนิคย่อยๆ [25] คือ

1.7.1 วิธีตามลำดับ (Forward Difference Method)

พิจารณาสมการ $[M]\left\{\dot{u}\right\}^t + [K]\{u\}^t = \{F\}^t$ (2.13)

เทอมที่มีอนุพันธ์เทียบเวลาคำนวณโดยใช้เทคนิควิธีตามลำดับจะได้

$$\left\{\dot{\mathrm{u}}\right\}^t = \frac{\{u\}^{t+\Delta t} - \{u\}^t}{\Delta t} \quad (2.14)$$

แทนค่าสมการ (2.14) ลงในสมการ (2.13) จะได้

$$[M]\{u\}^{t+\Delta t} = \Delta \mathrm{t}\left(\{F\}^t - [K]\{u\}^t\right) + [M]\{u\}^t \quad (2.15)$$

เทคนิคนี้มีเงื่อนไขของความเสถียร (Stable) โดยที่ค่าคลาดเคลื่อนที่เป็นโลคอล (Local Truncation Error) มีค่า $O\left(\Delta t^2\right)$ และค่าคลาดเคลื่อนที่เป็นโกลบอล (Global Truncation Error) มีค่า $O(\Delta t)$

1.7.2 วิธีโดยนัย (Backward Difference Method)

จากสมการ (2.13) แทนค่า t ด้วย $t+\Delta t$ ดังนี้

$$[M]\left\{\dot{u}\right\}^{t+\Delta t} + [K]\{u\}^{t+\Delta t} = \{F\}^{t+\Delta t} \tag{2.16}$$

เทอมที่มีอนุพันธ์เทียบเวลาคำนวณโดยใช้เทคนิควิธีโดยนัยจะได้

$$\left\{\dot{\mathrm{u}}\right\}^{t+\Delta t} = \frac{\{u\}^{t+\Delta t} - \{u\}^{t}}{\Delta t} \tag{2.17}$$

แทนค่าสมการ (2.17) ลงในสมการ (2.16) จะได้

$$\left([M] + \Delta t[K]\right)\{u\}^{t+\Delta t} = \Delta \mathrm{t}\{F\}^{t+\Delta t} + [M]\{u\}^{t} \tag{2.18}$$

เทคนิคนี้ไม่มีเงื่อนไขของความเสถียร (Stable) โดยที่ค่าคลาดเคลื่อนที่เป็นโลคอล (Local Truncation Error) มีค่า $O\left(\Delta t^{2}\right)$ และค่าคลาดเคลื่อนที่เป็นโกลบอล (Global Truncation Error) มีค่า $O\left(\Delta t\right)$

1.7.3 เทคนิควิธีแครง-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method)

ในการศึกษาปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของไหล กระบวนการคำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เกี่ยวข้องกับปัญหา โดยมีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้อง (Time Dependent) สามารถใช้วิธีการคำนวณโดยเทคนิควิธีของแครง-นิโคลสัน โดยหลักการของวิธีนี้คือใช้ค่าเฉลี่ยระหว่างการประมาณค่าแบบ วิธีตามลำดับ (Forward Difference Method) และวิธีโดยนัย (Backward Difference Method) ร่วมกันนั่นเองดัง จากสมการ (2.13) ใช้วิธีแครง-นิโคลสันโดยการแทนค่า t ด้วย $t+\Delta t$ ดังนี้

$$[M]\left\{\dot{u}\right\}^{t+\Delta t} + [K]\{u\}^{t+\Delta t} = \{F\}^{t+\Delta t} \tag{2.19}$$

เทอมที่มีอนุพันธ์เทียบเวลาคำนวณโดยใช้เทคนิควิธีของแครง - นิโคลสัน

$$\left\{\dot{\mathrm{u}}\right\}^{t+\Delta t} = \frac{\{u\}^{t+\Delta t} - \{u\}^{t}}{\Delta t} \tag{2.20}$$

เทอมอื่นๆหาค่าได้จากสูตร $$\{u\}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{2}\left(\{u\}^{t} + \{u\}^{t+\Delta t}\right) \tag{2.21}$$

และ $$\{F\}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{2}\left(\{F\}^{t} + \{F\}^{t+\Delta t}\right) \tag{2.22}$$

แทนค่าสมการ (2.20) - (2.22) ลงในสมการ (2.19) จะได้

$$\left(2[M] + \Delta \mathrm{t}\ [K]\right)\{u\}^{t+\Delta t} = \Delta \mathrm{t}\left(\{F\}^{t} + \{F\}^{t+\Delta t}\right) + \left(2[M] - \Delta t[K]\right)\{u\}^{t} \tag{2.23}$$

เทคนิคนี้ไม่มีเงื่อนไขของความเสถียร (Stable) ค่าคลาดเคลื่อนที่เป็นโกลบอล (Global Truncation Error) มีค่า $O\left(\Delta t^2\right)$

2. ความรู้พื้นฐานทางด้านกลศาสตร์ของไหล

สสารในโลกอาจสามารถแบ่งออกเป็น ของแข็ง และของไหล โดยของไหลจะสามารถนิยามได้เป็น "สสารที่เสียรูปอย่างต่อเนื่อง (ไหล) เมื่อมีความเค้นเฉือนมากระทำ" [18] ความแตกต่างระหว่างของแข็งและของไหล พิจารณาที่โครงสร้างโมเลกุล คือ ของแข็ง เช่น โลหะคอนกรีต มีโมเลกุลที่อยู่ชิดติดกัน มีแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลสูง ซึ่งทำให้ของแข็งสามารถคงรูปร่าง และไม่เปลี่ยนรูปง่ายๆ กรณีของเหลวเช่น น้ำ น้ำมัน มีระยะห่างระหว่างโมเลกุลมากกว่า มีแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลต่ำกว่า โมเลกุลมีอิสระในการเคลื่อนที่มากกว่า จึงสามารถเปลี่ยนรูปได้ง่าย สามารถเทลงในภาชนะบรรจุได้ หรือบังคับให้ไหลไปในท่อหรือรางได้ กรณีก๊าซ เช่น อากาศ ออกซิเจน ยิ่งมีระยะห่างระหว่างโมเลกุล และแรงยึดเหนี่ยวที่น้อยกว่าของเหลว จึงสามารถเปลี่ยนรูปร่างและถูกกดดันได้ง่าย

2.1 ความเค้นในของไหล

ความเค้นเฉือน (Shear Stress) หมายถึงความเค้นที่เกิดจากแรงที่ขนานกับพื้นที่ใดๆ ซึ่งพยายามที่จะทำให้วัตถุเลื่อน (Slide)

ความเค้นในแนวตั้งฉาก (Normal Stress) หมายถึงความเค้นที่เกิดจากแรงกระทำในแนวแกน (ตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดนั้น)

2.2 คุณสมบัติและนิยามที่เกี่ยวข้องกับของไหล

ความดัน (Pressure) คือแรงในแนวตั้งฉากของของไหลที่กระทำต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ แทนด้วยสัญลักษณ์ p ดังนั้น

$$p = \frac{F}{A}$$

โดยที่ F คือ แรงในแนวตั้งฉากของของไหล มีหน่วยเป็นนิวตัน (N)

A คือ พื้นที่ 1 ตารางหน่วยของของไหล มีหน่วยเป็นตารางเมตร (m^2)

ความหนาแน่น (Density) มีคำนิยามความหนาแน่นคือ มวลต่อหน่วยปริมาตร โดยทั่วไปมักนิยมให้สัญลักษณ์ความหนาแน่นเป็นตัวกรีก " ρ " ดังนั้น

$$\rho = \frac{m}{V}$$

โดยที่ m คือ มวลสารของของไหล มีหน่วยเป็นกิโลกรัม (kg)

V คือ ปริมาตรของของไหล มีหน่วยเป็นลูกบาศก์เมตร (m^3)

ในการไหลที่มีความเร็วต่ำจึงนิยมให้ความหนาแน่นของของไหลเป็นค่าคงตัว และเรียกการไหลที่มีความเร็วต่ำว่า การไหลที่อัดตัวไม่ได้

ความหนืด (Viscosity) เป็นคุณสมบัติอย่างหนึ่งของของไหลที่ต้านการเคลื่อนที่ของวัตถุ ของเหลวที่มีความหนาแน่นมากจะมีความหนืดมาก หรือเป็นความต้านทานต่อแรงเฉือนของของไหล จะได้

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}}$$

โดยที่ τ คือ ความเค้นของของไหล มีหน่วยเป็นนิวตันต่อตารางเมตร (N / m^2)

$\frac{du}{dy}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของของไหลต่อความลึกของของไหล

μ คือ ความหนืดเชิงพลวัตหรือความหนืดสัมบูรณ์ มีหน่วยเป็นนิวตันวินาทีต่อตารางเมตร ($N \cdot s / m^2$) โดยทั่วไปนิยมระบุเป็นความหนืดเชิงจลน์ (Kinematics Viscosity) แทนด้วยสัญลักษณ์ ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

เส้นของการไหล (Flowline) คือ วิถีทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคของของไหล

การไหลสม่ำเสมอ คือ การเคลื่อนที่ของอนุภาคของของไหลทุกๆ อนุภาคผ่านจุดที่กำหนดให้จุดหนึ่งและอยู่ในเส้นของการไหลเดียวกัน

เส้นกระแส (Streamline) คือ เส้นโค้งซึ่งเส้นสัมผัส ณ จุดใดๆ อยู่ในทิศของความเร็วของของไหล ณ จุดนั้น

2.3 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

1. วัตจะอยู่นิ่ง หรือคงสภาพการเคลื่อนที่อย่างสม่ำเสมอเป็นเส้นตรงนอกจากจะมีแรงลัพธ์ที่ไม่มีค่าเป็นศูนย์มากระทำ
2. ถ้าแรงลัพธ์ที่ไม่เป็นศูนย์มากระทำจะมีแรงเกิดขึ้นในทิศเดียวกับแรงลัพธ์นั้น

$$\sum F = ma$$

โดยที่ F คือ ขนาดของแรง มีหน่วยเป็นนิวตัน (N)

m คือ มวลสารของของไหล มีหน่วยเป็นกิโลกรัม (kg)

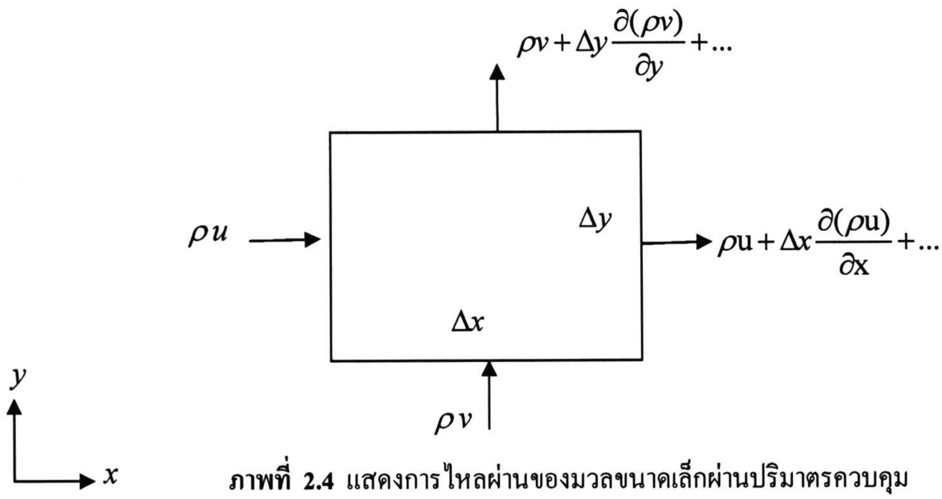
a คือ ความเร่ง มีหน่วยเป็นเมตร/วินาที^{2} (m / s^2)

3. ทุกแรกกิริยาต้องมีแรงปฏิกิริยาขนาดเท่ากันมากระทำในทิศทางตรงกันข้ามเสมอ

2.4 สมการพื้นฐานของการไหล

2.4.1 สมการอนุรักษ์มวล (Conservation of Mass Equation)

พิจารณาการไหลเข้า – ออก ของมวลผ่านปริมาตรควบคุมซึ่งมีขนาดเล็กมาก มีลักษณะเป็นลูกบาศก์ ใช้หลักของความต่อเนื่อง (Continuum) โดยที่ของไหลมีคุณสมบัติสม่ำเสมอ ดังแสดงในภาพที่ 2.4 พร้อมทั้งนำอนุกรมเทย์เลอร์อธิบายอัตราการไหลออกของมวลในปริมาตรควบคุม (Control Volume) [20]



ภาพที่ 2.4 แสดงการไหลผ่านของมวลขนาดเล็กผ่านปริมาตรควบคุม

การไหลในแนวแกน x

กำหนดให้อัตราการไหลเข้าสุทธิโดยมวลผ่านปริมาตรควบคุม คือ $(\rho u)_x\,\Delta y$ (2.24)

อัตราการไหลออกสุทธิโดยมวล คือ

$$\left((\rho u)_{x+\Delta x}\right)\Delta y=\left((\rho u)_x+\frac{\Delta x}{1!}\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2}+...\right)\Delta y \tag{2.25}$$

จากภาพที่ 2.4 ได้อัตราการเปลี่ยนแปลงมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ Δx และ Δy ในแนวแกน x

$$\Delta y\left[(\rho u)_{x+\Delta x}-(\rho u)_x\right]=\Delta y\left[\frac{\Delta x}{1!}\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2}+...\right] \tag{2.26}$$

การไหลในแนวแกน y

กำหนดให้อัตราการไหลเข้าสุทธิโดยมวลผ่านปริมาตรควบคุม คือ $(\rho v)_y\,\Delta x$ (2.27)

อัตราการไหลออกสุทธิโดยมวล คือ

$$\left((\rho v)_{y+\Delta y}\right)\Delta x=\left((\rho v)_y+\frac{\Delta y}{1!}\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{(\Delta y)^2}{2!}\frac{\partial^2(\rho v)}{\partial y^2}+...\right)\Delta x \tag{2.28}$$

จากภาพที่ 2.4 ได้อัตราการเปลี่ยนแปลงมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ Δx และ Δy ในแนวแกน y

$$\Delta x\left[(\rho v)_{y+\Delta y}-(\rho v)_y\right]=\Delta x\left[\frac{\Delta y}{1!}\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{(\Delta y)^2}{2!}\frac{\partial^2(\rho v)}{\partial y^2}+...\right] \tag{2.29}$$

ดังนั้นมวลรวมทั้งหมดที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ Δx และ Δy พิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ 1

$$=\Delta x\Delta y\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] \tag{2.30}$$

จากมวลของไหลมีค่า $\rho\Delta x\Delta y$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลที่ลดลงไปคือ $-\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Delta x\Delta y)$ จากกฎของการอนุรักษ์มวล เมื่อพิจารณาภายในปริมาตรควบคุม มวลในกรอบ นี้ต้องไม่เกิดการสูญหาย [9, 18] ดังนั้น

อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ Δx และ Δy ต้องเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลที่ลดลง นั่นคือ

$$\Delta x\Delta y\left[\frac{\partial(\rho \mathrm{u})}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\Delta x\Delta y\right)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \tag{2.31}$$

สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{U}\right)=0$$

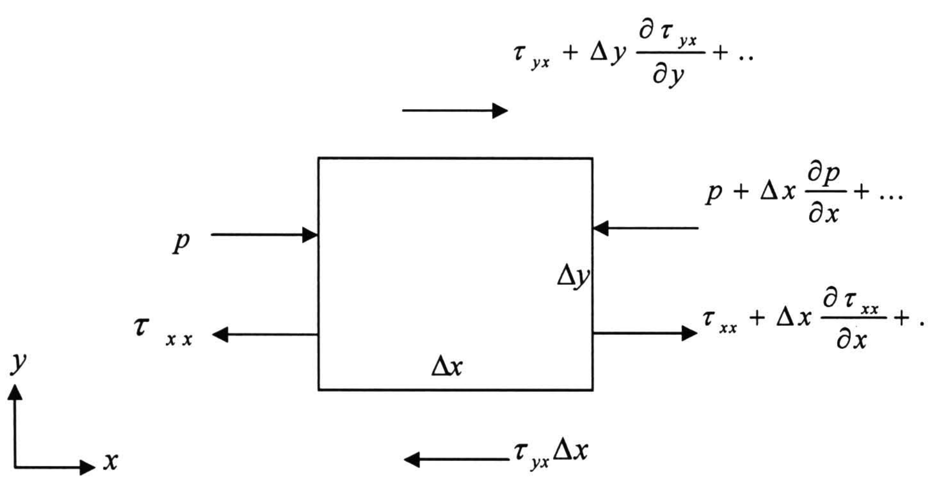
โดยที่ $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ และ $\vec{U}=u\vec{i}+v\vec{j}$ แทนค่าเวกเตอร์ความเร็วของการไหล

ในกรณีที่พิจารณาการไหลใน 2 มิติ และเป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ กล่าวคือความหนาแน่นมีค่าคงที่ตลอดการไหล จะได้สมการอนุรักษ์มวลหรือสมการต่อเนื่อง (Continuity Equation)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.32}$$

2.4.2 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentums Equation)

พิจารณาสมการอนุรักษ์โมเมนตัมโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ 1 [13,20] ดังนี้



ภาพที่ 2.5 แสดงแรงต่างๆที่กระทำบนผิวของก้อนของไหลซึ่งกำลังเคลื่อนที่ในแนวแกน x

พิจารณาในแนวแกน x

จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน (Newton's Second Law)

$$\sum F_x = ma_x \tag{2.33}$$

โดยที่ F_x คือแรงรวมในแนวแกน x มีหน่วยเป็นนิวตัน (N)

m คือมวลของก้อนของไหล มีหน่วยเป็นกิโลกรัม (Kg)

a_x คือความเร่งของมวลในแนวแกน x มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที[2] (m/s^2)

พิจารณาแรงรวมในแนวแกน x ประกอบด้วย

1. แรงเนื่องมาจากน้ำหนักของก้อนของไหลเอง (Body Force) ซึ่งเป็นแรงอันเนื่องมาจากแรงโน้มถ่วง กำหนดให้ f แทนน้ำหนักตัวของของไหลจะได้แรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักตัวของของไหลในทิศทางแกน x มีค่าเท่ากับ

$$\rho f_x(\Delta x \Delta y)$$

2. แรงกระทำที่ผิวบนก้อนของไหล (Surface Force) ซึ่งประกอบด้วย แรงอันเนื่องมาจากความดัน p , แรงเนื่องมาจากความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) τ_{xx} และความเค้นเฉือน (Shear Stress) τ_{yx} สำหรับความเค้นเฉือนนี้ตัวห้อยตัวแรก ระบุด้านที่ตั้งฉากกับ y ส่วนตัวห้อยหลังระบุทิศทางของความเค้นที่กระทำ y ดังนั้นแรงรวมที่กระทำที่ผิวต่างๆ ในทิศทางแกน x ของมวลก้อนนี้คือ

$$\left[p-\left(p+\Delta x\frac{\partial p}{\partial x}\right)\right]\Delta y+\left[\left(\tau_{xx}+\Delta x\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right)\Delta y-\tau_{xx}\Delta y\right]+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x-\tau_{yx}\Delta x$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\Delta x\Delta y+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\Delta y\Delta x \tag{2.34}$$

แรงรวมทั้งหมดในทิศทางแกน x

$$\sum F_x=\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right]\Delta x\Delta y+\rho f_x\Delta x\Delta y \tag{2.35}$$

กำหนดให้มวลของก้อนของไหลนี้คือ

$$m=\rho\Delta x\Delta y$$

สำหรับความเร่งของมวลในสมการ (2.33) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็ว U ของมวลที่กำลังเคลื่อนที่นั้นต่อเวลา ดังนั้น

$$a_x=\frac{DU}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.36}$$

จากสูตร $\sum F_x = ma_x$ จะได้

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right]\Delta x\Delta y+\rho f_x\Delta x\Delta y=\rho\Delta x\Delta y\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.37}$$

นำ $\Delta x\Delta y$ หารตลอดด้วยจะได้

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right]+\rho f_x=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (2.38)$$

ในทำนองเดียวกัน กฎข้อที่ 2 ของนิวตันในแนวแกน y ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกันดังนี้

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\right]+\rho f_x=\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (2.39)$$

2.4.3 สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equations)

สำหรับลักษณะการไหลแบบนิวโตเนียน ซึ่งมีคุณสมบัติว่าค่าความเค้นแปรผันตรงกับการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว [13] สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.40)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.41)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (2.42)$$

แทนค่าสมการ (2.40) – (2.42) ลงในสมการที่ (2.38) - (2.39) และจัดรูปใหม่จะได้สมการอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับกฎของการอนุรักษ์โมเมนตัม เรียกว่าสมการนาเวียร์-สโตกส์

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\rho f_x \quad (2.43)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\rho f_y \quad (2.44)$$

สำหรับการไหลแบบหนืดที่ไม่อัดตัวภายใต้การไหลที่ขึ้นกับเวลาโดยละทิ้งแรงเนื่องจากน้ำหนักตัวของของไหล ทำให้ได้สมการนาเวียร์-สโตกส์ลดรูปลงเป็น [13]

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (2.45)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (2.46)$$

3. โปรแกรม FlexPDE

ปัจจุบันได้มีการนำการแก้ปัญหาด้านกลศาสตร์ของไหลด้วยระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด โดยนำมาประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปทางคอมพิวเตอร์ FlexPDE 5.1.0s Student version โปรแกรมนี้จะทำการหาผลลัพธ์ด้วยการแก้องค์ประกอบหลักทั้ง 3 คือ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เงื่อนไขขอบเขต และลักษณะรูปร่าง โดยขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ประกอบด้วย 3 ขั้นตอนใหญ่ ๆ คือ

3.1 กระบวนการขั้นต้น เริ่มจากการสร้างโดเมนของการไหลที่ต้องการทำการวิเคราะห์ เป็นขั้นตอนนับตั้งแต่การสร้างเส้นขอบ (Line) การสร้างพื้นผิว (Surface) รวมไปถึงการสร้างปริมาตร (Volume) หากเป็นการไหลในสามมิติ จากนั้นจึงแบ่งโดเมนของการไหลที่ได้สร้างขึ้นนี้ออกเป็นสมาชิกเล็กๆ หรือออกเป็นตาราง (Mesh) ย่อย ๆ โดยเส้นตารางเหล่านี้ตัดกันที่จุดต่อ (Grid หรือ Node) แล้วจึงกำหนดคุณสมบัติของของไหล และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหานั้น ตามลำดับ

3.2 ขั้นตอนการวิเคราะห์แก้ปัญหา เป็นการนำระเบียบวิธีสมาชิกจำกัดมาประยุกต์เข้าแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาผลลัพธ์ของการไหลที่จุดต่อ อันได้แก่ ความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ เป็นต้น ขั้นตอนดังกล่าวจัดได้ว่าเป็นหลักการที่สำคัญเปรียบเสมือนหัวใจหลักของการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป

3.3 ขั้นตอนของกระบวนการขั้นท้าย เพื่อการแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากขั้นตอนของการวิเคราะห์การไหลนั้นโดยปกติจะมีจำนวนมากขึ้นอยู่กับจำนวนของจุดต่อ หากต้องการเข้าใจในพฤติกรรมของสภาวะการไหลจะต้องนำค่าเหล่านี้มานำเสนอพร้อมกันซึ่งสามารถทำได้ในหลายรูปแบบ ได้แก่ การพล็อตเวกเตอร์ ณ ทุก ๆ จุดต่อตลอดทั้งโดเมนของการไหลเพื่อแสดงขนาดและลักษณะทิศทางของการไหล การพล็อตด้วยเส้นชั้น (Contour Lines) เช่นตัวอย่างของการกระจายของอุณหภูมิในห้องโดยสารในรถยนต์ส่วนบุคคลในรูปที่ 2 เป็นต้น

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี 1986 ได้ศึกษาเกี่ยวกับวิธีสมาชิกจำกัดสำหรับปัญหาการไหลไม่คงที่โดยใช้สมการนาเวียร์-สโตกส์ เป็นปัญหาของของไหลที่อัดตัวไม่ได้ใน 2 มิติ โดยวิธีของออยเลอร์ (Euler Implicit) และวิธีของแครง-นิโคลสัน (Crank-Nicholson) [17] เป็นรูปแบบปัญหาของการไหลแทนการไหลผ่านบริเวณพื้นที่ราบ 2 บริเวณและการไหลในทรงกระบอกผลที่ได้พบว่าวิธีการหาผลเฉลยของออยเลอร์มีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีของแครง-นิโคสัน

ในปีต่อมา 2004 ได้ศึกษาเรื่องการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดแต่ไม่มีการอัดตัวด้วยระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะและเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดได้ [9] ได้มีการประดิษฐ์สมการสมาชิกจำกัดขึ้นจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ผลลัพธ์ที่ได้ทำให้การคำนวณจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ใช้เวลาในการคำนวณลดน้อยลงการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีรูปร่างซับซ้อนแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดสมาชิกโดยอัตโนมัติเข้ากับระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด

ในปี 2007 ได้ศึกษาถึงการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ต่ำ และค่าเลขเรย์โนลด์สูง (แต่ไม่ถึงกับเป็นการไหลแบบปั่นป่วน) [15] ด้วยระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด โดยมีการวิเคราะห์ในปัญหา 2 มิติ และ 3 มิติ ตัวอย่างที่แสดงถึงรูปแบบการไหลที่ใช้เลขเรย์โนลด์แตกต่างกัน

ในปี 2008 ได้มีการศึกษาถึงวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับปัญหาการไหลที่ไม่อัดตัวและขึ้นกับเวลาโดยใช้วิธีสมาชิกจำกัด [16] ในงานวิจัยนี้ได้พัฒนารูปแบบการหาคำตอบของระบบสมการใหม่โดยใช้ฟังก์ชันสายธาร (Stream Function) และฟังก์ชันความวน (Vorticity Function) ซึ่งผลที่ได้ที่นำมาแสดงเป็นตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงความก้าวหน้าและความมีประสิทธิภาพของการหาผลเฉลยที่พัฒนาขึ้นอีกรูปแบบหนึ่ง ในปีเดียวกันนี้ ได้ศึกษาถึงวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ ที่เปลี่ยนแปลงให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันสายธาร และฟังก์ชันความวนเรียกแบบจำลองนี้ว่า LBM (Lattice Boltzmann Model) [23]

เพื่อแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองที่ใช้มีประสิทธิภาพในการคำนวณหาผลเฉลยในระดับหนึ่ง และการศึกษาถึงขั้นตอนวิธีสมาชิกจำกัดสำหรับการไหลผ่านของของไหลอุดมคติที่อัดตัวไม่ได้ [3] โดยกำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงของศักย์ความเร็วที่ไหลเข้าผ่านขอบของโดเมนที่มีค่าต่างๆกัน และกำหนดโดเมนที่แตกต่างกันสำหรับ [12] ได้ศึกษาเรื่องวิธีสมาชิกจำกัดสำหรับปัญหาการไหลผ่านของของไหลในอุดมคติที่ไม่อัดตัว ด้วยโปรแกรม FlexPDE 5.01s Student Version โดยได้ศึกษาปัญหาการไหลของของไหลที่มีโดเมนเป็นลักษณะช่องทางเปิด และมีวัตถุรูปทรงเรขาคณิตขวางทิศทางการไหลอยู่ภายในโดเมน ผลการศึกษาจากการคำนวณเชิงตัวเลขใช้ โปรแกรม FlexPDE 5.01s Student Version พบว่าทิศทางของการไหลมีทิศทางเดียวกันตลอด เส้นสายธารการไหลจะเคลื่อนที่อย่างเป็นระเบียบ ความเร็วบริเวณส่วนโค้งจะมีมากกว่าบริเวณอื่นๆ และศักย์ความเร็วบริเวณไหลเข้าจะมีมากกว่าบริเวณที่ไหลออก

ในงานวิจัยเล่มนี้ได้นำเสนอแบบจำลองการไหลแบบหนืดไม่อัดตัวที่ขึ้นกับเวลาโดยวิธีสมาชิกจำกัดโดยมีการนำเสนอกราฟของความดัน สายธารการไหล และเวกเตอร์ของความเร็วในเวลาต่างๆที่แตกต่างกัน 3 เวลา และให้ค่าเลขเรย์โนลด์ที่แตกต่างกัน 2 ค่า ซึ่งตัวแปรที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นตัวแปรที่อยู่ในรูปแบบไร้มิติ