# บทที่ 1
# บทนำ

## 1. ความเป็นมาและความสำคัญ

การศึกษาถึงพฤติกรรมการไหลของของไหลเป็นการศึกษาเชิงประยุกต์ โดยมีการนำเอาทฤษฎีทางด้านกลศาสตร์ของไหล (Fluid Mechanic) มาประยุกต์ร่วมกับระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด (Finite Element Method) เพื่อทำการคำนวณแสดงการเปลี่ยนแปลงลักษณะการไหลต่างๆของของไหล การศึกษาทางด้านนี้สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการออกแบบ และแก้ไขปัญหาต่างๆ เช่น การไหลของน้ำดีและน้ำเสีย การไหลของน้ำในระบบท่อดับเพลิง การไหลของน้ำในแม่น้ำลำคลอง การไหลเวียนของเลือดในร่างกาย การระบายอากาศ การดูดควันหรือสารเคมีอันตรายออกจากพื้นที่ทำงาน เป็นต้น

ในปัจจุบันได้มีการศึกษาและพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) สำหรับอธิบายพฤติกรรมการไหลของของไหลขึ้นมามากมาย ซึ่งส่วนใหญ่ทำการศึกษาในสภาพการไหลที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา หรืออยู่ในสภาวะการไหลแบบคงตัว (Steady-State Flow) สามารถอธิบายการไหลของของไหลได้ในระดับหนึ่งเท่านั้น สำหรับแบบจำลองของการไหลที่ไม่คงตัวเป็นรูปแบบที่เข้าใจยาก และกระบวนการในการหาคำตอบนั้นเป็นสิ่งที่มีความซับซ้อนมากขึ้นกว่าเดิม ในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาสภาพปัญหาการไหลของของไหลที่ขึ้นกับเวลา (Time Dependent Flow) โดยพยายามทำการพัฒนาแบบจำลอง เพื่อให้มีความสามารถใช้งานได้อย่างกว้างขวางและรวดเร็วยิ่งขึ้น

สุดท้ายจะนำเอาผลการศึกษาที่ได้ในเชิงประยุกต์ดังกล่าว มาใช้ในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป ที่สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาเดียวกันโดยมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ที่แตกต่างกัน โปรแกรมที่ใช้คือโปรแกรม FlexPDE 5.1.0s Student Version เป็นโปรแกรมที่สามารถสร้างรูปทรงทางเรขาคณิตสำหรับปัญหาที่ซับซ้อน พร้อมทั้งมีการแก้ระบบสมการของระเบียบวิธีสมาชิกจำกัดโดยอัตโนมัติ การแสดงผลลัพธ์ในรูปแบบของกราฟิก ผลลัพธ์ที่ได้สามารถนำไปใช้ในทางปฏิบัติให้เกิดประโยชน์ได้ในอนาคตข้างหน้าต่อไป

## 2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

2.1 เพื่อศึกษาปัญหาการไหลของของไหลที่ขึ้นอยู่กับเวลา แบบมีความหนืดและอัดตัวไม่ได้

2.2 เพื่อศึกษาระเบียบวิธีสมาชิกจำกัดโดยนำมาประยุกต์ใช้ให้สอดคล้องกับสมการการไหล

2.3 เพื่อศึกษาปัญหาการไหลของของไหลโดยนำมาประยุกต์ใช้ให้เข้ากับโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป FlexPDE 5.1.0s Student Version สำหรับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข

## 3. ขอบเขตและข้อจำกัดของการวิจัย

3.1 รูปแบบการไหลที่ทำการศึกษาเป็นการไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา

3.2 ศึกษาการไหลแบบมีความหนืดและอัดตัวไม่ได้

3.3 ระบบสมการอนุพันธ์ย่อยที่ใช้ในการศึกษาอยู่ในรูปแบบไร้มิติ [20] โดยที่ $x, y, t \in \Omega$ แทนด้วย

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{1.2}$$

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.4}$$

โดยที่ $u$, $v$ แทนความเร็วในแนวแกน $x$ และ $y$ ตามลำดับ

$p$ แทนความดัน

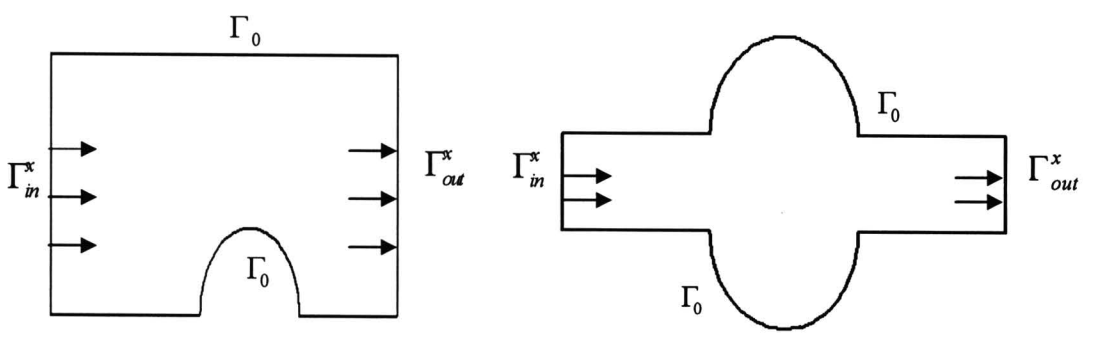
$t$ แทนเวลา

Re แทนเลขเรย์โนลด์

$\varphi$ แทนสายธารการไหล

3.4 โดเมนที่ใช้ในการศึกษามี 4 รูปแบบหลัก ดังนี้

3.4.1 โดเมนที่มีทางไหลเข้า 1 ทางไหลออก 1 ทาง




(1) (2)

**ภาพที่ 1.1** โดเมนที่มีทางไหลเข้า 1 ทางไหลออก 1 ทาง

(1) โดเมนที่ 1

(2) โดเมนที่ 2

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x,y,0)=1,\ v(x,y,0)=1,\ p(x,y,0)=10,\ \varphi(x,y,0)=1$$

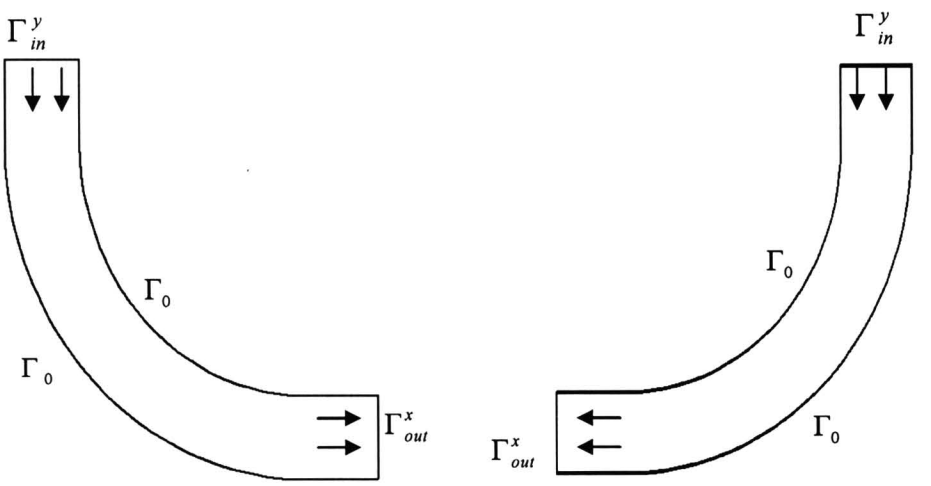
เงื่อนไขขอบเขต

$\Gamma_0$ แทนบริเวณขอบของโดเมน มีเงื่อนไข $u=0,\ v=0,\ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}}=0, \varphi=0$

$\Gamma_{in}^{x}$ แทนบริเวณทางไหลเข้าในแนวแกน $x$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0,\ v=0,\ p=10,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

$\Gamma_{out}^{x}$ แทนบริเวณทางไหลออกในแนวแกน $x$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0,\ v=0,\ p=0,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

3.4.1 โดเมนที่มีทางไหลเข้า 1 ทางไหลออก 1 ทาง (ต่อ)




(3) (4)

**ภาพที่ 1.1** โดเมนที่มีทางไหลเข้า 1 ทางไหลออก 1 ทาง (ต่อ)

(3) โดเมนที่ 3

(4) โดเมนที่ 4

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x,y,0)=1,\ v(x,y,0)=1,\ p(x,y,0)=10,\ \varphi(x,y,0)=1$$

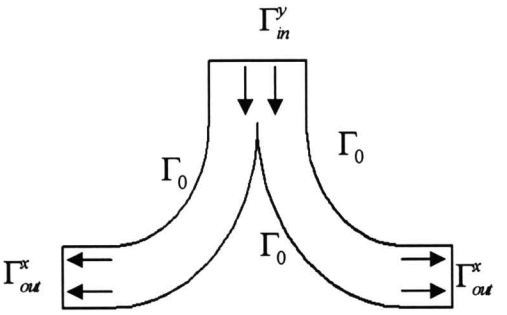
เงื่อนไขขอบเขต

$\Gamma_0$ แทนบริเวณขอบของโดเมน มีเงื่อนไข $u=0,\ v=0,\ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}}=0, \varphi=0$

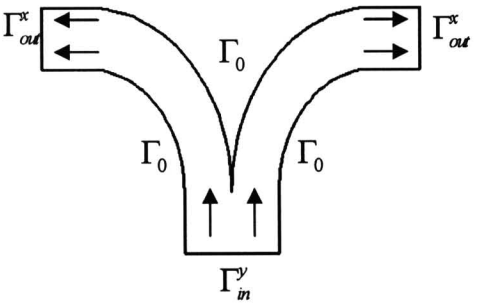
$\Gamma_{in}^{y}$ แทนบริเวณทางไหลเข้าในแนวแกน $y$ มีเงื่อนไข $u=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}=0,\ p=10, \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

$\Gamma_{out}^{x}$ แทนบริเวณทางไหลออกในแนวแกน $x$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0,\ v=0,\ p=0,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

3.4.2 โดเมนที่มีทางไหลเข้า 1 ทางไหลออก 2 ทาง




(1)




(2)

**ภาพที่ 1.2** โดเมนที่มีทางไหลเข้า 1 ทางไหลออก 2 ทาง

(1) โดเมนที่ 1

(2) โดเมนที่ 2

เงื่อนไขเริ่มต้น

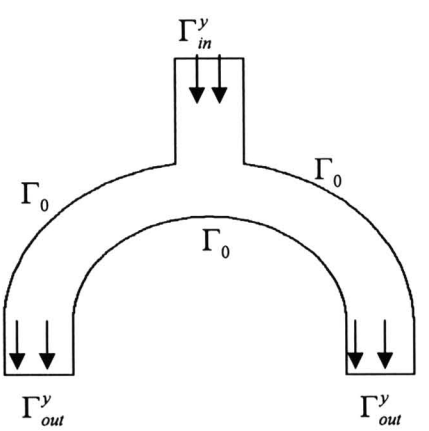
$$u(x,y,0)=1,\ v(x,y,0)=1,\ p(x,y,0)=10,\ \varphi(x,y,0)=1$$

เงื่อนไขขอบเขต

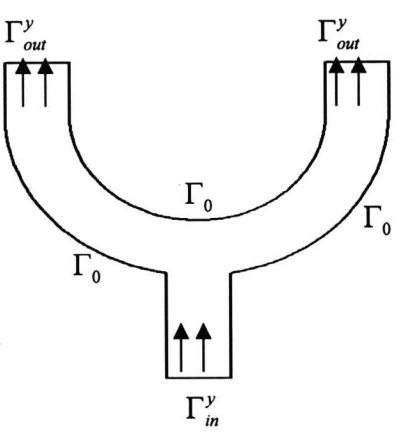
$\Gamma_0$ แทนบริเวณขอบของโดเมน มีเงื่อนไข $u=0,\ v=0,\ \dfrac{\partial p}{\partial \bar{n}}=0, \varphi=0$

$\Gamma_{in}^{y}$ แทนบริเวณทางไหลเข้าในแนวแกน $y$ มีเงื่อนไข $u=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial \bar{n}}=0,\ p=10,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}}=0$

$\Gamma_{out}^{x}$ แทนบริเวณทางไหลออกในแนวแกน $x$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}}=0,\ v=0,\ p=0,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}}=0$




( 3 )




(4)

**ภาพที่ 1.2** โดเมนที่มีทางไหลเข้า 1 ทางไหลออก 2 ทาง (ต่อ)

(3) โดเมนที่ 3

(4) โดเมนที่ 4

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x,y,0)=1,\ v(x,y,0)=1,\ p(x,y,0)=10,\ \varphi(x,y,0)=1$$

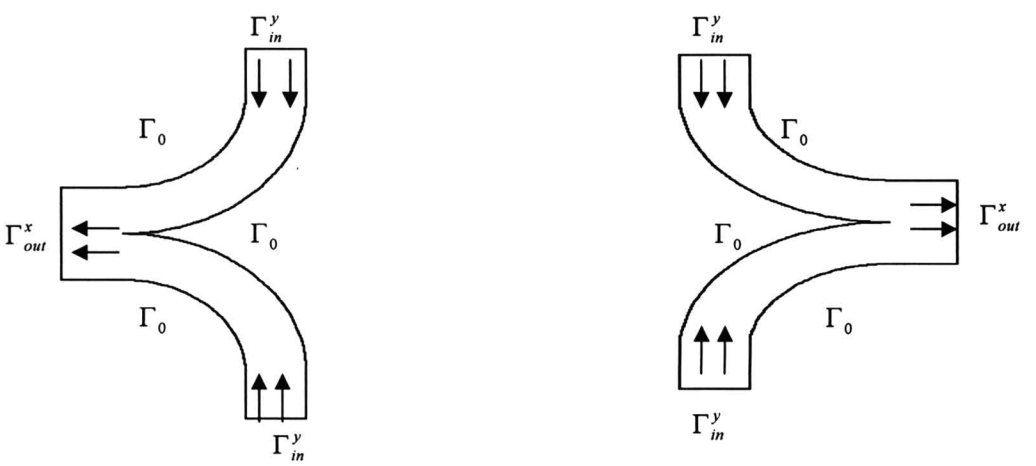
เงื่อนไขขอบเขต

$\Gamma_0$ แทนบริเวณขอบของโดเมน มีเงื่อนไข $u=0,\ v=0,\ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}}=0, \varphi=0$

$\Gamma_{in}^{y}$ แทนบริเวณทางไหลเข้าในแนวแกน $y$ มีเงื่อนไข $u=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}=0,\ p=10,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

$\Gamma_{out}^{y}$ แทนบริเวณทางไหลออกในแนวแกน $y$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}=0,\ u=0,\ p=0,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

3.4.3 โดเมนที่มีทางไหลเข้า 2 ทางไหลออก 1 ทาง




**ภาพที่ 1.3** โดเมนที่มีทางไหลเข้า 2 ทางไหลออก 1 ทาง

(1) โดเมนที่ 1

(2) โดเมนที่ 2

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x,y,0)=1,\ v(x,y,0)=1,\ p(x,y,0)=10,\ \varphi(x,y,0)=1$$

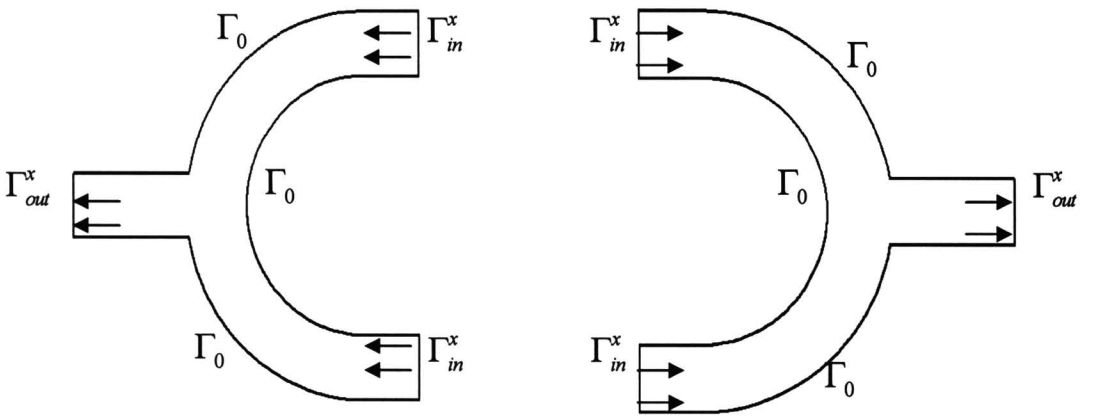
เงื่อนไขขอบเขต

$\Gamma_0$ แทนบริเวณขอบของโดเมน มีเงื่อนไข $u=0,\ v=0,\ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}}=0, \varphi=0$

$\Gamma_{in}^{y}$ แทนบริเวณทางไหลเข้าในแนวแกน $y$ มีเงื่อนไข $u=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}=0,\ p=10,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

$\Gamma_{out}^{x}$ แทนบริเวณทางไหลออกในแนวแกน $x$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0,\ v=0,\ p=0,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

3.4.3 โดเมนที่มีทางไหลเข้า 2 ทางไหลออก 1 ทาง (ต่อ)




**ภาพที่ 1.3** โดเมนที่มีทางไหลเข้า 2 ทางไหลออก 1 ทาง (ต่อ)

(3) โดเมนที่ 3

(4) โดเมนที่ 4

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x,y,0)=1,\ v(x,y,0)=1,\ p(x,y,0)=10,\ \varphi(x,y,0)=1$$

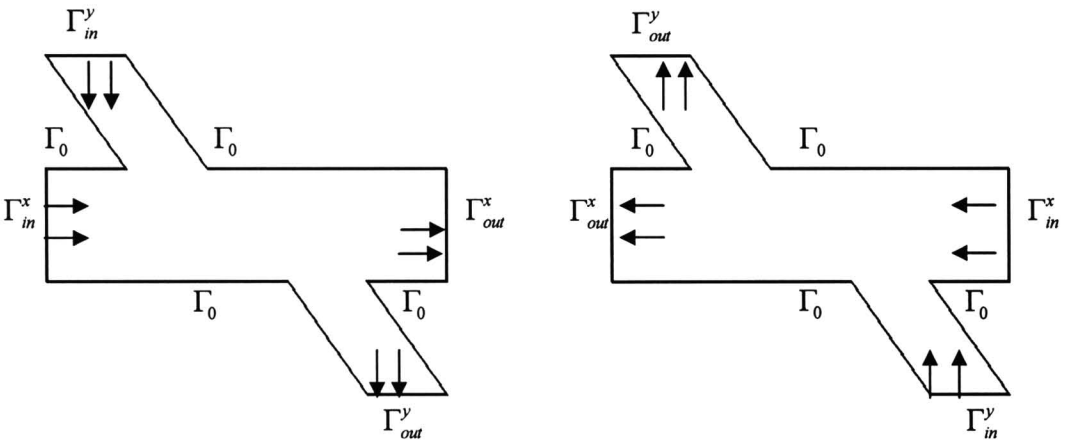
เงื่อนไขขอบเขต

$\Gamma_0$ แทนบริเวณขอบของโดเมน มีเงื่อนไข $u=0,\ v=0,\ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}}=0, \varphi=0$

$\Gamma^x_{in}$ แทนบริเวณทางไหลเข้าในแนวแกน $x$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0,\ v=0,\ p=10,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

$\Gamma^x_{out}$ แทนบริเวณทางไหลออกในแนวแกน $x$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0,\ v=0,\ p=0,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

3.4.4 โดเมนที่มีทางไหลเข้า 2 ทางไหลออก 2 ทาง




(1) (2)

**ภาพที่ 1.4** โดเมนที่มีทางไหลเข้า 2 ทางไหลออก 2 ทาง

(1) โดเมนที่ 1

(2) โดเมนที่ 2

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x,y,0)=1,\ v(x,y,0)=1,\ p(x,y,0)=10,\ \varphi(x,y,0)=1$$

เงื่อนไขขอบเขต

$\Gamma_0$ แทนบริเวณขอบของโดเมน มีเงื่อนไข $u=0,\ v=0,\ \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}}=0, \varphi=0$

$\Gamma^x_{in}$ แทนบริเวณทางไหลเข้าในแนวแกน $x$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0,\ v=0,\ p=10,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

$\Gamma^y_{in}$ แทนบริเวณทางไหลเข้าในแนวแกน $y$ มีเงื่อนไข $u=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}=0,\ p=10,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

$\Gamma^x_{out}$ แทนบริเวณทางไหลออกในแนวแกน $x$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0,\ v=0,\ p=0,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

$\Gamma^y_{out}$ แทนบริเวณทางไหลออกในแนวแกน $y$ มีเงื่อนไข $\dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}=0,\ u=0,\ p=0,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}=0$

## 4. คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

4.1 ของไหล (Fluid) คือ สสารใดๆที่สามารถเปลี่ยนรูปร่างได้อย่างต่อเนื่องภายใต้การกระทำของความเค้นเฉือนหนึ่งๆ แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือของเหลวและก๊าซ ในการศึกษาครั้งนี้ศึกษาของไหลที่เป็นของเหลว

4.2 การไหลที่อัดตัวไม่ได้ (Incompressible Flows) คือการไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงปริมาตรน้อยมากเมื่อความดันมีการเปลี่ยนแปลง หมายความถึงของเหลว

4.3 การไหลที่ขึ้นกับเวลา (Time Dependent Flows) หมายถึงการไหลของของไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ในการศึกษาครั้งนี้นำเสนอ 3 เวลา คือ 0.05, 0.50 และ 1.00

4.4 เลขเรย์โนลด์ (Reynold's Number) เป็นตัวเลขที่ใช้แสดงถึงลักษณะการไหล มีความสัมพันธ์แบบผกผันกับความหนืด $\left(\mathrm{Re}=\frac{\rho u_a L}{\mu}\right)$ ในกรณีที่ให้ความเร็วคงที่ตลอดเวลา ของไหลที่มีเลขเรย์โนลด์สูงจะมีความหนืดน้อย และในทางกลับกันของไหลที่มีค่าเรย์โนลด์ต่ำจะมีความหนืดสูง เลขเรย์โนลด์ที่ใช้พิจารณาในการศึกษาครั้งนี้แบ่งเป็น 2 ค่าคือ เลขเรย์โนลด์ต่ำกำหนดให้เป็น 10 และเลขเรย์โนลด์สูงกำหนดให้เป็น 100

## 5. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

5.1 สามารถสร้างแบบจำลองสำหรับปัญหาการไหลของของไหลที่ขึ้นอยู่กับเวลาแบบมีความหนืดไม่อัดตัว

5.2 สามารถนำระเบียบวิธีสมาชิกจำกัดมาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ใช้อธิบายพฤติกรรมการไหลได้

5.3 สามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข และใช้เป็นแนวทางในการศึกษาวิจัยเรื่องอื่นได้