บทที่ 6
ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในบทที่ 6 ของวิทยานิพนธ์จะนำเสนอผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาศักย์ของปัญหาปัวซง โดยใช้วิธีสมาชิกกำลังสอง (QBEM) เปรียบเทียบกับวิธีสมาชิกเชิงเส้น (LBEM) และผลเฉลยแม่นตรง (Exact)

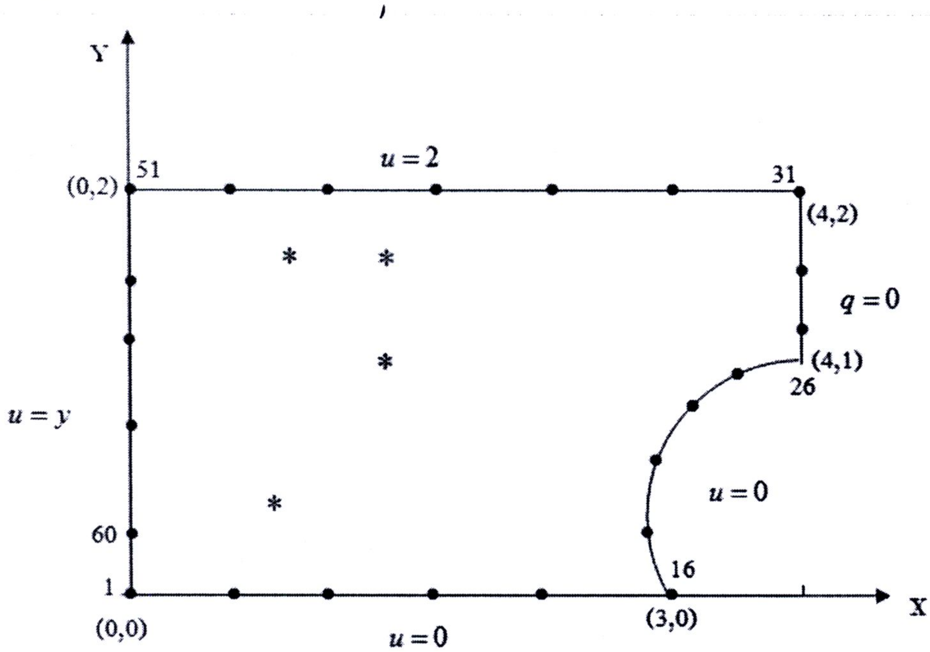
ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาปัญหาศักย์ ที่ขอบมีลักษณะ 2 ส่วนประกอบด้วย ส่วนที่เป็นสี่เหลี่ยม และส่วนที่เป็นเส้นโค้งวงกลม

$$\nabla^2 u = 0$$

โดยมีเงื่อนไขขอบดังนี้

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ บน } y = 0 \\ u &= 0 \text{ บน } (x-4)^2 + y^2 = 1, y \geq 0 \\ q &= 0 \text{ บน } x = 4, 1 < y < 2 \\ u &= 2 \text{ บน } y = 2 \\ u &= y \text{ บน } x = 0 \end{aligned}$$

โดยกำหนดจุดขอบ 60 จุด และจุดภายใน 4 จุด ดังภาพที่ 6.1

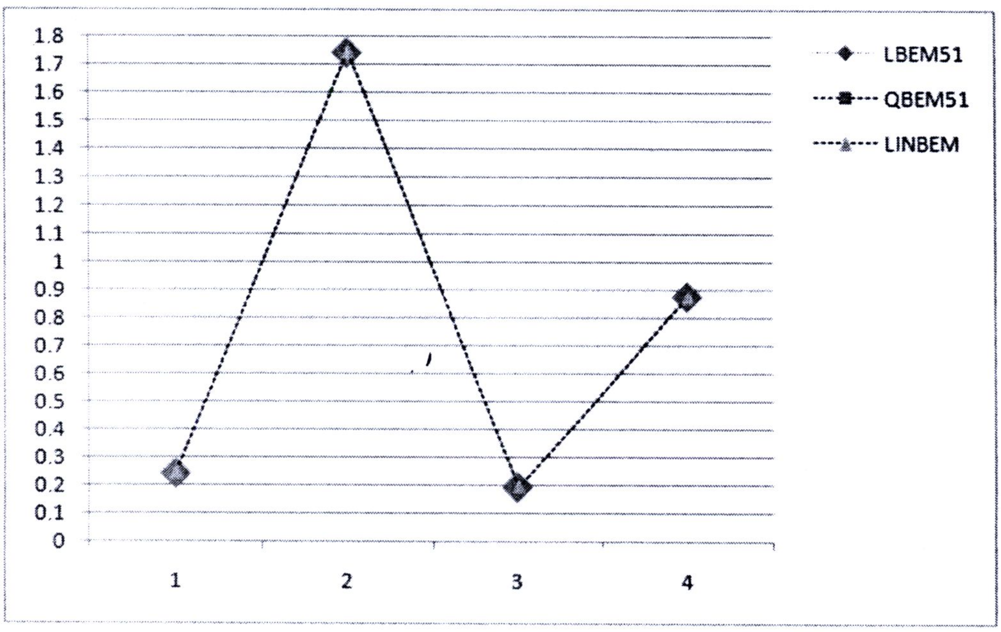


ภาพที่ 6.1 การประมาณค่าจุดภายใน 4 จุด ของปัญหาศักย์ เมื่อ • เป็นตำแหน่งจุดขอบ และ $*$ เป็นตำแหน่งจุดภายใน

เนื่องจากเราไม่มีผลเฉลยแม่นตรง ดังนั้นในการหาผลเฉลยของจุดภายใน ใช้การคำนวณ QBEM51 เปรียบเทียบกับ LBEM51 และ LINBEM (Toutip, 2001) ที่ใช้การคำนวณโดยวิธีเชิงเส้น

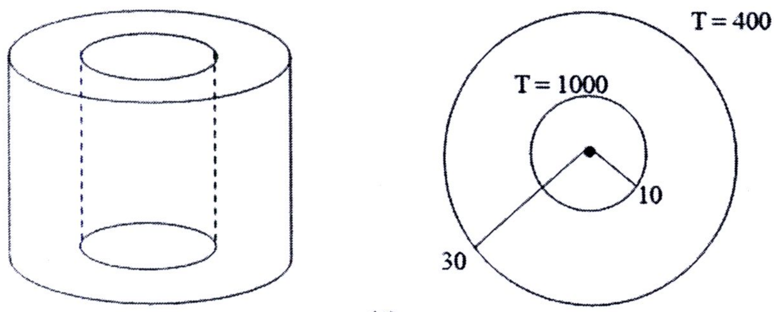
ตารางที่ 6.1 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายใน จากตัวอย่างที่ 1

จุดภายใน	LBEM51	QBEM51	LINBEM
(0.75,0.25)	0.2450	0.2458	0.2457
(0.75,1.75)	1.7399	1.7459	1.7457
(2.25,0.25)	0.1979	0.1959	0.1960
(2.25,1.00)	0.8786	0.8748	0.8750

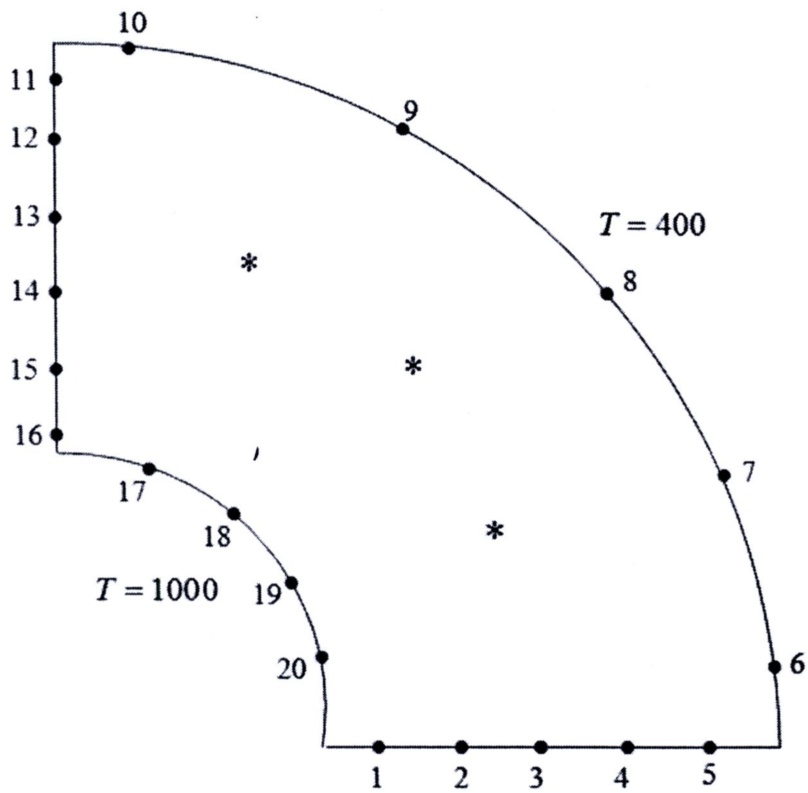


ภาพที่ 6.2 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาปัญหาศักย์ ในรูปแบบการส่งความร้อนเข้าไปในรู้ของทรงกระบอกที่รัศมี 10 และ 30 ดังภาพที่ 5.2(1) และมีเงื่อนไขขอบตามภาพที่ 5.2(2)



(1)



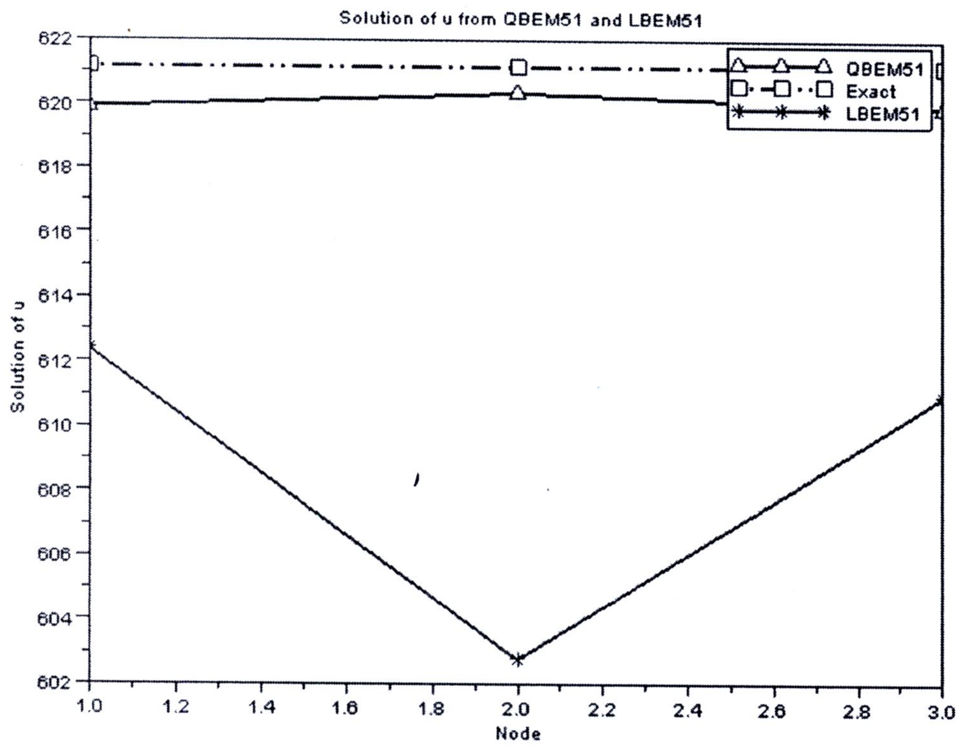
(2)

ภาพที่ 6.3 การประมาณค่าจุดภายใน 3 จุด ของปัญหาศักย์ เมื่อ • เป็นตำแหน่งจุดขอบ และ * เป็นตำแหน่งจุดภายใน

การคำนวณจะใช้จุดขอบจำนวน 20 จุด และจุดภายในจำนวน 3 จุด ผลเฉลยแม่นตรงที่ตำแหน่งรัศมี 20 คือ T(20) = 621.1442 (จักรี ภฦชา, 2552)

ตารางที่ 6.2 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายใน จากตัวอย่างที่ 2

จุดภายใน	LBEM52	QBEM52	Exact
(18.477,7.6530)	612.3795	619.9075	621.1442
(14.142, 14.142)	602.7568	620.3474	621.1442
(7.6530, 18.477)	610.9680	619.9075	621.1442



ภาพที่ 6.4 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 2

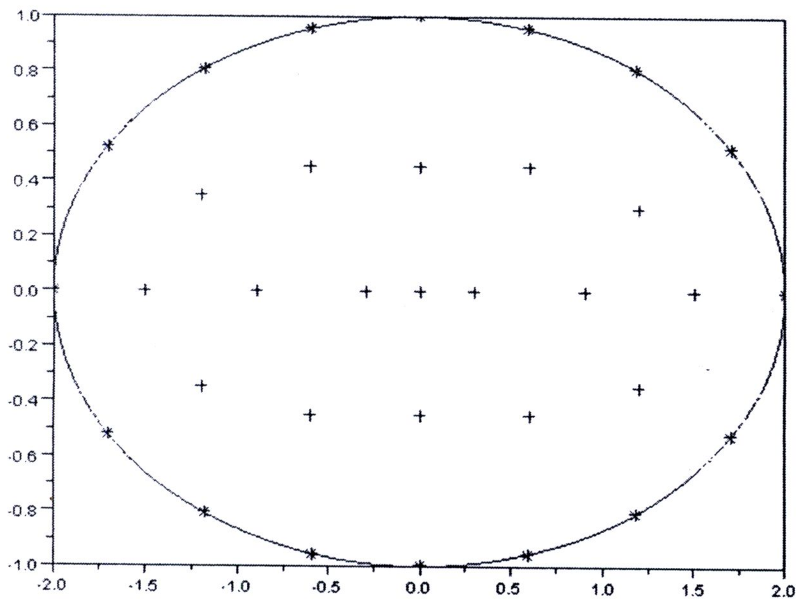
ตัวอย่างที่ 3 $\nabla^2 u = b(x,y)$ **ในกรณี** $b(x,y) = -2$

โดยโดเมนอยู่บนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเป็น $u = 0$ ดังภาพที่ 6.5

$$\nabla^2 u = -2$$

ซึ่งมีผลเฉลยแม่นตรงคือ (Kaennakham, 2004)

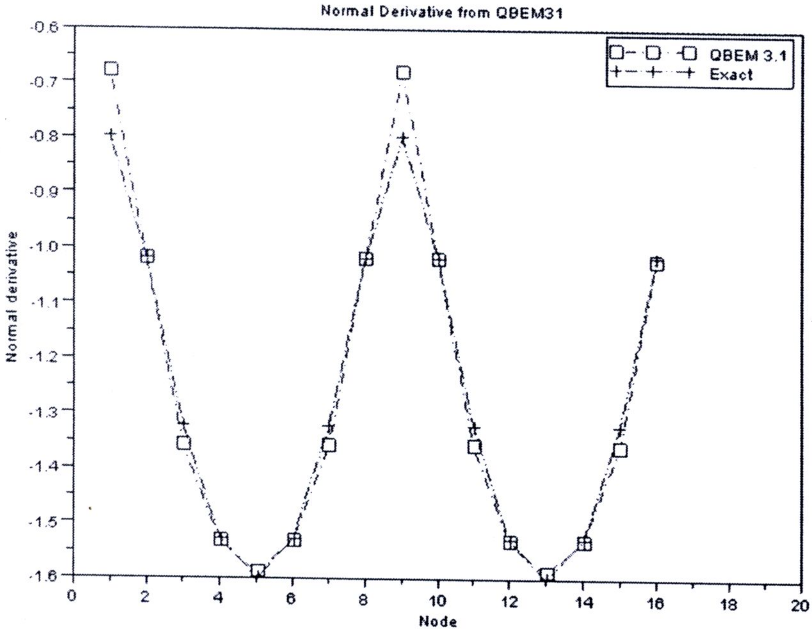
$$u = -0.8\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$$



ภาพที่ 6.5 การแบ่งขอบออกเป็น 16 จุด จุดภายใน 17 จุด ของปัญหาศักย์ เมื่อ * เป็นตำแหน่งจุดขอบและ + เป็นตำแหน่งจุดภายใน

ตารางที่ 6.3 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายใน จากตัวอย่างที่ 3

จุดภายใน	LBEM3	QBEM3	Exact
(1.50,0.00)	0.3507	0.3478	0.3500
(1.20,-0.35)	0.4197	0.4138	0.4140
(0.60,-0.45)	0.5739	0.5652	0.5660
(0.00,-0.45)	0.6467	0.6371	0.6380
(0.90,0.00)	0.6438	0.6371	0.6380
(0.30,0.00)	0.7899	0.7810	0.7820
(0.00,0.00)	0.8082	0.7990	0.8000



ภาพที่ 6.6 กราฟแสดงอนุพันธ์แนวฉากหรือฟลักซ์ที่จุดขอบสำหรับตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 4 $\bigtriangledown^2 u = b(x,y)$ ในกรณี $b(x,y) = -x$

ดังนั้นจะได้ว่า

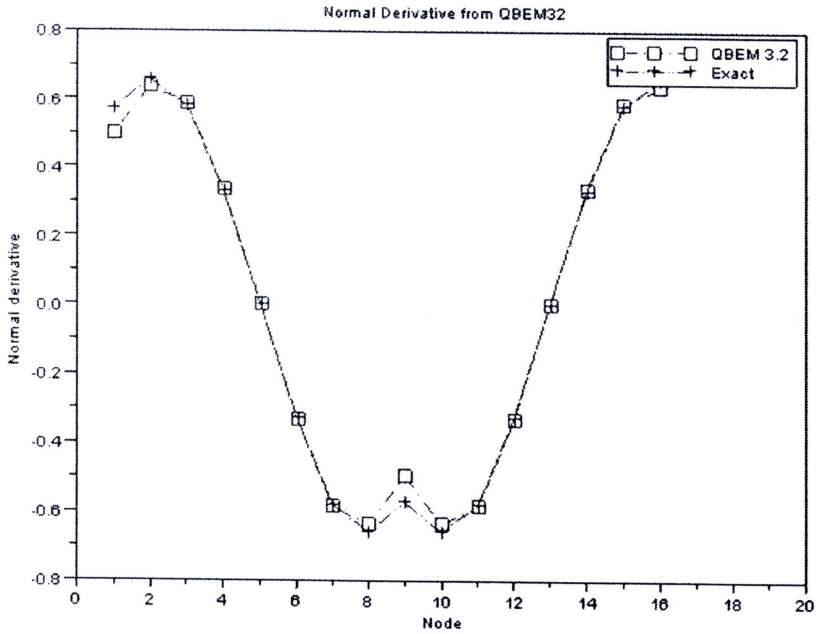
$$\bigtriangledown^2 u = -x$$

ซึ่งมีผลเฉลยแม่นตรงคือ (Kaennakham, 2004)

$$u = -\frac{2x}{7}\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$$

ตารางที่ 6.4 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายใน จากตัวอย่างที่ 4

จุดภายใน	LBEM4	QBEM4	Exact
(1.50,0.00)	0.1910	0.1877	0.1875
(1.20,-0.35)	0.1835	0.1794	0.1774
(0.60,-0.45)	0.1246	0.1217	0.1212
(0.00,-0.45)	0.0000	0.0000	0.0000
(0.90,0.00)	0.2089	0.2063	0.2050
(0.30,0.00)	0.0854	0.0841	0.0837
(0.00,0.00)	0.0000	0.0000	0.0000



ภาพที่ 6.7 กราฟแสดงอนุพันธ์แนวฉากหรือฟลักซ์ที่จุดขอบสำหรับตัวอย่างที่ 4

ตัวอย่างที่ 5 $\nabla^2 u = b(x,y)$ ในกรณี $b(x,y) = -x^2$

ดังนั้นจะได้ว่า

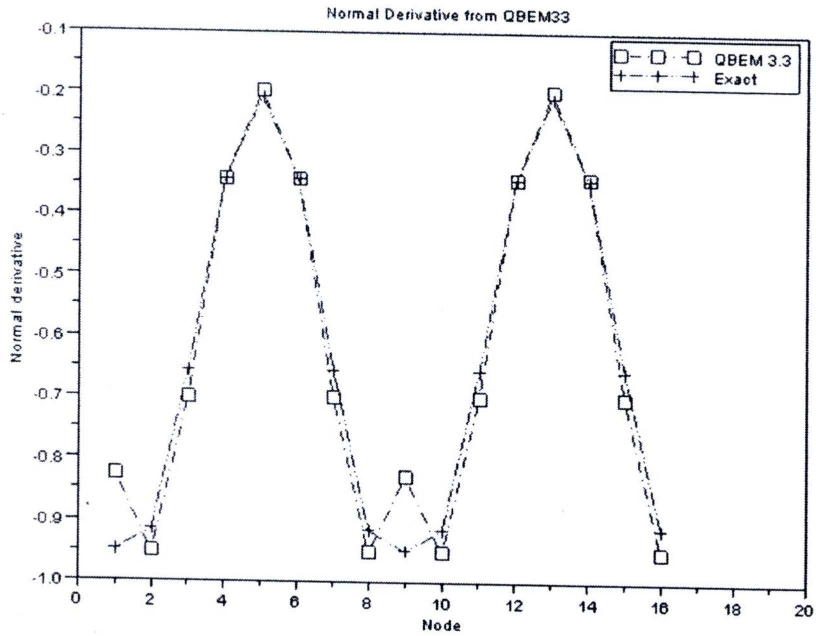
$$\nabla^2 u = -x^2$$

ซึ่งมีผลเฉลยแม่นตรงคือ (Kaennakham, 2004)

$$u = -\frac{1}{246}(50x^2 + -8y^2 + 33.6)\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$$

ตารางที่ 6.5 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายใน จากตัวอย่างที่ 5

จุดภายใน	LBEM5	QBEM5	Exact
(1.50,0.00)	0.2619	0.2636	0.2598
(1.20,-0.35)	0.2192	0.2224	0.2200
(0.60,-0.45)	0.1363	0.1433	0.1437
(0.00,-0.45)	0.0932	0.1020	0.1036
(0.90,0.00)	0.2371	0.2416	0.2402
(0.30,0.00)	0.1430	0.1506	0.1513
(0.00,0.00)	0.1275	0.1355	0.1365



ภาพที่ 6.8 กราฟแสดงอนุพันธ์แนวฉากหรือฟลักซ์ที่จุดขอบสำหรับตัวอย่างที่ 5

ตัวอย่างที่ 6 $\bigtriangledown^2 u = b(x, y, u)$

พิจารณาปัญหา

$$b = c(x, y)u$$

เมื่อ $c(x, y) = -1$ ดังนั้นจะได้ว่า

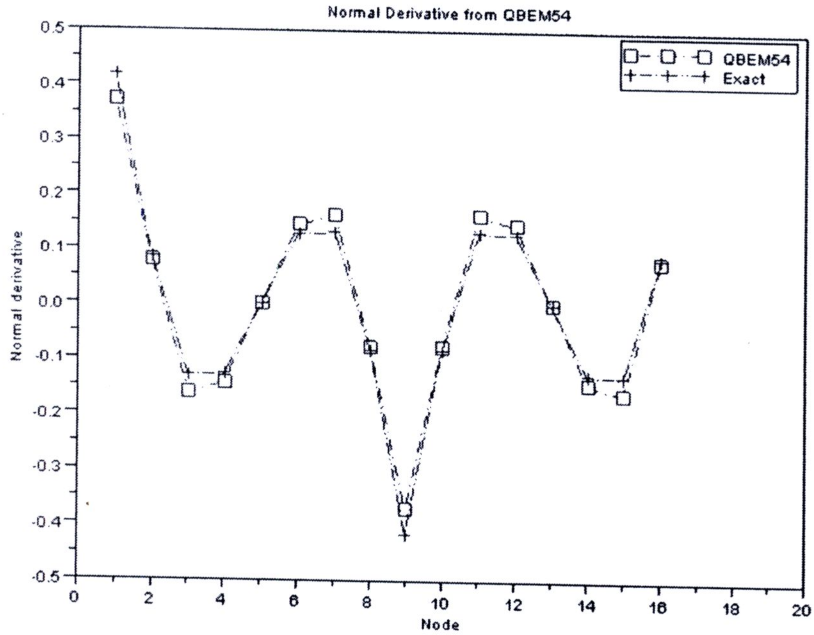
$$\bigtriangledown^2 u = -u$$

บนโดเมนซึ่งมีเงื่อนไขขอบ ดังภาพที่ 6.5 ซึ่งมีผลเฉลยแม่นตรงคือ (Kaennakham, 2004)

$$u = \sin(x)$$

ตารางที่ 6.6 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายใน จากตัวอย่างที่ 6

จุดภายใน	LBEM6	QBEM6	Exact
(1.50,0.00)	0.997	0.995	0.997
(1.20,-0.35)	0.929	0.929	0.930
(0.60,-0.45)	0.561	0.562	0.563
(0.00,-0.45)	0.000	0.000	0.000
(0.90,0.00)	0.780	0.781	0.781
(0.30,0.00)	0.294	0.294	0.294
(0.00,0.00)	0.000	0.000	0.000



ภาพที่ 6.9 กราฟแสดงอนุพันธ์แนวฉากหรือฟลักซ์ที่จุดขอบสำหรับตัวอย่างที่ 6

ตัวอย่างที่ 7 $\bigtriangledown^2 u = b(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$

พิจารณาในกรณี $c = -1$ ดังนั้น

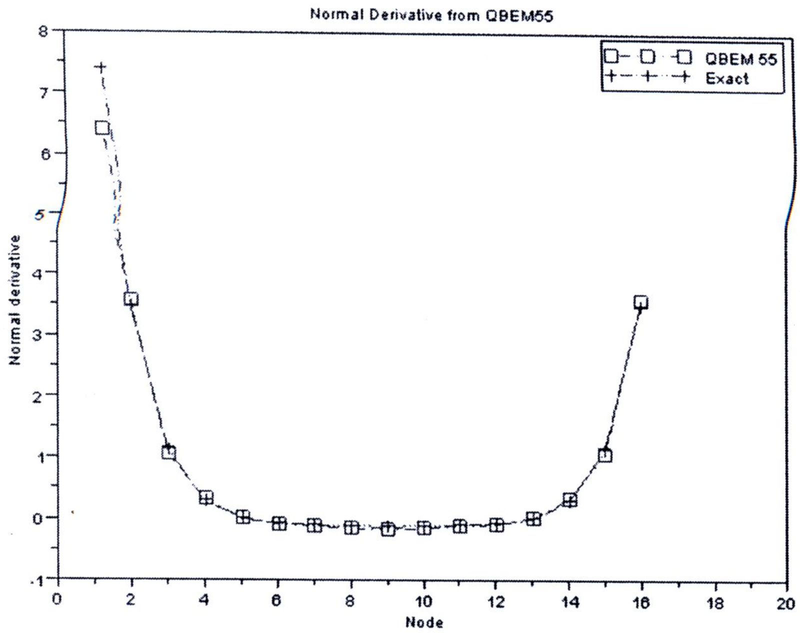
$$\bigtriangledown^2 u = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

บนโดเมนซงมเงื่อนไขขอบ ดังภาพที่ 6.5 ซึ่งมีผลเฉลยแม่นตรงคือ (Kaennakham, 2004)

$$u = e^{-x}$$

ตารางที่ 6.7 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายใน จากตัวอย่างที่ 7

จุดภายใน	LBEM7	QBEM7	Exact
(1.50,0.00)	0.230	0.228	0.223
(1.20,-0.35)	0.307	0.305	0.301
(0.60,-0.45)	0.555	0.549	0.549
(0.00,-0.45)	1.003	0.994	1.000
(0.90,0.00)	0.411	0.408	0.406
(0.30,0.00)	0.744	0.738	0.741
(0.00,0.00)	1.001	0.993	1.000



ภาพที่ 6.10 กราฟแสดงอนุพันธ์แนวฉากหรือฟลักซ์ที่จุดขอบสำหรับตัวอย่างที่ 7