บทที่ 5
การดำเนินการคำนวณของวิธีดวลเรซิโปรซิตี้

ในบทที่ผ่านมาของวิทยานิพนธ์ได้ทำการแนะนำแนวความคิดพื้นฐานของการคำนวณ สมการลาปลาซ แล้วในบทนี้จะขยายแนวความคิดในปัญหาของสมการแบบปัวซง และทำการพิจารณาเป็น 3 กรณีขึ้นกับค่า b ทางด้านขวาของสมการปัวซง

$$\nabla^2 u = b$$

พิจารณาจากสมการ (4.17) ลงในสมการ (4.16) แล้วได้ระบบสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$Hu - Gq = (H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1}b \tag{5.1}$$

กำหนดให้

$$S = (H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1} \tag{5.2}$$

แล้วจากสมการ (5.1) แทนค่าสมการ (5.2) จะได้

$$Hu - Gq = Sb \tag{5.3}$$

พิจารณาในแต่ละกรณีดังนี้

1. การคำนวณกรณี $\nabla^2 u = b(x, y)$

กำหนดให้

$$R = Sb \tag{5.4}$$

แทนค่าสมการ (5.4) ลงในสมการ (5.3)

$$\begin{aligned} Hu - Gq &= R \\ Hu &= Gq + R \end{aligned} \tag{5.5}$$

เมื่อ R เป็นเมทริกซ์ที่ทราบค่า
ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบสมการ (3.35) แล้วได้ระบบสมการเมทริกซ์ที่อยู่ในรูป $Ax = y$

2. การคำนวณกรณี $\nabla^2 u = b(x, y, u)$

พิจารณา

$$b = c(x, y)u \tag{5.6}$$

เมื่อ $c(x, y)$ คือฟังก์ชันบอกตำแหน่ง
กระจายค่าในทุกๆ จุดจะเขียนสมการ (5.6) ในรูปแบบเมทริกซ์คือ

$$b = Cu \tag{5.7}$$

สำหรับเมทริกซ์ทะแยงมุม

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c(x_1, y_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c(x_2, y_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c(x_3, y_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c(x_{N+L}, y_{N+L}) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

กำหนดให้

$$R = SC \tag{5.9}$$

แทนค่าสมการ (5.9) ลงในสมการ (5.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Hu &= Gq + Ru \\ Hu - Ru &= Gq \\ (H-R)u &= Gq \end{aligned} \tag{5.10}$$

ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบสมการ (3.35) แล้วได้ระบบสมการเมทริกซ์ที่อยู่ในรูป $Ax = y$

3. การคำนวณกรณี $\nabla^2 u = b(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$

พิจารณา

$$b = c(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.11}$$

เมื่อ $c(x,y)$ คือฟังก์ชันบอกตำแหน่ง ถ้ากระจายค่าไปทุกๆจุดและเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$b = C\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.12}$$

เมื่อ C เป็นเมทริกซ์ทะแยงมุมสมการ (5.8) และ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y_1)\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, y_2)\ \cdots \frac{\partial u}{\partial x}(x_{N+L}, y_{N+L})\right] \tag{5.13}$$

ใช้การประมาณค่าพื้นฐานของวิธีดวลเรซิโปรซิตี้ ที่บรรยายในหัวข้อ (4.2) คือ

$$b = F\alpha \tag{5.14}$$

ในสมการลักษณะเดียวกันถูกเขียนในแบบค่า u ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$u = F\beta \tag{5.15}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\beta \tag{5.16}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x}(x_1, y_1) \ \frac{\partial f_j}{\partial x}(x_2, y_2) \ \cdots \frac{\partial f_j}{\partial x}(x_{N+L}, y_{N+L}) \ \right]^T \tag{5.17}$$

เขียน (5.15) คือ $\beta = F^{-1}u$ แทนค่าในสมการ (5.16) จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} u \tag{5.18}$$

แทนค่าสมการ (5.18) ในสมการ (5.12) แล้วแทนในสมการ (5.3) จะได้ว่า

$$Hu - Gq = SC \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} u \tag{5.19}$$

กำหนด

$$R = SC \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} \tag{5.20}$$

แทนค่าสมการ (5.20) ในสมการ (5.19) แล้วจัดรูปสมการจะได้ว่า

$$(H - R)u = Gq \tag{5.21}$$

ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบสมการ (3.35) แล้วได้ระบบสมการเมทริกซ์ที่อยู่ในรูป $Ax = y$