บทที่ 4
วิธีดวลเรซิโปรซิตี้

วิธีการเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์และทางวิทยาศาสตร์ประยุกต์มีวิธีการคำนวณที่นิยมใช้อยู่ 3 วิธีคือ วิธีผลต่างจำกัด วิธีสมาชิกจำกัด และวิธีสมาชิกตามขอบ ซึ่งระเบียบวิธีสมาชิกจำกัดจะต้องใช้ชุดข้อมูลที่เป็นจุดภายในและจุดขอบ ส่วนระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบจะใช้จุดข้อมูลตามขอบเท่านั้น

วิธีดวลเรซิโปรซิตี้เป็นวิธีหนึ่งในระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบที่จะใช้เพื่อแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองที่อยู่ในลักษณะของสมการปัวซงซึ่งสามารถแก้ไขได้ทั้งในแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น หรือขึ้นกับเวลา

วิธีดวลเรซิโปรซิตี้จะหลีกเลี่ยงการอินทิเกรตบนโดเมนซึ่งจะทำการแปลงโดเมนอินทิกรัลเป็นการอินทิเกรตตามขอบโดยใช้ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เหมาะสม ซึ่งจะใช้ฟังก์ชันประมาณค่าใดก็ได้แต่ที่นิยมคือ ฟังก์ชันรัศมีฐานหลัก ซึ่งเป็นหัวใจหลักของกระบวนการดวลเรซิโปรซิตี้

1. กระบวนการวิธีดวลเรซิโปรซิตี้

พิจารณา

$$\nabla^2 u = b \tag{4.1}$$

เมื่อ $b = b(x, y)$

ผลเฉลยของสมการกระจายอยู่ในรูปผลบวกของผลเฉลยเฉพาะ $(\hat{u})$ และผลเฉลยเอกพันธ์ (u_h)

$$u = u_h + \hat{u} \tag{4.2}$$

ซึ่งค่าประมาณของ b เป็นผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง และใช้ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงในการหารากผลเฉลยเฉพาะของแต่ละจุดที่ตั้งอยู่บนขอบของโดเมน

ถ้ามีจุดบนขอบ $2N$ จุด จุดภายใน L จุด ดังนั้นจะมีฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงจำนวน $2N + L$ ตัว ยิ่งไปกว่านั้นจะมี $2N + L$ ผลเฉลยเฉพาะ $\hat{u}_j$ เพราะฉะนั้นค่าประมาณของ b บนโดเมน Ω เขียนได้ในรูปแบบดังนี้

$$b(x, y) \approx \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j f_j(x, y) \tag{4.3}$$

ถ้า b_i และ f_{ij} เป็นค่าของ b และ f_j ที่จุด i แล้วจะเกิดสมการเมทริกซ์ตัวที่ไม่ทราบค่าคือ สัมประสิทธิ์ $\{\alpha_j | j = 1, 2, \ldots, 2N + L\}$ นั่นคือ

$$b = F\alpha \tag{4.4}$$

และจากผลเฉลยเฉพาะ $\hat{u}_j$ และฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง (f_j) ถูกเชื่อมกันด้วยความสัมพันธ์ดังนี้

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \tag{4.5}$$

แทนค่าสมการ (4.5) ลงในสมการ (4.3) จะได้ว่า

$$b \approx \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \tag{4.6}$$

แทนค่าสมการ (4.6) ลงในสมการ (4.1) จะได้ว่า

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \tag{4.7}$$

คูณด้วยผลเฉลยมูลฐานทั้งสองข้างของสมการ (4.7) จะได้ว่า

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}_j) u^* d\Omega \tag{4.8}$$

ซึ่งผลที่ได้จะมีค่าเท่ากับผลของการพิจารณาจากสมการดังนี้

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Omega} b u^* d\Omega \tag{4.9}$$

อินทิเกรตทีละส่วนในพจน์ลาปลาซของสมการ (4.8) และผลจะอยู่ในลักษณะของสมการอินทิกรัลในแต่ละจุด i (Partridge & Brebbia, 1990) จะได้ว่า

$$C_i u_i + \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \int_{\Gamma} q^* \hat{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \tag{4.10}$$

โดยที่

$$\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial n} = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} \tag{4.11}$$

เมื่อ n คือเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาบนขอบ Γ ทำการกระจายจะได้ว่า

$$C_i u_i + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} q^* u d\Gamma - \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma_k} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma} q^* \hat{u}_j d\Gamma - \sum_{k=1}^{N} \int_{\Gamma} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \tag{4.12}$$

เขียนสมการ (4.12) ในพจน์ของค่าจุดต่อ จะได้

$$C_i u_i + \sum_{k=1}^{N} H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^{N} G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^{N} H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^{N} G_{ik} \hat{q}_{kj} \right) \tag{4.13}$$

กระจายในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$Hu - Gq = \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j (H\hat{u}_j - G\hat{q}_j) \tag{4.14}$$

$$Hu - Gq = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha \tag{4.15}$$

เมื่อ $\hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{2N+L} \end{bmatrix}$, $\hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \vdots \\ \hat{q}_{2N+L} \end{bmatrix}$

ซึ่งในสมการ (4.15) ไม่มีการอินทิเกรตบนโดเมน และค่าของพจน์ b ในสมการ (4.1) ถูกแทนด้วยการอินทิเกรต ตามขอบและทำโดยเริ่มต้นประมาณค่า b ด้วยสมการ (4.6) และจะได้ว่ากระจายทั้งทางด้านซ้ายและด้านขวาของผลที่เกิดจากกระบวนการอินทิกรัลตามขอบโดยใช้ทฤษฎีบทของกรีนรูปแบบที่สองหรือหลักการเรซิโปรซิตี้และการกระทำดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า วิธีดวลเรซิโปรซิตี้ โดยที่ถูกประยุกต์ใช้ในทั้งสองข้างของสมการ (4.8) ในรูปพจน์ของขอบจึงเรียกวิธีดังกล่าวว่า วิธีดวลเรซิโปรตี้สำหรับระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบ จากสมการ (4.4) จะได้ว่า

$$\alpha = F^{-1} b \tag{4.16}$$

โดยที่ F สามารถหาอินเวอร์สได้ดังนั้นจากสมการ (4.15)

$$Hu - Gq = d \tag{4.17}$$

เมื่อ

$$d = \left(H\hat{U} - G\hat{Q}\right)\alpha$$

ประยุกต์เงื่อนไขขอบลงบนสมการ (4.17) จะได้ระบบสมการที่อยู่ในรูป

$$Ax = y \tag{4.18}$$

เมื่อ x ประกอบด้วย N ตัวไม่ทราบค่า u และ q

หลังจากได้ผลเฉลยของระบบสมการ (4.13) และคืนค่าให้แก่ตัวแปรบนขอบทั้งหมดแล้วทำการหาผลเฉลยภายในจากสูตร

$$u_i = -\sum_{k=1}^{N} H_{ik}u_k + \sum_{k=1}^{N} G_{ik}q_k + \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j \left(c_i\hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^{N} H_{ik}\hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^{N} G_{ik}\hat{q}_{kj}\right) \tag{4.19}$$

2. ฟังก์ชันรัศมีฐานหลัก

วิธีดวลเรซิตี้คือเทคนิกที่ทำการแปลงโดเมนอินทิกรัลเป็นการอินทิเกรตตามขอบโดยใช้ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เหมาะสม และการสร้างฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงมีหลายวิธี

ในทางวิศวกรรมโดยส่วนใหญ่มักจะใช้ ฟังก์ชันรัศมีฐานหลัก $f = 1 + r, f = r^2 \ln r$ กันอย่างกว้างขวางแล้วแต่ละกรณีที่เหมาะสมในแต่ละงาน เมื่อ r คือ ฟังก์ชันระยะทางแบบยูคลิเดียนซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวถูกใช้ในบริบทของการประมาณค่าในช่วง

ในกระบวนการดวลเรซิตี้ จะหลีกเลี่ยงการอินทิเกรตบนโดเมน และใช้การอินทิเกรตตามขอบแทนซึ่งจะบรรลุโดยทำการประมาณค่าในช่วงของ b

$$b \approx \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j f_j \tag{4.20}$$

ในพจน์ของฟังก์ชันรัศมีฐานหลัก ซึ่งมี N จุดบนขอบ L จุดภายใน ซึ่งจุดต่อ เรียกว่าจุดต่อที่ทราบค่า กำหมดให้ r เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งที่มีความสัมพันธ์กับจุด P โดย

$$r = r_x i + r_y j \tag{4.21}$$

เมื่อ $r_x = x - x_p, r_y = y - y_p$
ดังนั้น

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 \tag{4.22}$$

เมื่อ r_x และ r_y เป็นส่วนประกอบ r ตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ สำหรับฟังก์ชันเชิงเส้น

$$f = 1 + r \tag{4.23}$$

และจากสมการ (4.20) จะได้ว่า

$$b \approx \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j (1 + r_j) \tag{4.24}$$

เมื่อ $r_j^2 = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2$
กระจายให้ครบทั้ง $(2N + L)$ จุด จะได้

$$b(x_i, y_j) \approx \sum_{j=1}^{2N+L} \alpha_j (1 + r_{ij}) \tag{4.25}$$

เมื่อ $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$ จะได้ระบบสมการคือ $b = F\alpha$ สำหรับตัวไม่ทราบค่า α_j และใช้สมการ (4.5) จะได้ว่า

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \tag{4.26}$$

$$\hat{q} = \left(r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3} \right) \tag{4.27}$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้

$$f = \begin{cases} (1 - \frac{r}{\rho})^4 (4\frac{r}{\rho} + 1) & ; 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & ; r > 1 \end{cases}$$

แล้วพิจารณาแทนค่าใน (4.20) แล้วดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นจะได้ว่า

$$\hat{u} = \begin{cases} \frac{4r^7}{49\rho^5} - \frac{5r^6}{12\rho^4} + \frac{4r^5}{5\rho^3} - \frac{5r^4}{8\rho^2} + \frac{r^2}{4} & ; r \leq \rho \\ \frac{529\rho^2}{5880} + \frac{\ln \frac{r}{\rho}}{14} & ; r > \rho \end{cases}$$

$$\hat{q} = \begin{cases} \left(r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_x \frac{\partial y}{\partial n} \right) \left(\frac{28r^5}{49\rho^5} - \frac{30r^4}{12\rho^4} + \frac{20r^3}{5\rho^3} - \frac{20r^2}{8\rho^2} + \frac{2}{4} \right) & ; r \leq \rho \\ \left(r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_x \frac{\partial y}{\partial n} \right) \left(\frac{\rho^2}{14r^2} \right) & ; r > \rho \end{cases}$$

รายละเอียดเพิ่มเติมดูได้จาก (กฤติกา ลายสวัสดิ์, 2553)