บทที่ 3
ระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบ

1. รูปแบบระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบ

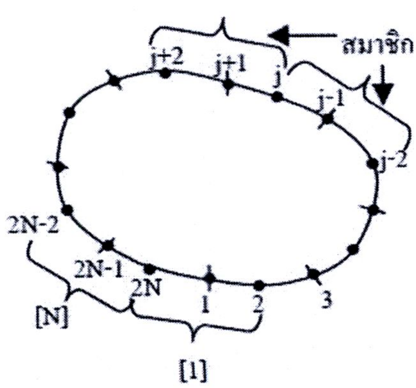
ระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบสำหรับปัญหาศักย์(Potentials Problem) u ในโดเมน Ω บนขอบ Γ มีสมการการอินทิเกรตพื้นฐาน ที่รู้จักกันดีคือ

$$Cu + \oint_{\Gamma} uq^{*}ds = \oint_{\Gamma} u^{*}qds \tag{3.1}$$

เมื่อ C คือค่าคงตัวซึ่งขึ้นกับตำแหน่งของจุดบนผิวขอบ
$q \equiv \frac{\partial u}{\partial n}$ เมื่อ $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาบนผิวขอบ
u^{*} คือผลเฉลยมูลฐานของสมการลาปลาซ
$q^{*} = \frac{\partial u^{*}}{\partial n}$

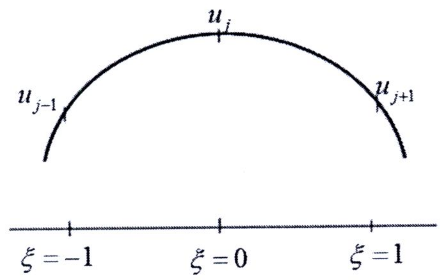
จากสมการ (3.1) ในระเบียบวิธีสมาชิกกำลังสองจะแบ่งขอบ Γ เป็น N สมาชิก และมีจำนวนจุดขอบเท่ากับ $2N$ ดังภาพที่ 3.1 และแทนเส้นโค้ง Γ ด้วย Γ_N จะได้ว่าการอินทิเกรตบนขอบถูกประยุกต์โดย

$$Cu + \oint_{\Gamma_N} uq^{*}ds = \oint_{\Gamma_N} u^{*}qds \tag{3.2}$$



ภาพที่ 3.1 การแบ่งส่วนของขอบออกเป็น N

2. วิธีสมาชิกกำลังสอง



ภาพที่ 3.2 การประมาณฟังก์ชัน u, q

สมาชิกกำลังสองจากภาพที่ 3.2 เราใช้การประมาณค่าฟังก์ชัน ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 และเรียกว่าฟังก์ชันสัญฐาน (Shape function) ดังนั้นจะได้ว่าค่า u และ q สามารถเขียนในรูปของ

$$u(\xi) = \phi_1 U_{j-1} + \phi_2 U_j + \phi_3 U_{j+1} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]\,[U_{j-1} \ U_j \ U_{j+1}]^T \tag{3.3}$$

$$q(\xi) = \phi_1 Q_{j-1} + \phi_2 Q_j + \phi_3 Q_{j+1} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]\,[Q_{j-1} \ Q_j \ Q_{j+1}]^T \tag{3.4}$$

เมื่อ

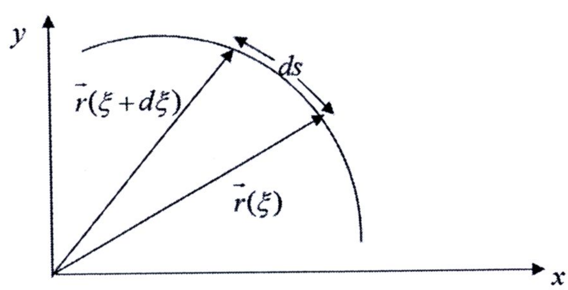
$$\phi_1 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \tag{3.5}$$

$$\phi_2 = 1 - \xi^2 \tag{3.6}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) \tag{3.7}$$

พิจารณาอินทิเกรตตามเส้น จากภาพที่ 3.3 แสดงระยะกณิกนันต์ (Infinitesimal) ตามเส้นโค้งระหว่าง $\vec{r}(\xi + d\xi)$ และ $\vec{r}(\xi)$ ซึ่งเท่ากับ ds

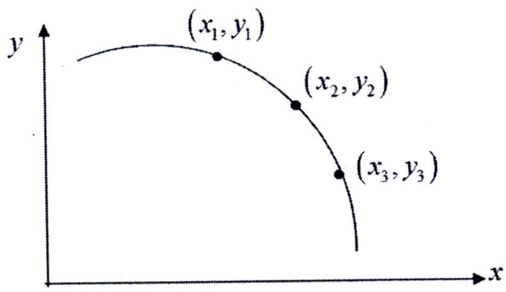
$$\begin{aligned} ds &= \left\| \frac{d\vec{r}}{d\xi} d\xi \right\| \\ &= \left\| \frac{dx}{d\xi}\vec{i} + \frac{dy}{d\xi}\vec{j} \right\| d\xi \end{aligned}$$



ภาพที่ 3.3 ระยะกณิกนันต์ ds บนเส้นโค้ง

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi$$
$$= J(\xi) d\xi \tag{3.8}$$

$$\text{เมื่อ } J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \tag{3.9}$$



ภาพที่ 3.4 เส้นโค้งที่ถูกกำหมดโดยจุดสามจุด

ถ้า $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ เป็นพิกัดของจุดในภาพที่ 3.4 เส้นโค้งที่กำหนดจุดทั้งสามสามารถบรรยายได้ด้วยฟังก์ชันต่อไปนี้

$$x = 0.5(\xi^2 - \xi)x_1 + (1 - \xi^2)x_2 + 0.5(\xi^2 + \xi)x_3 \tag{3.10}$$
$$y = 0.5(\xi^2 - \xi)y_1 + (1 - \xi^2)y_2 + 0.5(\xi^2 + \xi)y_3 \tag{3.11}$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$x = 0.5\xi^2(x_1 - 2x_2 + x_3) + 0.5\xi(x_3 - x_1) + x_2 \tag{3.12}$$
$$y = 0.5\xi^2(y_1 - 2y_2 + y_3) + 0.5\xi(y_3 - y_1) + y_2 \tag{3.13}$$

โดยที่ (x, y) เป็นพิกัดของจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง อนุพันธ์ของ x และ y เทียบกับ ξ คือ

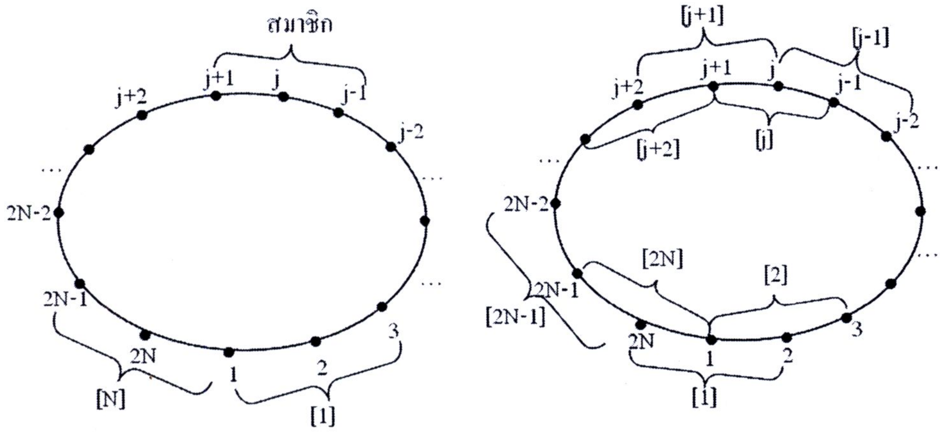
$$\frac{dx}{d\xi} = 0.5(x_3 - x_1) + (x_1 - 2x_2 + x_3)\xi \tag{3.14}$$
$$\frac{dy}{d\xi} = 0.5(y_3 - y_1) + (y_1 - 2y_2 + y_3)\xi \tag{3.15}$$

เมื่อแทนสมการ (3.14) และสมการ (3.15) ลงในสมการ (3.9)

$$J(\xi) = [(\xi(x_1 - 2x_2 + x_3) + 0.5(x_3 - x_1))^2 +$$
$$(\xi(y_1 - 2y_2 + y_3) + 0.5(y_3 - y_1)^2)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.16}$$

ในการแบ่งสมาชิกของวิธีสมาชิกกำลังสองนั้นส่วนของสมาชิกจะมีจำนวนเท่ากับ N ซึ่งเป็นครึ่งหนึ่งของจำนวนจุดขอบ $2N$ จุด แต่เราต้องการคำนวณค่า U และ Q ทุกจุดบนจุดขอบ ดังนั้นเราจะแบ่งสมาชิก

ออกเป็น $2N$ ส่วน เท่ากับจำนวนจุดขอบ ภาพที่ 3.5



(1) แบ่งส่วนของขอบออกเป็น N สมาชิก (2) แบ่งส่วนของขอบออกเป็น 2N สมาชิก

ภาพที่ 3.5 การแบ่งส่วนขอบสมาชิกกำลังสอง

จากภาพที่ 3.5 จะเห็นว่าการอินทิเกรตในภาพที่ 3.5(2) จะเป็น 2 เท่าของภาพที่ 3.5(1) ดังนั้นเมื่อเราอินทิเกรตตามภาพที่ 3.5(2) ต้องนำมาหารสอง ก็จะได้การอินทิเกรตตามภาพที่ 3.5(1) ดังนั้น เมื่อแทนสมการ (3.3) และสมการ (3.8) ลงทางด้านซ้ายของสมการ (3.2) ที่มีจำนวนสมาชิกเป็น $2N$ สมาชิก และค่าอินทิเกรตบนสมาชิก $[j]$ คือ

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_{2N}} \sum_{j=1}^{2N} uq^* ds &= \sum_{j=1}^{2N} \int_{[j]} [\phi_1 \ \ \phi_2 \ \ \phi_3]\, q^* J(\xi) d(\xi) \begin{bmatrix} U_{j-1} \\ U_j \\ U_{j+1} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{2N} \begin{bmatrix} h_{j1} & h_{j2} & h_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j-1} \\ U_j \\ U_{j+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.17}$$

เมื่อในแต่ละสมาชิก $[j]$ จะประกอบด้วย 3 ส่วนประกอบคือ

$$h_{j1} = \int_{[j]} \phi_1 q^* J(\xi) d\xi \tag{3.18}$$

$$h_{j2} = \int_{[j]} \phi_2 q^* J(\xi) d\xi \tag{3.19}$$

$$h_{j3} = \int_{[j]} \phi_3 q^* J(\xi) d\xi \tag{3.20}$$

จากสมการ (3.17) สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., 2N$ จะได้

$$\sum_{j=1}^{2N} \begin{bmatrix} h_{j1} & h_{j2} & h_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j-1} \\ U_j \\ U_{j+1} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2N} (\hat{H}_{ij}) U_j \tag{3.21}$$

$$\text{เมื่อ } \hat{H}_{ij} = h_{(j+1)1} + h_{j2} + h_{(j-1)3} \tag{3.22}$$

ในทำนองเดียวกันแทนสมการ (3.4) และสมการ (3.8) ลงในสมการ (3.2) ทางด้านขวา จะได้

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_{2N}} \sum_{j=1}^{2N} qu^* ds &= \sum_{j=1}^{2N} \int_{[j]} [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]\, u^* J(\xi) d(\xi) \begin{bmatrix} Q_{j-1} \\ Q_j \\ Q_{j+1} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{2N} \begin{bmatrix} g_{j1} & g_{j2} & g_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{j-1} \\ Q_j \\ Q_{j+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

เมื่อในแต่ละสมาชิก $[j]$ จะประกอบด้วย 3 ส่วนประกอบคือ

$$g_{j1} = \int_{[j]} \phi_1 u^* J(\xi) d\xi \tag{3.24}$$

$$g_{j2} = \int_{[j]} \phi_2 u^* J(\xi) d\xi \tag{3.25}$$

$$g_{j3} = \int_{[j]} \phi_3 u^* J(\xi) d\xi \tag{3.26}$$

จากสมการ (3.23) สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., 2N$ จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{2N} \begin{bmatrix} g_{j1} & g_{j2} & g_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{j-1} \\ Q_j \\ Q_{j+1} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2N} (G_{ij}) U_j \tag{3.27}$$

$$\text{เมื่อ } G_{ij} = g_{(j+1)1} + g_{j2} + g_{(j-1)3} \tag{3.28}$$

และการพัฒนาระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบ จะได้ว่า

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^{2N} H_{ij} U_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} Q_j \tag{3.29}$$

กำหนดให้

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} \qquad \text{สำหรับ } i \neq j \tag{3.30}$$

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + C \qquad \text{สำหรับ } i = j \tag{3.31}$$

แทนค่าสมการ (3.30) สมการ (3.31) ลงในสมการ (3.29) จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij} U_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} Q_j \tag{3.32}$$

นั่นคือเขียนในรูปสมการเชิงเส้นในระบบเมทริกซ์ดังนี้

$$\mathbf{HU} = \mathbf{GQ} \tag{3.33}$$

ดังนั้นจาก (3.32) และแทนค่าเงื่อนไขขอบที่กำหนดให้จะได้ระบบสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H_1} & \mathbf{H_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U_1} \\ \mathbf{U_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G_1} & \mathbf{G_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1} \\ \mathbf{Q_2} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

เมื่อ U_1, Q_2 คือตัวที่ทราบค่าบนขอบและ U_2, Q_1 คือตัวที่ไม่ทราบค่าบนขอบ แล้วทำการจัดรูปสมการให้อยู่ในระบบ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{3.35}$$

เมื่อ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{G_1} & \mathbf{H_2} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q_1} \\ \mathbf{U_2} \end{bmatrix}$, และ $\mathbf{y} = [\mathbf{G_2Q_2} - \mathbf{H_1U_1}]$

ทำการคำนวณหาคำตอบของระบบสมการ คือ U_2, Q_1 ซึ่งเป็นค่าของจุดบนขอบพิจารณาค่า u_k ของจุดภายในดังนี้

$$u_k \approx \sum_{j=1}^{2N} \bar{G}_{kj} Q_j - \sum_{j=1}^{2N} \bar{H}_{kj} U_j \tag{3.36}$$

เมื่อ $\bar{G}_{kj}$ และ $\bar{H}_{kj}$ กระจายในลักษณะเดียวกันกับ G_{kj} and H_{kj}.

3. การคำนวณเมตริกซ์ H_{ij} และ G_{ij}

ในส่วนนี้เราจะแสดงรายละเอียดการอินทิเกรตของ H_{ij} และ G_{ij} เราใช้วิธีสมาชิกกำลังสองในการคำนวณ โดยใช้การอินทิเกรตแบบเกาส์

3.1 การคำนวณเมตริกซ์ H_{ij}

3.1.1 กรณี $i \neq j$ จากสมการ (3.22)

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= h_{(j+1)1} + h_{j2} + h_{(j-1)3} \\ &= \int_{[j+1]} \phi_1 q^* J(\xi)_{(j-1)} d\xi + \int_{[j]} \phi_2 q^* J(\xi)_{(j)} d\xi \\ &\quad + \int_{[j-1]} \phi_3 q^* J(\xi)_{(j+1)} d\xi \end{aligned} \tag{3.37}$$

เมื่อ

$$q^* = \frac{-1}{2\pi R^2}\big((x_i - x)n_x + (y_i - y)n_y\big) \tag{3.38}$$

$$R = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)n_y} \tag{3.39}$$

$$n_x = \frac{dy/d\xi}{J(\xi)} \tag{3.40}$$

$$n_y = \frac{-dx/d\xi}{J(\xi)} \tag{3.41}$$

ดังนั้นจะได้

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{ij} \;=\; & \sum_{g=1}^{10} w_g[0.5(\xi_g^2-\xi_g)\frac{-1}{2\pi R^2_{i(j+1)}}[(x_j-(0.5\xi_g^2(x_j-2x_{j+1}+x_{j+2}) \\
& +0.5\xi_g(x_{j+2}-x_j)+x_{j+1})(\frac{-(0.5(y_{j+2}-y_j)+(y_j-2y_{j+1}+y_{j+2})\xi_g)}{J(\xi_g)_{(j+1)}}) \\
& +(y_i-(0.5\xi_g^2(y_j-2y_{j+1}+y_{j+2})+0.5\xi_g(y_{j+2}-y_j)+y_{j+1})) \\
& \frac{(0.5(x_{j+2}-x_j)+(x_j-2x_{j+1}+x_{j+2})\xi_g)}{J(\xi_g)_{(j+1)}}]]J(\xi_g)_{(j+1)} \\
& +\sum_{g=1}^{10} w_g[(1-\xi_g^2)\frac{-1}{2\pi R^2_{i(j)}}[(x_i-(0.5\xi_g^2(x_{j-1}-2x_j+x_{j+1}) \\
& +0.5\xi_g(x_{j+1}-x_{j-1})+x_j)(\frac{-(0.5(y_{j+1}-y_{j-1})+(y_{j-1}-2y_j+y_{j+1})\xi_g)}{J(\xi_g)_{(j)}}) \\
& +(y_i-(0.5\xi_g^2(y_{j-1}-2y_j+y_{j+1})+0.5\xi_g(y_{j+1}-y_{j-1})+y_j)) \\
& \frac{(0.5(x_{j+1}-x_{j-1})+(x_{j-1}-2x_j+x_{j+1})\xi_g)}{J(\xi_g)_{(j)}}]]J(\xi_g)_{(j)} \\
& +\sum_{g=1}^{10} w_g[0.5(\xi_g^2+\xi_g)\frac{-1}{2\pi R^2_{i(j-1)}}[(x_j-(0.5\xi_g^2(x_{j-2}-2x_{j-1}+x_j) \\
& +0.5\xi_g(x_j-x_{j-2})+x_{j-1})(\frac{-(0.5(y_j-y_{j-2})+(y_{j-2}-2y_{j-1}+y_j)\xi_g)}{J(\xi_g)_{(j-1)}}) \\
& +(y_i-(0.5\xi_g^2(y_{j-2}-2y_{j-1}+y_j)+0.5\xi_g(y_j-y_{j-2})+y_{j-1})) \\
& \frac{(0.5(x_j-x_{j-2})+(x_{j-2}-2x_{j-1}+x_j)\xi_g)}{J(\xi_g)_{(j-1)}}]]J(\xi_g)_{(j-1)} \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

3.1.2 กรณี $i = j$ จากสมการ (3.29)

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij} U_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} Q_j$$

ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชันฮาร์โมนิก เนื่องจาก $u = 1, q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก จึงได้ว่า

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij} = 0 \;\; \text{หรือ} \;\; C_i = -\sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij}$$

แทนเข้าไปในสมการ (3.31) จะได้

$$
\begin{aligned}
H_{ii} &= \hat{H}_{ii} - \sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{2N} \hat{H}_{ij} \\
&= -\sum_{j=1, j\neq i}^{2N} \hat{H}_{ij} \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

3.2 การคำนวณเมตริกซ์ G_{ij}

3.2.1 กรณี $i \neq j$

จากสมการ (3.28)

$$
\begin{aligned}
G_i &= g_{(j+1)1} + g_{j2} + g_{(j-1)3} \\
&= \int_{[j+1]} \phi_1 u^* ds + \int_{[j]} \phi_2 U^* ds + \int_{[j-1]} \phi_3 u^* ds \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

$$\text{เมื่อ} \quad u^* = \frac{-1}{2\pi}(lnR) \tag{3.45}$$

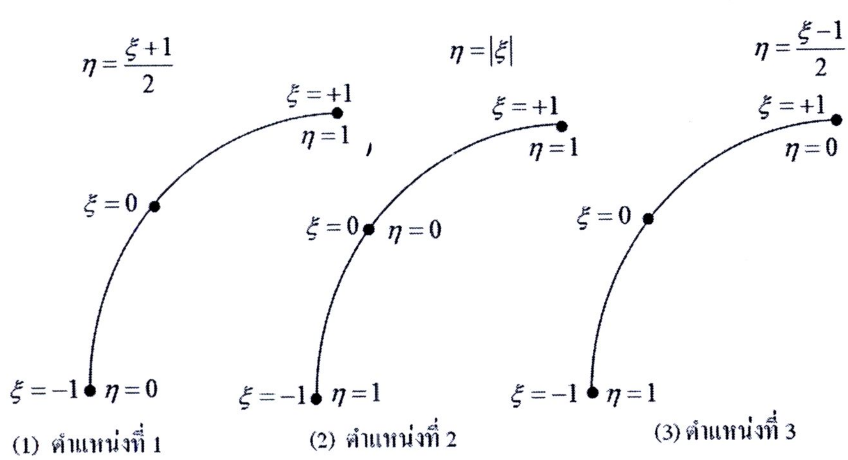
แทนสมการ (3.8) และสมการ (3.45) ในสมการ (3.44) จะได้

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \int\limits_{[j+1]} \frac{(\xi^2-\xi)}{2}(\frac{-1}{2\pi})\ln(R_{i(j-1)})J(\xi)_{(j+1)}d\xi + \int\limits_{[j]}(1-\xi^2)(\frac{-1}{2\pi})\ln(R_{i(j)})J(\xi)_{(j)}d\xi \\ &+ \int\limits_{[j-1]} \frac{(\xi^2+\xi)}{2}(\frac{-1}{2\pi})\ln(R_{i(j-1)})J(\xi)_{(j-1)}d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \sum_{g=1}^{10} w_g\frac{(\xi_g^2-\xi_g)}{2}(\frac{-1}{2\pi})\ln(R_{i(j-1)})_g(J(\xi)_{(j+1)})_g + \sum_{g=1}^{10} w_g(1-\xi_g^2)(\frac{-1}{2\pi})\ln(R_{i(j)})_g \\ & (J(\xi)_{(j)})_g + \sum_{g=1}^{10} w_g\frac{(\xi_g^2+\xi_g)}{2}(\frac{-1}{2\pi})\ln(R_{i(j-1)})_g(J(\xi)_{(j-1)})_g \end{aligned} \tag{3.46}$$

3.2.2 กรณี $i = j$

ต่อไปนี้จะเป็นรายละเอียดของการอินทิเกรต โดยเปลี่ยนตัวแปรจาก ξ เป็น η โดยแบ่งออกเป็นสามกรณี ดังภาพที่ 3.6



ภาพที่ 3.6 การเปลี่ยนค่าโดเมนจาก $-1 \leq \xi \leq 1$ เป็น $0 \leq \eta \leq 1$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้าจุด i อยู่ตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งที่ 1 จากภาพที่ 3.6(1) กำหนดให้

$$\begin{aligned} \eta &= 0.5(1+\xi) \\ \xi &= 2\eta - 1 \end{aligned}$$

แทน η ในสมการ (3.10) และ (3.11) จะได้

$$\begin{aligned}
x &= (1-\eta)(1-2\eta)x_1 + 4\eta(1-\eta)x_2 + \eta(2\eta-1)x_3 \\
y &= (1-\eta)(1-2\eta)y_1 + 4\eta(1-\eta)y_2 + \eta(2\eta-1)y_3 \\
r &= \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \\
&= \eta\sqrt{(-3x_1+4x_2-x_3)^2 + (-3y_1+4y_2-y_3)^2} \\
J &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \\
&= \sqrt{(-1.5x_1+2x_2-0.5x_3)^2 + (-1.5y_1+2y_2-0.5y_3)^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi &= \int_{0}^{1} f(\eta)2d\eta \\
&= \int_{0}^{1} 2f_0 \ln\eta d\eta + \int_{0}^{1} (f(\eta) - f_0\ln\eta)2d\eta \\
&= -2f_0 + \int_{-1}^{1} \left[f(\xi) - f_0\ln\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\right] d\xi \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

เมื่อ $f(\xi) = \frac{-\phi_1(\xi)\ln(r(\xi))J(\xi)}{2\pi}$ และ $f_0 = \lim_{n\to 0}\left[\frac{f(\eta)}{\ln(\eta)}\right]$ เป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$f_0 = \frac{-\sqrt{(-1.5x_1+2x_2-0.5x_3)^2 + (-1.5y_1+2y_2-0.5y_3)^2}}{2\pi}$$

พจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการ (3.47) สามารถหาค่าได้โดยการอินทิเกรตแบบเกาส์ได้

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้าจุด i อยู่ตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งที่ 2 จากภาพที่ 3.6(2) กำหนดให้

$$\eta = |\xi|$$

แทน η ในสมการ (3.12) และ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned}
x &= -0.5\eta(1-\eta)x_1 + (1+\eta)(1-\eta)x_2 + 0.5\eta(1+\eta)x_3 \\
y &= -0.5\eta(1-\eta)y_1 + (1+\eta)(1-\eta)y_2 + 0.5\eta(1+\eta)y_3 \\
r &= \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \\
&= 0.5|\eta|\sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y1)^2} \\
J &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \\
&= 0.5\sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y1)^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi &= \int_{0}^{1} f(\eta)d\eta \\
&= \int_{0}^{1} f_0 \ln|\eta|d\eta + \int_{0}^{1} (f(\eta) - f_0 \ln|\eta|)d\eta \\
&= -2f_0 + \int_{-1}^{1} [f(\xi) - f_0 \ln|\xi|]\, d\xi
\end{aligned} \tag{3.48}$$

เมื่อ $f(\xi) = \frac{-\phi_2(\xi)\ln(r(\xi))J(\xi)}{2\pi}$ และ $f_0 = \lim_{n\to 0}\left[\frac{f(\eta)}{\ln(\eta)}\right]$ เป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$f_0 = \frac{-0.5\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}}{2\pi}$$

พจน์ที่สองทางด้านขาวของสมการ (3.48) สามารถหาค่าได้โดยการอินทิเกรตแบบเกาส์ได้

<u>กรณีที่ 3</u> ถ้าจุด i อยู่ตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งที่ 2 จากภาพที่ 3.6(3) กำหนดให้

$$\begin{aligned}
\eta &= 0.5(1-\xi) \\
\xi &= 1 - 2\eta
\end{aligned}$$

แทน η ในสมการ (3.12) และ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned}
x &= \eta(2\eta-1)x_1 + 4\eta(1-\eta)x_2 + (1-\eta)(1-2\eta)x_3 \\
y &= \eta(2\eta-1)y_1 + 4\eta(1-\eta)y_2 + (1-\eta)(1-2\eta)y_3 \\
r &= \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \\
&= \eta\sqrt{(-3x_1 + 4x_2 - x_3)^2 + (-3y_1 + 4y_2 - y_3)^2} \\
J &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \\
&= \sqrt{(0.5x_1 - 2x_2 + 1.5x_3)^2 + (0.5y_1 - 2y_2 + 1.5y_3)^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi &= \int_{0}^{1} f(\eta)2d\eta \\
&= \int_{0}^{1} 2f_0 \ln\eta d\eta + \int_{0}^{1} (f(\eta) - f_0 \ln\eta)2d\eta \\
&= -2f_0 + \int_{-1}^{1} \left[f(\xi) - f_0 \ln\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\right] d\xi
\end{aligned} \tag{3.49}$$

เมื่อ $f(\xi) = \frac{-\phi_3(\xi)\ln(r(\xi))J(\xi)}{2\pi}$ และ $f_0 = \lim_{n\to 0}\left[\frac{f(\eta)}{\ln(\eta)}\right]$ เป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$f_0 = \frac{-0.5\sqrt{(0.5x_1 - 2x_2 + 1.5x_3)^2 + (0.5y_1 - 2y_2 + 1.5y_3)^2}}{2\pi}$$