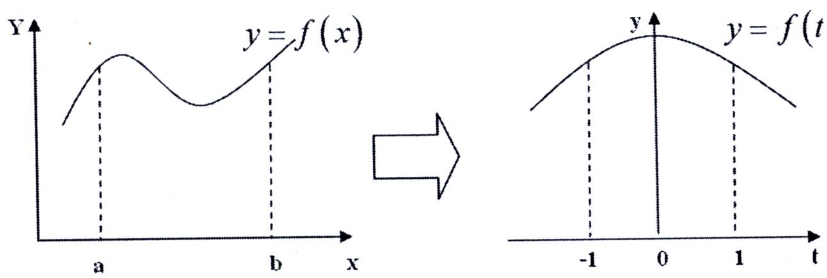
บทที่ 2
คณิตศาสตร์พื้นฐาน

ในบทที่ 2 ของวิทยานิพนธ์จะให้ความรู้ในเรื่องคณิตศาสตร์พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ในวิทยานิพนธ์นี้

1. การอินทิเกรตแบบเกาส์

การประมาณค่าอินทิกรัล $\int_a^b f(x)dx$ สามารถทำได้โดยทำการเปลี่ยนตัวแปรสำหรับการอินทิเกรต โดยใช้วิธีการแปลงเชิงเส้น ดังรูป 2.1



ภาพที่ 2.1 การเปลี่ยนค่าโดเมนจาก $a \leq x \leq b$ เป็น $-1 \leq t \leq 1$

สมมติให้

$$x = At + B \text{ และ } x(-1) = a, x(1) = b \tag{2.1}$$

จะได้

$$\begin{aligned} x(-1) &= A(-1) + B \\ a &= -A + B \qquad (2.2) \\ x(1) &= A(1) + B \\ b &= A + B \qquad (2.3) \end{aligned}$$

ดังนั้นนำสมการ(2.3) ลบกับสมการ (2.2) หารด้วย 2 จะได้ว่า

$$A = \frac{b-a}{2} \tag{2.4}$$

และนำสมการ(2.1) บวกกับสมการ (2.2) หารด้วย 2 จะได้ว่า

$$B = \frac{a+b}{2} \tag{2.5}$$

แทนค่าสมการ(2.3) และสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.1) จะได้ว่า

$$x(t) = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{(a+b)}{2} \tag{2.6}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{(b-a)}{2}t + \frac{(a+b)}{2}\right)\\ &= \frac{(b-a)}{2}\\ dx &= \frac{(b-a)}{2}dt\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)}{2}t + \frac{(a+b)}{2}\right)\frac{(b-a)}{2}dt\\ &= \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)}{2}t + \frac{(a+b)}{2}\right)dt \qquad (2.7)\end{aligned}$$

รูปมาตรฐานการประมาณค่าการอินทิเกรตแบบเกาส์(Gaussian integration) คือ

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i) \qquad (2.8)$$

เมื่อ n คือ จำนวนจุดของการอินทิเกรตแบบเกาส์(Gaussian points)

t_i คือ ค่าที่เป็นศูนย์ของพหุนามเลอจองด์(Legendre polynomial)

w_i คือ ค่าถ่วงน้ำหนักของการอินทิเกรตแบบเกาส์(Gaussian weights)

โดยที่พหุนามเลอจองด์อยู่ในรูป

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(t^n-1)^n}{dt^n}$$

และค่าน้ำหนักเกาส์เซียนอยู่ในรูป

$$w_i = \frac{2(1-t_i^2)}{n^2\left[P_{n-1}(t_i)\right]^2}$$

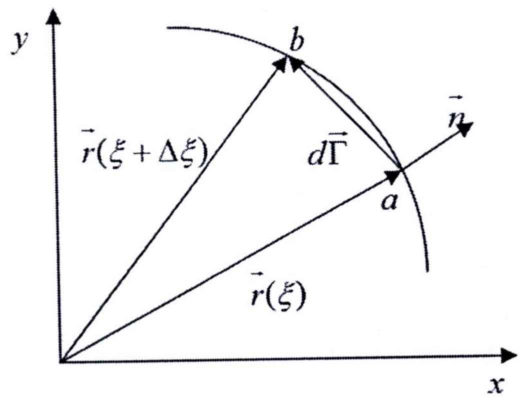
และการอินทิเกรตแบบเกาส์โดยใช้ n จุด จะได้ค่าแม่นตรงสำหรับการอินทิเกรตฟังก์ชันพหุนามที่มีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ $2n-1$ สำหรับการเขียนโปรแกรมโดยใช้ค่าที่เป็นศูนย์ของพหุนามเลอช็องด์ (t_i) และค่าน้ำหนักเกาส์ (w_i) ที่ทราบค่าและมีค่าดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.1 จำนวนจุด (n) น้ำหนักเกาส์ (w_i) และค่าจุด (t_i)

จำนวนจุด (n)	ค่าจุด (t_i)	น้ำหนักเกาส์ (w_i)
1	0.000 000 000 000	2.000 000 000 000
2	±0.577 350 269 189	1.000 000 000 000
3	±0.774 596 669 241	0.555 555 555 555
	0.000 000 000 000	0.888 888 888 888
4	±0.861 136 311 594	0.347 854 845 137
	±0.339 981 043 584	0.652 145 154 862
5	±0.906 179 845 938	0.236 926 885 056
	±0.538 469 310 105	0.478 628 670 499
	0.000 000 000 000	0.568 888 888 888
6	±0.932 469 514 203	0.171 324 492 379
	±0.661 209 386 466	0.360 761 573 048
	±0.238 619 186 083	0.467 913 934 572
7	±0.949 107 912 342	0.129 484 966 168
	±0.74 531 185 599	0.279 705 391 489
	±0.405 845 151 377	0.381 830 050 511
	0.000 000 000 000	0.417 959 183 673
8	±0.960 289 856 497	0.101 228 536 290
	±0.796 666 477 413	0.222 381 034 453
	±0.525 532 409 916	0.313 707 645 877
	±0.183 434 642 495	0.362 683 783 378
9	±0.961 160 239 507	0.081 274 388 361
	±0.836 031 107 326	0.180 648 160 694
	±0.613 371 432 700	0.260 610 696 402
	±0.324 253 423 403	0.312 347 077 040
	0.000 000 000 000	0.330 239 355 001
10	±0.973 906 528 517	0.066 671 344 308
	±0.865 063 366 688	0.149 451 349 150
	±0.679 409 568 299	0.219 086 362 515
	±0.433 395 394 129	0.269 266 719 309
	±0.148 874 338 981	0.295 524 224 714

2. เวกเตอร์เส้นสัมผัสและเวกเตอร์ตั้งฉาก

จุด a ในภาพ 2.2 เป็นจุดบนขอบเขตเส้น เวกเตอร์กระจัดจากจุดกำเนิดถึงจุด a คือ $\vec{r}(\xi)$ ถ้าพารามิเตอร์ ξ เพิ่มเป็น $\xi + \Delta\xi$ จะชี้ไปที่จุด b บนขอบเขตเส้นเวกเตอร์กระจัดจาก a ไป b จึงเท่ากับ $\vec{r}(\xi + \Delta\xi) - \vec{r}(\xi)$ ถ้า $\Delta\xi$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จุด b จะเคลื่อนเข้าใกล้จุด a ที่ลิมิต $\Delta r \to 0$ เวกเตอร์กระจัดจาก a ไป b จะเท่ากับเวกเตอร์เส้นสัมผัส $d\vec{\Gamma}$



ภาพที่ 2.2 เวกเตอร์เส้นสัมผัสและเวกเตอร์ตั้งฉาก

$$
\begin{aligned}
d\vec{\Gamma} &= \lim_{\Delta\to 0}[\vec{r}(\xi+\Delta\xi) - \vec{r}(\xi)] = \left(\frac{d\vec{r}}{d\xi}\right) d\xi \\
&= \left(\frac{dx}{d\xi}\hat{i} + \frac{dy}{d\xi}\hat{j}\right) d\xi
\end{aligned} \qquad (2.9)
$$

เวกเตอร์หน่วยเส้นสัมผัส $\hat{\Gamma}$ ได้จากการหาร $d\vec{\Gamma}$ ด้วยขนาดของเวกเตอร์ $d\Gamma$

$$
\begin{aligned}
\hat{\Gamma} &= \frac{d\vec{\Gamma}}{d\Gamma} = \frac{dx}{d\Gamma}\hat{i} + \frac{dy}{d\Gamma}\hat{j} \\
d\Gamma &= \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2}
\end{aligned} \qquad (2.10)
$$

ผลคูณไขว้ของเวกเตอร์หน่วยเส้นสัมผัส $\hat{\Gamma}$ กับเวกเตอร์หน่วยแนว z หรือ $\hat{k}$ คือ เวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับทั้ง $\hat{\Gamma}$ และ $\hat{k}$ เวกเตอร์ที่ได้จึงอยู่ในระนาบ xy มีทิศทางตั้งฉากกับเวกเตอร์หน่วยเส้นสัมผัสและพุ่งออกจากโดเมน จึงเป็นเวกเตอร์หน่วยเส้นแนวฉาก (unit normal vector) $\hat{n}$

$$
\hat{n} = \hat{\Gamma} \times \hat{k} = \left(\frac{dx}{d\Gamma}\hat{i} + \frac{dy}{d\Gamma}\hat{j}\right) \times \hat{k} = \frac{dy}{d\Gamma}\hat{i} - \frac{dx}{d\Gamma}\hat{j} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j} \qquad (2.11)
$$

เมื่อ

$$n_x = \frac{dy/d\xi}{\sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2}} \quad (2.12)$$

$$n_y = \frac{-dx/d\xi}{\sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2}} \quad (2.13)$$

3. ปัญหาศักย์

สมมติให้ ϕ เป็นฟังก์ชันเชิงสเกลาร์ ซึ่งนิยามบนโดเมน Ω เป็นบริเวณที่มีขอบเขตบนโค้งปิด Γ และถูกเรียกว่า ฟังก์ชันฮาร์มอนิก (Harmonic function) ถ้า ϕ เป็นคำตอบของสมการลาปลาซ(Laplace equation) $\nabla^2\phi = 0$ บนโดเมน Ω

สมมติให้ u เป็น ฟังก์ชันฮาร์มอนิก

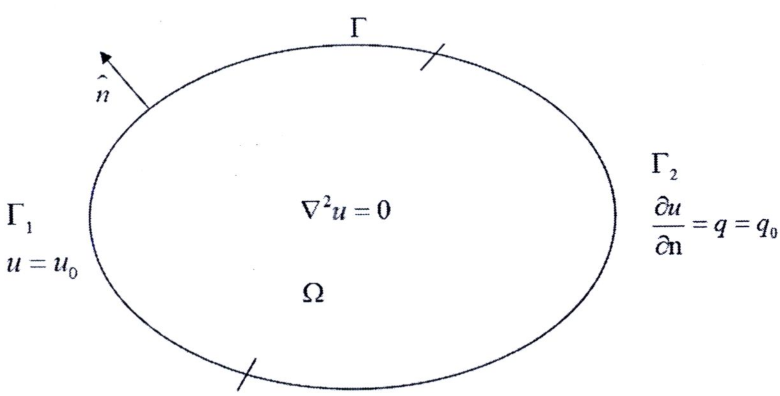
$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.14)$$

เมื่อ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ คือ ตัวดำเนินการลาปลาซใน 2 มิติ

โดยมีเงื่อนไขดีริชเลต์ (Dirichlet condition) คือ $u = u_0$ บน Γ_1

และมีเงื่อนไขนอยมันน์ (Neumann condition) คือ $\frac{\partial u}{\partial n} = q = q_0$ บน Γ_2

เมื่อ n คือ เวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาบนขอบ $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ดังภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 สมการลาปลาซบนโดเมน Ω ที่มีขอบ Γ

การรวมกันของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีเงื่อนไขขอบถูกเรียกว่าปัญหาศักย์ (Potential problem) และโดยทั่วไปเรื่องสมาชิกตามขอบฟลักซ์เทอม (Flux term) คือ $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv q$ ปัญหาเกิดจากสมการลาปลาซมักพบในด้านวิทยาศาสตร์ประยุกต์และด้านวิศวกรรมศาสตร์ ในเรื่องเกี่ยวกับของไหล การเคลื่อนที่ผิวน้ำ แหล่งกำเนิดศักย์แม่เหล็กไฟฟ้า วิเคราะห์แรงดึงและแรงบีบของของแข็งที่ยืดหยุ่น และอื่นๆ

4. ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์

สมมติให้ Ω เป็นโดเมนปรกติบนขอบ Γ ดังภาพที่ 2.3 และให้ F เป็นฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดบน Ω ดังนั้น ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ หรือ ทฤษฎีบทของเกาส์ กล่าวคือ

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F dA = \oint_{\Gamma} F \cdot n ds \tag{2.15}$$

เมื่อ n คือ เวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาบนขอบ

5. ทฤษฎีบทของกรีนรูปแบบที่สอง

ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันเชิงสเกลาร์ นิยามบนโดเมน Ω ซึ่งเป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยโค้งปิด Γ และสมมติให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ และจากคุณสมบัติของเกรเดียนต์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (u\nabla v) &= u\nabla(\nabla v) + \nabla v(\nabla u) \\ &= u\nabla^2 v + \nabla v \nabla u \end{aligned} \tag{2.16}$$

และ

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (v\nabla u) &= v\nabla(\nabla u) + \nabla u(\nabla v) \\ &= v\nabla^2 u + \nabla u \nabla v \end{aligned} \tag{2.17}$$

พิจารณา

$$\nabla(u\nabla v - v\nabla u) = \nabla(u\nabla v) - \nabla(v\nabla u) \tag{2.18}$$

แทนค่าสมการ (2.16) และสมการ (2.17) ลงในสมการ (2.18) จะได้ว่า

$$\nabla(u\nabla v - v\nabla u) = u\nabla^2 v - v\nabla^2 u \tag{2.19}$$

อินทิเกรตสมการ (2.19) บนโดเมน Ω

$$\int_{\Omega} \nabla(u\nabla v - v\nabla u) dA = \int_{\Omega} (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dA \tag{2.20}$$

ใช้ทฤษฎีบทเกาส์เซียน ทางด้านซ้ายของสมการ (2.20) จะได้

$$\int_{\Omega} \nabla(u\nabla v - v\nabla u) dA = \oint_{\Gamma} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot n ds \tag{2.21}$$

ใช้สมบัติของเกรเดียนต์ทางด้านขวาของสมการ (2.21) จะได้

$$\int_{\Omega} \nabla(u\nabla v - v\nabla u) \cdot n ds = \oint_{\Gamma} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) ds \tag{2.22}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.21) และสมการ (2.22) จะได้

$$\int_{\Omega} \nabla(u\nabla v - v\nabla u) dA = \oint_{\Gamma} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) ds \tag{2.23}$$

นั่นคือจากสมการ (2.20) และสมการ (2.23) จะได้

$$\int_{\Omega} (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)dA = \oint_{\Gamma} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})ds \tag{2.24}$$

และสมการ (2.24) ว่าคือ ทฤษฎีบทของกรีนรูปแบบที่สอง

6. ตัวดำเนินการลาปลาซในระบบพิกัดเชิงขั้ว

กำหนดให้

$$u = u(x,y)\ ,\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ และ } r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

สมมติให้

$$x = r\cos\phi\ ,\ y = r\sin\phi$$

พิจารณาสมการลาปลาซ

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.25}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(\cos\phi) + \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi) \qquad (2.26)\\ \frac{\partial u}{\partial \phi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\phi) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\phi) \qquad (2.27)\end{aligned}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.26) และสมการ (2.27) ตามกฎของคราเมอร์จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} \tag{2.28}$$

และ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} + \sin\phi\frac{\partial u}{\partial r} \tag{2.29}$$

พิจารณาส่วนประกอบของสมการลาปลาซสมการ (2.25) และแทนค่าสมการ (2.28) และสมการ (2.29) นั่นคือ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) \\ &= \cos\phi\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}(\frac{\partial u}{\partial x}) \\ &= \cos\phi\frac{\partial}{\partial r}(\cos\phi\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}) - \frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}(\cos\phi\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}) \\ &= \cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \cos\phi\sin\phi(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial \phi}(\frac{-1}{r^2})) \\ &= -\frac{1}{r}\sin\phi(\cos\phi\frac{\partial^2 u}{\partial \phi\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r}(-\sin\phi)) + \frac{1}{r^2}\sin\phi(\sin\phi\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial u}{\partial \phi}(\cos\phi)) \\ &= \cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \phi} + \frac{1}{r^2}cos\phi\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2 u}{\partial \phi\partial r}\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{r}\sin^2\phi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\sin^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial u}{\partial\phi} \tag{2.30}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})$$
$$=\frac{1}{r^2}\cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}-\frac{1}{r^2}\cos\phi\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\cos\phi\sin\phi\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial r}+\frac{1}{r}\cos^2\phi\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$+\frac{1}{r}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\phi}-\frac{1}{r^2}\sin\phi\cos\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}+\sin^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \tag{2.31}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.30) และสมการ (2.31) แทนค่าในสมการ (2.25) จะได้

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \tag{2.32}$$

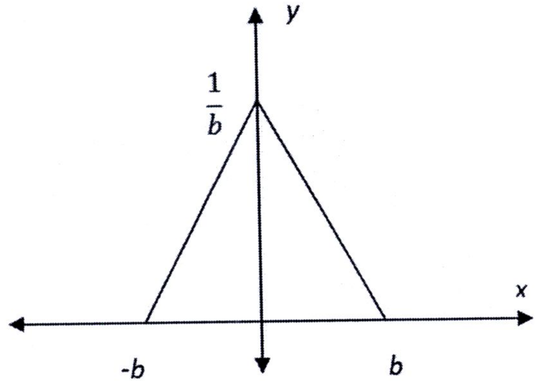
นั่นคือ u ขึ้นกับ r เพียงอย่างเดียว จะได้ว่า

$$\nabla^2 u(r)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \tag{2.33}$$

7. ฟังก์ชันไดแรคเดลตา

ในการประยุกต์ใช้ทางวิศวกรรมนั้น หลักการของแหล่งกำเนิดของจุดที่ต้องการถูกกำหนดโดยฟังก์ชันไดแรคเดลตา ซึ่งเป็นตัวกำหนดที่เหมาะสมในการแปลงใช้กับหลักการทางคณิตศาสตร์โดยนิยามดังนี้

1. $\delta(x)=0$ สำหรับ $x\neq 0$
2. $\delta(x)$ มีภาวะเอกฐานสำหรับ $x=0$
3. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$



ภาพที่ 2.4 แสดงตัวอย่างกราฟฟังก์ชันไดแรคเดลตา

จากภาพที่ 2.4 จะเห็นได้ว่า เมื่อ b มีค่าเข้าใกล้ 0 ค่า $\delta(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ ∞ และคุณสมบัติที่ใช้เสมอ คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

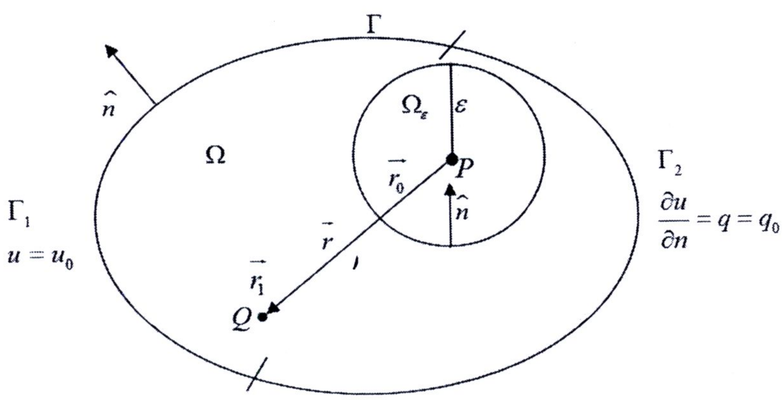
สำหรับทุกค่าฟังก์ชันต่อเนื่อง f

8. ผลเฉลยมูลฐานของสมการลาปลาซ

สมมติให้ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งและให้จุด Q สัมพันธ์กับจุด P ภายในบริเวณ Ω กำหนดแผ่น Ω_ε มีจุดศูนย์กลางที่ P รัศมี ε ดังภาพที่ 2.4 ซึ่งจุด P ถูกเรียกจุดแหล่งกำเนิด (source point) และจุด Q ถูกเรียกว่า จุดสนาม (field point)

สมมติให้ $\vec{r}_0$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P และ

$\vec{r}_1$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด Q



ภาพที่ 2.5 ย่านใกล้เคียงของจุด P ภายในโดเมน Ω

ให้ $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ โดยที่ $r = |\vec{r}|$

สมมติให้ $u^*(r)$ เป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการลาปลาซ ซึ่งกำหนดโดย

$$\nabla^2 u^*(r) + \delta(r) = 0 \tag{2.34}$$

เมื่อ $\delta(r)$ คือฟังก์ชันไดแรคเดลตา

จะพบว่า

$$\nabla^2 u^*(r) = 0 \tag{2.35}$$

สำหรับทุกๆ จุดยกเว้น $r_1 = r_0$ เมื่อ $r = 0$

พิจารณาหาผลเฉลยมูลฐาน

ขั้นที่ 1 หาผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธ์ในระบบพิกัดทรงกระบอกจะได้

$$\nabla^2 u^*(r) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \tag{2.36}$$

และเนื่องจากผลเฉลยขึ้นกับตัวแปร r เพียงอย่างเดียวนั่นคือ

$$\frac{d^2u^*}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du^*}{dr} = 0 \tag{2.37}$$

พิจารณาหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญดังนี้
ให้ $\frac{du^*}{dr} = P$ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dr} + \frac{1}{r}P = 0 \\
\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{r}P \\
\frac{1}{P}dP = -\frac{1}{r}dr \\
\int \frac{1}{P}dP = -\int \frac{1}{r}dr \\
\ln|P| = -\ln|r| + C \\
P = \frac{C_1}{r}
\end{aligned}$$

เมื่อ $C = \ln|C_1|$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{du^*(r)}{dr} &= \frac{C}{r} \\
du^*(r) &= \frac{C}{r}dr \\
\int du^*(r) &= C\int \frac{1}{r}dr \\
u^*(r) &= C\ln|r| + D
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือ

$$u^* = C\ln|r| + D \tag{2.38}$$

เมื่อ C และ D เป็นค่าคงที่ และโดยปรกติกำหนดให้ค่า $D = 0$ ให้ Ω_ε เป็นแผ่นที่มีขอบ คือ โค้งปิด Γ_ε ที่มีจุดศูนย์กลางที่ P รัศมี ε ดังภาพที่ 2.3 ทำการอินทิเกรตสมการ (2.34) บน Ω_ε นั่นคือ

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 U^*(r)dA = -\int_{\Omega_\varepsilon} \delta(r)dA \tag{2.39}$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันไดแรคตาที่ว่า $\int_{\Omega_\varepsilon} \delta(r)dA = 1$ นั่นคือ

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^*(r)dA = -1 \tag{2.40}$$

พิจารณาทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ทางด้านซ้ายของสมการ (2.39) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^*(r)dA &= \oint_{\Gamma_\varepsilon} \nabla u^*.nds \\
&= \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n}ds
\end{aligned} \tag{2.41}$$

หาอนุพันธ์สมการ (2.38) เทียบกับตัวแปร n จะได้ว่า

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{C}{r} \tag{2.42}$$

แทนค่าสมการ (2.42) ลงในสมการ (2.41) จะได้ว่า

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r d\theta = 2\pi C \tag{2.43}$$

แทนค่าสมการ (2.43) ลงในสมการ (2.41) แล้วแทนค่าในสมการ (2.40) จะได้ว่า

$$C = \frac{-1}{2\pi} \tag{2.44}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.38) และสมการ (2.44) จะได้ว่า

$$u^*(r) = \frac{-1}{2\pi} \ln r \tag{2.45}$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการลาปลาซ ใน 2 มิติ
และในทำนองเดียวกัน ผลเฉลยลาปลาซ ใน 3 มิติ คือ

$$u^*(r) = \frac{1}{4\pi r} \tag{2.46}$$

รายละเอียดเพิ่มเติมดูได้จาก (Paris & Canas, 1997)

9. สมการอินทิกรัลพื้นฐานสำหรับจุดภายใน

พิจารณาภาพที่ 2.4 และประยุกต์ทฤษฎีบทของกรีนรูปแบบที่สองบนสมการที่ (2.19) เมื่อ $v = u^*$ บนบริเวณ $\Omega - \Omega_\varepsilon$ จะได้ว่า

$$\int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} (u\nabla^2 u^* - u^*\nabla^2 u) dA = \oint_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon} (u\frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\frac{\partial u}{\partial n}) ds \tag{2.47}$$

และจากสมการที่ (2.7) และสมการที่ (2.30) โดยที่ u, u^* เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก บน $\Omega-\Omega_\varepsilon$ เนื่องจากอินทิกรัลทางด้านซ้ายของสมการ (2.42) มีค่าเป็นศูนย์และยิ่งไปกว่านั้น

$$\oint_{\Gamma} (u\frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\frac{\partial u}{\partial n}) ds = -\oint_{\Gamma_\varepsilon} (u\frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\frac{\partial u}{\partial n}) ds \tag{2.48}$$

แทนค่าผลเฉลยมูลฐานลงในสมการที่ (2.42) และใช้ $\frac{\partial u}{\partial n} = q$ แล้วกำหนดค่า ε ลู่เข้าสู่ 0 นั่นคือ

$$-\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma} (u\frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - q\ln r) ds = -\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{-1}{2\pi}\ln r) ds + \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{-1}{2\pi}(\ln r) q ds \tag{2.49}$$

เมื่อค่า ε ลู่เข้าสู่ 0 และ u คือฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า u ลู่เข้าสู่ u_p และ q ลู่เข้าสู่ q_p ดังนั้น

$$-\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma} (u\frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - q\ln r) ds = -u_p\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi\varepsilon} ds + q_p\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{-1}{2\pi}(\ln\varepsilon) ds \tag{2.50}$$

ทำการอินทิเกรตทางด้านขวาของสมการและจัดรูปสมการจะได้ว่า

$$u_p = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma (u\frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - q\ln r)ds \tag{2.51}$$

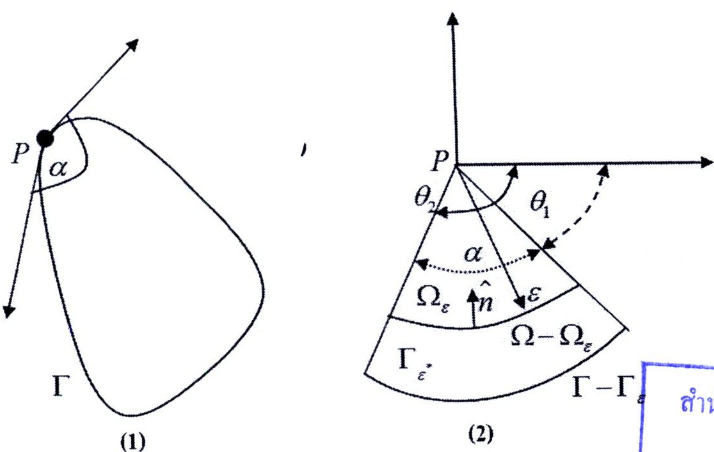
$$u_p = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma (-\ln r)q - u(\frac{-1}{r^2})r\cdot n)ds \tag{2.52}$$

$$u_p = \oint_\Gamma (u^*q - uq^*)ds, q^* = \frac{\partial u}{\partial n} \tag{2.53}$$

นั่นคือ จากสมการ (2.53) ทำให้ทราบสูตรพื้นฐานสำหรับการหาผลเฉลยภายในโดยใช้ข้อมูลค่า u และ q จากจุดที่ทราบค่าบนขอบโดยในแต่ละจุดจะทราบค่า u และ q อย่างใดอย่างหนึ่ง และในหัวข้อ 10 จะแสดงให้ทราบว่าจะพัฒนาสมการอินทิกรัลตามขอบอย่างไรเพื่อที่จะได้ทราบค่า u และ q ทุกๆ จุดบนขอบและในสมการ (2.53) ได้แสดงให้ทราบถึง u และ q ทุกๆ จุดภายในโดเมนแล้ว

10. สมการอินทิกรัลพื้นฐานสำหรับจุดขอบ

สมมติให้ P เป็นจุดบนขอบซึ่งไม่เรียบโดยมีปม(kink) ที่ทำมุมภายใน α ดังภาพที่ 2.5 ถ้าขอบเป็นผิวเรียบที่จุด P จะได้ว่า $\alpha = \pi$



ภาพที่ 2.6 แสดงมุมภายในของจุดบนขอบ

จากภาพที่ 2.5(2) ทำการประยุกต์โดยเมื่อให้ $v = u^*$ บนบริเวณ $\Omega - \Omega_\varepsilon$ โดยที่ Γ_{ε^*} คือ ส่วนต่างของ Γ_ε และ Γ แล้ว

$$\int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} (u\nabla^2 u^* - u^*\nabla^2 u)dA = \oint_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} (u\frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\frac{\partial u}{\partial n})ds + \oint_{\Gamma_{\varepsilon^*}} (u\frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\frac{\partial u}{\partial n})ds \tag{2.54}$$

เนื่องจากในเรื่องที่ผ่านมาและจากค่าอินทิกรัลทางด้านซ้ายมือมีค่าเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\oint_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} (u\frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\frac{\partial u}{\partial n})ds = -\oint_{\Gamma_{\varepsilon^*}} (u\frac{\partial u^*}{\partial n} - u^*\frac{\partial u}{\partial n})ds \tag{2.55}$$

แทนค่าลิมิตเมื่อ ε ลู่เข้าสู่ 0 จะได้

$$\oint_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon}(u\frac{\partial u^*}{\partial n}-u^*\frac{\partial u}{\partial n})ds = -\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\Gamma_{\varepsilon^*}}(u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{-1}{2\pi}\ln r))ds+\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\Gamma_{\varepsilon^*}}(\frac{-1}{2\pi}\ln r)\frac{\partial u}{\partial n}ds \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}(u\frac{\partial u^*}{\partial n}-u^*\frac{\partial u}{\partial n})ds &= -u_p\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\varepsilon d\theta+q_p\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\frac{-1}{2\pi}\ln\varepsilon)\varepsilon d\theta\\ &= -u_p(\frac{-1}{2\pi})(\theta_1-\theta_2)-q_p(\frac{1}{2\pi})\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\ln\varepsilon)(\theta_1-\theta_2) \quad (2.57)\\ &= -\frac{\alpha u_p}{2\pi}\end{aligned}$$

แล้วจัดรูปสมการ (2.57) และแทนค่า $u^*=-\frac{1}{2\pi}\ln r$ นั่นคือ

$$\alpha u_p=\oint_{\Gamma}(u\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}-q\ln r)ds \quad (2.58)$$

$$Cu_p=\oint_{\Gamma}(u^*q-uq^*)ds \quad (2.59)$$

เมื่อ $C=\frac{\alpha}{2\pi}$, $q^*=\frac{\partial u^*}{\partial n}$, $u^*=\frac{-1}{2\pi}\ln r$

ทำให้ทราบสูตรพื้นฐานสำหรับระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบและจะเห็นชัดว่า ถ้า P เป็นจุดภายในแล้ว $\alpha=2\pi$ ทำให้ $C=1$ และถ้า P เป็นจุดบนขอบของโค้งเรียบแล้ว $\alpha=\pi$ ทำให้ $C=\frac{1}{2}$