

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายนามผู้เชี่ยวชาญที่ทำการตรวจสอบเครื่องมือ

รายนามผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือแผนการจัดการเรียนรู้สื่อการเรียนรู้ที่สร้างด้วยจีเอสพีและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

1) ผศ. ดร. อรุณี หงษ์ศิริวัฒน์

ตำแหน่ง : ผู้ช่วยศาสตราจารย์

สถานที่ทำงาน : อาจารย์ประจำสาขาวิชาอุดมศึกษา ภาควิชานโยบายการจัดการและความเป็นผู้นำทางการศึกษา คณะครุศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2) นางอังคณา จันท์แก้ว

ตำแหน่ง: ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ (คศ.3)

สถานที่ทำงาน : หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนบ่วงบ่อวิทยาคม สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 6

3) นางสาวสมถวิล สิทธิมนต์ชัย

ตำแหน่ง :ครู วิทยฐานะชำนาญการ (คศ.2)

สถานที่ทำงาน : หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนพรตพิทยพยัต สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 2

ภาคผนวก ข
ค่าความเชื่อมั่นของเครื่องมือ

ตารางที่ ข.1 แสดงผลการประเมินแผนการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
เรื่องจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้จีเอสพีและการเรียนแบบทีเอไอ

รายการประเมิน	คะแนนเฉลี่ย	ผลการประเมิน
1. ด้านสาระสำคัญ		
- สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้	5.00	ดีมาก
- สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	5.00	ดีมาก
- มีความชัดเจน เข้าใจง่าย	4.67	ดีมาก
2. ด้านสาระการเรียนรู้		
- เนื้อหาถูกต้อง	4.67	ดีมาก
- สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้	5.00	ดีมาก
- สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด	5.00	ดีมาก
- มีความชัดเจน ไม่สับสน เข้าใจง่าย และเหมาะกับเวลาที่สอน	4.67	ดีมาก
3. ด้านผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง		
- สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้	4.67	ดีมาก
- ภาษาที่ใช้มีความชัดเจน เข้าใจง่าย	5.00	ดีมาก
- ระบุพฤติกรรมที่ต้องการวัดได้อย่างชัดเจน	4.33	ดีมาก
4. ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน		
- ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันกับผู้อื่น	5.00	ดีมาก
- ผู้เรียนมีโอกาสดำเนินงานเป็นทีม ทำให้เกิดความรักและสามัคคี	5.00	ดีมาก
- ผู้เรียนได้รับการส่งเสริมให้อภิปรายและซักถาม	4.67	ดีมาก
- การจัดกิจกรรมเหมาะสมกับเวลา	4.33	ดีมาก
5. ด้านสื่อการเรียนรู้		
- สื่อสอดคล้องกับสาระการเรียนรู้	5.00	ดีมาก
- สื่อส่งเสริมการทำงานร่วมกัน	4.67	ดีมาก
- สื่อสร้างความสนใจของผู้เรียน	5.00	ดีมาก

ตารางที่ ข.1 (ต่อ) แสดงผลการประเมินแผนการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง
จำนวน เชิงซ้อนโดยใช้จีโอสฟิและการเรียนแบบทีเอไอ

รายการประเมิน	คะแนนเฉลี่ย	ผลการประเมิน
6. ด้านการวัดและประเมินผล		
- การวัดสอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	5.00	ดีมาก
- การวัดครอบคลุมสาระการเรียนรู้	5.00	ดีมาก
- คำถามมีความชัดเจนและเข้าใจง่าย	4.67	ดีมาก
เฉลี่ยรวม	4.81	ดีมาก

ข้อเสนอแนะอื่น

- แนะนำให้นักเรียนพยายามเปลี่ยนบทบาทตัวเองในการร่วมกิจกรรม

ตารางที่ ข.2 แสดงค่าความยาก (p) อำนาจจำแนก (r) และความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผล
สัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้ไอเอสพีและการเรียนแบบ
ทีเอไอ

ข้อที่	ความเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	IOC	สรุปผล	p	r
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3					
ตอนที่ 1 ข้อ 1	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.42	0.85
2	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.66	0.61
3	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.60	0.60
4	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.52	0.35
5	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.42	0.37
6	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.36	0.73
7	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.58	0.63
8	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.42	0.73
9	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.28	0.50
10	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.34	0.55
11	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.62	0.68
12	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.40	0.65
13	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.56	0.50
14	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.52	0.39
15	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.46	0.36
16	1	1	1	3	1	สอดคล้อง	0.40	0.45
ตอนที่ 2								
1.1	1	1	1	3	1	สอดคล้อง		
1.2	1	1	1	3	1	สอดคล้อง		
2.1	1	1	1	3	1	สอดคล้อง		
2.2	1	1	1	3	1	สอดคล้อง		
3	1	1	1	3	1	สอดคล้อง		
4	1	1	1	3	1	สอดคล้อง		

หมายเหตุ ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ KR-20 = 0.844

ภาคผนวก ค
คะแนนที่ได้จากการทดลอง

ตารางที่ ค.1 แสดงคะแนนสอบก่อนเรียนและคะแนนสอบหลังเรียนของกลุ่มตัวอย่าง

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียน 34 คะแนน	คะแนนสอบหลังเรียน 34 คะแนน
1	3	33
2	2	32
3	3	27
4	5	28
5	4	31
6	5	27
7	7	27
8	3	31
9	4	29
10	2	28
11	5	32
12	1	31
13	2	31
14	5	23
15	3	32
16	5	29
17	7	28
18	8	30
19	5	32
20	6	32
21	2	33
22	4	32
23	5	32
24	1	28
25	6	30
26	10	23

ตารางที่ ค.1 (ต่อ) แสดงคะแนนสอบก่อนเรียนและคะแนนสอบหลังเรียนของกลุ่มตัวอย่าง

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบก่อนเรียน 34 คะแนน	คะแนนสอบหลังเรียน 34 คะแนน
27	3	24
28	3	29
29	6	23
30	4	29
31	4	30
32	4	29
33	4	32
34	5	29
35	7	26
36	5	31
37	3	23
38	7	27
39	1	29
คะแนนเฉลี่ย	4.33	29.08

ตารางที่ ค.2 แสดงคะแนนทดสอบย่อยระหว่างเรียนของกลุ่มตัวอย่าง

นักเรียน คนที่	คะแนนที่นักเรียนสอบได้ในหน่วยการเรียนรู้ (คะแนนเต็ม 5 คะแนน)					คะแนนเฉลี่ย รายบุคคล
	หน่วยที่ 1	หน่วยที่ 2	หน่วยที่ 3	หน่วยที่ 4	หน่วยที่ 5	
1	5	4.5	5	5	5	4.9
2	4	3.5	4	5	3	3.9
3	4	4	4	5	5	4.4
4	4.5	5	3	4	1	3.5
5	4	5	4	5	5	4.6
6	4.5	5	4	5	5	4.7
7	5	5	4	5	5	4.8
8	4	4	5	5	5	4.6
9	4	3	2	5	5	3.8
10	4.5	4.5	5	5	5	4.8
11	5	5	5	5	5	5
12	4.5	5	5	5	5	4.9
13	5	5	4	5	5	4.8
14	4	4	4	4	0	3.2
15	4	4	4	5	5	4.4
16	4.5	5	5	4	5	4.7
17	5	5	5	5	5	5
18	5	5	4	5	5	4.8
19	5	5	5	4	5	4.8
20	5	5	4	5	5	4.8
21	5	5	5	5	5	5
22	5	4.5	5	5	5	4.9
23	5	5	5	5	5	5
24	5	5	5	5	5	5
25	4	5	5	3	5	4.4
26	5	5	5	5	5	4.8

ตารางที่ ค.2 แสดงคะแนนทดสอบย่อยระหว่างเรียนของกลุ่มตัวอย่าง

นักเรียน คนที่	คะแนนที่นักเรียนสอบได้ในหน่วยการเรียนรู้ (คะแนนเต็ม 5 คะแนน)					คะแนนเฉลี่ย รายบุคคล
	หน่วยที่ 1	หน่วยที่ 2	หน่วยที่ 3	หน่วยที่ 4	หน่วยที่ 5	
28	4.5	3.5	5	4	5	4.1
29	5	4	4	5	5	4.4
30	5	5	5	5	2	4.6
31	5	4.5	4	4	5	4.4
32	5	4.5	4	5	5	4.5
33	4	5	5	5	5	4.7
34	5	5	5	4	5	4.8
35	4.5	5	5	5	5	4.8
36	5	5	5	5	5	4.9
37	5	5	4	3	5	5
38	3.5	5	4	4	5	4.4
39	4.5	3.5	5	4	5	4.3

ภาคผนวก ง

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

- แผนการจัดการเรียนรู้แบบทีเอไอ เรื่องการหาค่าจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน
- แผนการจัดการเรียนรู้แบบทีเอไอ เรื่องสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน
- แผนการจัดการเรียนรู้แบบทีเอไอ เรื่องสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน (ต่อ)
- แผนการจัดการเรียนรู้แบบทีเอไอ เรื่องจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
- แผนการจัดการเรียนรู้แบบทีเอไอ เรื่องรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
- แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบทีเอไอ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

รายวิชาคณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค 32202

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จำนวน 16 ชั่วโมง

แผนการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การหาค่าจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 4 ชั่วโมง

1. สาระสำคัญ

การหาค่าจำนวนเชิงซ้อน สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน และค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- นักเรียนรู้ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน
- นักเรียนสามารถบอกได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนกำหนดได้ในรูปคู่อันดับ
- นักเรียนสามารถระบุส่วนประกอบของจำนวนเชิงซ้อนได้ถูกต้อง
- นักเรียนสามารถหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถนำสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน และการดำเนินการของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้แก้ปัญหาได้

ด้านทักษะกระบวนการ

- นักเรียนมีทักษะการทำงานเป็นกลุ่ม
- นักเรียนมีทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- นักเรียนมีทักษะการแก้ปัญหา

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- นักเรียนให้ความร่วมมือในการทำงานกลุ่ม
- นักเรียนมีความละเอียดรอบคอบและรับผิดชอบในการทำงาน

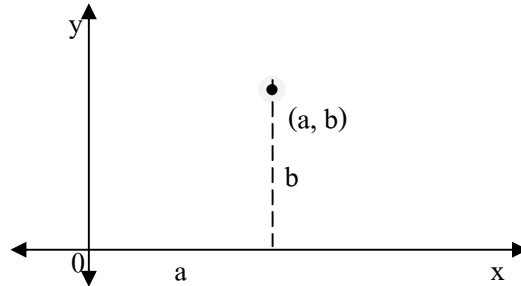
3. สาระการเรียนรู้

จำนวนเชิงซ้อน

นิยาม จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป $a + bi$
โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$ ถ้าให้ z แทน $a + bi$ แล้ว
 a เรียกว่า ส่วนจริง (real part) ของ z
 b เรียกว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z

ตัวอย่างที่ 1 $z = 2 - 4i$ จะมี $\text{Re}(z) = 2$ และ $\text{Im}(z) = -4$

เราสามารถแทนจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ ด้วยจุด (a, b) บนระนาบ xy ของระบบพิกัดฉากได้ดังรูป



แกน x เรียกว่า แกนจริง (real axis)

แกน y เรียกว่า แกนจินตภาพ (imaginary axis)

ระนาบ xy เรียกว่า ระนาบเชิงซ้อน (complex plane)

ดังนั้น รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ อาจเขียนได้ในรูปคู่อันดับ (a, b)

นิยาม จำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$

จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะเรียกจำนวนเชิงซ้อน $a - bi$ ว่าเป็นสังยุค (conjugate) ของ z และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z}$ นั่นคือ $\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi$

ตัวอย่างที่ 2

สังยุคของ $3 + 8i$ คือ $3 - 8i$ เขียนแทนด้วย $\overline{3 + 8i} = 3 - 8i$

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือจำนวนจริง $\sqrt{a^2 + b^2}$
เขียนแทนด้วย $|a + bi|$

ตัวอย่างที่ 3 ค่าสัมบูรณ์ของ $3 + 2i$ คือ $|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
 ค่าสัมบูรณ์ของ $2i$ คือ $|2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$
 ค่าสัมบูรณ์ของ -5 คือ $|-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$

4. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นเตรียม

- ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบและจัดกลุ่มนักเรียน กลุ่มละ 4 คนโดยความสามารถ
- ครูอธิบายข้อตกลงและเหตุผลในการเรียนรู้แบบทีเอไอว่าในแต่ละชั่วโมงจะต้องทำกิจกรรมตามขั้นตอนโดยนักเรียนให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมต่างๆช่วยเหลือกันนักเรียนที่เข้าใจเนื้อหามากกว่าให้คอยช่วยเหลือเพื่อนที่ไม่เข้าใจกลุ่ม เพื่อปลูกฝังความมีน้ำใจ การแสดงความคิดเห็นและการยอมรับฟังเหตุผลของผู้อื่น
- ครูอธิบายการทำกิจกรรมที่ 1 ให้นักเรียนทราบว่าในกิจกรรมนี้มีแบบฝึกทักษะจำนวน 3 ชุด โดยให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับให้ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 ถ้าไม่ผ่านเกณฑ์ให้แก้ไขจนกว่าจะผ่านเกณฑ์
- ครูให้นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบย่อยจำนวน 5 ข้อ และผลการทดสอบย่อยเป็นตัวกำหนดคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม
- ในชั่วโมงแรกครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบปรนัยก่อนเรียน จำนวน 20 ข้อ เรื่องจำนวนเชิงซ้อนเพื่อวัดความรู้พื้นฐานโดยใช้เวลา 30 นาที

ขั้นสอน

- ครูให้นักเรียนพิจารณาสมการกำลังสอง $i^2 + 1 = 0$ จะได้ $i^2 = -1$
- ครูถามนักเรียนว่ามีจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วได้ -1 หรือไม่ นักเรียนควรตอบได้ว่าไม่มี เนื่องจากไม่มีจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าน้อยกว่าศูนย์ นักคณิตศาสตร์จึงได้สร้างจำนวนชนิดใหม่เรียกว่า จำนวนเชิงซ้อนเพื่อใช้หาค่าของ x จากสมการ $i^2 = -1$ โดยกำหนดให้ i เป็นจำนวนที่สอดคล้องกับสมการ

$$i^2 + 1 = 0$$

$$i^2 = -1$$

$$\text{จะได้} \quad i = \sqrt{-1}$$

และเรียก i ว่ารากที่สองของ -1

- ครูอธิบายบทนิยามจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดไว้ในสาระการเรียนรู้พร้อมยกตัวอย่างประกอบคำนิยาม
- ครูและนักเรียนเปิดสื่อจีเอสพีหน่วยที่ 1 หน้าหลัก เลือกเมนู การหาค่าจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบ เพื่อศึกษาการเขียนจำนวนเชิงซ้อน ที่แทนด้วยคู่อันดับจำนวนจริง (a, b) ครูลากจุด z_1 ให้เคลื่อนที่ไปบนระนาบให้นักเรียนสังเกตการเปลี่ยนแปลงของพิกัดหน้าและพิกัดหลังของคู่อันดับ
- ครูอธิบายเกี่ยวกับการเขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดในสาระการเรียนรู้
- ครูอธิบายความหมายของจำนวนเชิงซ้อนที่มีแต่ส่วนจินตภาพเรียกว่าจำนวนจินตภาพแท้ และจำนวนที่มีแต่ส่วนจริงเรียกว่าจำนวนจริงแท้โดยใช้สื่อแสดงตัวอย่างและให้นักเรียนลองเลื่อนคูแล้วสังเกตค่าที่ได้
- ครูให้นักเรียนหาพิกัดของจุด $A - O$ แล้วตอบคำถามในใบกิจกรรมชุดที่ 1 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ข้อ 1 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจเรื่องคู่อันดับ (a, b)
- ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ข้อ 2 โดยใช้สื่อจีเอสพีหน่วยที่ 1 เมนูการตรวจสอบจำนวนเชิงซ้อนเป็นเครื่องมือ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเรื่องการเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปคู่อันดับของจำนวนจริง (a, b) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $a + bi$
- ครูให้นักเรียนแต่ละคู่เปิดสื่อหน่วยที่ 1 เลือกการหาค่าจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบแล้วให้นักเรียนสังเกตจุดบนระนาบพิกัดฉาก ครูใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนพิจารณาว่าจุดบนระนาบจะเท่ากันเมื่อใด (จุดบนระนาบ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อเป็นจุดเดียวกัน) และนำเสนอเนื้อหาการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนดังนี้

“**บทนิยาม** จำนวนเชิงซ้อน $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

โดยที่ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง”

- ครูให้นักเรียนตอบคำถามใบกิจกรรมที่ 1 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ข้อที่ 3 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจเรื่องการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน
- ครูอธิบายความหมายของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้สื่อเรื่องสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนแสดงตัวอย่างประกอบคำอธิบายแล้วตอบคำถามในใบกิจกรรมที่ 1 แบบฝึกทักษะชุดที่ 2 ข้อที่ 1

- ครูให้นักเรียนนำจำนวนเชิงซ้อนกับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้นมาคูณกัน ครูถามนักเรียนว่า ผลลัพธ์ที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือจำนวนจริง (ผลคูณจะเป็นจำนวนจริง) แล้วครูเฉลยคำตอบเพื่อความเข้าใจที่ตรงกันดังนี้

$$\begin{aligned}(a + bi)(a - bi) &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \quad (i^2 = -1)\end{aligned}$$

- ครูอธิบายความหมายของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนด้วยสื่อประกอบคำอธิบาย ซึ่งสื่อแสดงการหาขนาดของจำนวนเชิงซ้อน ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (0, 0) และจุดสิ้นสุดที่ (a, b)
- ครูให้นักเรียนตอบคำถามในใบกิจกรรมที่ 1 แบบฝึกทักษะชุดที่ 3 ข้อที่ 1 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจเรื่องค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ขั้นจัดกิจกรรม

- ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 1 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1 – 3 ร่วมกับการใช้สื่อจีเอสพีหน่วยที่ 1 นักเรียน 1 คู่ใช้สื่อคอมพิวเตอร์ 1 เครื่อง (แต่ละกลุ่มมีนักเรียน 2 คู่)
- ครูจะให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนไม่เข้าใจ นักเรียนทั้งกลุ่มรับฟังคำแนะนำและช่วยกันทำกิจกรรม แลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกันแล้วแลกเปลี่ยนใบกิจกรรมที่ทำแล้วกับคู่อีกคู่ในกลุ่มเดียวกันตรวจ

ขั้นตรวจสอบผลงาน

- ครูให้นักเรียนทุกคนแลกเปลี่ยนตรวจแบบฝึกทักษะกับอีกคู่หนึ่งที่อยู่ในกลุ่มของตนเอง โดยมีเงื่อนไขให้นักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1 ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 ขึ้นไปให้ทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 2 และ 3 ตามลำดับจนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65
- ครูแจ้งว่าถ้านักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะไม่ผ่านเกณฑ์ให้แก้ไขจนผ่านเกณฑ์ก่อนจึงทำแบบฝึกทักษะชุดต่อไป
- เมื่อทำแบบฝึกทักษะครบทุกชุดแล้วครูให้นักเรียนทุกคนแยกกันทำแบบทดสอบย่อย จำนวน 5 ข้อ

ขั้นสรุปบทเรียน

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปประเด็นต่าง ๆ เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนดังต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อนเขียนได้ 2 แบบ คือ ในรูปคู่อันดับ (a, b) และในรูปผลบวก $a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $i^2 = -1$ เรียก a ว่า ส่วนจริง และเรียก b ว่า ส่วนจินตภาพและกราฟของ $a + bi$ คือจุดในระนาบเชิงซ้อน หรือจุดปลายของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด (0, 0) และจุดปลายที่จุด (a, b) ซึ่ง

- ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้จำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ อยู่บนระนาบ และห่างจากแกน y ไปทางขวามือ $|a|$ หน่วย

- ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ จะได้จำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ อยู่บนระนาบ และห่างจากแกน y ไปทางซ้ายมือ $|a|$ หน่วย
- ถ้า b เป็นจำนวนจริงบวก จะได้จำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ อยู่บนระนาบ และห่างแกน x ขึ้นไปข้างบน $|b|$ หน่วย
- ถ้า b เป็นจำนวนจริงลบ จะได้จำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ อยู่บนระนาบ และห่างแกน x ลงไปข้างล่าง $|b|$ หน่วย

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือจำนวนจริง $\sqrt{a^2 + b^2}$ เขียนแทนด้วย $|a + bi|$

5. สื่อ/แหล่งเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
- โปรแกรมจีเอสพี หน่วยที่ 1
- ใบกิจกรรมที่ 1 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1, 2 และ 3
- คู่มือการใช้สื่อหน่วยที่ 1

แหล่งการเรียนรู้

- ห้องสมุดโรงเรียนบางบ่อวิทยาคม
- ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนบางบ่อวิทยาคม

6. การวัดและประเมินผล

- สังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ เช่น ความสนใจในการศึกษาใบกิจกรรม และแบบฝึกทักษะ
- ประเมินผลความเข้าใจ การดำเนินการแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และการตรวจสอบผลจากแบบฝึกทักษะชุดที่ 1, 2 และ 3
- ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนประจำหน่วยด้วยแบบทดสอบย่อยอัตราส่วน 5 ข้อ แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 4 คะแนน มีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

4 คะแนน	คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์
3 คะแนน	คำตอบถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำและการได้มาของคำตอบได้ไม่สมบูรณ์
2 คะแนน	คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำได้เพียงบางส่วน
1 คะแนน	คำตอบไม่ถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำได้บางส่วน
0 คะแนน	คำตอบไม่ถูกต้องและไม่แสดงวิธีทำ

7. บันทึกหลังสอน

คะแนนที่ได้จากการทำกิจกรรมของนักเรียนในเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

1. นักเรียนที่มีคะแนนมากกว่าหรือเท่ากับร้อยละ 65 จำนวน.....คน
2. นักเรียนที่มีคะแนนน้อยกว่าร้อยละ 65 จำนวน.....คน

คะแนนแบบทดสอบย่อยเป็นกลุ่ม

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมหลังสอนสำหรับผู้สอน

.....

.....

ลงชื่อผู้สอน

บันทึกความเห็นของผู้ตรวจสอบแผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางอังคณา จันทร์แก้ว)

หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ใบกิจกรรมที่ 1 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การหาค่าจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- ให้นักเรียนทราบความหมายของจำนวนเชิงซ้อน
- นักเรียนสามารถระบุส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนได้

คำสั่ง จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนหาพิกัดของจุดต่างๆที่กำหนดให้ในสื่อจีเอสพี

พิกัดของจุด A คือ (.....,), B คือ (.....,), C คือ (.....,),
D คือ (.....,), E คือ (.....,), F คือ (.....,),
G คือ (.....,), H คือ (.....,), I คือ (.....,),
J คือ (.....,), K คือ (.....,), L คือ (.....,),
M คือ (.....,), N คือ (.....,), O คือ (.....,)

2. ใช้โปรแกรมจีเอสพี สํารวจและหาพิกัดของจำนวนเชิงซ้อนแต่ละจำนวนต่อไปนี้ แล้วเขียนให้อยู่ในรูป $a + bi$ และระบุส่วนจริง ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนให้ถูกต้อง

$A = (2, 0) = 2 + 0i$ ส่วนจริงคือ 2 ส่วนจินตภาพ คือ 0

$B = (.....,)$ = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

$C = (.....,)$ = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

$D = (.....,)$ = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

$E = (.....,)$ = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

$F = (.....,)$ = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

$I = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$ ส่วนจริงคือ $\dots\dots\dots$ ส่วนจินตภาพ คือ $\dots\dots\dots$

J = (.....,) = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

K = (.....,) = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

$L = (\dots, \dots) = \dots$ ส่วนจริงคือ $\dots$ ส่วนจินตภาพ คือ $\dots$

M = (.....,) = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

$N = (\dots, \dots) = \dots$ ส่วนจริงคือ $\dots$ ส่วนจินตภาพ คือ $\dots$

$O = (\dots, \dots) = \dots$ ส่วนจริงคือ $\dots$ ส่วนจินตภาพ คือ $\dots$

$P = (\dots, \dots) = \dots$ ส่วนจริงคือ $\dots$ ส่วนจินตภาพ คือ $\dots$

Q = (.....,) = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

R = (.....,) = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

S = (.....,) = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

T = (.....) = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

U = (.....) = ส่วนจริงคือ ส่วนจินตภาพ คือ

$V = (\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$ ส่วนจริงคือ $\dots\dots\dots$ ส่วนจินตภาพ คือ $\dots\dots\dots$

$F = (\dots, \dots) = \dots$ ส่วนจริงคือ $\dots$ ส่วนจินตภาพ คือ $\dots$

3. จงหาค่า x, y จากจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

a) $(5, 7) = (x, y)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) $(3x, 16) = (6, -2y)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) $2x - 3yi = 4 + 6i$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

d) $x + y - 2xyi = 5 - 12i$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

สรุป

- ถ้า $z_1 = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ $\text{Re}(z_1) = \dots\dots\dots \text{Im}(z_1) = \dots\dots\dots$

- ถ้า $z_2 = (a, b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ $\text{Re}(z_2) = \dots\dots\dots \text{Im}(z_2) = \dots\dots\dots$

- จำนวนเชิงซ้อน $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $\dots\dots\dots$ และ $\dots\dots\dots$

โดยที่ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

ใบกิจกรรมที่ 1 แบบฝึกทักษะชุดที่ 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การหาค่าจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้

1) ให้นักเรียนตอบคำถามโดยใช้สื่อจีเอสพีเรื่องสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนประกอบ

- จำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด $z_1 = \dots\dots\dots$
- สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน z_1 ใช้สัญลักษณ์คือ.....
- สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ที่จุดปลายเวกเตอร์แสดงทิศทางคือ..... ซึ่ง
สะท้อน กับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ที่จุดปลายเวกเตอร์แสดงทิศทางโดยมีแกน
.....เป็นเส้นสะท้อน
- จงตอบคำถาม

ถ้า $z_1 = (-2, 1)$ แล้ว $\bar{z}_1 = \dots\dots\dots$

ถ้า $z_2 = (-5, -1)$ แล้ว $\bar{z}_2 = \dots\dots\dots$

ถ้า $z_3 = 2+3i$ แล้ว $\bar{z}_3 = \dots\dots\dots$

ถ้า $z_4 = -3-4i$ แล้ว $\bar{z}_4 = \dots\dots\dots$

ถ้า $z_5 = 4-9i$ แล้ว $\bar{z}_5 = \dots\dots\dots$

สรุป

ถ้า $z_1 = a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ จะได้สังยุค (conjugate) ของ z_1 คือ
.....และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์.....

ถ้า $z_2 = (a, b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ จะได้สังยุค (conjugate) ของ z_2 คือ
.....และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์.....

ใบกิจกรรมที่ 1 แบบฝึกทักษะชุดที่ 3

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การหาค่าจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้

1) ให้นักเรียนหาขนาดของจำนวนเชิงซ้อนโดยปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

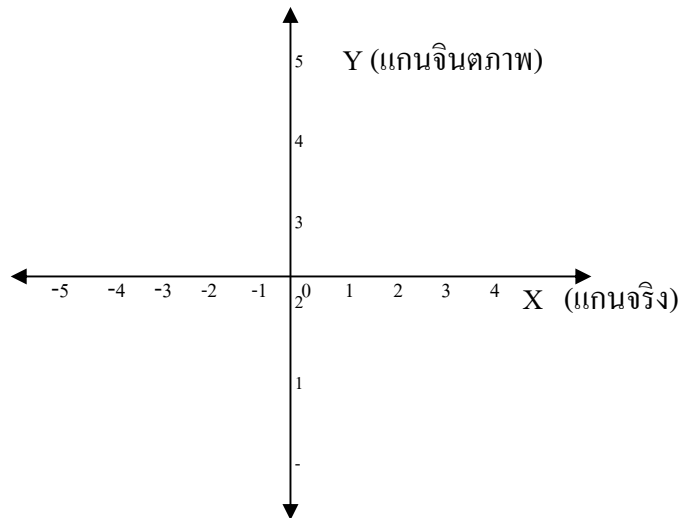
- จุด ก มีระยะห่างจากเส้นตรงแนวนอนที่ผ่านจุดกำเนิดเป็นระยะ.....
- จุด ก มีระยะห่างจากเส้นตรงแนวตั้งที่ผ่านจุดกำเนิดเป็นระยะ.....
- จุด ก มีพิกัด คือ (.....,)
- จุด ก มีระยะห่างจากจุดกำเนิด เป็นระยะ.....หน่วย
ซึ่งหาโดย.....
- จุด ก มีพิกัด คือ (.....,)
- จุด ก มีระยะห่างจากจุดกำเนิด เป็นระยะ.....หน่วย
ซึ่งหาโดย.....
- จุด ข มีพิกัด คือ (.....,)
- จุด ข มีระยะห่างจากจุดกำเนิด เป็นระยะ.....หน่วย
ซึ่งหาโดย.....
- จุด ค มีพิกัด คือ (.....,)
- จุด ค มีระยะห่างจากจุดกำเนิด เป็นระยะ.....หน่วย
ซึ่งหาโดย.....
- จุด ง มีพิกัด คือ (.....,)
- จุด ง มีระยะห่างจากจุดกำเนิด เป็นระยะ.....หน่วย
ซึ่งหาโดย.....
- จุด ก, ข, ค และ ง มีระยะห่างจากจุดกำเนิด สัมพันธ์กันอย่างไร
-

2) จงคำนวณและวาดรูปประกอบการหาคำตอบค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

I. ค่าสัมบูรณ์ของ -4 เท่ากับ

.....

และกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ $|-4|$ จะได้

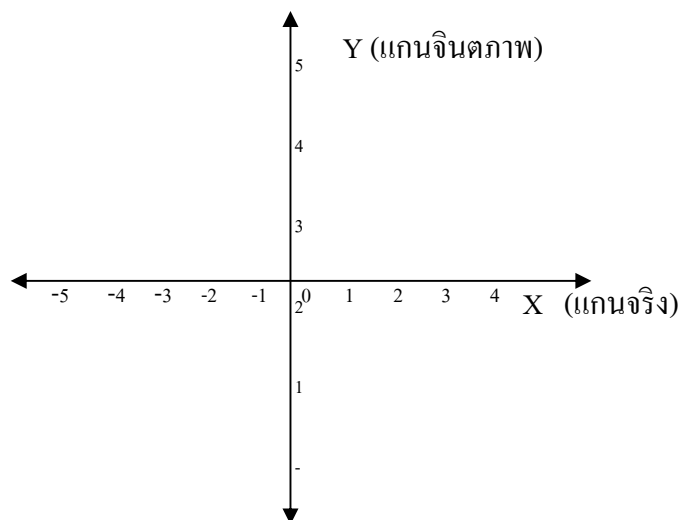


กราฟที่ได้คือจุดบนเส้นรอบวงที่มีรัศมีเท่ากับ.....

II. ค่าสัมบูรณ์ของ $-3i$ เท่ากับ

.....และ

กราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ $|-3i|$ จะได้

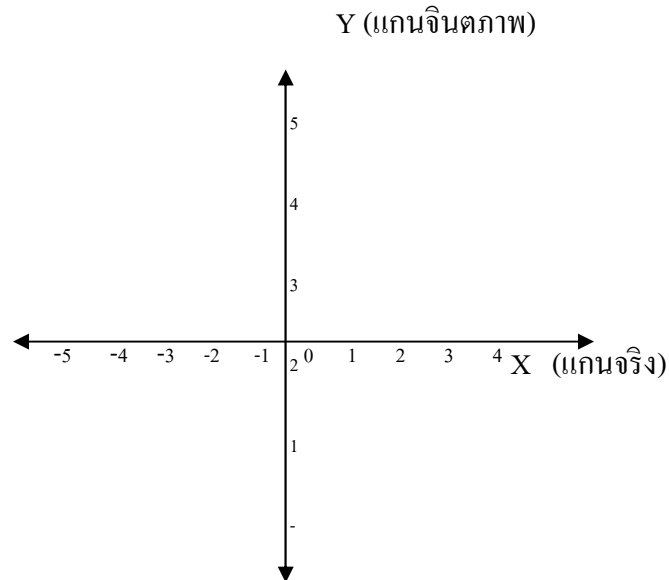


กราฟที่ได้คือจุดบนเส้นรอบวงที่มีรัศมีเท่ากับ.....

III. ค่าสัมบูรณ์ของ $3 + 2i$ เท่ากับ

.....

และกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ $|3 + 2i|$ จะได้

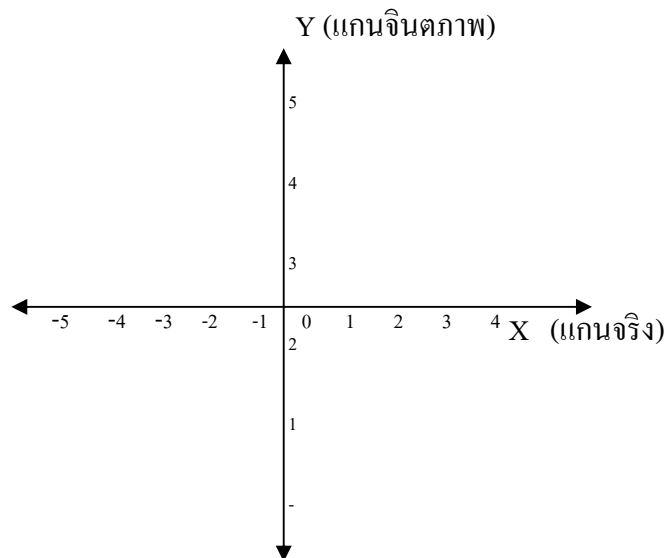


กราฟที่ได้คือจุดบนเส้นรอบวงที่มีรัศมีเท่ากับ.....

IV. ค่าสัมบูรณ์ของ $2 + 2i$ เท่ากับ

.....

และกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ $|2 + 2i|$ จะได้



กราฟที่ได้คือจุดบนเส้นรอบวงที่มีรัศมีเท่ากับ.....

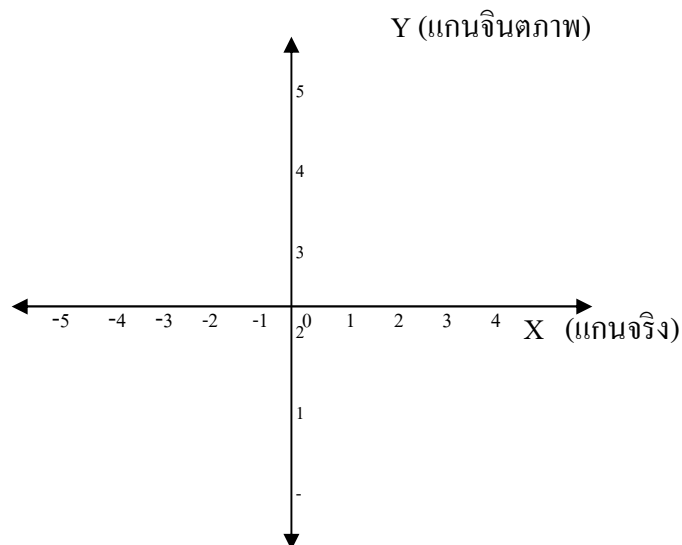
แบบทดสอบย่อย

เรื่อง การหาค่าจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน จำนวน 5 ข้อ

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

- 1) จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $(\sqrt{2}, -4)$ ให้อยู่ในรูป $a + bi$
- 2) จำนวนเชิงซ้อน $\pi + 3\pi i$ มี $\text{Re}(z_1) = \dots\dots\dots \text{Im}(z_1) = \dots\dots\dots$
- 3) จงแสดงกราฟจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = 4i$, $z_2 = 1 - 3i$ และ $z_3 = -2 - i$ ลงบนระนาบ
เชิงซ้อน



- 4) $\overline{-3 + 8i} = \dots\dots\dots$
.....
- 5) $|-5 + 12i| = \dots\dots\dots$
.....

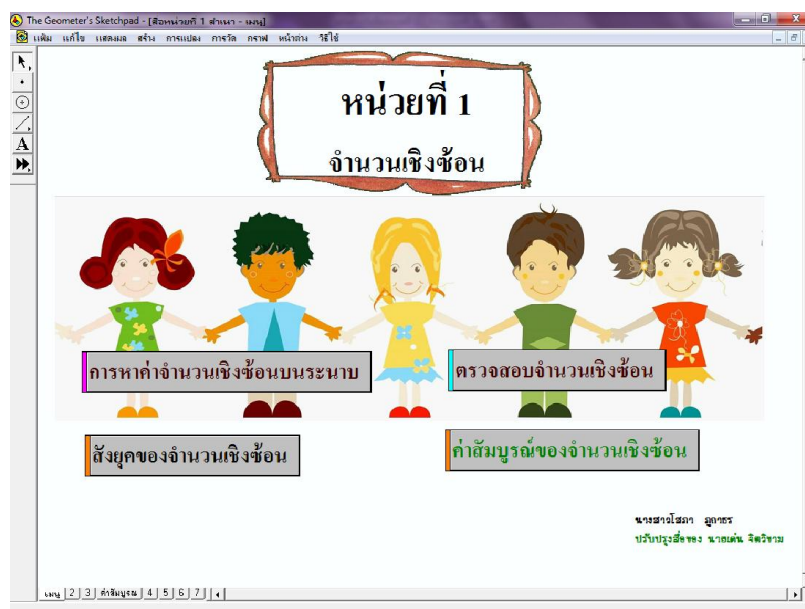
คู่มือการใช้สื่อหน่วยที่ 1

จุดประสงค์การเรียนรู้

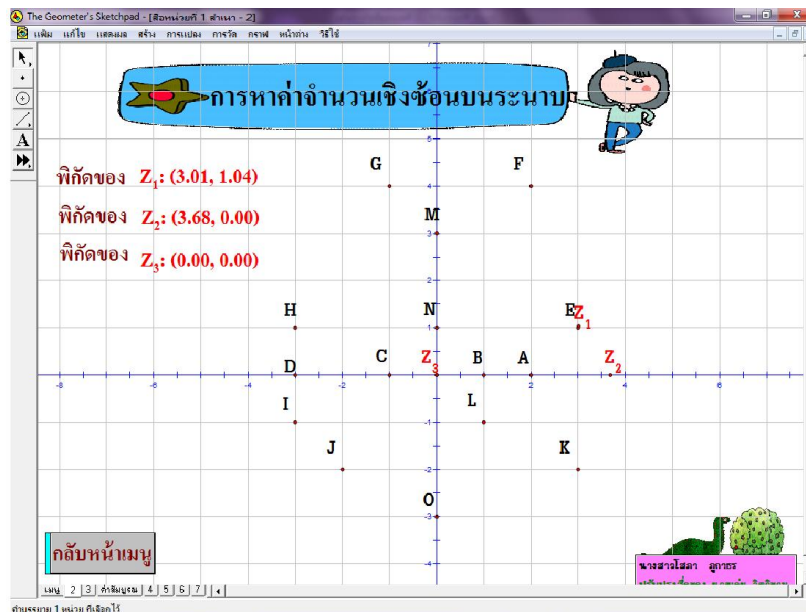
- นักเรียนรู้ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน
- นักเรียนสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปคู่อันดับได้
- นักเรียนสามารถระบุส่วนประกอบของจำนวนเชิงซ้อนได้ถูกต้อง
- นักเรียนสามารถหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถนำสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน และการดำเนินการของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้แก้ปัญหาได้

ขั้นตอนการใช้สื่อหน่วยที่ 1

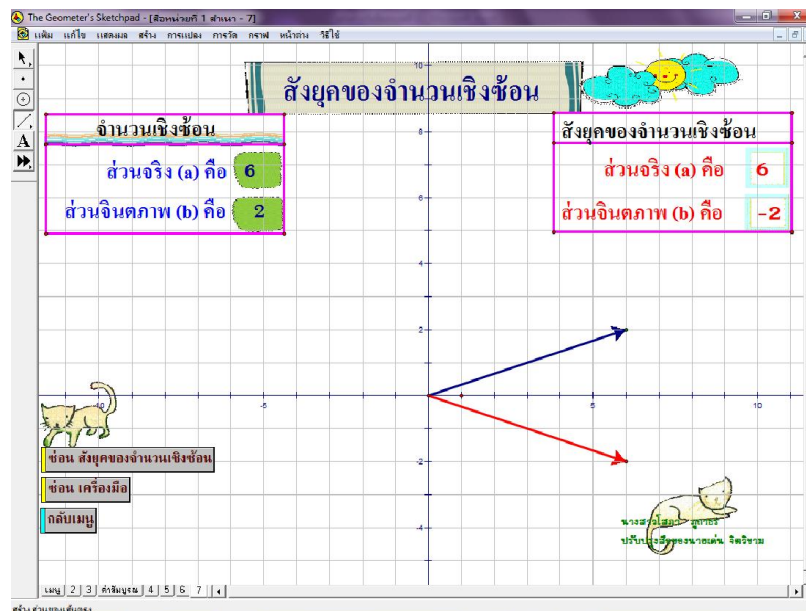
- 1) เปิดไฟล์หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เปิดหน้าเมนู



- 2) เลือกปุ่ม “การหาค่าจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบ”
- 3) ให้นักเรียนหาค่าพิกัดของจุดต่างๆ ที่กำหนดให้ และตอบคำถามในแบบฝึกทักษะชุดที่ 1 โดยพิจารณาจากเส้นกริดของโปรแกรมที่ตั้งฉากกับแกนแนวนอน และแกนแนวตั้ง



- 4) ให้นักเรียนคลิกที่จุด z_1 , z_2 และ z_3 เลื่อนไปบนระนาบ เพื่อสำรวจการเปลี่ยนแปลงค่าพิกัดของจำนวนทั้งสามแล้วตอบคำถามในแบบฝึกทักษะชุดที่ 1
- 5) เมื่อศึกษาและฝึกปฏิบัติตามกิจกรรมเสร็จแล้วให้คลิก “กลับหน้าเมนู” เพื่อกลับหน้าเมนู
- 6) เปิดไฟล์หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เปิดหน้าเมนูเลือก “สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน”



- 7) ให้นักเรียนกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 1 จำนวนแล้วเลือก “แสดงสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน”
- 8) ให้นักเรียนสังเกตสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนโดยเปรียบเทียบกับจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ แล้วตอบคำถามในแบบฝึกทักษะชุดที่ 2

- 9) ให้นักเรียนเลือกปุ่ม “ตัวอย่างการหาขนาดของจำนวนเชิงซ้อน” เพื่อหาขนาดของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด



- 10) ให้นักเรียนเลือกปุ่มคำสั่ง “การเคลื่อนที่ของเวกเตอร์” แล้วคลิกที่ปุ่มเดิมอีกครั้งเพื่อให้เวกเตอร์หยุดการเคลื่อนที่โดยจุด A ไม่ทับกับจุด ก, ข, ค และ ง แล้วตอบคำถามในแบบฝึกทักษะชุดที่ 3
- 11) เมื่อศึกษาเสร็จแล้วให้เลือก “กลับหน้าเมนู” เพื่อกลับหน้าเมนู

#####

แผนการจัดการเรียนรู้แบบทีเอไอ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

รายวิชาคณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค 32202

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จำนวน 16 ชั่วโมง

แผนการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 3 ชั่วโมง

1. สาระสำคัญ

สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- นักเรียนสามารถหาผลบวก ผลลบ ของจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถหาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดได้

ด้านทักษะกระบวนการ

- นักเรียนมีทักษะการทำงานเป็นกลุ่ม
- นักเรียนมีทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- นักเรียนมีทักษะการแก้ปัญหา

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- นักเรียนให้ความร่วมมือในการทำงานกลุ่ม
- นักเรียนมีความละเอียดรอบคอบและรับผิดชอบในการทำงาน

3. สาระการเรียนรู้ (หนังสือเรียน สสวท.)

สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

และกำหนดการบวกของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

$$\text{การบวกกันของ } (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

เอกลักษณ์และตัวผกผันการบวก

(0, 0) เป็นเอกลักษณ์การบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a, b)

$$\text{เพราะว่า } (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0)$$

$$\begin{aligned}
 &= (a, b) \\
 \text{และ} \quad (0, 0) + (a, b) &= (0+a, 0+b) \\
 &= (a, b)
 \end{aligned}$$

เป็นตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a, b)

$$\begin{aligned}
 \text{เพราะว่า} \quad (a, b) + (-a, -b) &= (a-a, b-b) \\
 &= (0, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ} \quad (-a, -b) + (a, b) &= (-a+a, -b+b) \\
 &= (0, 0)
 \end{aligned}$$

หรือ $-a - bi$ เป็นตัวผกผันการบวกของ $a + bi$ ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย $-z$ ดังนั้น $-(a + bi) = -a - bi$

ตัวอย่างที่ 1	ตัวผกผันการบวกของ	$(2, 3)$	คือ $(-2, -3)$
	ตัวผกผันการบวกของ	$5 + 5i$	คือ $-5 - 5i$
	ตัวผกผันการบวกของ	$-3 + 2i$	คือ $3 - 2i$

การลบจำนวนเชิงซ้อน

$$\text{บทนิยาม} \quad z - w = z + (-w)$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z, w ใดๆ

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $(1 - 3i) - (5 - i)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad (1 - 3i) - (5 - i) &= (1 - 3i) + [-(5 - i)] \\
 &= (1 - 5) + (-3 - (-1))i \\
 &= -4 - 2i
 \end{aligned}$$

4. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นเตรียม

- ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบและให้นักเรียนนั่งเป็นกลุ่มที่จัดไว้
- ครูทบทวนข้อตกลงและเหตุผลในการเรียนรู้แบบทีเอไอ และให้นักเรียนตรวจสอบความพร้อมของคอมพิวเตอร์ที่ใช้เรียน
- ครูอธิบายการทำกิจกรรมที่ 2 ให้นักเรียนทราบว่าในกิจกรรมนี้มีแบบฝึกทักษะจำนวน 3 ชุด โดยให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับให้ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 ถ้าไม่ผ่านเกณฑ์ให้แก้ไขจนกว่าจะผ่านเกณฑ์

- ครูให้นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบย่อยจำนวน 5 ข้อ และผลการทดสอบย่อยเป็นตัวกำหนดคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม
- ครูทบทวนความรู้เดิม เรื่องการหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนและค่าสัมบูรณ์จำนวนเชิงซ้อน
- ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่องเอกลักษณ์การบวกในระบบจำนวนจริง คือ 0 และ ใช้คำถามให้นักเรียนวิเคราะห์ว่าในระบบจำนวนเชิงซ้อน เอกลักษณ์การบวกคือจำนวนใด โดยครูแนะแนวทางในการวิเคราะห์

ขั้นสอน

การบวกจำนวนเชิงซ้อน

- ครูให้นักเรียนเปิดสื่อหน่วยที่ 1 หน้าเมนู แล้วเลือกปุ่ม การบวกจำนวนเชิงซ้อน เพื่อศึกษาการบวกจำนวนเชิงซ้อน
- ครูให้นักเรียนกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน เมื่อนำมาบวกกัน ครูให้นักเรียนสังเกตผลลัพธ์ที่ได้โดยพิจารณาส่วนจริงและส่วนจินตภาพ แล้วครูให้นักเรียนตอบคำถามในใบกิจกรรมที่ 2 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ข้อที่ 1 เพื่อให้นักเรียนสรุปได้ว่าการบวกของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

โดยที่ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

- ครูให้นักเรียนหาผลบวกจำนวนเชิงซ้อนในใบกิจกรรมที่ 2 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ข้อที่ 2 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจการบวกจำนวนเชิงซ้อนตามนิยามที่ศึกษาไปแล้ว

เอกลักษณ์การบวกจำนวนเชิงซ้อน

- ครูให้นักเรียนเปิดสื่อหน่วยที่ 2 หน้าเมนู เลือก ตรวจสอบเอกลักษณ์และตัวผกผันการบวก เพื่อศึกษาเอกลักษณ์การบวกและตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน โดยครูอธิบายปุ่มคำสั่งต่างๆ ให้นักเรียนเข้าใจ และตอบข้อซักถามของนักเรียนเกี่ยวกับสื่อ
- ครูกำหนดจำนวนเชิงซ้อนขึ้นมา 1 จำนวน ให้นักเรียนในแต่ละคู่ช่วยกันหาจำนวนเชิงซ้อนอีกจำนวนหนึ่งซึ่งนำมาบวกกันแล้วผลลัพธ์ได้จำนวนเชิงซ้อนเดิม (จำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์คือจำนวนที่แทนจุดปลายเวกเตอร์ที่มีสีแดง)
- ครูกำหนดจำนวนเชิงซ้อนอีก 2-3 จำนวน ที่แตกต่างกัน ให้นักเรียนหาจำนวนเชิงซ้อนอีกจำนวนที่มีสมบัติดังกล่าว เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ และสามารถสรุปได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นเอกลักษณ์ของการบวกมีสมบัติดังนี้ $(0, 0) + (a, b) = (a, b) + (0, 0) = (a, b)$

ตัวอย่างเช่น $(1, 5) + (0, 0) = (1 + 0, 5 + 0) = (1, 5)$

$(0, 0) + (1, 5) = (0 + 1, 0 + 5) = (1, 5)$

$$\text{นั่น คือ } (1, 5) + (0, 0) = (0, 0) + (1, 5) = (1, 5)$$

- ครูใช้คำถามเพื่อแนะแนวทางให้นักเรียนสรุปได้ว่า $(0, 0)$ เป็นเอกลักษณ์การบวกในระบบจำนวนเชิงซ้อน

ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

- ครูทบทวนความรู้เดิมที่ว่า ตัวผกผันการบวกของจำนวนจริงใด ๆ คือจำนวนที่นำมาบวกกับจำนวนนั้นแล้วได้เอกลักษณ์การบวก แล้วถามนักเรียนว่าตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a, b) หมายถึงจำนวนใด แล้วให้นักเรียนร่วมกันแสดงความคิดเห็น
- ครูสรุปว่า ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a, b) หมายถึง จำนวนเชิงซ้อนที่บวกกับ (a, b) แล้วได้ เอกลักษณ์การบวกซึ่งในระบบจำนวนเชิงซ้อน คือ $(0, 0)$
- ครูให้นักเรียนเปิดสื่อจีเอสพีหน่วยที่ 2 เลือกการบวกจำนวนเชิงซ้อนประกอบคำอธิบายการหาตัวผกผันการบวก
- ครูกำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันดังตัวอย่างที่ 1 แล้วให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มหาจำนวนเชิงซ้อนอีกจำนวนหนึ่งที่มีสมบัติการบวกกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้แล้วมีผลลัพธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แทนด้วยจุดกำเนิด (เวกเตอร์ผลลัพธ์แทนด้วยจุดปลายเวกเตอร์สีแดง)
- ครูเฉลยคำตอบพร้อมทั้งให้นักเรียนสังเกตจำนวนเชิงซ้อนที่มีสมบัติดังกล่าว
- ครูใช้คำถามเพื่อแนะแนวทางจนกระทั่งนักเรียนสามารถสรุปได้ว่าจำนวนเชิงซ้อน ที่เป็นตัวผกผันการบวก มีสมบัติดังนี้

$$\text{พิจารณา } (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$$

$$(-a, -b) + (a, b) = (-a + a, -b + b) = (0, 0)$$

เรากล่าวว่า $(-a, -b)$ เป็นตัวผกผันการบวกของ (a, b)

หรือ $-a - bi$ เป็นตัวผกผันการบวกของ $a + bi$

ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย $-z$

- ครูให้นักเรียนตอบคำถามในใบกิจกรรมที่ 2 แบบฝึกหัดทักษะชุดที่ 2 ข้อที่ 1 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจและฝึกการคิดวิเคราะห์การหาตัวผกผันการบวกโดยการให้เหตุผลอธิบายเกี่ยวกับการหาคำตอบที่ได้

หาผลลบจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ตัวผกผันการบวก

- ครูแสดงการลบจำนวนเชิงซ้อนดังตัวอย่างที่ 2
- ครูให้นักเรียนหาตัวผกผันการลบของจำนวนเชิงซ้อนตัวลบ แล้วให้นักเรียนหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนของตัวตั้งกับตัวผกผันการลบของจำนวนเชิงซ้อนตัวลบ

- ครูให้นักเรียนใช้สื่อหน่วยที่ 2 หน้าเมนู เลือกตรวจสอบผลลโดยตัวผกผันการบวก เพื่อให้ นักเรียนตรวจสอบผลลโดยใช้ตัวผกผันการบวก
- ครูใช้คำถามเพื่อแนะแนวทางจนนักเรียนสรุปได้ว่า การลบจำนวนเชิงซ้อนด้วยตัวผกผันการบวกดังนี้

บทนิยาม $z - w = z + (-w)$ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z, w ใดๆ

- ครูให้นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบในใบกิจกรรมที่ 2 แบบฝึกทักษะชุดที่ 2 ข้อที่ 2 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจการหาผลลบจำนวนเชิงซ้อน
- ครูให้นักเรียนหาผลลัพธ์การบวกและการลบจำนวนเชิงซ้อนในใบกิจกรรมที่ 3 โดยการเติมคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งหาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์ที่ได้ เพื่อฝึกทักษะการคิด และการวิเคราะห์หาเหตุผล

ขั้นจัดกิจกรรม

- ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ทำใบกิจกรรมที่ 2 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1—3 ร่วมกับการใช้สื่อจีเอสพี หน่วยที่ 2 นักเรียน 1 คู่ใช้สื่อคอมพิวเตอร์ 1 เครื่อง โดยมีครูคอยแนะนำอยู่หน้าห้องแล้วอธิบายให้นักเรียนศึกษาสื่อไปพร้อมๆ กัน
- ครูจะให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนไม่เข้าใจ โดยนักเรียนทั้งกลุ่มรับฟังคำแนะนำแล้วช่วยกันทำกิจกรรม แลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดเห็นซึ่งกันและกันในกลุ่มของตนแล้วช่วยกันทำกิจกรรม แล้วแลกเปลี่ยนใบกิจกรรมที่ทำแล้วกับคู่ที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันตรวจ

ขั้นตรวจสอบผลงาน

- ครูให้นักเรียนทุกคนแลกเปลี่ยนตรวจแบบฝึกทักษะกับอีกคู่ที่อยู่ในกลุ่มของตนเอง ถ้านักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1 ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 ขึ้นไปให้ทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 2 และ 3 ตามลำดับจนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65
- ครูแจ้งว่าเงื่อนไขการผ่านเกณฑ์ของแบบฝึกทักษะแต่ละชุดคือ ถ้านักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะไม่ผ่านเกณฑ์ให้แก้ไขจนผ่านเกณฑ์ก่อนแล้วจึงทำแบบฝึกทักษะชุดต่อไป
- เมื่อทำแบบฝึกทักษะครบทุกชุดแล้วครูให้นักเรียนทุกคนแยกกันทำแบบทดสอบย่อย จำนวน 5 ข้อ

สรุปบทเรียน

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปจำนวนเชิงซ้อนในประเด็นต่อไปนี้

- การบวก และการลบจำนวนเชิงซ้อน
- เอกลักษ์ณ์และตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

6. สื่อ/แหล่งเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
- โปรแกรมจีเอสพี หน่วยที่ 2
- ใบกิจกรรมที่ 2 ชุดที่ 1, 2 และ 3
- คู่มือการใช้สื่อหน่วยที่ 2

แหล่งการเรียนรู้

- ห้องสมุดโรงเรียนบางบ่อวิทยาคม
- ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนบางบ่อวิทยาคม

7. การวัดและประเมินผล

- สังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ เช่น ความสนใจในการศึกษาใบกิจกรรม และแบบฝึกทักษะ
- ประเมินผลความเข้าใจ การดำเนินการแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และการตรวจสอบผลจากแบบฝึกทักษะชุดที่ 1, 2 และ 3
- ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนประจำหน่วยด้วยแบบทดสอบย่อยอัตนัยจำนวน 5 ข้อ แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 4 คะแนน มีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

4 คะแนน	คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำได้ถูกต้องสมบูรณ์
3 คะแนน	คำตอบถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำและการได้มาของคำตอบได้ไม่สมบูรณ์
2 คะแนน	คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำได้เพียงบางส่วน
1 คะแนน	คำตอบไม่ถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำได้บางส่วน
0 คะแนน	คำตอบไม่ถูกต้อง และไม่แสดงวิธีทำ

8. บันทึกหลังสอน

คะแนนที่ได้จากการทำกิจกรรมของนักเรียนในเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

3. นักเรียนที่มีคะแนนมากกว่าหรือเท่ากับร้อยละ 65 จำนวน.....คน
4. นักเรียนที่มีคะแนนน้อยกว่าร้อยละ 65 จำนวน.....คน

คะแนนแบบทดสอบย่อย เป็นกลุ่ม

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

ปัญหา/อุปสรรค

.....

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมหลังสอนสำหรับผู้สอน

.....

ลงชื่อผู้สอน

บันทึกความเห็นของผู้ตรวจสอบแผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางอังคณา จันทรแก้ว)

หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ใบกิจกรรมที่ 2 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหาผลบวกจำนวนเชิงซ้อนได้

1. **คำชี้แจง :** ให้นักเรียนใช้โปรแกรมจีโอสปี ตรวจสอบผลลัพธ์ของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้
 - a) จำนวนเชิงซ้อน z_1 ที่กำหนด คือ.....จำนวนเชิงซ้อน z_2 คือ.....
 - b) จำนวนเชิงซ้อน z_1 มีส่วนจริงเท่ากับ.....และห่างจากจุดกำเนิดในแนวนอนเป็นระยะ.....หน่วย
 - c) จำนวนเชิงซ้อน z_2 มีส่วนจริงเท่ากับ.....และห่างจากจุดกำเนิดในแนวนอนเป็นระยะ.....หน่วย
 - d) จำนวนเชิงซ้อน z_1 มีส่วนจินตภาพเท่ากับ.... และห่างจากจุดกำเนิดในแนวตั้งเป็นระยะ.....หน่วย
 - e) จำนวนเชิงซ้อน z_2 มีส่วนจินตภาพเท่ากับ.... และห่างจากจุดกำเนิดในแนวตั้งเป็นระยะ.....หน่วย
 - f) จำนวนเชิงซ้อน z_1+z_2 มีส่วนจริงเท่ากับ....และห่างจากจุดกำเนิดในแนวนอนเป็นระยะ.....หน่วย
 - g) จำนวนเชิงซ้อน z_1+z_2 มีส่วนจินตภาพเท่ากับ....และห่างจากจุดกำเนิดในแนวตั้งเป็นระยะ...หน่วย
 - h) จำนวนเชิงซ้อน z_1+z_2 คือ.....
 - i) ระยะห่างของจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 กับระยะห่างของจำนวนเชิงซ้อน z_1+z_2 มีความสัมพันธ์อย่างไรจากเส้นตรงแนวตั้ง.....
 - j) ระยะห่างของจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 กับระยะห่างของจำนวนเชิงซ้อน z_1+z_2 มีความสัมพันธ์อย่างไรจากเส้นตรงแนวนอน.....

สรุป จำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าเท่ากับ $(a, b) + (c, d)$ คือ

หรือ $(a + bi) + (c + di)$ มีค่าเท่ากับโดยที่ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง



2. จงหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปของ $a + bi$

a) $(4 + 2i) + (3 + 8i) =$

.....

b) $(-5 + 4i) + (-2 - 3i) =$

.....

c) $(-3 - 7i) + (-2 - 3i) =$

.....

d) $(2 - \sqrt{2}i) + (5 + \sqrt{8}i) =$

.....

e) $(-7 + 4i) + (5 - 8i) =$

.....

f) $(2 - 5i) + (4 + 2i) =$

.....

g) $4(2 - 4i) + (-2 - 8i) =$

.....

h) $\frac{1}{2}(4 - 3i) + \frac{3}{2}(-2 - i) =$

.....

ใบกิจกรรมที่ 2 แบบฝึกทักษะชุดที่ 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหาผลตัวผกผันการบวกจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถหาผลลบของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนได้

1. จงหาเอกลักษณ์การบวกและตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้

จำนวนเชิงซ้อน	ตัวผกผันการบวก	เหตุผล
$(3,7)$		
$1-7i$		
$-\sqrt{5}i$		
$\sqrt{2}+i$		
$-\pi$		
$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}i$		
$-3-2i$		
3		
$-9\pi+\pi i$		

2. จงหาผลลบของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปของ $a + bi$

a) $(4 + 2i) - (3 + 8i) =$

.....

b) $(-5 + 4i) - (-2 - 3i) =$

.....

c) $(-3\pi - 7i) - (-2\pi - 3i) =$

.....

d) $(2 - \sqrt{2}i) - (5 + \sqrt{8}i) =$

.....

e) $(-7 + 4i) - (5 - 8i) =$

.....

f) $(2 - 5i) - (4 + 2i) =$

.....

g) $4(2 - 4i) - (-2 - 8i) =$

.....

h) $\frac{1}{2}(4 - 3i) - \frac{3}{2}(-2 - i) =$

.....

ใบกิจกรรมที่ 2 แบบฝึกทักษะชุดที่ 3

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหาผลบวก ผลลบของจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถหาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนได้

คำสั่ง จงเติมตารางให้สมบูรณ์

จำนวนเชิงซ้อน	ผลลัพธ์	ตัวผกผันการบวกของ ผลลัพธ์
$(2, -1) + (-3, 1)$		
$(-1, 5) + (0, 2)$		
$(2\sqrt{3}, 1) + (4\sqrt{3}, -3)$		
$(3 + 2i) + (-5 - i)$		
$(-8, -11) - (3, -2)$		
$(4, -5) - (\sqrt{5}, 6)$		
$(2 - i) - (-2 - 5i)$		
$(-7 + 3i) - (2 - 5i)$		
$(8 - i) - (-3 + 5i) + (2 - 7i)$		
$\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{2}i\right) + \left(\frac{5}{9} - \frac{2}{10}i\right) - \left(\frac{4}{3} + 5i\right)$		

แบบทดสอบย่อย

เรื่อง สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน จำนวน 5 ข้อ

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

1) จงหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน

$$- (4 + 2i) + (3 - 8i) = \dots\dots\dots$$

$$- (-4\pi + 2i) + (3\pi - 8i) = \dots\dots\dots$$

2) จงหาผลลบของจำนวนเชิงซ้อน

$$- (\sqrt{8} + 3i) - (\sqrt{2} - i) = \dots\dots\dots$$

$$- (-8 + 3i) - (-2 - i) = \dots\dots\dots$$

3) $(a + bi) + (\dots\dots\dots) = (0 + 0i)$

เหตุผล.....

.....

4) ตัวผกผันการบวกของ $\left(\frac{-2}{5} + \frac{-1}{3}i\right)$ คือ

.....

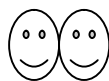
เหตุผล.....

.....

5) $(\pi - \pi i) - (2\pi - \pi i) + (-\pi + \pi i) = \dots\dots\dots$

.....

.....



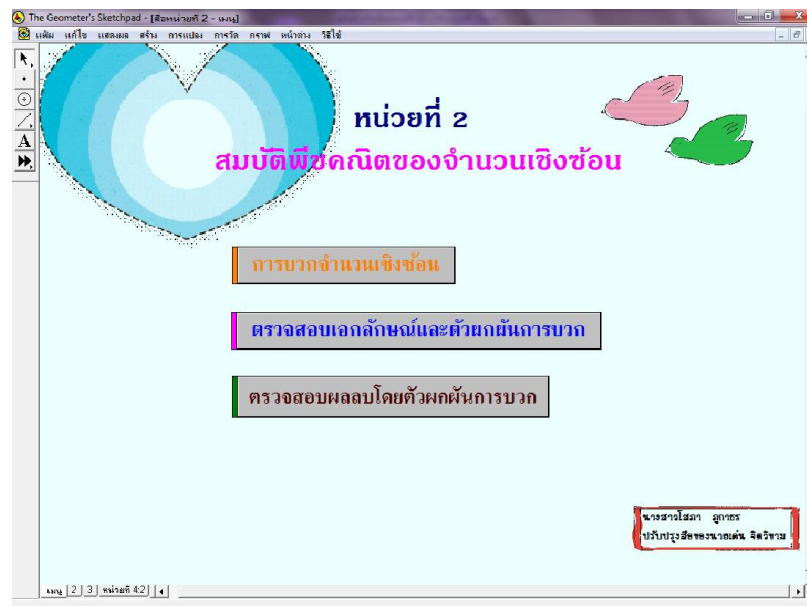
คู่มือการใช้สื่อหน่วยที่ 2

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหาผลบวก ผลลบ ของจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถหาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดได้

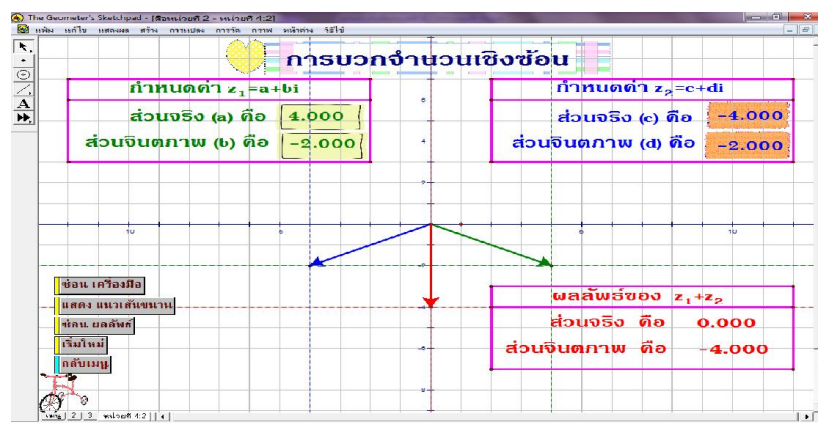
ขั้นตอนการใช้สื่อหน่วยที่ 2

- 1) เปิดไฟล์หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หน้าเมนู



- 2) เลือกปุ่ม “การบวกจำนวนเชิงซ้อน”

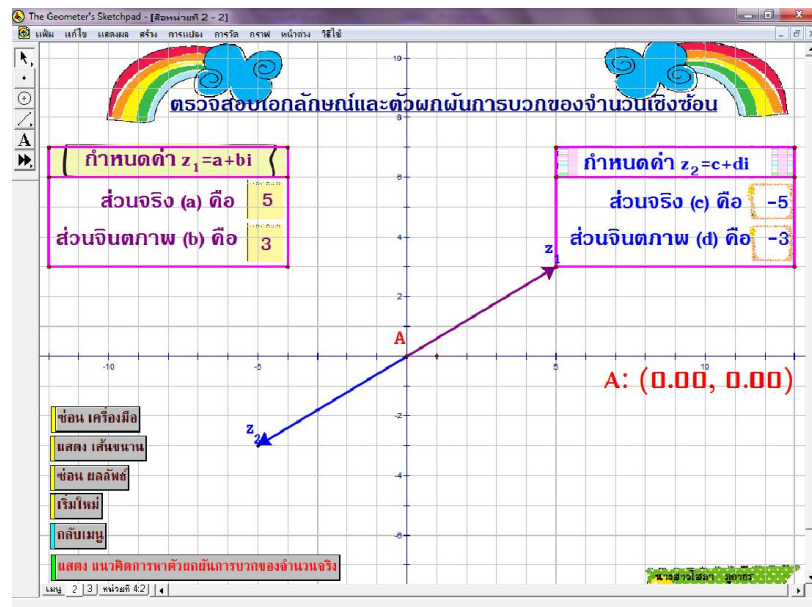
- 3) ให้นักเรียนกำหนดค่าจำนวนเชิงซ้อน z_1 ซึ่งมีเวกเตอร์สีเขียวบอกทิศทาง และ z_2 ซึ่งมีเวกเตอร์สีน้ำเงินบอกทิศทาง



- 4) ให้นักเรียนสังเกตการเปลี่ยนแปลงของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์ โดยมีเวกเตอร์สีแดงบอกทิศทาง แล้วตอบคำถามในแบบฝึกทักษะชุดที่ 1
- 5) เมื่อศึกษาและทำแบบฝึกทักษะเสร็จแล้วให้คลิก “กลับเมนู” เพื่อกลับหน้าเมนู

เอกลักษณ์และตัวผกผันการบวก

- 6) สื่อนักเรียนเรียนรู้ที่ 2 หน้าเมนูเลือก “ตรวจสอบเอกลักษณ์และตัวผกผันการบวก”
- 7) ให้นักเรียนกำหนดจำนวนเชิงซ้อน z_1 (แทนด้วยเวกเตอร์สีม่วง) แล้วให้นักเรียนหาจำนวนเชิงซ้อน z_2 (แทนด้วยเวกเตอร์สีน้ำเงิน) เพื่อให้เวกเตอร์บอกทิศทางของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์ (แทนด้วยเวกเตอร์สีแดง) เท่ากับเวกเตอร์บอกทิศทางของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด (แทนด้วยเวกเตอร์สีม่วง)



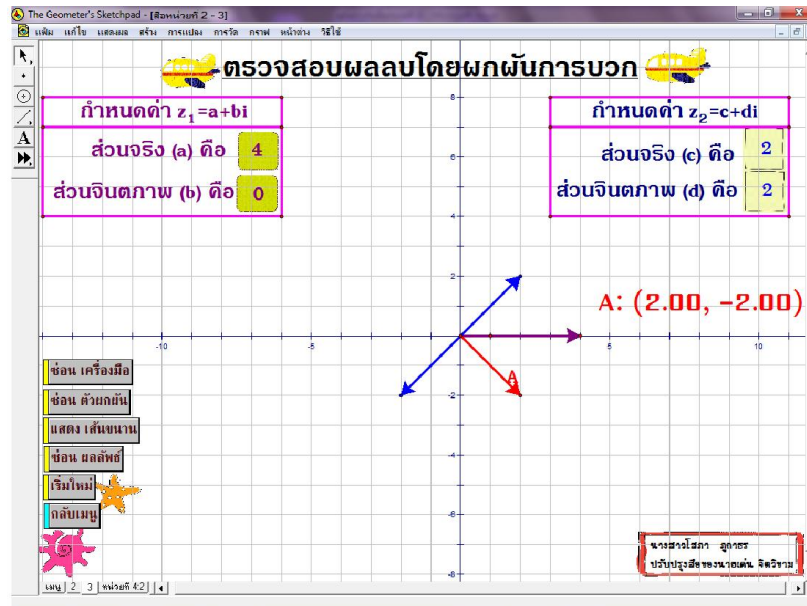
- 8) ให้นักเรียนกำหนดจำนวนเชิงซ้อน z_1 หลาย ๆ จำนวน เพื่อศึกษาคุณสมบัติการเป็น

เอกลักษณ์การบวกของจำนวนเชิงซ้อน

- 9) ให้นักเรียนคลิก “แสดงแนวคิดการหาเอกลักษณ์การบวกของจำนวนจริง” เพื่อศึกษาข้อมูลซึ่งเป็นแนวทางในการหาเอกลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
- 10) เมื่อศึกษาและทำแบบฝึกทักษะเสร็จแล้วให้คลิก “กลับเมนู” เพื่อกลับหน้าเมนู

การลบจำนวนเชิงซ้อนโดยตัวผกผันการบวก

- 11) ลื่อนหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หน้าเมนูเลือก “ตรวจสอบผลลบโดยตัวผกผันการบวก”
- 12) ให้นักเรียนใช้เครื่องมือเพื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 เพื่อตรวจสอบการลบจำนวนเชิงซ้อนด้วยตัวผกผันการบวกโดยพิจารณาจุดปลายของเวกเตอร์ผลลัพธ์ (แทนด้วยเวกเตอร์สีแดง)



- 13) ให้นักเรียนหาตัวผกผันของจำนวนเชิงซ้อนตัวเอง โดยอาศัยคุณสมบัติตัวผกผันของเวกเตอร์ แล้วพิจารณาเช่นเดียวกับการหาผลบวกจำนวนเชิงซ้อน
- 14) เมื่อศึกษาและทำแบบฝึกทักษะเสร็จแล้วให้ คลิก “กลับเมนู” เพื่อกลับหน้าเมนู

#####

แผนการจัดการเรียนรู้แบบที่เอไอ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค32202
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่องจำนวนเชิงซ้อนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 16 ชั่วโมง
 แผนการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน(ต่อ) จำนวน 3 ชั่วโมง

1. สาระสำคัญ

สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- นักเรียนสามารถหาเอกลักษณ์การคูณและตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดได้
- นักเรียนสามารถหาผลคูณและผลของจำนวนเชิงซ้อนได้

ด้านทักษะกระบวนการ

- นักเรียนมีทักษะการทำงานเป็นกลุ่ม
- นักเรียนมีทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- นักเรียนมีทักษะการแก้ปัญหา

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- นักเรียนให้ความร่วมมือในการทำงานกลุ่ม
- นักเรียนมีความละเอียดรอบคอบและรับผิดชอบในการทำงาน

3. สาระการเรียนรู้(หนังสือเรียน สสวท.)

สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
 และกำหนดการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้
 การคูณ $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
 อาจแทน $(a, b) \cdot (c, d)$ ด้วย $(a, b)(c, d)$ ก็ได้
 เซตของจำนวนเชิงซ้อนเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{C}$

เอกลักษณ์และตัวผกผันการคูณ

$(1, 0)$ เป็นเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน (a, b)

$$\begin{aligned}\text{เพราะว่า } (a, b)(1, 0) &= (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) \\ &= (a - 0, 0 + b) \\ &= (a, b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ทำนองเดียวกัน } (1, 0)(a, b) &= (1 \cdot a - 0 \cdot b, 0 \cdot a + 1 \cdot b) \\ &= (a - 0, 0 + b) \\ &= (a, b)\end{aligned}$$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $(1, 0)$ เป็นเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า (a, b) เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งไม่เท่ากับ $(0, 0)$ ตัวผกผันการคูณของ (a, b) คือ จำนวนเชิงซ้อนที่คูณกับ (a, b) แล้วได้ $(1, 0)$ ซึ่งหาได้ดังนี้

ให้ (x, y) เป็นตัวผกผันการคูณของ (a, b) จะได้ $(a, b)(x, y) = (1, 0)$

$$\text{แต่ } (a, b)(x, y) = (ax - by, bx + ay)$$

$$\text{ดังนั้น } (ax - by, bx + ay) = (1, 0)$$

$$\text{จากบทนิยามการเท่ากันจะได้ } ax - by = 1$$

$$\text{และ } bx + ay = 0$$

โดยการแก้ระบบสมการ

$$\text{จะได้ } x = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ และ } y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$\text{ดังนั้น } (x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

ตรวจสอบว่า $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$ เป็นตัวผกผันการคูณของ (a, b) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, 0 \right) \\ &= (1, 0)\end{aligned}$$

$$\text{และ } \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) (a, b) = (1, 0)$$

$$\text{ดังนั้น ตัวผกผันการคูณของ } (a, b) \text{ คือ } \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

ตัวผกผันการคูณของ z เขียนแทนด้วย z^{-1}

$$\text{เมื่อเขียน } z = a + bi \text{ จะได้ว่า } z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

ตัวอย่างที่ 3 1. ตัวผกผันการคูณของ $(5, -12)$ คือ

$$\left(\frac{5}{5^2 + (-12)^2}, \frac{-(-12)}{5^2 + (-12)^2} \right) = \left(\frac{5}{169}, \frac{12}{169} \right)$$

2. ตัวผกผันการคูณของ $(-7, 2)$ คือ

$$\left(\frac{-7}{(-7)^2 + 2^2}, \frac{-2}{(-7)^2 + 2^2} \right) = \left(-\frac{7}{53}, -\frac{2}{53} \right)$$

การหารจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เท่ากับ $(0, 0)$ มาให้ จะหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนนี้ได้เสมอ ดังนั้นอาจนิยามการหารจำนวนเชิงซ้อน z ด้วย w เมื่อ $w \neq (0, 0)$ โดยอาศัยตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวหารได้ดังนี้

บทนิยาม $z \div w = zw^{-1}$ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z, w ใดๆ

ซึ่ง $w \neq (0, 0)$ และเขียนแทน $z \div w$ ด้วย $\frac{z}{w}$

จากบทนิยาม ถ้า $z = a + bi$ และ $w = c + di$

$$\text{แล้ว } \frac{z}{w} = (a + bi) \left(\frac{c - di}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i$$

ตัวอย่างที่ 4

$$\begin{aligned} \frac{3-4i}{3+4i} &= (3-4i) \left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \right) \\ &= \frac{9}{25} - \frac{12}{25}i - \frac{12}{25}i + \frac{16}{25}i^2 \\ &= -\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i \end{aligned}$$

สังเกตว่าถ้า $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วผลคูณของ z กับจำนวนเชิงซ้อน $w = a - bi$ ซึ่งต่างจาก z เพียงเครื่องหมายของส่วนจินตภาพจะเป็นจำนวนจริง เพราะว่า $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ จึงนำความจริงนี้มาช่วยในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

ถ้า $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di \neq 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$\text{แล้ว } \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{a + bi}{c + di} \right) \left(\frac{c - di}{c - di} \right) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่างที่ 5 } \frac{3 + 2i}{4 - 3i} &= \left(\frac{3 + 2i}{4 - 3i} \right) \left(\frac{4 + 3i}{4 + 3i} \right) \\ &= \frac{12 + 9i + 8i - 6}{4^2 - (3i)^2} \\ &= \frac{6 + 17i}{16 - (-9)} \\ &= \frac{6 + 17i}{25} = \frac{6}{25} + \frac{17}{25}i \end{aligned}$$

4. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นเตรียม

- ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบและให้นักเรียนนั่งเป็นกลุ่มที่จัดไว้
- ครูทบทวนข้อตกลงและเหตุผลในการเรียนรู้แบบทีเอไอและให้นักเรียนตรวจสอบความพร้อมของคอมพิวเตอร์ที่ใช้เรียน
- ครูอธิบายการทำกิจกรรมที่ 3 ให้นักเรียนทราบว่าในกิจกรรมนี้มีแบบฝึกทักษะจำนวน 3 ชุด โดยให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับให้ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 ถ้าไม่ผ่านเกณฑ์ให้แก้ไขจนกว่าจะผ่านเกณฑ์
- ครูให้นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบย่อยจำนวน 5 ข้อ และผลการทดสอบย่อยเป็นตัวกำหนดคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม
- ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่องการบวกจำนวนเชิงซ้อน

ขั้นสอน

การคูณจำนวนเชิงซ้อน

- ครูกำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน เพื่อแสดงตัวอย่างการคูณจำนวนเชิงซ้อนให้นักเรียนพร้อมกัน ดังนี้

ตัวอย่าง กำหนด $z_1 = 5 - i$ และ $z_2 = 6 + 3i$ จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ $z_1 z_2$

$$\begin{aligned}
 1) z_1 z_2 &= (5-i)(6+3i) \\
 &= (5)(6) + (5)(3i) + (-i)(6) + (-i)(3i) \\
 &= 30 + 15i + (-6i) + (-3i^2) \\
 &= 30 + 9i + 3 \quad (i^2 = -1) \\
 &= 33 + 9i
 \end{aligned}$$

หรือใช้สูตร จะได้

$$\begin{aligned}
 (a+bi)(c+di) &= (ac-bd) + (ad+bc)i \\
 (5-i)(6+3i) &= [(5)(6) - (-1)(3)] + [(5)(3) + (-1)(6)]i \\
 &= (30+3) + (15-6)i \\
 &= 33 + 9i
 \end{aligned}$$

ส่วนจริงคือ 33 ส่วนจินตภาพคือ 9

- ครูให้นักเรียนเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากตัวอย่างที่แสดงการคูณโดยการกระจาย และการใช้บทนิยามการคูณ
- ครูสรุปนิยามคุณสมบัติการคูณจำนวนเชิงซ้อนอีกครั้งเพื่อความเข้าใจที่ถูกต้อง ดังนี้

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

การคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

- ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 2 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ข้อ 1 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจการคูณ

เอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน

- ครูทบทวนเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนจริงคือ 1 แล้วให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นว่าเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน ควรเป็นจำนวนใด
- ครูกำหนดจำนวนเชิงซ้อนขึ้นมาจำนวน แล้วให้นักเรียนหาจำนวนเชิงซ้อนอีกจำนวนที่มีคุณสมบัติคูณกับจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้แล้วมีผลลัพธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนเดิม

- ครูเฉลยคำตอบที่ถูกต้องอีกครั้งเพื่อความเข้าใจที่ตรงกันพร้อมทั้งแสดงวิธีทำให้นักเรียนดู
- ครูกำหนดจำนวนเชิงซ้อนอีก 3 จำนวนเพื่อให้นักเรียนช่วยกันหาจำนวนเชิงซ้อนที่มีคุณสมบัติดังกล่าวจนสามารถสรุปได้ว่า

$$(a, b)(1, 0) = (1, 0)(a, b) = (a, b)$$

ดังนั้น $(1, 0)$ เป็นเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน

ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

- ครูสรุปให้นักเรียนฟังว่า ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน (a, b) หมายถึง จำนวนเชิงซ้อนที่คูณกับ (a, b) แล้วได้เอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน คือ $(1, 0)$
- ครูอธิบายเพิ่มเติม เมื่อ (a, b) เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เท่ากับ $(0, 0)$ และให้ (x, y) เป็นตัวผกผันการคูณของ (a, b)

$$\text{จะได้ } (a, b)(x, y) = (x, y)(a, b) = (1, 0)$$

- ครูให้นักเรียนเปิดสื่อในหน่วยที่ 2 หน้าเมนู เลือก ตรวจสอบตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน เพื่อให้ใช้สื่อประกอบคำอธิบายตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน
- ครูให้นักเรียนกำหนดจำนวนเชิงซ้อน z_1 และให้นักเรียนช่วยกันหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน z_1 โดยระบุไว้ที่ z_2
- ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดกับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้น (หรือ $z_1 \overline{z_1}$) แล้วเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับ $|z_1|^2$ แล้วตอบคำถามในแบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ข้อ 2

- ครูให้นักเรียนเปรียบเทียบผลลัพธ์ $\frac{z_1 \overline{z_1}}{|z_1|^2}$ กับผลลัพธ์ของ $z_1 z_1^{-1}$ เพื่อให้นักเรียนสังเกตการ

หาค่าตัวผกผันการคูณของ z_1 (หรือ z_1^{-1}) ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ $\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$

- ครูและนักเรียนสรุปตัวผกผันการคูณของ (a, b) คือ $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$

$$\text{ตัวผกผันการคูณของ } a + bi \text{ คือ } \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

- ครูยกตัวอย่างต่อไปนี้นี้เพื่อให้นักเรียนคำนวณตัวผกผันการคูณ

จงหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

$$1. (5, -12)$$

$$2. 4 + 3i$$

วิธีทำ

1. ตัวผกผันการคูณของ $(5, -12)$ คือ

$$\left(\frac{5}{5^2 + (-12)^2}, \frac{-(-12)}{5^2 + (-12)^2} \right) = \left(\frac{5}{169}, \frac{12}{169} \right)$$

2. ตัวผกผันการคูณของ $4 + 3i$ คือ

$$\left(\frac{4}{4^2 + 3^2} \right) - \left(\frac{3}{4^2 + 3^2} \right)i = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$$

- ครูให้นักเรียนทุกคนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ข้อ 3 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจเรื่องเอกลักษณ์การคูณและตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน
- ครูให้นักเรียนแสดงเหตุผลการหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในแบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ข้อ 3 เพื่อฝึกทักษะการคิดวิเคราะห์และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 2 ข้อ 1 และ 2 เพื่อฝึกทักษะการคูณ การคิดวิเคราะห์และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

หาผลหารจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ตัวผกผันการคูณ

- ครูยกตัวอย่างที่ 4 บนกระดานดำแล้วให้นักเรียนหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวหาร
- ครูแสดงวิธีการหารจำนวนเชิงซ้อนโดยการนำสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวหารคูณทั้งเศษและส่วนดังตัวอย่างที่ 4 แล้วสอบถามความเข้าใจของนักเรียน
- ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 3 เรื่องการหารจำนวนเชิงซ้อนเพื่อตรวจสอบความเข้าใจการหารจำนวนเชิงซ้อน
- ครูให้นักเรียนใช้สื่อหน่วยที่ 2 หน้าเมนูการหารจำนวนเชิงซ้อน แล้วใช้สื่อตรวจสอบผลหาร

ขั้นจัดกิจกรรม

- ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบกิจกรรมที่ 3 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1-3 ร่วมกับการใช้สื่อจีเอสพีหน่วยที่ 1 นักเรียน 1 กลุ่มใช้สื่อคอมพิวเตอร์ 1 เครื่อง โดยมีครูคอยแนะนำอยู่หน้าห้องแล้วช่วยกันทำกิจกรรม ศึกษาสื่อไปพร้อมๆ กัน
- ครูจะให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนไม่เข้าใจ โดยนักเรียนทั้งกลุ่มรับฟังคำแนะนำแล้วช่วยกันทำกิจกรรม แลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกันในกลุ่มของตนแล้วช่วยกันทำกิจกรรมแล้วแลกเปลี่ยนใบกิจกรรมที่ทำแล้วกับกลุ่มที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันตรวจ

ขั้นตรวจสอบผลงาน

- ครูให้นักเรียนทุกคนแลกเปลี่ยนตรวจแบบฝึกทักษะกับคู่ที่อยู่ในกลุ่มของตนเอง ถ้านักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1 ผ่าน 65 % ขึ้นไปให้ทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 2 และ 3 ตามลำดับจนผ่านเกณฑ์ 65 %
- ครูแจ้งว่าถ้านักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะ ไม่ผ่านเกณฑ์ให้แก้ไขจนผ่านเกณฑ์ก่อนจึงทำแบบฝึกทักษะชุดต่อไป
- เมื่อทำแบบฝึกทักษะครบทุกชุดแล้วครูให้นักเรียนทุกคนแยกกันทำแบบทดสอบย่อย จำนวน 5 ข้อ

ขั้นสรุปบทเรียน

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปจำนวนเชิงซ้อนในประเด็นต่อไปนี้

- การคูณจำนวนเชิงซ้อน
- เอกลักษ์ณ์และตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน
- การหารจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สังยุคของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวหารมาคูณทั้งตัวตั้งและตัวหารของจำนวนเชิงซ้อน

5. สื่อ/แหล่งเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี(สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
- โปรแกรมจีเอสพี หน่วยที่ 3
- ใบกิจกรรมที่ 3 ชุดที่ 1,2 และ 3
- คู่มือการใช้สื่อหน่วยที่ 3

แหล่งการเรียนรู้

- ห้องสมุดโรงเรียนบางบ่อวิทยาคม
- ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนบางบ่อวิทยาคม

6. การวัดและประเมินผล

- สังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ เช่น ความสนใจในการศึกษาใบกิจกรรม และแบบฝึกทักษะ
- ประเมินผลความเข้าใจ การดำเนินการแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และการตรวจสอบผลจากแบบฝึกทักษะชุดที่ 1,2 และ 3

- ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนประจำหน่วยด้วยแบบทดสอบย่อยอัตโนมัติจำนวน 5 ข้อ แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 4 คะแนน มีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้
 - 4 คะแนน คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำได้ถูกต้องสมบูรณ์
 - 3 คะแนน คำตอบถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำและการได้มาของคำตอบได้ไม่สมบูรณ์
 - 2 คะแนน คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำได้เพียงบางส่วน
 - 1 คะแนน คำตอบไม่ถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำได้บางส่วน
 - 0 คะแนน คำตอบไม่ถูกต้องและไม่แสดงวิธีทำ

บันทึกความเห็นของผู้ตรวจสอบแผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางอังคณา จันทร์แก้ว)

หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ใบกิจกรรมที่ 3 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องสมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหาผลคูณและผลหารของจำนวนเชิงซ้อนได้

คำชี้แจง: ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ

1. $(2, -3)(3, 4)$

2. $(-2 - 3i)(5 - 2i)$

.....

.....

.....

.....

3. $(2 + i)^3$

4. $(-1 - i)^2$

.....

.....

.....

.....

5. $(\sqrt{2} - \sqrt{5}i)(\sqrt{2} + \sqrt{5}i)$

6. $(2i - 1)(1 + 3i)(i + 4)$

.....

.....

.....

.....

2. ให้นักเรียนใช้สื่อเพื่อตรวจสอบตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน และตอบคำถามและข้อต่อไปนี้

1) จำนวนเชิงซ้อน z_1 ที่กำหนด คือ.....

2) จำนวนเชิงซ้อนที่เป็นสังยุคของ z_1 คือ.....

3) ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน z_1 กับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้น(หรือ $z_1 \overline{z_1}$) คือ.....

4) ผลการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของ $z_1 \overline{z_1}$ และผลลัพธ์ของ $|z_1|^2$ จะได้.....

5) ผลลัพธ์ของ $\frac{z_1 \overline{z_1}}{|z_1|^2} = \dots\dots\dots$ และผลลัพธ์ของ $z_1 z_1^{-1} = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} \dots\dots\dots$

6) จำนวนเชิงซ้อน z_2 คือ.....

7) จำนวนเชิงซ้อนที่เป็นสังยุคของ z_2 คือ.....

8) ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน z_2 กับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้น(หรือ $z_2 \overline{z_2}$) คือ.....

9) ผลการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของ $z_2 \overline{z_2}$ และผลลัพธ์ของ $|z_2|^2$ จะได้.....

10) ผลลัพธ์ของ $\frac{z_2 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dots\dots\dots$ และผลลัพธ์ของ $z_2 z_2^{-1} = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dots\dots\dots$

11) ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ จำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวผกผันการคูณของ z

คือ.....เหตุผลเพราะ.....

3. จงหาเอกลักษณ์การคูณและตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้

ข้อ	จำนวน เชิงซ้อน	ตัวผกผันการคูณ	เหตุผล
1	$(3, 7)$		
2	$1 - 7i$		
3	$-\sqrt{5} i$		
4	$\sqrt{2} + i$		
5	$3 + 2i$		

ใบกิจกรรมที่ 3 แบบฝึกทักษะชุดที่ 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องสมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหาผลคูณและตัวพหุคูณการคูณของจำนวนเชิงซ้อนได้

1. ให้นักเรียนหาตัวพหุคูณการคูณและเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์การคูณที่กำหนดให้

จำนวนเชิงซ้อน	ผลลัพธ์	ตัวพหุคูณการคูณของผลลัพธ์
$(5 + 2i)(5 - 2i)$		
$(4 - 5i)(4 + 5i)$		
$(4 + 3i)(2 + 5i)$		
$(3 + 2i)(3 - 7i)$		
$(3 + i)^3$		
$(0 + i)^{20}$		

2. กำหนดให้ $z_1 = 3+4i$ และ $z_2 = 1+i$ จงหา

a) $(z_1 z_2)^{-1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) $z_1^{-1} z_2^{-1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) $(z_2^3)^{-1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

d) $(z_2^{-1})^3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 3 แบบฝึกทักษะชุดที่3

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่3 เรื่อง สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนได้

1. จงหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้แล้วเขียนให้อยู่ในรูป $a + bi$

a) $\frac{1}{3+2i}$

.....

b) $\frac{1}{5+8i}$

.....

c) $\frac{7}{5-6i}$

.....

d) $\frac{-3}{2-5i}$

.....

e) $\frac{21-7i}{i}$

.....

f) $\frac{10+9i}{3i}$

.....

$$\text{i) } \frac{4-3i}{2+4i}$$

.....
.....
.....
.....
.....

$$\text{j) } \frac{6+4i}{1-5i}$$

.....
.....
.....
.....
.....

$$\text{k) } \frac{4+3i}{1+i}$$

.....
.....
.....
.....
.....

$$\text{l) } \frac{2+4i}{4-2i}$$

.....
.....
.....
.....
.....

แบบทดสอบย่อย

เรื่อง สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน (ต่อ) จำนวน 5 ข้อ

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ต่อไปนี้

1. $(2 - 2i)^4$

2. $(4 + 5i)(2 - 3i)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ตัวผกผันการคูณของ $3 - 2i$ คือ

4. $\frac{7 + 4i}{5 - 2i}$

.....

.....

.....

.....

5. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ แล้ว zz^{-1} มีค่าเท่ากับ

.....

.....

.....

.....

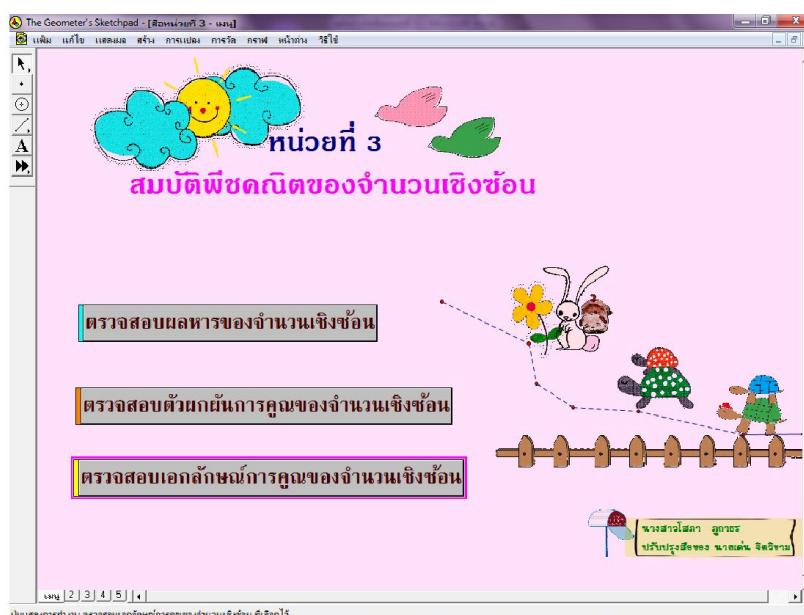
คู่มือการใช้สื่อหน่วยที่ 3

จุดประสงค์การเรียนรู้

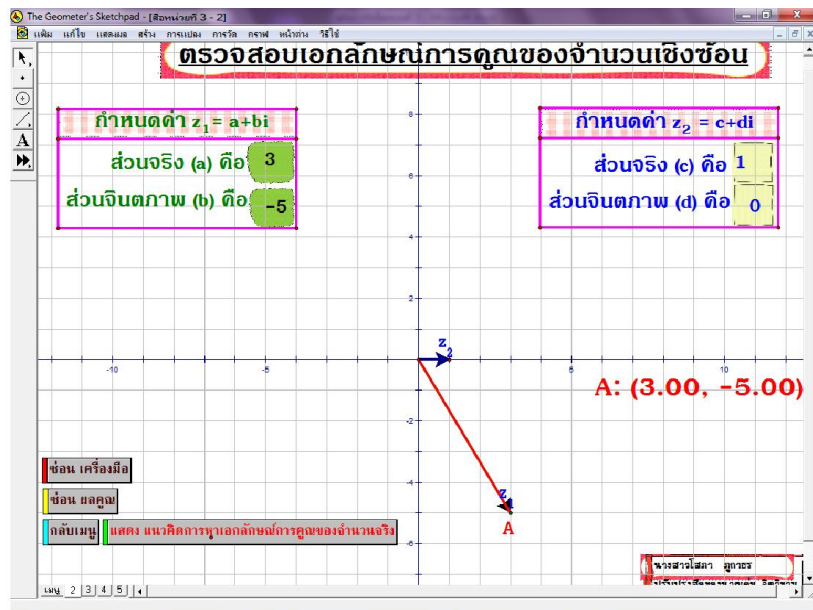
- นักเรียนสามารถหาเอกลักษณ์การคูณและตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดได้

ขั้นตอนการใช้สื่อหน่วยที่ 3

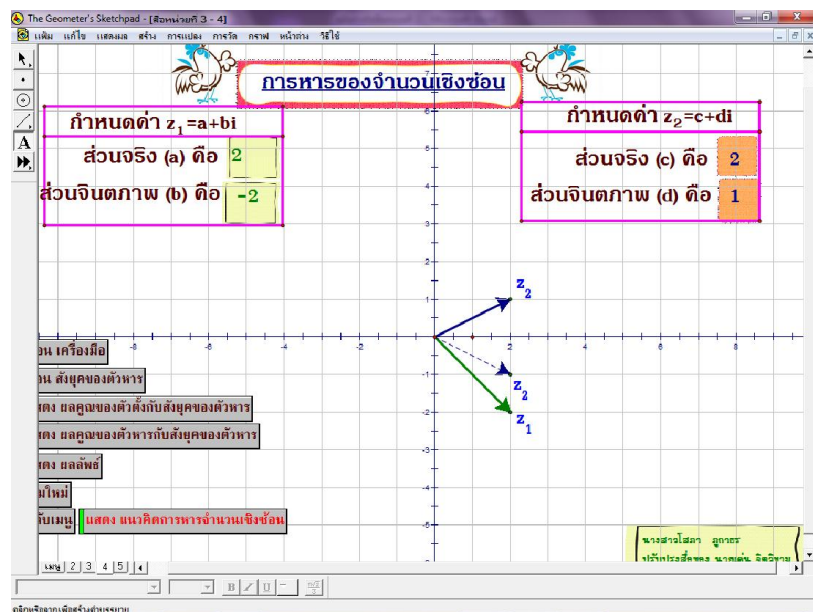
- 1) เปิดไฟล์หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 หน้าเมนู



- 2) เลือกปุ่ม “ตรวจสอบเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน”
- 3) ให้นักเรียนใช้เครื่องมือเพื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อน z_1 แล้วเปลี่ยนค่าของจำนวนเชิงซ้อน z_2 เพื่อให้เวกเตอร์บอกทิศทางของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์ (เวกเตอร์สีแดง) ทับกับเวกเตอร์บอกทิศทางของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด (เวกเตอร์สีเขียว)
- 4) ให้นักเรียนกำหนดจำนวนเชิงซ้อน z_1 ที่แตกต่างกันหลายๆจำนวนเพื่อศึกษาคุณสมบัติเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน โดยทำตามขั้นตอนในข้อ 3
- 5) ให้นักเรียนเลือก “แสดงแนวคิดการหาเอกลักษณ์การคูณของจำนวนจริง” เพื่อเป็นแนวทางในการหาเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน



- 6) เมื่อศึกษาเสร็จให้เลือก “กลับเมนู” เพื่อกลับหน้าเมนู
- 7) สื่อนักเรียนที่ 3 เลือก “ตรวจสอบผลหารของจำนวนเชิงซ้อน” เพื่อตรวจสอบผลหารของจำนวนเชิงซ้อนในแบบฝึกทักษะ



- 8) สื่อนักเรียนที่ 3 เลือก “ตรวจสอบตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน” เพื่อศึกษาสมบัติเอกลักษณ์การคูณและตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

#####

แผนการจัดการเรียนรู้แบบทีเอไอ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

รายวิชาคณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค32202

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่องจำนวนเชิงซ้อนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จำนวน 16 ชั่วโมง

แผนการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

จำนวน 3 ชั่วโมง

1.สาระสำคัญ

อาร์กิวเมนต์ (argument) ของจำนวนเชิงซ้อน คือขนาดของมุมของเวกเตอร์ที่แทนจำนวนเชิงซ้อน กระทบกับแกน x ด้านบวกโดยวัดในทิศทวนเข็มนาฬิกา รูปเชิงขั้ว (polar form) ของจำนวนเชิงซ้อน z (หรือ $x + yi$) คือ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ โดยที่ r คือ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อน z และ θ คือ อาร์กิวเมนต์ (argument) ของจำนวนเชิงซ้อน z

2.จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- นักเรียนสามารถหาค่าอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้

ด้านทักษะกระบวนการ

- นักเรียนมีทักษะการทำงานเป็นกลุ่ม
- นักเรียนมีทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- นักเรียนมีทักษะการแก้ปัญหา

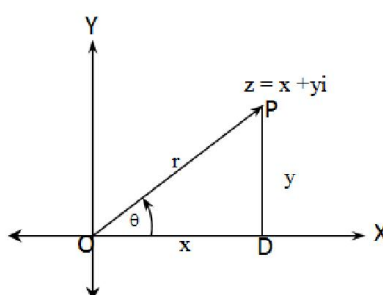
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- นักเรียนให้ความร่วมมือในการทำงานกลุ่ม
- นักเรียนมีความละเอียดรอบคอบและรับผิดชอบในการทำงาน

3. สาระการเรียนรู้ (หนังสือ สวท.)

รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน (Polar Form of Complex Numbers)

ถ้า $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z \neq 0$ เขียนแทน z ด้วยเวกเตอร์บนระนาบ ดังนี้



เมื่อกำหนดให้ θ เป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดซึ่งวัดในทิศทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ทางด้านบวกไปยังเวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ และ r (หรือ $|\overrightarrow{OP}|$) แทนระยะทางระหว่างจุดกำเนิด O กับ P จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในระบบพิกัดฉาก (x, y) และพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) ดังนี้

$$x = r \cos \theta \text{ และ } y = r \sin \theta$$

หรือ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \text{ และ } \tan \theta = \frac{y}{x} \text{ เมื่อ } x \neq 0$$

ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อน z เขียนใหม่ได้ในรูปเชิงขั้ว (polar form) เป็น

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

เรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์(argument) ของ z

สังเกตว่า เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta \text{ และ } \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(\theta + 2n\pi) + i(\sin(\theta + 2n\pi)) = \cos \theta + i \sin \theta$$

สรุปได้ว่าเมื่อ θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว $\theta + 2n\pi$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วยสำหรับทุกจำนวนเต็ม n

นอกจากนี้ ถ้า $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $r_1 = r_2$ และ $\theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 3 + 3i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $3 + 3i$ จะได้

$$r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } \tan \theta = \frac{3}{3} = 1 \text{ จึงได้ว่า } \theta \text{ ที่ทำให้ } \tan \theta = 1 \text{ คือ } \frac{\pi}{4}$$

(เพราะจุด $(3, 3)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1)

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $3 + 3i$ คือ

$$3\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right] \text{ เมื่อ } k \in I$$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = -3 + 3i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ

ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-3 + 3i$ จะได้

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } \tan \theta = \frac{3}{-3} = -1 \text{ จึงได้ว่า } \theta \text{ ทำให้ } \tan \theta = -1 \text{ คือ } \frac{3\pi}{4}$$

(เพราะจุด $(-3, 3)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2)

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-3 + 3i$ คือ

$$3\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \right] \text{ เมื่อ } k \in I$$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = -3 - 3i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ

ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-3 - 3i$ จะได้

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } \tan \theta = \frac{-3}{-3} = 1 \text{ จึงได้ว่า } \theta \text{ ที่ทำให้ } \tan \theta = 1 \text{ คือ } \frac{5\pi}{4}$$

(เพราะจุด $(-3, -3)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3)

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-3 - 3i$ คือ

$$3\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \right] \text{ เมื่อ } k \in I$$

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 3 - 3i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ

ให้ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $3 - 3i$ จะได้

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } \tan \theta = \frac{-3}{3} = -1 \text{ จึงได้ว่า } \theta \text{ ที่ทำให้ } \tan \theta = -1 \text{ คือ } \frac{7\pi}{4}$$

(เพราะจุด $(3, -3)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4)

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $3 - 3i$ คือ

$$3\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) \right] \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{I}$$

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว จะทำให้การคำนวณผลคูณหรือการยกกำลังต่างๆ ทำได้ง่ายขึ้น ดังในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ โดยที่ $z_2 \neq 0$ 1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ 2. $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - i \sin\theta_2)$ 3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$
--

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $z_1 = 10(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ และ $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$ จงหาค่าของ

1. $z_1 z_2$
2. $\frac{z_1}{z_2}$

วิธีทำ 1. $z_1 z_2 = 10 \times 2 [\cos(45^\circ + 15^\circ) + i \sin(45^\circ + 15^\circ)]$

$$= 20(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$= 20 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 10 + 10\sqrt{3} i$$

2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{2} [\cos(45^\circ - 15^\circ) + i \sin(45^\circ - 15^\circ)]$

$$= 5(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$$

ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ (De Moivre's Theorem)

ถ้า $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

ตัวอย่าง ที่ 6 จงเขียน $(-1+i)^{10}$ ในรูป $x + yi$ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$

แนวคิด เปลี่ยน $(-1+i)^{10}$ ให้เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ใช้พิกัดเชิงขั้ว ดังนั้น จะต้องหา r และ θ ที่สอดคล้องกับจำนวน $-1+i$ แล้วใช้ ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ใช้หาผลคูณของ $(-1+i)^{10}$

วิธีทำ ให้ $r(\cos\theta + i \sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-1 + i$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ และ } \tan\theta = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{จะได้ } \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ เนื่องจากจุด } (-1, 1) \text{ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2}$$

$$\text{ดังนั้น } -1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} (-1+i)^{10} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{10} \\ &= (\sqrt{2})^{10} \left[\cos(10) \frac{3\pi}{4} + i \sin(10) \frac{3\pi}{4} \right] \\ &= 32 \left(\cos 7\frac{\pi}{2} + i \sin 7\frac{\pi}{2} \right) \\ &= -32i \end{aligned}$$

4. กิจกรรมการเรียนรู้

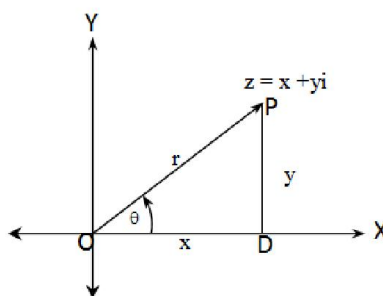
ขั้นเตรียม

- ครูให้นักเรียนเข้ากลุ่มที่จัดไว้
- ครูอธิบายกิจกรรมที่ 4 ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะจำนวน 3 ชุดนักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับให้ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 ถ้าไม่ผ่านเกณฑ์ให้แก้ไขจนกว่าจะผ่านเกณฑ์

- ครูให้นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบย่อยจำนวน 5 ข้อ และผลการทดสอบย่อยเป็นตัวกำหนดคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม
- ครูทบทวนค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ขั้นตอน

- ครูอธิบายการเขียนรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน(Polar Form of Complex Numbers) จำนวนเชิงซ้อน z (หรือ $x + yi$) โดยที่ $z \neq 0$ เขียนแทน z ด้วยจุดปลายเวกเตอร์บนระนาบดังนี้



เมื่อ θ เป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดที่เกิดจากการหมุนเวกเตอร์ $\overline{OP}$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ทางด้านบวกไปยัง $\overline{OP}$ ให้ $r = |\overline{OP}|$ จากรูปสามเหลี่ยม OPD ครูให้นักเรียนบอก

ค่าของ $\cos\theta$, $\sin\theta$ และ $\tan\theta$ นักเรียนควรตอบได้ว่า $\cos\theta = \frac{OD}{OP} = \frac{x}{r}$

$$\sin\theta = \frac{PD}{OP} = \frac{y}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{PD}{OD} = \frac{y}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

$$\text{จะได้ } x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

- ครูอธิบายการแทนค่า $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ ใน $z = x + yi$ จะได้ $z = x + yi$ ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ดังนี้ $z = x + yi$

$$z = r \cos\theta + i(r \sin\theta)$$

$$\text{ดังนั้น } z = r \cos\theta + i(r \sin\theta)$$

เรียกรูปแบบการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $z = r \cos\theta + i(r \sin\theta)$ ว่า รูปเชิงขั้ว (polar form) และเรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์ (argument) ของ z

- ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันไซน์ เมื่อ n เป็นจำนวนใดๆ

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$$

และ $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$

จะได้ว่า $\cos(\theta + 2n\pi) + i(\sin(\theta + 2n\pi)) = \cos\theta + i\sin\theta$

นั่นคือเมื่อ θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว $\theta + 2n\pi$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย

- ครูให้นักเรียนเปิดสื่อจีเอสพีหน่วยที่ 3 เพื่อศึกษาการหาค่าอาร์กิวเมนต์
- ครูให้นักเรียนกำหนดจำนวนเชิงซ้อนในจุดภาคที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ครูให้นักเรียนสังเกตค่าอาร์กิวเมนต์ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนในจุดภาคต่างๆ
- ครูให้นักเรียนกำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนแกน x ด้านบวก แกน x ด้านลบ แกน y ด้านบวกและแกน y ด้านลบสังเกตค่าอาร์กิวเมนต์ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนดังกล่าว แล้วตอบคำถามในกิจกรรมที่ 4 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ข้อ 1
- ครูให้นักเรียนเปิดสื่อจีเอสพี หน่วยที่ 4 เลือกเมนูการสับเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนพิกัดฉากให้อยู่ในรูปของพิกัดเชิงขั้วเพื่อแสดงให้เห็นถึงตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนตกอยู่มุมที่เป็นค่า θ ที่ถูกต้อง
- ครูกำหนดจำนวนเชิงซ้อน ที่อยู่บนจุดภาคที่แตกต่างกัน แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันจัดให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว โดยสามารถหาค่า r และ θ จากความสัมพันธ์

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

แล้วแทนค่า r และ θ ลงใน $z = x + yi$ จะได้รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- ครูถามนักเรียนว่า r เป็นจำนวนจริงลบได้หรือไม่เพื่อให้นักเรียนสังเกตค่า r ว่าเป็นจำนวนเต็มบวกเนื่องจากเป็นระยะทางระหว่างจุดกำเนิดกับจุดที่แทนจำนวนเชิงซ้อน
- ครูให้นักเรียนตอบคำถามในกิจกรรมที่ 4 แบบฝึกทักษะชุดที่ 2 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจ แล้วให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องเชิงประจักษ์ด้วยสื่อจีเอสพี
- ครูให้นักเรียนเปิดสื่อจีเอสพีหน่วยที่ 4 เลือกการคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อน แล้วให้นักเรียนสังเกต

ค่าอาร์กิวเมนต์ของผลคูณจะมีค่าเท่ากับผลบวกอาร์กิวเมนต์ของตัวตั้งกับอาร์กิวเมนต์ของตัวคูณ

ค่าอาร์กิวเมนต์ของผลหารจะมีค่าเท่ากับผลลบของอาร์กิวเมนต์ของตัวตั้งกับอาร์กิวเมนต์ของตัวหาร

- ครูให้นักเรียนศึกษาทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท	ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ โดยที่ $z_2 \neq 0$
5.	$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$
6.	$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - i \sin\theta_2)$
7.	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$
8.	$\overline{z} = r_1 [\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)]$

โดยแนะนำว่า ทฤษฎีบทดังกล่าวจะนำไปใช้ในการคำนวณหาผลคูณ ผลหาร หรือการยกกำลังต่างๆ ได้รวดเร็วและง่ายขึ้น พร้อมยกตัวอย่างที่ 5 และตัวอย่างที่ 6 ประกอบคำอธิบาย

- ครูเขียนจำนวนเชิงซ้อนจากผลลัพธ์ที่ได้จากตัวอย่างที่ 5 และตัวอย่างที่ 6 ในรูปพิกัดฉาก (x, y) และพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) เพื่อตรวจสอบความเข้าใจจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว
- ครูเฉลยการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในตัวอย่างที่ 5 และตัวอย่างที่ 6 ในรูปพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้วเพื่อให้นักเรียนตระหนักความเข้าใจที่ตรงกัน
- ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 3 เพื่อตรวจสอบการนำจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วไปประยุกต์ใช้

ขั้นจัดกิจกรรม

- ครูให้นักเรียนใบกิจกรรมที่ 4 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1—3 ร่วมกับการใช้สื่อจีเอสพีหน่วยที่ 3 โดยนักเรียน1 คู่ใช้สื่อคอมพิวเตอร์1เครื่อง ครูคอยแนะนำอยู่หน้าห้องแล้วอธิบายให้นักเรียนศึกษาสื่อไปพร้อมๆ กัน
- ครูจะให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนไม่เข้าใจ นักเรียนทั้งกลุ่มรับฟังคำแนะนำแล้วช่วยกันทำกิจกรรม แลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดเห็นซึ่งกันและกันในกลุ่มของตนแล้วช่วยกันทำกิจกรรมแล้วแลกเปลี่ยนใบกิจกรรมที่ทำแล้วกับคู่ที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันตรวจ

ขั้นตรวจสอบผลงาน

- ครูให้นักเรียนทุกคนแลกเปลี่ยนตรวจแบบฝึกทักษะกับคู่ที่อยู่ในกลุ่มของตนเอง ถ้านักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ผ่าน 65 % ขึ้นไปให้ทำแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 2 และ 3 ตามลำดับจนผ่านเกณฑ์ 65 %
- ครูแจ้งเงื่อนไขว่าถ้านักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะไม่ผ่านเกณฑ์ให้แก้ไขจนผ่านเกณฑ์ก่อนจึงทำแบบฝึกทักษะชุดต่อไป
- เมื่อทำแบบฝึกทักษะครบทุกชุดแล้วครูให้นักเรียนทุกคนแยกกันทำแบบทดสอบย่อย จำนวน 5 ข้อ

ขั้นสรุปบทเรียน

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความหมายของอาร์กิวเมนต์ (argument) ของจำนวนเชิงซ้อนและรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน (polar form)

5. สื่อ/แหล่งเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
- โปรแกรม จีเอสพีหน่วยที่ 4
- ใบกิจกรรมที่ 4 ชุดที่ 1, 2 และ 3
- คู่มือการใช้สื่อหน่วยที่ 4

แหล่งการเรียนรู้

- ห้องสมุดโรงเรียนบางบ่อวิทยาคม
- ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนบางบ่อวิทยาคม

6. การวัดและประเมินผล

- สังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ เช่น ความสนใจในการศึกษาใบกิจกรรม และแบบฝึกทักษะ
- ประเมินผลความเข้าใจ การดำเนินการแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และการตรวจสอบผลจากแบบฝึกทักษะชุดที่ 1, 2 และ 3
- ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนประจำหน่วยด้วยแบบทดสอบย่อยอัตราส่วนจำนวน 5 ข้อ แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 4 คะแนน มีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

4 คะแนน	คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์
3 คะแนน	คำตอบถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำและการได้มาของคำตอบได้ไม่สมบูรณ์

- 2 คะแนน คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำได้เพียงบางส่วน
 1 คะแนน คำตอบไม่ถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำได้บางส่วน
 0 คะแนน คำตอบไม่ถูกต้องและไม่แสดงวิธีทำ

7. บันทึกหลังสอน

คะแนนที่ได้จากการทำกิจกรรมของนักเรียนในเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

1. นักเรียนที่มีคะแนนมากกว่าหรือเท่ากับร้อยละ 65 จำนวน.....คน
2. นักเรียนที่มีคะแนนน้อยกว่าร้อยละ 65 จำนวน.....คน

คะแนนแบบทดสอบย่อยเป็นกลุ่ม

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน
 กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

ปัญหา/อุปสรรค

.....

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมหลังสอนสำหรับผู้สอน

.....

ลงชื่อผู้สอน

บันทึกความเห็นของผู้ตรวจสอบแผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางอังคณา จันทรแก้ว)

หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ใบกิจกรรมที่ 4 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหาค่าอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้

คำสั่งให้นักเรียนใช้โปรแกรมจีโอสปี เป็นเครื่องมือในการตอบคำถามต่อไปนี้

1. ค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) ของ z คือ.....
2. ค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) ของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนแกน x ทางด้านบวก คือ.....
3. ค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) ของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนแกน x ทางด้านลบ คือ.....
4. ค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) ของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนแกน y ทางด้านบวก คือ.....
5. ค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) ของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนแกน x ทางด้านลบ คือ.....
6. ค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) ของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนจุดภาคที่ 1 คือ.....
7. ค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) ของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนจุดภาคที่ 2 คือ.....
8. ค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) ของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนจุดภาคที่ 3 คือ.....
9. ค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) ของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่บนจุดภาคที่ 4 คือ.....
10. จำนวนเชิงซ้อน $3 + 3i$ อยู่บนจุดภาคที่.....มีค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) คือ.....
11. จำนวนเชิงซ้อน $2 - 2i$ อยู่บนจุดภาคที่.....มีค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) คือ.....
12. จำนวนเชิงซ้อน $2 + 2\sqrt{3}i$ อยู่บนจุดภาคที่.....มีค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) คือ.....
13. จำนวนเชิงซ้อน $-2 - 2\sqrt{3}i$ อยู่บนจุดภาคที่.....มีค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) คือ.....
14. จำนวนเชิงซ้อน $-2 + 2\sqrt{3}i$ อยู่บนจุดภาคที่.....มีค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) คือ.....
15. ถ้ากำหนดให้ค่าอาร์กิวเมนต์ (θ) มีค่าเท่ากับ θ แล้วรูปแบบของอาร์กิวเมนต์ (θ)
บนจุดภาคที่ 1 คือ..... บนจุดภาคที่ 2 คือ.....
บนจุดภาคที่ 3 คือ..... บนจุดภาคที่ 4 คือ.....

1. จงเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว โดยใช้สูตรการหาค่ามอดุลของจำนวนเชิงซ้อนและการเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

a) $z = 2 + 2i$

.....

b) $z = -3 + 3i$

.....

c) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$

.....

d) $z = -\sqrt{3}i$

.....

e) $z = \pi - \pi i$

.....

ใบกิจกรรมที่ 4 แบบฝึกทักษะชุดที่ 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนในพิกัดเชิงขั้วให้อยู่ในรูปพิกัดฉาก $a + bi$

1. $4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

.....

2. $12(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

.....

3. $6(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

.....

4. $8(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$

.....

5. $3(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$

.....

6. $2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$

.....

7. $(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$

.....

8. $5(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$

.....

[illegible]

4) กำหนดให้ $z = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$ จงหาค่า $\bar{z}$

[illegible]

แบบทดสอบย่อย

เรื่องจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว จำนวน 5 ข้อ

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ต่อไปนี้

1. จงเขียน $z = i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว2. จงเขียน $z = 3 - 3\sqrt{3}i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อน

4. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{50}$ จงเขียนผลลัพธ์ในรูปเชิงขั้ว

$$\frac{3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)}{(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$

.....

.....

.....

.....

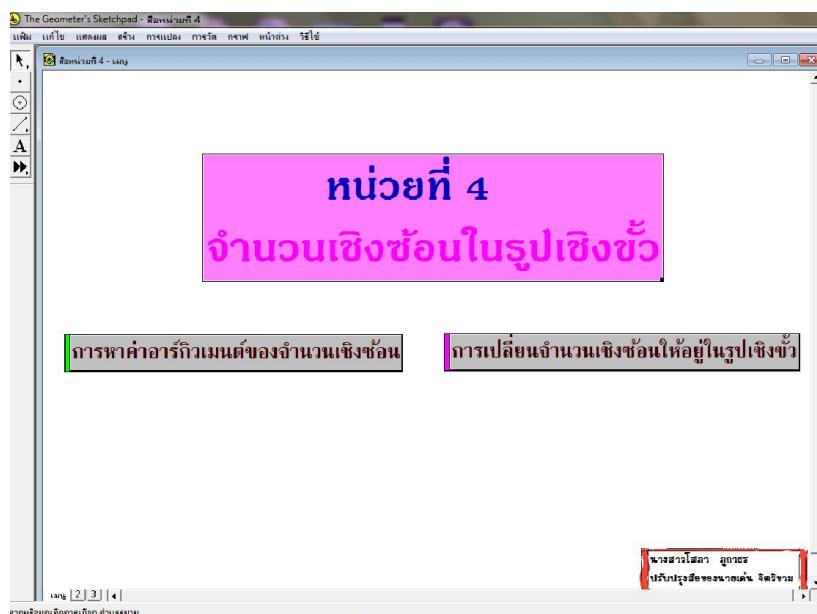
คู่มือการใช้สื่อหน่วยที่ 4

จุดประสงค์การเรียนรู้

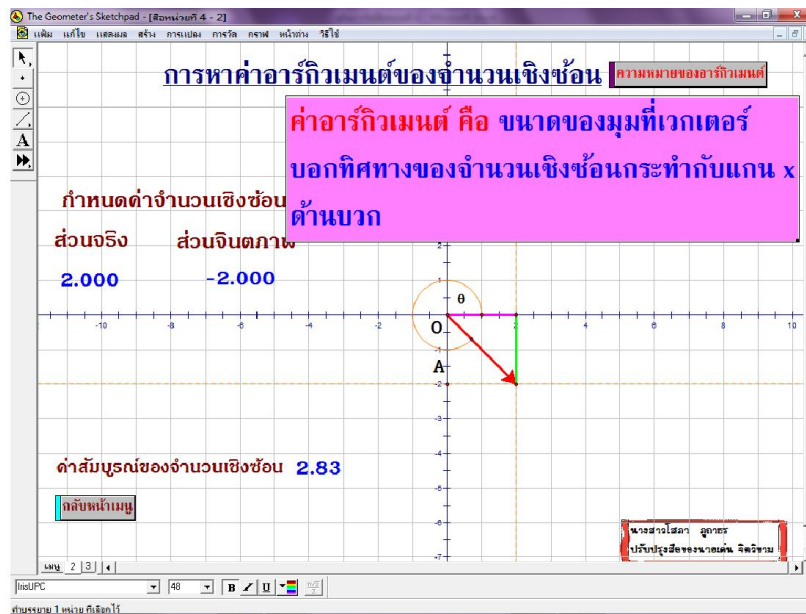
- นักเรียนสามารถหาค่าอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนได้
- นักเรียนสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้

ขั้นตอนการใช้สื่อหน่วยที่ 4

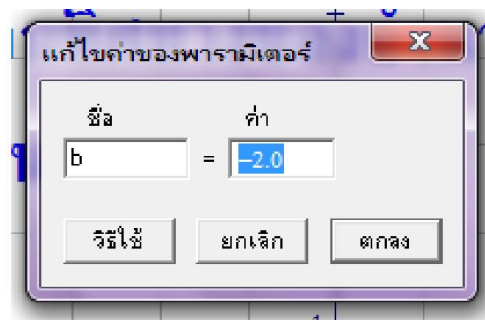
- 1) เปิดไฟล์หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 หน้าเมนูเลือก “การหาค่าอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน”



- 2) ให้นักเรียนกำหนดค่าของจำนวนเชิงซ้อนโดยให้จุดปลายของเวกเตอร์บอกทิศทางของจำนวนเชิงซ้อนอยู่บนจุดภาคที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับสังเกตการเปลี่ยนแปลงค่าอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนในจุดภาคต่างๆ โดยคลิกที่ปุ่มแสดงค่าอาร์กิวเมนต์ตามจุดภาคของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดแล้วตอบคำถามในแบบฝึกทักษะชุดที่ 1



- 3) ให้นักเรียนกำหนดค่าของจำนวนเชิงซ้อน โดยให้จุดปลายของเวกเตอร์ที่บอกทิศทางของจำนวนเชิงซ้อนทับกับแกน x ด้านบวกแกน x ด้านลบ แกน y ด้านบวกและแกน y ด้านลบสังเกตการเปลี่ยนแปลงค่าอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน
- 4) ให้นักเรียนกำหนดค่าจำนวนเชิงซ้อนที่มีเวกเตอร์สีแดงบอกทิศทาง เพื่อหาค่าอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน และหาความสัมพันธ์ของอาร์กิวเมนต์ทั้ง 4 จตุภาคโดยคลิกที่ปุ่มแสดงค่าอาร์กิวเมนต์ตามจตุภาคของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด
- 5) ถ้าส่วนใดส่วนหนึ่งของจำนวนเชิงซ้อนอยู่ในรูปของทศนิยม ให้ปรับค่าส่วนนั้นๆ โดยดับเบิ้ลคลิกที่จำนวนที่ต้องการปรับ จะได้กล่องข้อความ แล้วเปลี่ยนค่าให้เป็นค่าที่ต้องการในกล่องข้อความ



- 6) เมื่อเสร็จแล้วให้กลับหน้าเมนู เลือก “กลับหน้าเมนู” เพื่อกลับหน้าเมนู

#####

แผนการจัดการเรียนรู้แบบทีเอไอ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

รายวิชาคณิตศาสตร์

รหัสวิชา ค32202

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เรื่องจำนวนเชิงซ้อนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จำนวน 16 ชั่วโมง

แผนการเรียนรู้ที่ 5 เรื่องรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 3 ชั่วโมง

1. สาระสำคัญ

การหาคำตอบของสมการ $w^n = z$ เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งคำตอบของสมการคือรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right) \text{ เมื่อ } k=1,2,3, \dots, n-1$$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- นักเรียนสามารถหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
- นักเรียนสามารถหาคำตอบพหุนามดีกรีไม่เกินสามได้

ด้านทักษะกระบวนการ

- นักเรียนมีทักษะการทำงานเป็นกลุ่ม
- นักเรียนมีทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
- นักเรียนมีทักษะการแก้ปัญหา

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- นักเรียนให้ความร่วมมือในการทำงานกลุ่ม
- นักเรียนมีความละเอียดรอบคอบและรับผิดชอบในการทำงาน

3. สาระการเรียนรู้

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ ซึ่งเป็นที่รู้จักว่าเป็นรูปแบบของออยเลอร์ (Euler's formular) โดยที่ θ มีหน่วยเป็นเรเดียนจะได้ $z = re^{i\theta}$ และฟังก์ชัน $e^{i\theta}$ มีสมบัติ $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

บทนิยาม สำหรับจำนวนเต็มบวก n เราจะเรียกจำนวนเชิงซ้อน w ว่าเป็นรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z ถ้า $w^n = z$

เขียน $w = \sqrt[n]{z}$ หรือ $w = z^{\frac{1}{n}}$

$$\text{จะได้ } w = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right); k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

ข้อสังเกต รากที่ n ของ z จะมีอยู่ n คำตอบเสมอ ซึ่งคำตอบแรกของสมการคือ

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n}\right) \right)$$

ส่วนคำตอบที่เหลือจะมีขนาดเท่ากับคำตอบแรก แต่มีค่าอาร์กิวเมนต์ของคำตอบที่ต่างกัน

กล่าวคือ มี θ เป็น $\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ โดยที่ $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ เหตุผลเพราะรากของเชิงซ้อนที่ n จะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและมีรัศมีเท่ากับ $\sqrt[n]{r}$ (หรือรากที่ n ของขนาดของเชิงซ้อน) ที่กำหนดให้ รากแต่ละรากมีระยะห่างกันเป็นระยะเท่าๆ กันบนเส้นรอบวง โดยมีมุมที่รองรับส่วนโค้งที่เป็นระยะห่างระหว่างราก 2 รากที่ใกล้กันหาได้จากการแบ่งมุมของวงกลมที่มีขนาด 360° ออกเป็น n ส่วนเท่าๆ กัน คำตอบทั้งหมดของรากที่ n ของ z เขียนได้ในรูปทั่วไปดังนี้

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(k \frac{360^\circ}{n} + \frac{\theta}{n}\right) + i \sin\left(k \frac{360^\circ}{n} + \frac{\theta}{n}\right) \right)$$

$$\text{โดยที่ } k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหารากที่ 3 ของ 1

วิธีทำ กำหนดให้ $w = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ 1

$$\text{จะได้ } w^3 = r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 1$$

$$|r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)| = 1$$

$$|r|^3 = 1 \text{ (เพราะว่า } |(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)| = 1)$$

$$\text{ดังนั้น } r = 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \cos 3\theta + i \sin 3\theta = 1 \text{ หรือ } e^{3\theta i} = e^{2n\pi i}$$

$$\text{โดยการเทียบเท่าจะได้ } 3\theta = 2n\pi; n = 0, 1, 2$$

$$\theta = \frac{2n\pi}{3}$$

นั่นคือ รากที่ 3 ของ 1 มี 3 ราก ประกอบด้วย

$$w_0 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1$$

$$w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

4. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นเตรียม

- ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบและให้นักเรียนนั่งเป็นกลุ่มที่จัดไว้
- ครูแจ้งคะแนนของแต่ละกลุ่มให้นักเรียนทราบเพื่อเสริมแรงเชิงบวกกับกลุ่มที่ได้คะแนนดี ให้กำลังใจกลุ่มที่ได้คะแนนน้อย และให้นักเรียนตรวจสอบความพร้อมของคอมพิวเตอร์ที่ใช้เรียน
- ครูอธิบายการทำกิจกรรมที่ 1 ให้นักเรียนทราบว่าในกิจกรรมนี้มีแบบฝึกทักษะจำนวน 3 ชุด โดยขั้นแรกนักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ให้ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 ถ้าไม่ผ่านเกณฑ์ให้แก้ไขจนกว่าจะผ่านขั้นที่สองนักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 2 และแบบฝึกทักษะชุดที่ 3 ให้ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 และขั้นสุดท้ายนักเรียนทำแบบทดสอบย่อยทุกคน และผลการทดสอบย่อยเป็นตัวกำหนดคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม

ขั้นสอน

- ครูใช้คำถามเพื่อทบทวนการคูณจำนวนเชิงซ้อน และการคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อนเดิม เพื่อให้นักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ของการคูณจำนวนเชิงซ้อนเดิมในรูปแบบดังนี้
- $z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
- ครูใช้คำถามเพื่อทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับการหารากที่ n ในระบบจำนวนจริง เช่น “ถ้า $b^n = m$ แล้ว b เป็นรากที่ n ของ m ”
- ครูให้นักเรียนเปิดสื่อจีเอสพีหน่วยที่ 5 เลือกเมนูการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
- ครูให้นักเรียนกำหนดจำนวนเชิงซ้อนแล้วเปลี่ยนอันดับการหารากที่ n ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนสังเกตการเปลี่ยนแปลงขนาดและค่าอาร์กิวเมนต์ของเวกเตอร์คำตอบของรากที่ n เปรียบเทียบกับจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดแล้วให้นักเรียนตอบคำถามในแบบฝึกทักษะชุดที่ 1
- ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอาร์กิวเมนต์และขนาดเวกเตอร์คำตอบของรากทุกคำตอบกับจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดเพื่อให้นักเรียนสรุปได้ว่าขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์จะมีค่าเท่ากับรากที่ n ของขนาดของจำนวนเชิงซ้อน และอาร์กิวเมนต์ของผลลัพธ์จะมีค่าเท่ากับ อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดหารด้วยรากที่ n
- ครูกำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันในแบบฝึกทักษะชุดที่ 2 เพื่อให้นักเรียนศึกษาทุกรากที่เป็นคำตอบของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด โดยครูให้นักเรียนเปลี่ยนค่าคงที่ k เพื่อศึกษาค่าคงที่ k ที่เป็นไปได้ที่ทำให้ได้คำตอบของรากทั้งหมดครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียน

สังเกตระยะห่างของส่วนโค้งบนเส้นรอบวงระหว่างรากแต่ละรากและสังเกตมุมที่รองรับส่วนโค้งระหว่างราก 2 รากที่ติดกัน

- ครูใช้คำถามแนะแนวทางเพื่อให้นักเรียนวิเคราะห์ได้ว่ารากแต่ละรากมีระยะห่างกันเป็นระยะเท่าๆ กันบนเส้นรอบวง โดยมุมที่รองรับส่วนโค้งระหว่างราก 2 รากที่ใกล้กันหาได้จากการแบ่งมุมของวงกลมที่มีขนาด 360° ออกเป็น n ส่วนเท่าๆ กัน และสรุปได้ว่าค่าคงที่ k สัมพันธ์กับค่ารากที่ n คือ $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$
- ครูสรุปรูปแบบการหารากที่ n และยกตัวอย่างที่ 1 เพื่อแสดงการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
- ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 3 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนแล้วใช้สื่อจีเอสพีตรวจสอบความถูกต้องซึ่งสื่อจะแสดงรากที่เป็นคำตอบทุกราก
- ครูอธิบายการนำ “การหารากที่ n ” ไปประยุกต์ใช้หาเซตคำตอบของสมการพหุนามกำลังสอง ดังนี้จึงแก้สมการ $x^2 + 3x + 5 = 0$

วิธีทำ $x^2 + 3x + 5 = 0$

เทียบกับ $ax^2 + bx + c = 0$ จะได้ $a = 1, b = 3, c = 5$

จากสูตร
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{11} i}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2} i$$

ตรวจสอบ
$$\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} i\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} i\right) + 5$$

$$= \left(\frac{9}{4} - \frac{11}{4}\right) - \frac{3\sqrt{11}}{2} i - \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{11}}{2} i + 5$$

$$= 0$$

$$\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} i\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} i\right) + 5$$

$$= \left(\frac{9}{4} - \frac{11}{4}\right) - \frac{3\sqrt{11}}{2} i - \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{11}}{2} i + 5 = 0$$

$$\text{ดังนั้น เซตคำตอบคือ } \left\{ -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} i, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} i \right\}$$

- ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 3 เพื่อฝึกทักษะการนำการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนไปประยุกต์ใช้หารากคำตอบของสมการ

ขั้นจัดกิจกรรม

- ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ทำใบกิจกรรมที่ 5 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1-3 ร่วมกับการใช้สื่อจีเอสพี หน่วยที่ 1 นักเรียน 1 คู่ใช้สื่อคอมพิวเตอร์ 1 เครื่อง โดยมีครูคอยแนะนำอยู่หน้าห้องแล้วอธิบายให้นักเรียนศึกษาสื่อไปพร้อมๆ กัน
- ครูจะให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนไม่เข้าใจ โดยนักเรียนทั้งกลุ่มรับฟังคำแนะนำแล้วช่วยกันทำกิจกรรมแลกเปลี่ยนความรู้ความคิดเห็นซึ่งกันและกันในกลุ่มของตนแล้วช่วยกันทำกิจกรรมแล้วแลกเปลี่ยนใบกิจกรรมที่ทำแล้วกับคู่ที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันตรวจ

ขั้นตรวจสอบผลงาน

- ครูให้นักเรียนทุกคนแลกเปลี่ยนตรวจแบบฝึกทักษะกับคู่ที่อยู่ในกลุ่มของตนเอง ถ้านักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1 ผ่านร้อยละ 65 ขึ้นไปให้ทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 2 และ 3 ตามลำดับจนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65
- ครูแจ้งว่าถ้านักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะไม่ผ่านเกณฑ์ให้แก้ไขจนผ่านเกณฑ์ก่อนจึงทำแบบฝึกทักษะชุดต่อไป
- เมื่อทำแบบฝึกทักษะครบทุกชุดแล้วครูให้นักเรียนทุกคนแยกกันทำแบบทดสอบย่อย จำนวน 5 ข้อ

ขั้นสรุปบทเรียน

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปการหารากที่ n และการนำการหารากที่ n ไปประยุกต์ใช้หารากคำตอบของสมการ

5. สื่อ/แหล่งเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้

- หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ
- โปรแกรมจีเอสพี หน่วยที่ 5
- ใบกิจกรรมที่ 5 แบบฝึกทักษะชุดที่ ชุดที่ 1, 2 และ 3
- คู่มือการใช้สื่อหน่วยที่ 5

แหล่งการเรียนรู้

- ห้องสมุดโรงเรียนบางบ่อวิทยาคม
- ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนบางบ่อวิทยาคม

6. การวัดและประเมินผล

- สังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ เช่น ความสนใจในการศึกษาใบกิจกรรม และแบบฝึกทักษะ
- ประเมินผลความเข้าใจ การดำเนินการแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และการตรวจสอบผลจากแบบฝึกทักษะชุดที่ 1, 2 และ 3
- ประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนประจำหน่วยด้วยแบบทดสอบย่อยอัตนัยจำนวน 5 ข้อ แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 4 คะแนน มีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

4 คะแนน	คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำได้ถูกต้องสมบูรณ์
3 คะแนน	คำตอบถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำและการได้มาของคำตอบได้ไม่สมบูรณ์
2 คะแนน	คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำได้เพียงบางส่วน
1 คะแนน	คำตอบไม่ถูกต้อง แต่แสดงวิธีทำได้บางส่วน
0 คะแนน	คำตอบไม่ถูกต้องและไม่แสดงวิธีทำ

7. บันทึกหลังสอน

คะแนนที่ได้จากการทำกิจกรรมของนักเรียนในเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

1. นักเรียนที่มีคะแนนมากกว่าหรือเท่ากับร้อยละ 65 จำนวน.....คน
2. นักเรียนที่มีคะแนนน้อยกว่าร้อยละ 65 จำนวน.....คน

คะแนนแบบทดสอบย่อยเป็นกลุ่ม

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

กลุ่มที่มีคะแนนเฉลี่ย.....คะแนน

ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมหลังสอนสำหรับผู้สอน

.....

.....

ลงชื่อผู้สอน

บันทึกความเห็นของผู้ตรวจสอบแผนการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางอังคณา จันทรแก้ว)

หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ใบกิจกรรมที่ 5 แบบฝึกทักษะชุดที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่องรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์การเรียนรู้

- หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

คำสั่ง ให้นักเรียนใช้โปรแกรมจีเอสพี หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อ เมื่อ กำหนดให้ $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{5} = 2.236$ และ θ คือ อาร์กิวเมนต์ของ z

1. กำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นจำนวนจริงแท้ คือ.....

- ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้มีค่าเป็น.....
- อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้มีค่าเป็น.....
- ให้นักเรียนเปลี่ยนค่าอันดับการหาราก (หรือ n) และตอบคำถามต่อไปนี้
 - I. $n = 1$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
 - II. $n = 2$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
 - III. $n = 3$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
 - IV. $n = 4$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....

2. กำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นจำนวนจินตภาพแท้ คือ.....

- ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้มีค่าเป็น.....
- อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้มีค่าเป็น.....
- ให้นักเรียนเปลี่ยนค่าอันดับการหาราก (หรือ n) และตอบคำถามต่อไปนี้
 - I. $n = 1$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
 - II. $n = 2$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....

- III. $n = 3$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
- IV. $n = 4$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
3. กำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่มีจุดปลายอยู่บนจตุภาคที่ 1 คือ
- ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้มีค่าเป็น.....
 - อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้มีค่าเป็น.....
 - ให้นักเรียนเปลี่ยนค่าอันดับการหาราก (หรือ n) และตอบคำถามต่อไปนี้

I. $n = 1$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....

II. $n = 2$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....

III. $n = 3$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....

IV. $n = 4$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
4. กำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่มีจุดปลายอยู่บนจตุภาคที่ 2 คือ
- ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้มีค่าเป็น.....
 - อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้มีค่าเป็น.....
 - ให้นักเรียนเปลี่ยนค่าอันดับการหาราก (หรือ n) และตอบคำถามต่อไปนี้

I. $n = 1$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....

II. $n = 2$ ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....
อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ.....

- [illegible]

8. อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดกับอาร์กิวเมนต์ของผลลัพธ์สัมพันธ์กันอย่างไร.....

.....

9. จากคำถาม “จงหารากที่ 4 ทั้งหมดของ 81”

- I. อันดับการหาราก (n) คือ.....
- II. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนจากคำถาม เท่ากับ.....
- III. อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนจากคำถาม เท่ากับ.....
- IV. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนจากผลลัพธ์ เท่ากับ.....
- V. ค่า k ที่ทำให้ได้คำตอบของรากทั้งหมด คือ.....
- VI. มุมของเวกเตอร์คำตอบของรากที่ติดกันมีค่าเท่ากับ.....

10. จากคำถาม “จงหารากที่ 3 ทั้งหมดของ $z = \sqrt{3}i$ ”

- I. อันดับการหาราก (n) คือ.....
- II. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนจากคำถาม เท่ากับ.....
- III. อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนจากคำถาม เท่ากับ.....
- IV. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนจากผลลัพธ์ เท่ากับ.....
- V. ค่า k ที่ทำให้ได้คำตอบของรากทั้งหมด คือ.....
- VI. มุมของเวกเตอร์คำตอบของรากที่ติดกันมีค่าเท่ากับ.....

11. จากคำถาม “จงหารากที่ 3 ทั้งหมดของ $z = -1 - \sqrt{3}i$ ”

- I. อันดับการหาราก (n) คือ.....
- II. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนจากคำถาม เท่ากับ.....
- III. อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนจากคำถาม เท่ากับ.....
- IV. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนจากผลลัพธ์ เท่ากับ.....
- V. ค่า k ที่ทำให้ได้คำตอบของรากทั้งหมด คือ.....
- VI. มุมของเวกเตอร์คำตอบของรากที่ติดกันมีค่าเท่ากับ.....

10. จากคำถาม “จงหารากที่ 2 ทั้งหมดของ $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ”

- I. อันดับการหาราก (n) คือ.....
- II. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนจากคำถาม เท่ากับ.....
- III. อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนจากคำถาม เท่ากับ.....
- IV. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนจากผลลัพธ์ เท่ากับ.....
- V. ค่า k ที่ทำให้ได้คำตอบของรากทั้งหมด คือ.....
- VI. มุมของเวกเตอร์คำตอบของรากที่ติดกันมีค่าเท่ากับ.....

12. จากคำถาม “จงหารากที่ 4 ทั้งหมดของ $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ ”

- I. อันดับการหาราก (n) คือ.....
- II. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนจากคำถาม เท่ากับ.....
- III. อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนจากคำถาม เท่ากับ.....
- IV. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อนจากผลลัพธ์ เท่ากับ.....
- V. ค่า k ที่ทำให้ได้คำตอบของรากทั้งหมด คือ.....
- VI. มุมของเวกเตอร์คำตอบของรากที่ติดกันมีค่าเท่ากับ.....

ใบกิจกรรมที่ 5 แบบฝึกทักษะชุดที่ 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่องรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

คำสั่งจงแสดงวิธีหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

1. จงหารากที่สองของ $z = 4$

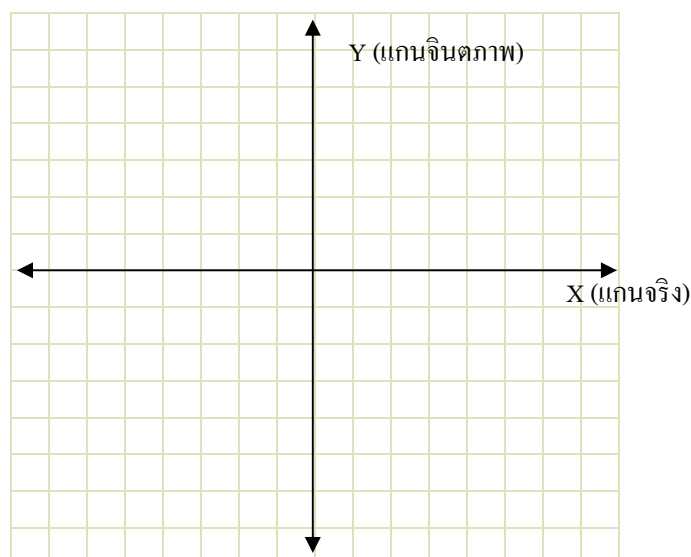
.....

.....

.....

.....

- รากที่สองของ $z = 4$ ทั้งหมดคือ.....
- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน และผลลัพธ์ทั้งหมดในระนาบเดียวกันได้แก่



2. จงหารากที่สองของ $z = -9$

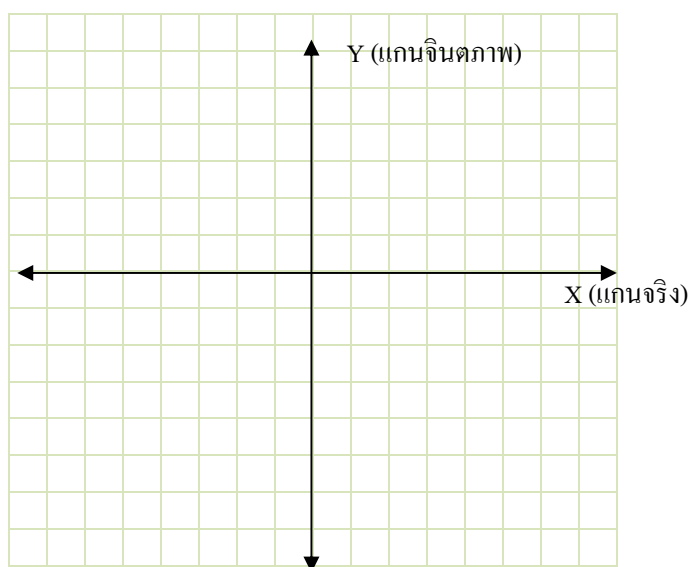
.....

.....

.....

.....

- รากที่สองของ $z = -9$ ทั้งหมดคือ.....
- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน และผลลัพธ์ทั้งหมดในระนาบเดียวกันได้แก่



3. จงหารากที่สองของ $z = 16i$

.....

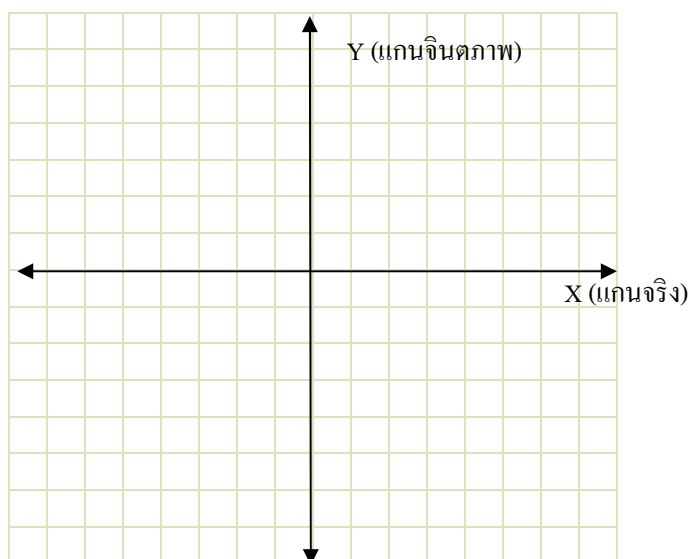
.....

.....

.....

- รากที่สองของ $z = 16i$ ทั้งหมดคือ.....

- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน และผลลัพธ์ทั้งหมดในระนาบเดียวกันได้แก่



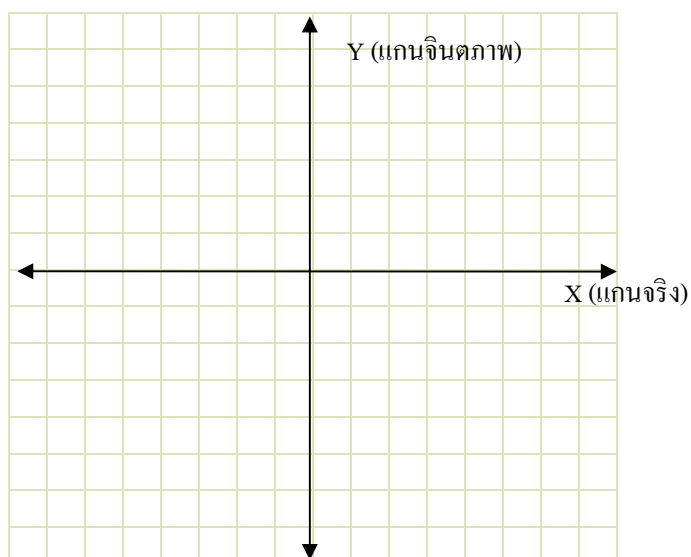
4. จงหารากที่สองของ $z = -1 + \sqrt{3}i$

.....

.....

.....

- รากที่สองของ $z = -1 + \sqrt{3}i$ ทั้งหมดคือ.....
- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน และผลลัพธ์ทั้งหมดในระนาบเดียวกันได้แก่



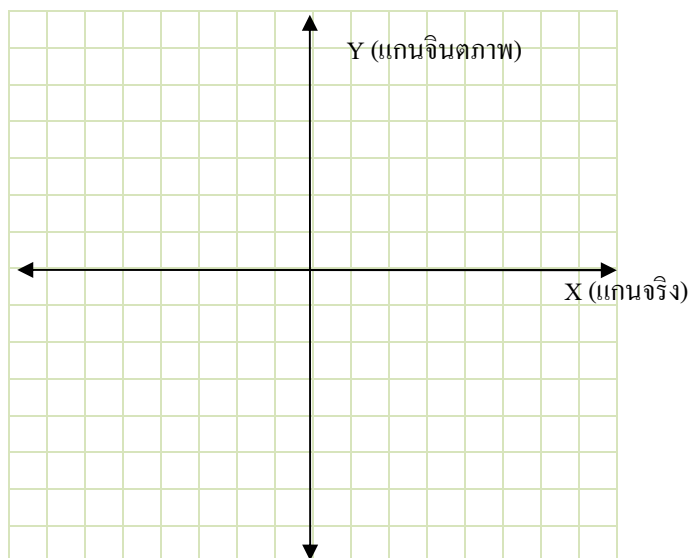
5. จงหารากที่สองของ $z = 5 - 5\sqrt{2}i$

.....

.....

.....

- รากที่สองของ $z = 5 - 5\sqrt{2}i$ ทั้งหมดคือ.....
- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน และผลลัพธ์ทั้งหมดในระนาบเดียวกันได้แก่



6. จงหารากที่สองของ $z = -3 + 4i$

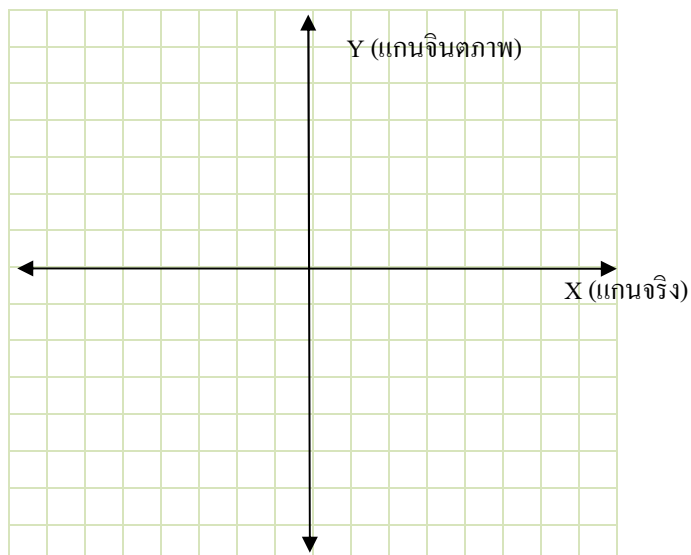
.....

.....

.....

- รากที่สองของ $z = -3 + 4i$ ทั้งหมดคือ.....

- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน และผลลัพธ์ทั้งหมดในระนาบเดียวกันได้แก่



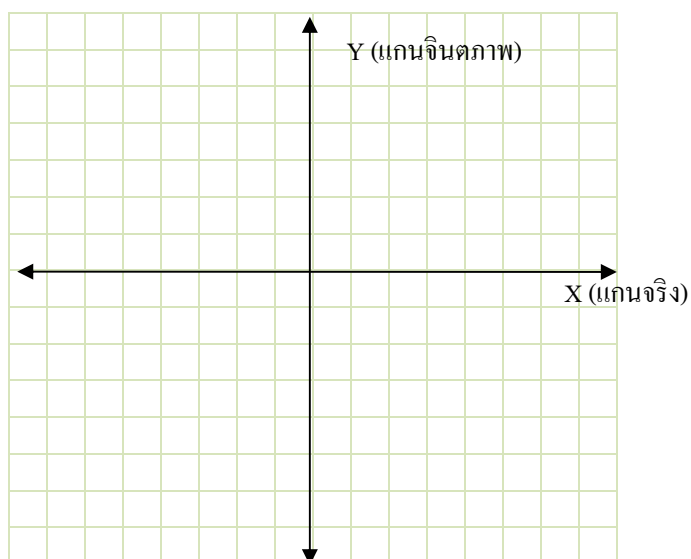
7. จงหารากที่สามของ $z = i$

.....

.....

.....

- รากที่สองของ $z = i$ ทั้งหมดคือ.....
- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน และผลลัพธ์ทั้งหมดในระนาบเดียวกันได้แก่



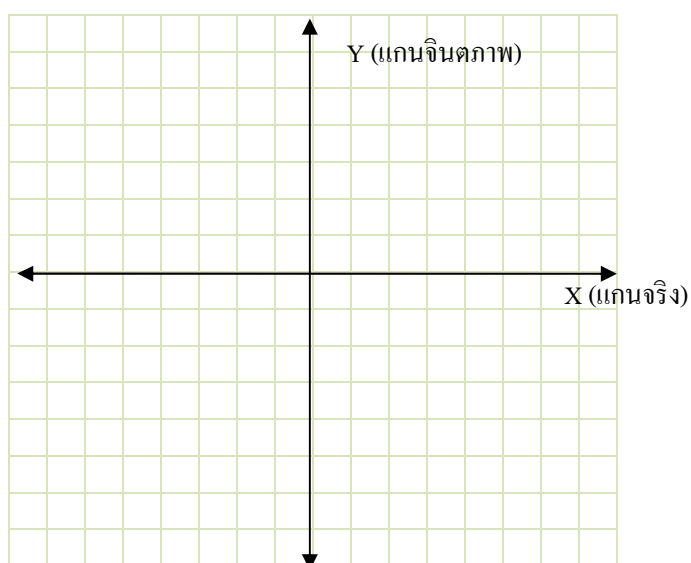
8. จงหารากที่สามของ $z = 64$

.....

.....

.....

- รากที่สองของ $z = 64$ ทั้งหมดคือ.....
- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน และผลลัพธ์ทั้งหมดในระนาบเดียวกันได้แก่



9. จงหารากที่สามของ $z = 27i$

.....

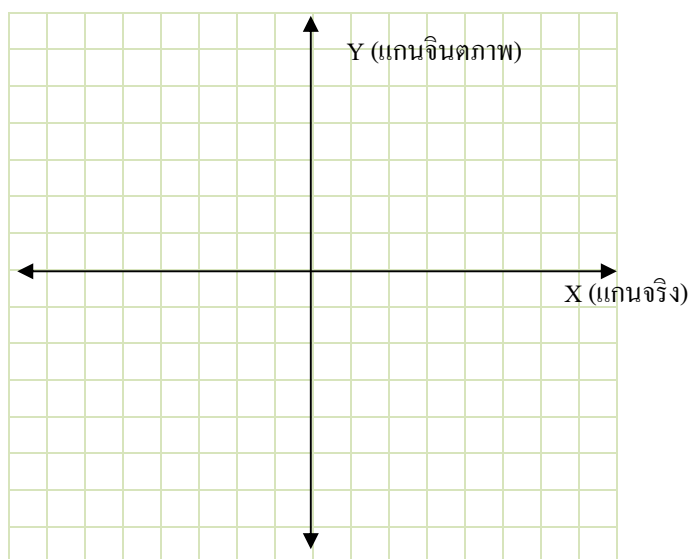
.....

.....

.....

- รากที่สองของ $z = 27i$ ทั้งหมดคือ.....

- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน และผลลัพธ์ทั้งหมดในระนาบเดียวกันได้แก่



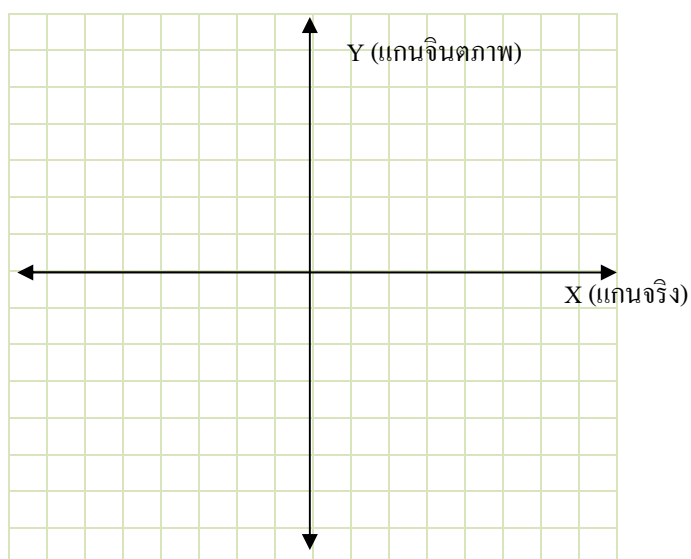
10. จงหารากที่สามของ $z = -8i$

.....

.....

.....

- รากที่สองของ $z = -8i$ ทั้งหมดคือ.....
- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน และผลลัพธ์ทั้งหมดในระนาบเดียวกันได้แก่



ใบกิจกรรมที่ 5 แบบฝึกทักษะชุดที่ 3

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่องรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่ม.....

จุดประสงค์

- แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมีดีกรีไม่เกินสาม

คำสั่ง จงแสดงวิธีการหาคำตอบที่ถูกต้อง

1. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 3x - 4 = 0$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

2. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 4x + 5 = 0$

.....	
.....	
.....	
.....	

3. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 6x + 9 = 0$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

4. จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 2x + 5 = 0$

5. จงหาคำตอบของสมการ $2x^3 - x + 1 = 0$

[illegible]

6. ให้แสดงว่า $2+3i$ เป็นคำตอบของสมการ $x^3-3x^2+9x+13=0$

[illegible]

แบบทดสอบย่อย

เรื่องเรื่งรากลที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 5 ข้อ

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบ

1. จงหารากที่สองของ $-2\sqrt{3} - 2i$ 2. จงหารากที่สามของ $-8i$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหารากที่สี่ของ $-8 + 8\sqrt{3} i$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dotted lines. Each column contains ten rows of these dotted lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced and extend across the width of their respective columns.

5. จงหารากของคำตอบของสมการ $x^2 + 4x + 7 = 0$

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dotted lines. Each column contains ten rows of these dotted lines, providing a guide for letter height and placement. The margins are consistent on all sides, and there are no other markings or text on the page.

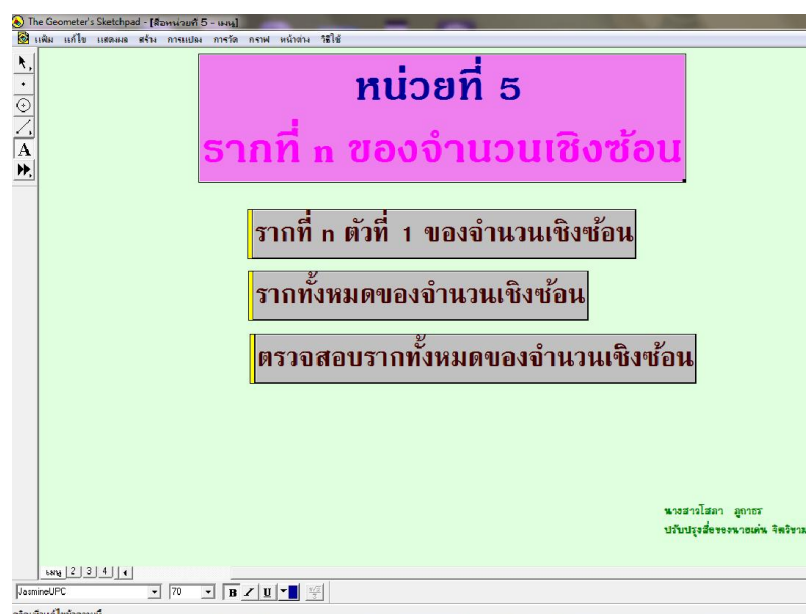
คู่มือการใช้สื่อหน่วยที่ 5

จุดประสงค์การเรียนรู้

- นักเรียนสามารถหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ขั้นตอนการใช้สื่อหน่วยที่ 5

- 1) เปิดไฟล์หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 หน้าเมนูเลือก “รากที่ 1 ของจำนวนเชิงซ้อน”

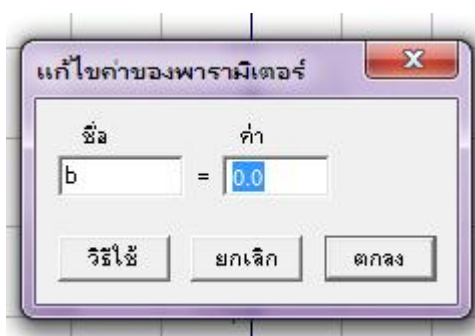


- 2) ให้นักเรียนกำหนดค่าของจำนวนเชิงซ้อน 1 จำนวน

- 3) การกำหนดค่าของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้าจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริง และส่วนจินตภาพเป็นจำนวนเต็มให้ทำการเปลี่ยนค่าของแต่ละส่วน โดยคลิกที่ตัวเลขของแต่ละส่วน แล้วกดแป้น + เพื่อเพิ่มค่า และแป้น - เพื่อลดค่า

ถ้าส่วนใดของจำนวนเชิงซ้อนอยู่ในรูปทศนิยม สามารถปรับค่าส่วนนั้นๆ โดยดับเบิ้ลคลิกที่จำนวนของส่วนจริงแล้วใส่ค่า ดังรูป



คลิกตกลงเพื่อออกจากการแก้ไขค่าของพารามิเตอร์

- 4) ให้นักเรียนกำหนดค่าอันดับการหาราก (n) และเปลี่ยนไปเรื่อย ๆ เพื่อสังเกตการเปลี่ยนแปลงขนาด และอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อนผลลัพธ์
- 5) เมื่อเสร็จแล้วให้กลับหน้าเมนูโดยเลือก “กลับหน้าเมนู”
- 6) เลือก “รากทั้งหมดของจำนวนเชิงซ้อน” แล้วให้นักเรียนกำหนดค่าอันดับการหาราก(n)
- 7) แล้วให้นักเรียนเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ k เพื่อสังเกตรากทั้งหมดของจำนวนเชิงซ้อน
- 8) เมื่อต้องการการพิจารณาค่าการหารากของจำนวนเชิงซ้อนอื่นให้เลือกที่เมนูแสดงผล เลือกคำสั่งลบรอย เพื่อให้รอยของเวกเตอร์แสดงผลลัพธ์หายไป
- 9) ให้นักเรียนเปลี่ยนค่าอันดับการหาราก (n) แล้วให้เปลี่ยนค่า k เพื่อสังเกตรากทั้งหมดของจำนวนเชิงซ้อน
- 10) เมื่อเสร็จแล้วกลับหน้าเมนู เลือกปุ่ม “กลับหน้าเมนู”
- 11) เลือกปุ่ม “ตรวจสอบรากทั้งหมดของจำนวนเชิงซ้อน”
- 12) ให้นักเรียนกำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่ต้องการตรวจสอบ และกำหนดค่าอันดับของราก (n)
- 13) ให้นักเรียนวาดกราฟที่มีเวกเตอร์บอกทิศทางของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนด และรากทั้งหมดของจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบเดียวกัน

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง แบบทดสอบแบ่งออกเป็น 2 ตอน คะแนนเต็ม 34 คะแนน ใช้เวลา 60 นาที

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว (16 คะแนน)

1. $i^6 + i^7 + i^8 + i^9$ มีค่าเท่าใด

ก. i

ข. $-i$

ค. -1

ง. 0

2. ค่าส่วนจริงของ $2 + 3i$ เท่ากับเท่าใด

ก. 2

ข. -2

ค. $3i$

ง. $-3i$

3. $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}i\right)$ มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{7}{6} + \frac{19}{20}i$

ข. $\frac{7}{6} - \frac{19}{20}i$

ค. $-\frac{7}{6} + \frac{19}{20}i$

ง. $-\frac{7}{6} - \frac{19}{20}i$

4. $4(2 - 3i) - (2 - 8i)$ มีค่าเท่าใด

ก. $6 - 4i$

ข. $6 - 20i$

ค. $10 - 4i$

ง. $10 - 20i$

5. จงหาค่าของ a และ b ที่สอดคล้องกับ $3a + 4bi = (1 + i)^2$

ก. $a = 0$ และ $b = \frac{1}{2}$

ข. $a = 1$ และ $b = \frac{1}{2}$

ค. $a = \frac{1}{2}$ และ $b = 1$

ง. $a = 0$ และ $b = -\frac{1}{2}$

6. กำหนดให้ $z_1 = 3+2i$ และ $z_2 = 2+4i$ จะได้ $z_1 z_2$ มีค่าเท่าใด

ก. $6+8i$

ข. $2+8i$

ค. $-2+16i$

ง. $2+16i$

7. กำหนดให้ $z = 4+i$ จะได้ $\bar{z}$ มีค่าเท่าใด

ก. $4+i$

ข. $4-i$

ค. $-4+i$

ง. $-4-i$

8. จำนวนเชิงซ้อน $\frac{1}{2-3i}$ เขียนได้ในรูป $a+bi$ เท่ากับเท่าใด

ก. $-\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$

ข. $\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$

ค. $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$

ง. $-\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$

9. จำนวนเชิงซ้อนในข้อใดคือรากที่สองของ $-16i$

ก. $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$

ข. $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

ค. $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

ง. $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

10. จงหาค่าของ x จากสมการ $x^2+4x+7=0$

ก. $-2\pm 3i$

ข. $2\pm 3i$

ค. $2\pm\sqrt{3}i$

ง. $-2\pm\sqrt{3}i$

11. รูปเชิงขั้วของจำนวน $1+\sqrt{3}i$ คือข้อใด

ก. $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ข. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ค. $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

ง. $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

12. จงหาค่าของ $(\sqrt{3} + i)^3$ ให้อยู่ในรูป $a + bi$

ก. $8i$

ข. $9i$

ค. $3\sqrt{3} i$

ง. $8 + i$

13. กำหนดให้ $z = 4 + 2i$ ค่าของ $|z|$ คือจำนวนใด

ก. $2\sqrt{5}$

ข. $3\sqrt{5}$

ค. $2\sqrt{3}$

ง. $5\sqrt{2}$

14. กำหนดให้ $z = 3 + 3\sqrt{3} i$ ค่าของ $|z|$ คือจำนวนใด

ก. 6

ข. 9

ค. 12

ง. 18

15. จงหาค่าของ $z_1 z_2$ ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ $z_1 z_2 = 2(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$

ก. $\sqrt{3} - i$

ข. $\sqrt{3} + i$

ค. $-\sqrt{3} + i$

ง. $-\sqrt{3} - i$

16. จงหาค่าของ $\frac{8\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)}$ ในรูป $a + bi$

ก. $2\sqrt{3} + 2i$

ข. $2\sqrt{3} + i$

ค. $-2\sqrt{3} + i$

ง. $-2\sqrt{3} - 2i$

.....

ตอนที่ 2 จงแสดงวิธีทำ (18 คะแนน)

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ (ข้อละ 2 คะแนน)

1.1 $(2 - 2i)^2$

.....

.....

1.2 $(3+2i)-(2+4i)$

.....

.....

.....

2. กำหนดให้ $z_1 = 2-i$ และ $z_2 = -3+2i$ จงหา (ข้อละ 2 คะแนน)

2.1 $\overline{z_1 + z_2}$

.....

.....

.....

2.2 $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$

.....

.....

.....

3. จงหารากที่สองของ $-7+24i$ (5 คะแนน)

.....

.....

.....

4. จงเขียนรูปเชิงขั้วของ $z = -2\sqrt{3}-2i$ (5 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....