

บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทที่ 2 นี้ผู้วิจัยได้กำหนดเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่เกี่ยวข้องสำหรับศึกษาวิจัยไว้ดังนี้คือ

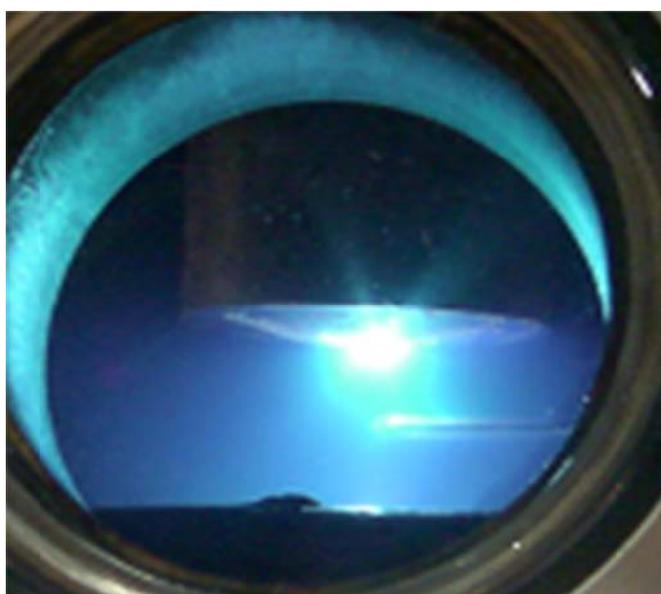
- 2.1 การอาร์คในสุญญากาศ
- 2.2 รูปแบบสำหรับการใช้ในการวิเคราะห์
- 2.3 การรวมตัวของโลหะผสม
- 2.4 เทอร์โมไอออนิก อิมิชชัน ของอิเล็กตรอน
- 2.5 สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์
- 2.6 กฎของไบเซกชัน (Bisection Method)
- 2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 การอาร์คในสุญญากาศ

ณรงค์ มั่งคั่ง [15] ได้กล่าวไว้ว่าการอาร์คในสุญญากาศหมายถึง การคายประจุของกระแสไฟฟ้าซึ่งเกิดขึ้นระหว่างขั้วอิเล็กโทรดที่อยู่ในสภาพเป็นก๊าซหรือในสภาพที่เป็นไอระเหยฟุ้งกระจาย และจะทำให้เกิดแรงดันตกคร่อมที่ขั้วแคโทด โดยแรงดันนี้จะเกิดจากการแยกอนุภาคประจุไฟฟ้าของก๊าซหรือไอโลหะภายใต้สภาวะที่เป็นสุญญากาศ

อย่างไรก็ตาม การอาร์คในสุญญากาศ จะมีกระบวนการที่เกิดขึ้นในทำนองเดียวกันกับ การระเหยจากการอาร์คของโลหะและเป็นที่เข้าใจตรงกันว่าสมมติฐานของ การระเหยของโลหะก็จะมี การคายประจุด้วยตัวของมันเอง ลักษณะส่วนใหญ่ของการอาร์คในสุญญากาศจะเหมือนกับรูปที่แสดงในข้อ 2.1 ไอระเหยที่เกิดจากการอาร์คจะสร้างจุดอาร์คแคโทดเล็กๆ ที่เคลื่อนไหวได้ตลอดเวลาเป็นจำนวนมากมายมหาศาล โดยการเคลื่อนไหวนั้นจะเป็นการเคลื่อนที่แบบสุ่มและไม่แน่นอน อยู่ทางด้านบนของขั้วแคโทด ความหนาแน่นของกระแสที่บริเวณจุดอาร์คแคโทด เล็กๆนั้นจะมีค่าสูงมาก โดยจะมีค่าอยู่ที่ประมาณ 10^6 แอมป์/ตารางเซนติเมตร หรือมากกว่า ในระบบของการอาร์คในสุญญากาศ อะตอมจำนวนหนึ่งจะเปลี่ยนเป็นอนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าและกลายเป็นอิสระที่มีระดับของพลังงานอยู่ในระดับที่สูง ไอออนที่เป็นขั้วบวกนั้นจะเกิดการผลักดันกับขั้วลบหรือผลักดันสนามไฟฟ้าที่ตรงกันข้าม กระบวนการที่เกิดขึ้นจากการอาร์คที่ขั้วแคโทดจะมีความสลับซับซ้อนมาก จึงจำเป็นที่จะศึกษาปรากฏการณ์ทางธรรมชาติของกระบวนการคายประจุ ความเย็นที่เกิดขึ้นที่แคโทดจะมีผลทำให้ มีกระแสแคโทดเพียงแค่ 10 % เท่านั้นที่มีการแผ่กระจายอิเล็กตรอนออกไป และเหตุที่กระแสทั้งหมดที่ขั้วแอโนดนั้นถูกแทนที่โดยการมาถึงของอิเล็กตรอนผลของมันจะทำให้เกิดความแตกต่างของพลังงานที่แตกกระจายปลดปล่อยออกไปที่บริเวณผิวหน้าของขั้วอิเล็กโทรดทั้งสอง

ขั้วแคโทดก่อนข้างจะได้รับผลกระทบจากการชนหรือกระแทกของโลหะในระดับของพลังงานที่มีค่าต่ำแต่จะมีความหนาแน่นของจำนวนพื้นที่ ที่เป็นจุดอาร์คแคโทดเล็กๆมากกว่าและมีระดับความหนาแน่นของพลังงานซึ่งสูงมาก ส่วนบริเวณแอโนดทางด้านตรงกันข้าม พลังงานของอิเล็กตรอนที่มีจำนวนมากนั้นจะเกิดการกระแทกและชนกัน จะมีความสัมพันธ์กับพื้นที่ของการเกิดจุดอาร์คแอโนดที่มีขนาดใหญ่รวมถึงมีระดับพลังงานอยู่ในระดับที่สูงกว่าเป็นจำนวนมาก ปริมาณของไอออนที่มีการแผ่กระจายออกไปจากวัตถุที่เป็นโลหะและเกิดการลุกไหม้อย่างโชติช่วงรวมถึงการแผ่รังสีจะเป็นส่วนที่มีบทบาทสำคัญ โดยเริ่มตั้งแต่การชนและกระแทกกันของโลหะที่บริเวณขั้วบวก ผลของพื้นที่ช่องว่างที่มีการเก็บประจุ จะทำให้เกิดมีความร้อนอย่างรุนแรงที่บริเวณด้านปลายสุด และจะเกิดความหนาแน่นของสนามไฟฟ้าที่บริเวณพื้นที่ที่มันเคลื่อนตัวผ่านบริเวณด้านบนผิวหน้าของขั้วแคโทด



รูปที่ 2.1 แสดงขั้วอิเล็กโทรดของการอาร์คในสุญญากาศ

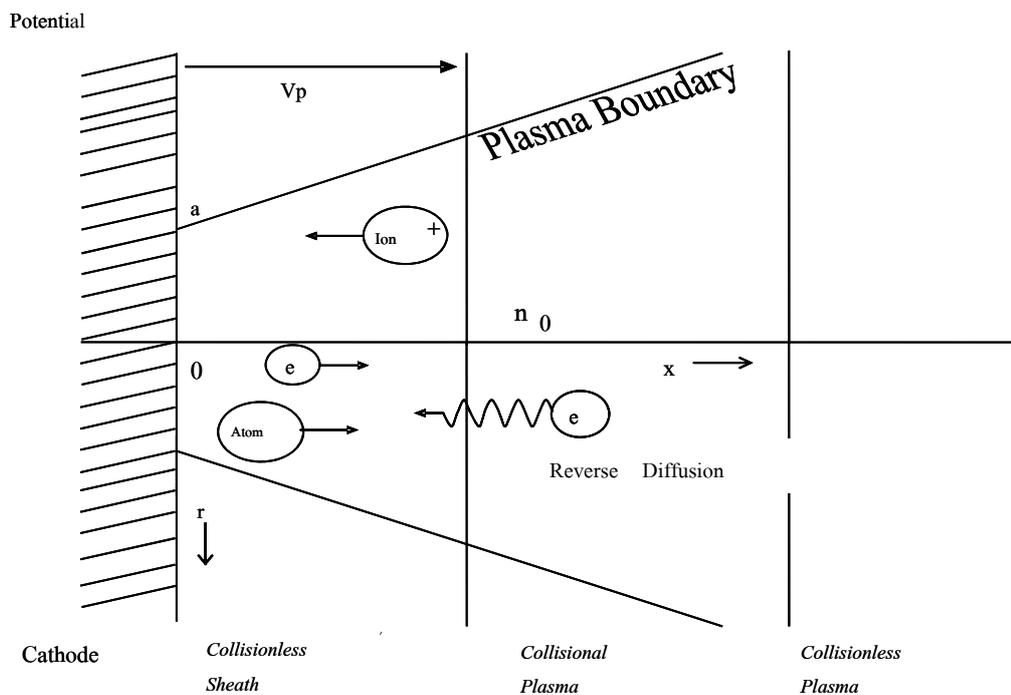
2.2 รูปแบบของการวิเคราะห์

เอ็กเคอร์ (Ecker) [17] และ โมริมิยา (Morimira) [24] ได้กล่าวไว้ในการวิเคราะห์ความไม่เสถียรภาพของปรากฏการณ์นี้โดยใช้รูปแบบของจุดอาร์คแคโทดสำหรับการอธิบาย รูปแบบของจุดแคโทดจะสามารถช่วยให้เข้าใจความแตกต่างทางด้านองค์ประกอบที่บริเวณ ผิวหน้าของแคโทด และพลาสมาที่บริเวณด้านหน้าของผิวแคโทด

ขณะเดียวกันผู้วิจัยจะใช้สมมุติฐานว่าขั้วแคโทดจะมีคุณสมบัติทางกายภาพที่มีลักษณะเหมือนกันทั้งหมด ยกตัวอย่างเช่น บริเวณผิวหน้าที่ราบเรียบเสมอกันเป็นต้น พลาสมาที่บริเวณของแคโทดจะถือ

เป็นส่วนประกอบของจุดแคโทด ผู้วิจัยจึงกำหนดขอบเขตของงานวิจัยให้อยู่บนผิวหน้าของขั้วจุดแคโทด ณบริเวณที่มีจุดอาร์คอยู่และพิจารณาประจุพลาสมาเฉพาะที่เกี่ยวข้องเท่านั้น ดังนั้นบริเวณจุดแคโทด จะประกอบไปด้วยพื้นที่ที่เป็นวงกลม , ผิวหน้าของแคโทดมีความราบเรียบเสมอกัน ส่วนรูปแบบของประจุพลาสมาผู้วิจัยกำหนดขอบเขตไว้ดังนี้

1. พลาสมา สามารถปฏิบัติหรือจัดกระทำได้อย่างมีคุณภาพ
2. อุณหภูมิของอิเล็กตรอนกำหนดให้ใช้ตัวย่อว่า T_e และสามารถคำนวณหาได้จาก พลังงานที่มีความสมดุลย์
3. พลังงานที่สะสมเพิ่มขึ้นในแคโทดเกิดจากการหลุดออกของอิเล็กตรอนที่เข้ามาจากพลังงานที่มีความสมดุลย์ ส่วนกระบวนการแยกตัวที่ทำให้เกิดประจุไฟฟ้าและ การกระตุ้น ที่ทำให้เกิดกระบวนการสูญเสีย รวมถึงการแผ่ของรังสีผู้วิจัยจะไม่นำมาพิจารณา
4. สำหรับรายละเอียดความมีคุณภาพของจำนวนนิวเคลียส จะพิจารณาถึงความคงที่ที่เกิดจากความหนาแน่นของเศษชิ้นเล็กๆที่มีความเป็นกลางทางไฟฟ้าและสอดคล้องกับแรงดันที่เกิดจากการระเหยที่อุณหภูมิของอิเล็กตรอน
5. ไม่พิจารณาผลกระทบที่เกิดจากสนามแม่เหล็ก รายละเอียดทั้งหมดนี้จะเป็นตัวบ่งบอกคุณลักษณะสำหรับรูปแบบที่อ้างอิงไปยังบริเวณด้านข้างที่แคโทดของพลาสมาและไม่สามารถนำมาใช้ได้กับบริเวณด้านข้างที่แอโนดของแคโทดพลาสมาบอลได้ รูปแบบที่ผู้วิจัยใช้สำหรับวิเคราะห์ความไม่เสถียรภาพจะแสดงในรูป 2.2



รูปที่ 2.2 รูปแบบของจุดแคโทด

ในรูปที่ 2.2 ผู้วิจัยตั้งสมมุติฐานว่าการเพิ่มขึ้นของค่าต่างๆที่อาณาบริเวณรอบๆจุดแคโทดจะเกิดจากการปะทะกันโดยตรงของบริเวณพื้นผิวที่เป็นเปลือกที่หุ้มประจุกับการปะทะของพลาสมาเข้าด้วยกัน การเปลี่ยนแปลงของอาณาบริเวณระหว่างพื้นผิวที่เป็นเปลือกที่หุ้มประจุกับบริเวณพื้นผิวของพลาสมานั้นไม่สามารถใช้แก้ปัญหาได้ การใช้รูปแบบของพื้นผิวที่เป็นเปลือกที่หุ้มประจุโดยไม่พิจารณาอาณาบริเวณของ พลาสมาจะมีค่าที่ไม่ทราบอยู่ 2 ตัวคือ ค่าแรงดัน V_p ที่ถูกเพิ่มค่าเข้าไปที่บริเวณเปลือกที่หุ้มประจุและค่าสัดส่วนของกระแสไอออน (δ) จากพลาสมาที่บริเวณแอโนด การเชื่อมต่อถึงกันของก๊าซ พลาสมาไปยังเปลือกที่หุ้มประจุนี้ก๊าซจะไหลทะลักที่อาณาบริเวณของพลาสมาและบริเวณเปลือกที่หุ้มประจุ เป็นผลทำให้ค่าแรงดัน V_c จะมีค่าที่ไม่ทราบค่าได้ เหตุผลที่สำคัญของการไหลของโลหะที่เป็นก๊าซนี้ก็คือการใช้สมการของพลาสมาในการประมาณค่าในรูปแบบของวงรีและมันก็ขึ้นอยู่กับการใช้สมการทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องในการแบ่งขอบเขตของค่าต่างๆ ถ้ากำหนดให้ค่ากระแสของการอาร์คเป็นอิสระ ผู้วิจัยจะสามารถบอกได้ว่าการเปลี่ยนแปลงอื่นๆจะเป็นไปตามทฤษฎี ตามที่ได้อธิบายไว้โดย ไบลิส (Beilis) [27] [28] [29]

2.3 การรวมตัวของโลหะผสม

โลหะจะมีโครงสร้างและการรวมตัวของอะตอมไม่เหมือนกันอะตอมโลหะเป็นอิเล็กตรอนที่เกาะอยู่นอกซึ่งไม่ยึดเกาะแน่นอยู่กับที่ อะตอมจะเคลื่อนที่เป็นกลุ่มอิเล็กตรอนผ่านโครงสร้างต่างๆซึ่งจะทำให้ตัวมันเองไม่สามารถที่จะหลุดด้วยแรงของมันเองออกไปได้ ถ้าตัวอะตอมจะมีประจุบวกอยู่ในนิวเคลียสเรียกตัวอะตอมว่า "ไอออนโลหะ" แรงยึดเหนี่ยวระหว่างไอออนโลหะบวกและอิเล็กตรอนประจุลบจะทำให้เกิดการยึดเหนี่ยวระหว่างโครงสร้างอะตอมสี่เหลี่ยมของโลหะ ไอออนโลหะจะสั่นสะเทือนจากจุดหยุดนิ่งได้มากหรือน้อยขึ้นอยู่กับอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ลักษณะการยึดเหนี่ยวแบบนี้ เรียกว่า การรวมตัวของโลหะ ในขณะที่โลหะบริสุทธิ์เหลวเริ่มเย็นตัวเข้าใกล้จุดอุณหภูมิเริ่มแข็งตัวของโลหะ การสั่นสะเทือนของไอออนโลหะก็จะลดลงเรื่อยๆการแทนที่อะตอมในโลหะผสมเกิดขึ้นเมื่อมีอะตอมแปลกปนเข้าไปในโครงสร้างอะตอมของโลหะ หลักมีเงื่อนไขว่าอะตอมของโลหะทั้งสองต้องมีเส้นผ่านศูนย์กลางโตใกล้เคียงกัน การแทนที่ของอะตอมจะไม่สม่ำเสมอ การแทนที่ของอะตอมทำให้โครงสร้างของอะตอมเสียรูปทรง ปริมาณธาตุที่ปนเข้ามาถ้ามีขนาดเล็กกว่าจะทำให้เกิดการสั่นไหวของอะตอมได้ ถ้ามีขนาดโตกว่าจะทำให้วัสดุแข็งขึ้น ช่วงระยะเวลาการแข็งตัวของโลหะผสมจะเย็นตัวได้เร็วกว่าโลหะบริสุทธิ์ [13]

2.4 เทอร์โมอิเล็กทริก อิมิชชัน ของอิเล็กตรอน (Thermionic Emission of Electrons)

เมื่อโลหะได้รับความร้อนค่าพลังงานของอนุภาคอิเล็กตรอนที่พื้นผิวของโลหะจะมีลักษณะสอดคล้องกับรูปแบบการกระจายพลังงานในรูปแบบของเฟอร์มี-ไดแรค (Fermi Dirac Distribution) ซึ่งจะทำให้อนุภาคของอิเล็กตรอนมีพลังงานมากพอที่จะเอาชนะ ค่าพลังงานศักย์ที่ยึดเหนี่ยวและหลุดออกจากผิวโลหะเป็นอิสระ ปรากฏการณ์เช่นนี้ เรียกว่า ปรากฏการณ์ของ "เทอร์โมอิเล็กทริก อิมิชชันของอิเล็กตรอน" (Thermionic Emission of Electrons) และที่อุณหภูมิ 0°K จะไม่มีอนุภาคอิเล็กตรอนที่มีพลังงานมากกว่าระดับพลังงานเฟอร์มี (Fermi Level) ค่าความแตกต่างระหว่างพลังงานศักย์ที่ยึดอนุภาคอิเล็กตรอนมิให้หลุดจากพื้นผิว ระดับพลังงานเฟอร์มี-ไดแรคก็จะถูกเรียกว่า ค่าเวอร์กฟังก์ชัน (Work Function) ซึ่งของทองแดง, เงิน, นิกเกิล และพาราเดียมมีค่า 4.64, 4.63, 5.19 และ 5.36 eV ตามลำดับ [9]

G. Ecker [17] กล่าวว่า เมื่ออุณหภูมิที่ตัวนำปรากฏสูงขึ้นจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของระดับพลังงานที่โมเลกุลของอะตอมตัวนำ ระดับของพลังงานที่เปลี่ยนแปลงจะมีค่ามากกว่าระดับของพลังงานศักย์ที่ยึดเหนี่ยวอิเล็กตรอนจากกลุ่มโมเลกุลทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกจากผิวโลหะ และค่าพลังงานศักย์ต่ำสุดที่ทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกจากโมเลกุลของอะตอม เรียกว่า ค่าเวอร์กฟังก์ชัน (Work Function, ϕ) ซึ่งจะสัมพันธ์กับค่าความต่างศักย์ของการไอออนไนเซชัน (Ionization Potential, V_i) ของอะตอมเดี่ยว โดยค่าเวอร์กฟังก์ชันจะต้องมีค่าน้อยกว่าค่าความต่างศักย์ของการไอออนไนเซชัน ($\phi < V_i$) สมมติในจุดแรกที่มีการเริ่มต้นการประจุที่รัศมี(r) งานในการเคลื่อนประจุจากรัศมี(r) จนถึง ∞ คือ $\frac{e}{4r}$ ในปัจจุบันที่ระนาบของตัวนำที่เป็นของแข็งมีการกระทำที่หน่วยประจุที่รัศมี(r) ในระยะเซนติเมตร เพราะค่าพลังงานที่เคลื่อนย้ายประจุจากรัศมี(r) จนถึง ∞ คือ $\frac{e}{4r}$ ดังนั้น ค่าเวอร์กฟังก์ชันจึงมีค่าประมาณ $\frac{V_i}{4}$

2.5 สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์

โมริมิยา (Morimira) [24] ได้กล่าวไว้ว่าในการคำนวณตัวแปรอิสระที่มีค่าแปรเปลี่ยนอย่างมีลักษณะเฉพาะนั้นสามารถทำได้โดยกำหนดสมการจำนวน 8 สมการและมีค่าที่ไม่ทราบค่าอีก 2 ตัว คือ แรงดันที่บริเวณเปลือกที่หุ้มประจุ หรือ V_p และค่า สัดส่วนกระแสไอออนที่บริเวณแอนโอดสุดท้ายตัวแปรต่างๆที่ทราบค่าจะทำการกำจัดไปโดยใช้ข้อมูลจากการทดลอง สมการต่างๆนี้จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วนก็คือส่วนที่เป็นบริเวณเปลือกที่หุ้มประจุ และส่วนที่เป็นบริเวณพลาสมา

2.5.1 สมการที่บริเวณเปลือกที่หุ้มประจุ (Sheath)

ผู้วิจัยใช้หลักการและสมการพื้นฐานตามที่อ้างถึงไว้ใน[15] ซึ่งจะบรรยายจุดแคโทดที่เชื่อมต่อกับศูนย์กลางของบริเวณพลาสมา ในบริเวณของเปลือกที่หุ้มประจุ นี้จะใช้สมการจำนวน 5 สมการ สำหรับวิเคราะห์ความไม่เสถียรภาพ

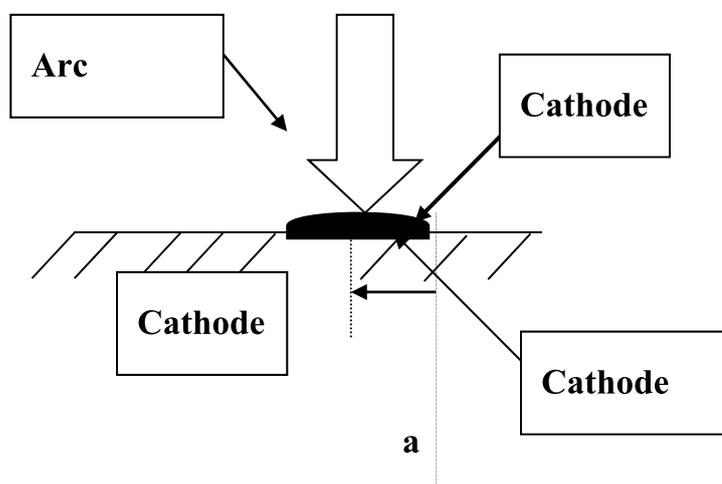
2.5.1.1 สมการกระแส

สำหรับการคำนวณความหนาแน่นของค่ากระแสที่เกิดขึ้นทันทีทันใดนั้นต้องใช้สมมติฐานเป็นตัวกำหนดเพราะความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นนั้นไม่สามารถทดสอบได้อย่างง่ายโดยมีหัวข้อดังนี้

- 1) ความหนาแน่นของกระแสจะคงที่ในจุดที่เกิดการอาร์คแคโทด
- 2) จุดอาร์คแคโทดเป็นวงกลม
- 3) กระแสที่ไหลไปยังจุดอาร์คแคโทดจะเป็นสัดส่วนที่เหมาะสมกับพื้นที่
- 4) ค่าการทดลองของพื้นที่จุดอาร์คแคโทดหาได้จากการสุ่มแบบแลนด้อม(Random)

ผู้วิจัยสามารถเขียนสมการจากความสัมพันธ์ข้างบนได้ดังนี้

สมการ 2.1
$$I = \pi a^2 J$$



รูปที่ 2.3 การเกิดจุดอาร์คแคโทด

2.5.1.2 สมการของก๊าซ

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสมมุติว่า พลาสมาจะเกิดการแยกอนุภาคทางประจุไฟฟ้าเพียงแค่ครั้งแรกและครั้งเดียวเท่านั้น โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\text{สมการที่ 2.2} \quad \Gamma_{ev}(T) - N_0 M \left(\frac{kT_e}{2\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} = n_0 V_0 M = \frac{\delta J}{q} M$$

เมื่อ V_0 เป็นความเร็วของขอบเปลือกที่หุ้มประจุ และ ถ้า n_0 เป็นการคำนวณโดยใช้สมการ 2.2 ดังนั้นผู้วิจัยสามารถคำนวณ V_0 ได้ แต่ในที่นี้ผู้วิจัยไม่สามารถคำนวณ V_0 ได้ สมการ 2.2 จะอธิบายถึงเรื่องของแคโทดเท่านั้นและ $(\delta J/q) M$ คือ โอระเหยจากด้านของแคโทดที่เคลื่อนไปยังด้านแอโนด ในส่วนเพิ่มเติม ผู้วิจัยขอให้คำอธิบายเพิ่มเติมสำหรับค่าของสัดส่วนความหนาแน่นกระแสไอออน $(1-S)J$ ไว้ในสมการของเปลือกที่หุ้มประจุที่เท่ากันกับค่าความหนาแน่นของค่าสัดส่วนกระแสไอออน (Ion Saturation Current Density) ของพลาสมา ผู้วิจัยสามารถเขียนความสัมพันธ์ด้านบนไว้ในสมการที่ 2.3 ดังนี้

$$\text{สมการที่ 2.3} \quad (1-S)J = qN_0 \left(\frac{kT_e}{2\pi M} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ค่าของ $\Gamma_{ev}(T)$ ในสมการที่ 2.2 นั้นคือค่าความเร็วของการระเหยเป็นไอในระบบเทอร์โมไดนามิก และผู้วิจัยสามารถเขียนเป็นสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\text{สมการที่ 2.4} \quad q \frac{\Gamma_{ev}}{M} = \delta J + n_0 q \left(\frac{kT_e}{2\pi M} \right)^{\frac{1}{2}}$$

นำสมการที่ 2.3 แทนที่ในสมการที่ 2.4 จะได้

$$\text{สมการที่ 2.5} \quad q \frac{\Gamma_{ev}}{M} = \delta J + (1-S)J \quad \text{และเขียนสมการที่ได้ใหม่เป็น}$$

$$\text{สมการที่ 2.6} \quad \Gamma_{ev} = (1-S + \delta) J \frac{M}{q}$$

หลังจากนั้นแทนค่าคงที่ของ M และ q ในสมการที่ 2.6 จะได้

$$\text{สมการที่ 2.7} \quad \Gamma_{ev} = (1-S + \delta) J * 1.11795389 * 10^{-6}$$

ผู้วิจัยสามารถเขียนสมการของ Γ_{ev} ในรูปแบบของแรงดันได้ดังสมการ 2.8

สมการที่ 2.8
$$\Gamma_{ev} = P \sqrt{\frac{M}{2\pi kT}}$$

เมื่อ P คือแรงดันที่เป็นไอระเหยและสามารถใช้สมการ 2.9 ในการคำนวณหาค่าดังที่แสดงในรูป

สมการที่ 2.9
$$P = 1.145512941 * 10^{17} * T^{-1.749} * e^{(-34406.4453 / T)}$$

แทนค่าสมการ 2.9 ในสมการ 2.8 ดังนั้น

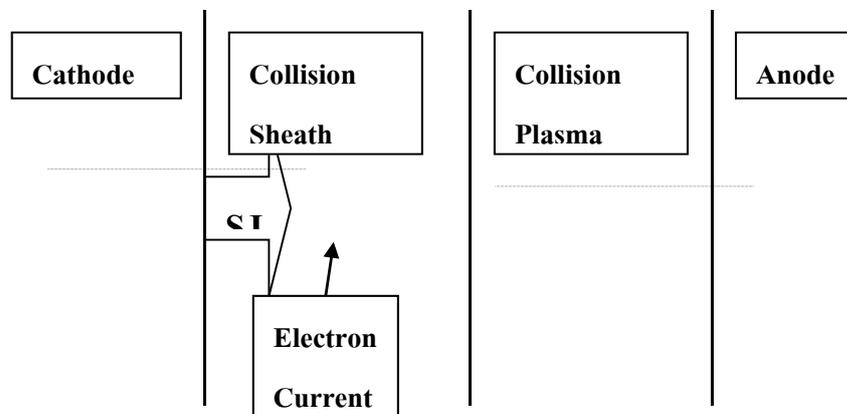
สมการที่ 2.10

$$\Gamma_{ev}(T) = \sqrt{\frac{M}{2\pi k} T^{-1}} \cdot P = 1.145512941 * 10^{17} * T^{-1.749} * e^{(-34406.4453 / T)}$$

2.5.1.3 สมการการคายประจุของอิเล็กตรอน

ในขอบเขตการแก้ปัญหาผู้วิจัยใช้สมการ

ซึ่งค่าการแผ่รังสีของอิเล็กตรอนนั้นคิดค่าจากการแผ่รังสีของไอออนจากกฎของ Schottky และจากวิธีของ T-F ซึ่งคล้ายกันกับของโมริมิยา (Morimira) [24] [25] ดังนั้นผู้วิจัยสามารถเขียนสมการของการแผ่รังสีของไอออนได้ดังนี้



รูปที่ 2.4 การแผ่รังสีของไอออน

สมการ 2.11
$$SJ = AT^2 \exp \frac{-q \left[\Phi_0 - \sqrt{\frac{qF_0}{4\pi\epsilon_0}} \right]}{kT}$$

เมื่อ A คือ ค่าคงที่ของ Richardson หรือ Dushman

2.5.1.4 สนามไฟฟ้าที่แคโทด [19] [20] [21]

ขณะที่เกิดการอาร์คขึ้นนั้นอนุภาควิถีบริเวณผิวหน้าของแคโทดจะเพิ่มขึ้นขณะเดียวกันจะเกิดเส้นแรงของสนามไฟฟ้าด้วย อำนาจของสนามไฟฟ้าของแคโทดนั้นจะถูกขับเคลื่อนโดยการใช้สมการของ Poisson ดังนี้

$$\text{สมการ 2.12} \quad E = -\text{grad}V$$

$$\text{สมการ 2.13} \quad \nabla E = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

$$\text{สมการ 2.14} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

ผู้วิจัยสามารถเขียนสมการ 2.14 ในรูปของพิกัดที่เท่ากันดังนี้

$$\text{สมการ 2.15} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

ผู้วิจัยจะพิจารณาปรากฏการณ์นี้ในด้านของแกน X ดังนั้นค่า V จะเป็นอิสระจากแกน Y และ Z ดัง สมการ 2.15

$$\text{สมการ 2.16} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

ผู้วิจัยเขียนรูปแบบการขนานกันของข้ออิเล็กโทรดดังแสดงในรูป 2.7 ด้วยการแสดงระดับความแตกต่างที่จ่ายให้ข้ออิเล็กโทรด โดยกระแสอิเล็กตรอนจะไหลผ่านข้ออิเล็กโทรดและเมื่อข้ออิเล็กโทรดทางด้านซ้ายมือเริ่มร้อนขึ้น ข้ออิเล็กโทรดทางด้านซ้ายมือจะเรียกว่าแคโทดส่วนข้ออิเล็กโทรดทางด้านขวามือจะเรียกว่าแอโนด ดังแสดงในรูป 2.7

SJ	คือ	กระแสอิเล็กตรอน
(1-S)J	คือ	กระแสไอออน
J	คือ	ความหนาแน่นของกระแส

สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้ $J = en_0 u_0 = qn_0 u_0$

เมื่อ e และ q คือ การชาร์จประจุหน่วยเป็น คูลอมป์ [C]

n_0 คือ ความหนาแน่นของพลาสมา [$1/m^3$]

u_0 คือ อัตราความเร็วของอิเล็กตรอน[m/s]

ผู้วิจัยของย้อนกลับไปพิจารณาสมการ 2.16 อีกครั้งหนึ่ง และเขียนสมการทางซ้ายมือของสมการ 2.16 ในความสัมพันธ์ของปริมาณความหนาแน่นของการประจุดังนี้

สมการ 2.17
$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0} = -\frac{q(n_i - n_e)}{\epsilon_0}$$

ในกรณีของ อิเล็กตรอน SJ ผู้วิจัยพบว่า

สมการที่ 2.18
$$SJ = qn_e v_e$$

สมการที่ 2.19
$$qn_e = \frac{SJ}{v_e}$$
 ในทางกลับกัน

สมการที่ 2.20
$$(1-S)J = qn_i v_i$$

สมการที่ 2.21
$$qn_i = \frac{(1-S)J}{v_i}$$

ทางด้านขวามือของสมการ 2.6 แทนที่ด้วยสมการ 2.19 และ 2.21 จะได้

สมการ 2.22
$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{(1-S)J}{v_i} - \frac{SJ}{v_e} \right]$$

จากการเปลี่ยนรูปพลังงานซึ่งจะต้องเปลี่ยนรูปจากพลังงานจลน์ไปเป็นพลังงานศักย์และต้องมีค่าที่เท่ากันดังนั้นสามารถเขียนสมการใหม่ได้คือ

สมการ 2.23
$$\frac{1}{2} m_e v_e^2 = qV(x), m_e = m$$
 เขียนสมการในรูปใหม่

สมการ 2.24
$$v_e = \sqrt{\frac{2qV(x)}{m}}$$
 จากกระแสไอออน

สมการ 2.25
$$\frac{1}{2} M v_i^2 = qV(x)$$

สมการ 2.26
$$v_i = \sqrt{\frac{2qV(x)}{M}}$$
 ในตำแหน่ง X จะได้

สมการ 2.27
$$\overline{V(x)} = V_p - V(x)$$
 เมื่อผู้วิจัยทำการเขียนสมการ 2.26 ใหม่ได้

สมการ 2.28
$$v_i = \sqrt{\frac{2q(V_p - V(x))}{M}}$$
 นำสมการ 2.28 และ 2.29 แทนในสมการ 2.22

สมการ 2.29
$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{(1-S)J}{\sqrt{\frac{2q(V_p - V(x))}{M}}} - \frac{SJ}{\sqrt{\frac{2qV(x)}{m}}} \right]$$

โดยทั่วไปผู้วิจัยจะใช้สมการ 2.29 สำหรับการแก้ปัญหาลักษณะของสนามไฟฟ้า แต่ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะพิจารณาผลกระทบของสนามไฟฟ้าจากด้านของพลาสมาตามทฤษฎี Morimira [13] และ Beilis [19] ได้กล่าวไว้ซึ่งการรบกวนนี้ผู้วิจัยจะใช้สมการที่ 2.30 แทนลงในสมการ 2.29 ทางด้านขวา

สมการ 2.30
$$-\frac{qn_0}{\epsilon_0} \exp\left\{-\frac{q(V_F - V(x))}{kT_e}\right\}$$
 จะได้สมการที่ 2.29 ใหม่ดังนี้

สมการ 2.31

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{(1-S)J}{\sqrt{\frac{2q(V_p - V(x))}{M}}} - \frac{SJ}{\sqrt{\frac{2qV(x)}{m}}} - qn_0 \exp\left\{-\frac{q(V_p - V(x))}{kT_e}\right\} \right]$$

สมการที่ 2.31 นั้นเป็นการเชื่อมโยงโดยการใส่ $\frac{dV}{dx}$ ด้วยการรวมผสมกันดังนั้นผู้วิจัยจะได้สมการทางด้านซ้ายมือที่เท่ากับ

สมการ 2.32
$$\int_0^x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right) \Big|_0^x$$

$$\text{สมการ 2.33} \quad \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[F_P^2 - F_0^2 \right]$$

จากทางด้านขวาของสมการ 2.31 จะได้

$$\begin{aligned} &= \int_0^v \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{(1-S)J}{\sqrt{\frac{2Q(V_P - V(x))}{M}}} - \frac{SJ}{\sqrt{\frac{2qV(x)}{m}}} - qn_0 \exp \left[\frac{-q(V_P - V(x))}{kT_e} \right] \right] \frac{dv}{dx} dx \\ &= -\frac{2}{\epsilon_0} \left[\left[\sqrt{\frac{M}{2q}} (1-S)J - \sqrt{\frac{m}{2q}} SJ \right] \sqrt{V_P} - \frac{kT_e n_0}{\epsilon_0} \left[1 - \exp \left\{ \frac{-qV_P}{kT_e} \right\} \right] \right] \end{aligned}$$

จะได้สมการที่ 2.34

$$\frac{1}{2} \left[F_P^2 - F_0^2 \right] = -\frac{2}{\epsilon_0} \left[\left[\sqrt{\frac{M}{2q}} (1-S)J - \sqrt{\frac{m}{2q}} SJ \right] \sqrt{V_P} - \frac{kT_e n_0}{\epsilon_0} \left[1 - \exp \left\{ \frac{-qV_P}{kT_e} \right\} \right] \right]$$

เมื่อ $F_0^2 \gg F_P^2$ ดังนั้นผู้วิจัยจึงไม่นำค่า F_P^2 มาคำนวณทำให้สมการ 2.34 จะกลายเป็นสมการ 2.35

$$\left[F_0^2 \right] = \frac{4}{\epsilon_0} \left[\left[\sqrt{\frac{M}{2q}} (1-S)J - \sqrt{\frac{m}{2q}} SJ \right] \sqrt{V_P} - \frac{kT_e n_0}{\epsilon_0} \left[1 - \exp \left\{ \frac{-qV_P}{kT_e} \right\} \right] \right]$$

หมายเหตุ การคำนวณสนามไฟฟ้าที่บริเวณผิวหน้าของแคโทดสิ่งแรกที่ผู้วิจัยจะต้องทราบค่าคือ

T_e กับ n_0 จากบริเวณด้านข้างของหลอดซึ่งจะทำให้ผู้วิจัยสามารถคำนวณหาค่า F_0

2.5.1.5 พลังงานที่สมดุลย์ของบริเวณผิวหน้าของจุดอาร์คแคโทด [22] [23]

ผู้วิจัยสามารถมองข้ามความต้านทานของโลหะที่ทำเป็นแคโทดซึ่งจะผลิตความร้อนจากการอาร์คเมื่อผู้วิจัยทราบค่าอัตราการไหลของความร้อนที่มีคุณภาพ JV_{eff} ในรัศมีของจุดอาร์คแคโทดของบริเวณผิวหน้าของแคโทด ทำให้สามารถเขียนอุณหภูมิเฉลี่ยในรัศมี (a) ของผิวหน้าแคโทดได้ ผู้วิจัยใช้

สมการที่ 2.36 $\nabla (K \nabla T = 0)$ สำหรับการแก้ปัญหาของอุณหภูมิที่ผิวหน้าของแคโทดและยังเป็นตัวแบ่งขอบเขตอีกด้วย

$$\text{สมการที่ 2.36} \quad -K \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = J V_{\text{eff}} (r \leq a), = 0 (r \geq a)$$

ค่าของอุณหภูมิ T จะพิจารณาจากค่าตั้งแต่ 300 K ถึง อินฟินิตี้ ∞ สมการนี้จะมีค่าเป็นลักษณะเชิงเส้นที่เสมอกันและสามารถใช้สำหรับคำนวณหาค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิของแคโทดภายใต้เงื่อนไขที่ $x=0, r \leq a$

$$\text{สมการที่ 2.37} \quad U = \frac{1}{K_0} \int_{T_0}^{T-T_0} K(T) dT$$

V_{eff} คือค่าที่คำนวณจากค่าของการทดลองเมื่อมีการป้อนแรงดันตกคร่อมให้กับขั้วอิเล็กโทรด ค่าของ V_{eff} จะคำนวณจากความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานที่เกิดจากความร้อนกับพลังงานที่เกิดจากไฟฟ้า และผู้วิจัยจะแสดงค่าของ V_{eff} ต่อมาในภายหลัง ผู้วิจัยจะทำการรวมสมการที่ 2.37 โดยการเปลี่ยนค่าความนำความร้อนจากอุณหภูมิตั้งแต่ 300K ถึง 5000K และผู้วิจัยใช้ค่าที่เป็นเชิงเส้นของอุณหภูมิที่สูงกว่า 1000 K ในสมการที่ 2.38 และแสดงในรูปที่ 2.9

$$\text{สมการที่ 2.38} \quad U = 0.4793 * T + 163.14$$

ในทางกลับกันผู้วิจัยสามารถเขียนอุณหภูมิเฉลี่ยในรูปของพลังงานไฟฟ้าได้คือ

$$\text{สมการที่ 2.39} \quad \int_{T_0}^{T-T_0} K(T) dT = \frac{8a}{3\pi} J V_{\text{eff}}$$

และผู้วิจัยสามารถเขียนด้านขวามือของสมการ 2.38 ได้

$$\text{สมการ 2.40} \quad U = \frac{8a}{3\pi} \cdot \frac{a}{K_0} J V_{\text{eff}}$$

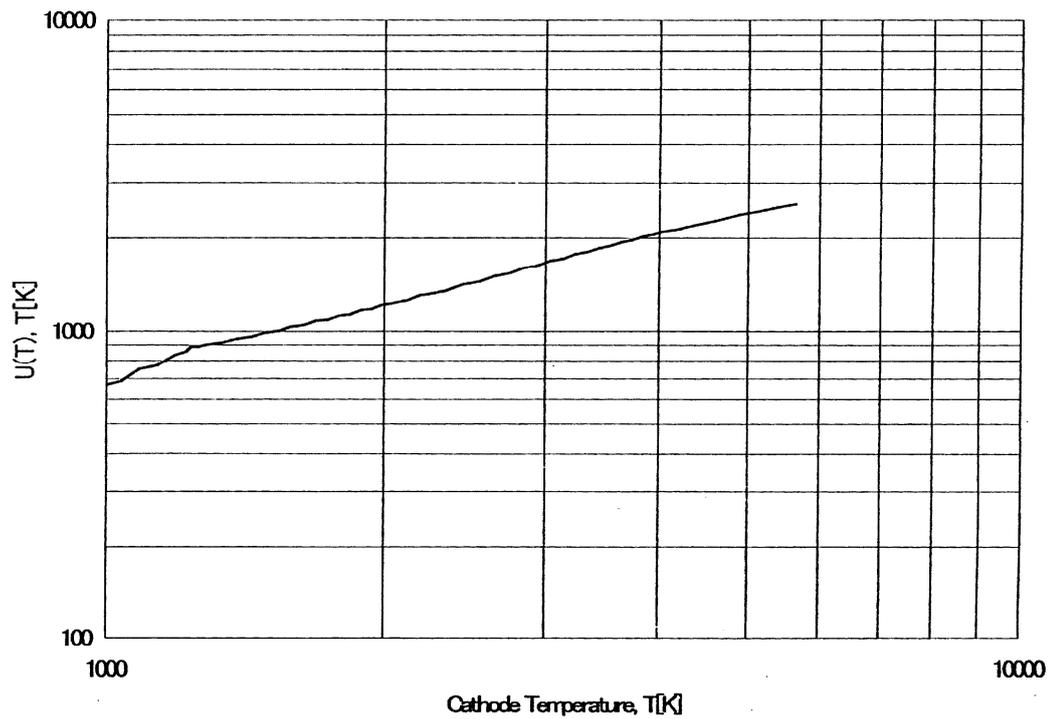
เมื่อ T_0 คือ อุณหภูมิปกติทั่วไป

K_0 คือ ค่าความนำความร้อนที่อุณหภูมิปกติทั่วไป

ข้อมูลของค่าความนำความร้อน $K(T)$ ที่ใช้ในสมการ 2.39 นั้นได้มาจากวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอกของเคมีฟิสิกส์ [23] ดังแสดงในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ค่าความนำความร้อนของทองแดง

Cathode Temperature T(K)	Thermal Conductivity K[W/mK]	Cathode Temperature T(K)	Thermal Conductivity K[W/mK]	Cathode Temperature T(K)	Thermal Conductivity K[W/mK]
300	429	1373.2	182	3073	190
323.2	428	1400	183	3200	187
350	427	1473.2	186	3273	185
373.2	426	1500	187	3400	182
400	425	1573.2	189	3473	179
473.2	420	1600	190	3600	176
500	419	1673.2	192	3673	174
573.2	414	1700	193	3800	170
600	412	1773.2	194	3873	168
673.2	407	1800	195	4000	163
700	404	1873.2	196	4073	161
773.2	399	1900	196	4273	154
800	396	1973.2	197	4500	145
873.2	390	2000	197	4773	133
900	388	2073.2	198	5000	123
973.2	382	2173.2	198	5273	111
1000	379	2200	198	5500	101
1073.2	373	2273.2	199	5773	87.5
1100	370	2400	198	6000	76.4
1173.2	363	2473.2	198	6273	62.8
1200	361	2600	197	6500	51.4
1235.08	358	2673.2	196	6773	37.3
1235.08	175	2800	195	7000	25.1
1273.2	177	2873.2	194	7273	10.4
1300	178	3000	191		



รูปที่ 2.5 กราฟแสดงการเลือกใช้อุณหภูมิที่แคโทด

จากสมการ 2.37 สามารถเขียนใหม่ได้คือ

$$\text{สมการ 2.41} \quad K_0 U = \int_{T_0}^{T-T_0} K(T) dT \quad \text{จากนั้น}$$

$$\text{สมการ 2.42} \quad \int_{T_0}^{T-T_0} K(T) dT = K_0 (0.4793 + 163.14)$$

จากสมการ 2.42 ทำให้เท่ากับสมการ 2.40 จะได้

$$\text{สมการที่ 2.43} \quad \frac{8a}{3\pi} J V_{\text{eff}} = K_0 (0.4793 + 163.14)$$

ในทำนองเดียวกันผู้วิจัยสามารถเขียนสมการที่ 2.43 ใหม่ในแบบของกำลังต้านอินพุท $J V_{\text{eff}}$ เป็น

$$\text{สมการที่ 2.44} \quad J V_{\text{eff}} = \frac{3\pi}{8a} K_0 U$$

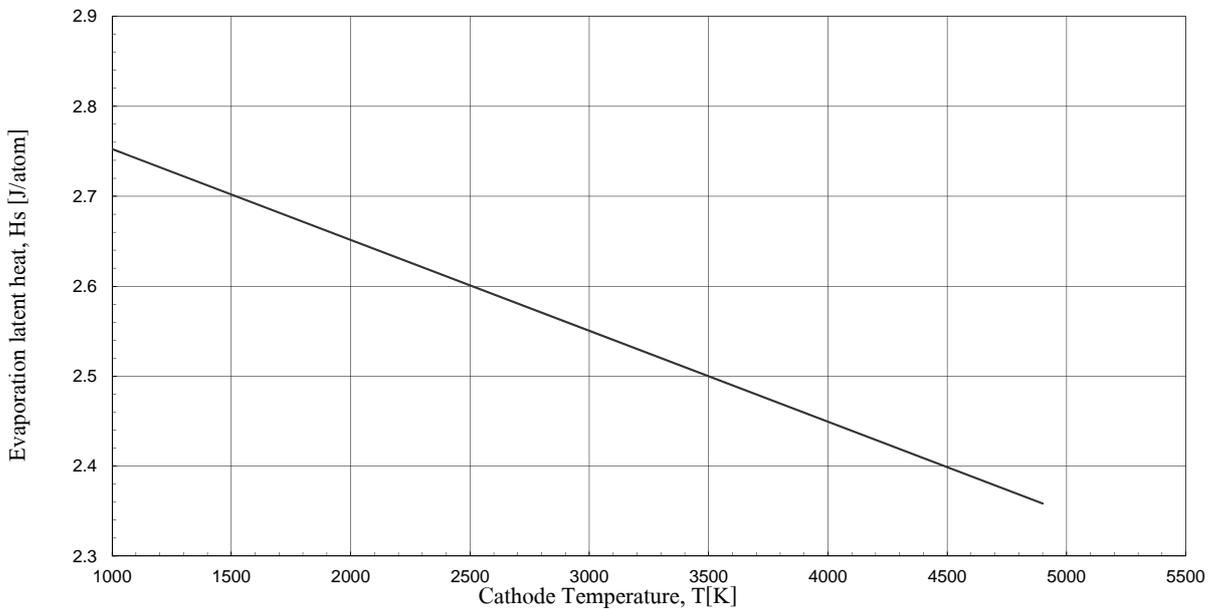
เมื่อ K_0 คือ ค่าความนำความร้อนของโลหะผสมที่อุณหภูมิปกติ 300 K และมีค่าเท่ากับ 429 $\frac{W}{mK}$ การรวมกันของส่วนประกอบย่อยทางด้านอินพุทของแคโทดนั้นจะพิจารณาจากปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์และสามารถอธิบายโดยใช้

$$\text{สมการที่ 2.45} \quad J_{V_{eff}} = (1-S)J \{V_p + V_i - \Phi_o + H_o(T)\} - SJ\Phi(F_o, T) - P_{ev}(T)$$

ผู้วิจัยสามารถให้ความหมายของสมการทางด้านขวามือที่ 2.45 ดังนี้
 ชุดแรกคือพลังงานทางด้านอินพุทที่จ่ายให้กับอะตอมหรือประจุที่เกิดการชนหรือปะทะกันส่วนชุดที่สองคือพลังงานสูญเสียที่เกิดจากการแผ่รังสีของอิเล็กตรอนและค่าของ $\Phi(F_o, T)$ จะมีความสัมพันธ์กับค่าอื่นๆดังแสดงในสมการต่อไป

$$\text{สมการที่ 2.46} \quad \Phi(F_o, T) = \Phi_o - \sqrt{\frac{qF_o}{4\pi\epsilon_o} + \frac{2kT}{q}}$$

และชุดสุดท้ายคือพลังงานสูญเสียที่ถูกผลิตโดยการระเหยของโลหะ



รูปที่ 2.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของแคโทดกับความร้อนที่ระเหย

เมื่อสมการ 2.4 เท่ากับสมการ 2.5 ดังนั้น

$$\text{สมการที่ 2.47} \quad \frac{3\pi K_0}{8a} U = (1-S)J \{V_p + V_i - \Phi_0 + H_0(T)\} - SJ\Phi(F_0, T) - P_{ev}(T)$$

และค่าของ $P_{ev}(T), H_s(T)$ ดังที่แสดงในสมการ 2.48 และ 2.49

$$\text{สมการ 2.48} \quad P_{ev}(T) = \frac{q}{M} H_s(T) \cdot \Gamma_{ev}(T) = 8.944740731 * 10^5 \cdot H_s(T) \cdot \Gamma_{ev}(T)$$

ในกรณีของ $H_s(T)$ ผู้วิจัยจะใช้ข้อมูลจากรูป 2.8 อุณหภูมิที่ 1500 K ถึง 4000K และประมาณว่าสมการของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้น ดังนั้น

$$\text{สมการที่ 2.49} \quad H_s(T) = 2.730204658 - 1.01038387 * 10^{-4} (T - 1500)$$

2.5.2 สมการของบริเวณพลาสมา [24]

การปะทะกันของพลาสมาที่ด้านหน้าของจุดแคโทดนั้นเป็นรูปแบบที่กำหนดให้เป็นจุดเดียว สมมุติฐานตามงานวิจัยเดิมของโมริมิยา (Morimira) ซึ่งได้กล่าวไว้ว่าดังนี้

1. ความร้อนที่เกิดมีคุณภาพเพราะว่าค่าความนำความร้อนนั้นมีค่าสูงดังนั้นจะพิจารณาไปทางด้านความหนาแน่นของพลาสมา
2. ผู้วิจัยจะไม่พิจารณาผลกระทบจากความหนืด ด้วยเหตุนี้ผลกระทบที่แปรปรวนก็จะไม่เกิดขึ้น แม้พลังงานจากไอออนจะมีค่าสูงกว่าพลังงานจากอิเล็กตรอน แต่อย่างไรก็ตามมันไม่ใช่ประเด็นหลักของงานวิจัยนี้
3. ค่าแรงดันของพลาสมาจะมีค่ารุนแรงมากประมาณ 2 คู่ออมป์ต่อเส้นแรงแม่เหล็กแต่ผู้วิจัยจะไม่ใส่ใจผลที่เกิดจากเส้นแรงแม่เหล็ก
4. ไอระเหยของพลาสมาจะประกอบไปด้วยอิเล็กตรอนจำนวนมากและมีอะตอมประจุบวกเดี่ยวเท่านั้นนอกจากนั้นปริมาณค่าทางฟิสิกส์ที่เกิดจากการปะทะกันจะแสดงดังในรูป 2.2 ส่วนสมการที่ใช้กับบริเวณของพลาสมาจะแสดงดังต่อไปนี้

2.5.2.1 สมการของเศษฐิติที่พุ่งกระจาย

ในการปะทะกันของพลาสมาทั้งหมดนั้น พลาสมาจะประกอบไปด้วย อิเล็กตรอนที่ระเหยจากผิวหน้าของแคโทดและจากอะตอมบวก ส่วนหนึ่งของไอออนและอะตอมจากแคโทดพุ่งจะตรงไปยังแอโนด ดังนั้นเศษฐิติที่กระจายออกไป ผู้วิจัยจะใช้สมการที่เหมือนกับสมการ 2.2

2.5.2.2 สมการของการรักษาพลังงาน [31] [32] [33]

เมื่อผู้วิจัยพิจารณาสมการของพลาสมาในกรณีปกติ สมการจะเป็น

$$\text{สมการที่ 2.50} \quad \nabla(\rho v) = M_i \nabla(n_i v_i) = 0$$

เมื่อ

v_i	=	ความเร็วของอะตอมบวก
M_i	=	ปริมาณของอะตอมบวก
n_i	=	ความหนาแน่นของอะตอมบวก

สมการของการเก็บค่าการประจุกระแสไฟฟ้าคือ

$$\text{สมการที่ 2.51} \quad \nabla(j) = 0$$

สมการของพลังงานจลน์คือ

$$\text{สมการที่ 2.52} \quad M_i (v_i \nabla) v_i = -\nabla p$$

จากกฎของโอห์มจะได้

$$\text{สมการที่ 2.53} \quad E + \frac{T_{ev}}{n_e} \nabla n_e = \eta j$$

เมื่อ n_e คือค่าความหนาแน่นของอิเล็กตรอนและให้มีค่าเท่ากับ n_i จากสมการของ Maxwell

$$\text{สมการที่ 2.54} \quad \nabla \times E = 0$$

$$\text{สมการที่ 2.55} \quad \nabla \cdot B = 0$$

$$\text{สมการที่ 2.56} \quad \nabla \times B = \mu_0 j$$

สมการที่ 2.50 และ สมการที่ 2.2 จะมีลักษณะเหมือนกัน จากสมการของพลังงานจลน์ เมื่อมีการสร้างพลังงานจลน์ขึ้นมา แต่ในการวิเคราะห์ปัญหานี้มันจะไม่ได้ใช้เลย ในความสัมพันธ์ของสมการที่ 2.54 สนามไฟฟ้า E จะเขียนขึ้นมาจากระดับของ ϕ ตามที่โมริมิยา (Morimira) [13] ได้กล่าวไว้ ดังนี้

$$\text{สมการที่ 2.57} \quad E = -\nabla \cdot \phi$$

สมการที่ 2.57 นำไปแทนในสมการที่ 2.51 นอกจากนั้นแทนค่าของกระแสในสมการที่ 2.53 จะได้

$$\text{สมการที่ 2.58} \quad \eta \nabla(i) = \nabla(-\nabla \phi + T_{ev} \nabla \cdot \ln n_e) = 0$$

$$\text{สมการที่ 2.59} \quad \psi = -\phi + T_{ev} \ln n_e \quad \text{เมื่อ}$$

สมการที่ 2.60 $\nabla^2 \psi = 0$ ทางด้านขอบเขตบริเวณเปลือกหุ้มประจุของแคโทดจะได้

สมการที่ 2.61 $-\nabla^2 \psi = nJ$ $r \leq a$
 $= 0$ $r > a$ ซึ่งผลลัพธ์จะได้ดังสมการ

สมการที่ 2.62
$$\psi = Ja\eta \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) J_1(\lambda a) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

ผู้วิจัยจะสามารถได้พลังงานของพลาสมาที่เท่ากันทั้งสองด้านคือ

สมการที่ 2.63 $2nqT_{ev} \nabla \cdot V = E \cdot j$

เมื่อผู้วิจัยรวมสมการของการเก็บพลังงานของพลาสมาในขอบเขตบริเวณของพลาสมาทั้งหมดจะได้

สมการที่ 2.64 $2nkT_e f \nabla \cdot V dv = \int E \cdot J dv$

ทางด้านซ้ายมือของสมการจะเกิดพลังงานที่สูญเสียเนื่องจากการไหลและด้านขวามือจะเป็นกระแสไฟฟ้าอินพุตที่ป้อนเข้าไป การรวมค่าทางด้านซ้ายมือนั้นผู้วิจัยจะไม่แทนค่าของ V เพื่อทำการหาคำตอบแต่จะใช้หลักการของการไหลของพลังงานด้านซ้ายมือแทนจะทำให้สมการทางซ้ายมือเปลี่ยนเป็น

สมการที่ 2.65 $2nkT_e f \nabla \cdot V dv = \pi a^2 kT_e \frac{J(1-S)}{q} + \pi a^2 kT_e (1+2\delta) \frac{J}{q} + \pi a^2 q V_i \frac{\Gamma_{ev}}{M}$

ผู้วิจัยให้ความหมายของแต่ละเทอมทางด้านขวามือของสมการ 2.65 ดังนี้

1. เทอมแรกเป็นการสูญเสียของค่าสัดส่วนกระแสไอออนไปยังแคโทด
2. เทอมที่สองเป็นการสูญเสียของสัดส่วนกระแสไอออน δJ และกระแส $(1+\delta)J$ ที่ไปยังแอโนด
3. เทอมสุดท้ายคือพลังงานที่จำเป็นสำหรับการแยกประจุของอะตอม

ในด้านกลับกัน กระแสไฟฟ้าด้านอินพุตทางขวามือของสมการ 2.64 สามารถประมาณค่าในระดับที่มีความสัมพันธ์จากสนามไฟฟ้า E และกระแส J ความคิดรวบยอดของขั้นตอนที่จะประมาณค่านี้ได้อธิบายไว้แล้วในริช(Rich) [25]

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = \frac{1}{\eta} \int (-\text{grad}\phi)(+\text{grad}\psi) dV$$

สมการที่ 2.66

$$= 2nkT_e f \nabla \cdot \mathbf{V} dv = \pi a^2 kT_e \frac{J(1-s)}{q} + \pi a^2 kT_e (1+2\delta) \frac{J}{q} + \pi a^2 q V_i \frac{\Gamma_{ev}}{M}$$

สมการที่ 2.67 $= \frac{1}{\eta} \int (-\text{grad}\psi)(+\text{grad}\psi) dV$ ดังนั้นสมการ 2.64 ทางด้านขวามือคือ

สมการที่ 2.68 $= \pi a^3 n J^2 (0.851)$ และสมการ 2.64 ทางด้านซ้ายมือคือ

สมการที่ 2.69 $= T_{ev} \pi a^2 J(1-s) + T_{ev} (1+2\delta) I + V_i \frac{q}{M} \Gamma_{ev} \pi a^2$

สมการที่ 2.68 และ 2.69 นำไปแทนทางด้านซ้ายและขวามือของสมการที่ 2.64 คือ

สมการที่ 2.70 $\frac{kT_e}{q} J(2+2\delta-s) + q V_i \frac{\Gamma_{ev}}{M} = 0.851 a \eta J^2$

ซึ่งค่าของ $q \frac{\Gamma_{ev}}{M}$ ในสมการที่ 2.70 ถูกแทนที่โดยสมการที่ 2.5 ดังนั้น

สมการที่ 2.71 $\left\{ \frac{kT_e}{q} \right\} (2+2\delta-s) + (1+\delta-s) V_i = 0.851 a \eta J$

เมื่อ η คือค่าความต้านทานจำเพาะของพลาสมาและมีค่าเป็น

$$\eta = 65.29 \frac{\ln \Lambda}{T_e^{1.5}} \quad \text{และ} \quad \Lambda = \frac{12 \pi \epsilon_0^{(3/2)} (kT_e)^{3/2}}{n_0 q^3}$$

2.6 กฎของไบเซกชัน (Bisection method) [38] [39] [40]

แชปปา(Chapra)และคณะ ได้กล่าวไว้ว่าไบเซกชัน(Bisection method) คือวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สำหรับการหาค่าของเส้นกราฟ ค่ากระแสคopping ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาที่แตกต่างกันทั้ง 2 ส่วนและเกิดขึ้นมาตัดกันที่จุดๆหนึ่ง โดยปริมาณของกระแส copping ที่เพิ่มขึ้นจะถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วน และจะเกิดจุดตัดกันที่จุดกึ่งกลาง ตำแหน่งของจุดที่เป็นต้นตอหรือรากที่เกิดขึ้นนั้นจะต้องทำการวิเคราะห์อย่างละเอียดเพื่อเป็นการป้องกันความผิดพลาดกระบวนการของ Bisection method นั้นจะมีอยู่ด้วยกัน 3 ขั้นตอนคือ

1. เลือกค่าของ X_i ที่ด้านล่างและค่าของ X_u ที่ด้านบนโดยใช้วิธีการเดาสุ่มสำหรับการหาจุดตัดกัน จากนั้นทำการเปลี่ยนค่าไปเรื่อยๆ โดยใช้สมการ $f(x_i)f(x_u) < 0$ ตรวจสอบ
2. คำนวณหาจุดตัดโดยใช้สมการ
$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2}$$
3. ทำการคำนวณความแตกต่างเรื่อยๆเพื่อมุ่งไปสู่จุดตัดที่แท้จริงโดย
 - 1) ถ้า $f(x_i)f(x_u) < 0$ จุดตัดจะมีตำแหน่งในด้านล่างดังนั้นค่าของ $x_u = x_r$ ให้ดำเนินการต่อไปยังขั้นตอนที่ 2
 - 2) ถ้า $f(x_i)f(x_u) > 0$ จุดตัดจะมีตำแหน่งในด้านบนดังนั้นค่าของ $x_i = x_r$ ให้ดำเนินการต่อไปยังขั้นตอนที่ 3
 - 3) ถ้า $f(x_i)f(x_u) = 0$ สมการจะมีค่าที่เท่ากันทั้ง 2 ด้านจะได้ค่าของ x_r การคำนวณจะเสร็จสมบูรณ์

ขั้นตอนของ Bisection method จะใช้ในการคำนวณค่าพารามิเตอร์ต่างๆในโปรแกรมของ Fortran

2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ไบลิส [27] ได้ทำการศึกษาและวิเคราะห์จุดอาร์คแคโทดของการอาร์คในสุญญากาศและสรุปว่าผลของความร้อนทางฟิสิกส์และความหนาแน่นของการแผ่รังสีในวัสดุที่ทำขั้วแคโทดที่เปลี่ยนแปลงไปนั้นสามารถที่จะลดลงได้ถ้าสามารถรู้ถึงการไหลของมวลสารของวัสดุที่ทำแคโทด การคายประจุของกระแสไอออนในบริเวณขั้วแคโทดนั้นมีผลเพียงเล็กน้อยต่อพลังงานของอิเล็กตรอน ค่าความหนาแน่นของกระแสจะแปรเปลี่ยนจาก 1.4×10^5 to 2×10^4 A/cm² ที่ค่ากระแสอาร์ค ระหว่าง 100-500 แอมแปร์ และค่าความหนาแน่นของกระแสจะเปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อยจากอุณหภูมิของไอออน

ไบลิส [28] ได้ศึกษาความต่อเนื่องของกระแสและความมีเสถียรภาพของปรอทในการอาร์ค ในสุญญากาศและสรุปว่า มันคือรูปแบบใหม่ของการเกิดการคายประจุพลาสมาของปรอทในจุดอาร์ค แคโทดเริ่มจากไฟฟ้าบริเวณเปลือกที่หุ้มประจุทั้ง 2 กระจายออกจากผิวหน้าของแคโทด โดยเริ่มต้นที่บริเวณพลาสมา ก่อน อิเล็กตรอนจะเกิดการแยกเป็นอนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าของพลาสมาไปสู่ยังผิวหน้าของแคโทด ทำให้เกิดการแผ่รังสีบริเวณผิวหน้าของแคโทดโดยเปลือกที่หุ้มประจุ ทั้ง 2 จะรองรับการเร่งความเร็วของอิเล็กตรอนที่เริ่มรวมกับเป็นกลุ่มก้อนที่ใหญ่ขึ้นเพื่อเริ่มคายประจุ ความร้อนที่บริเวณพลาสมา นี้จะทำให้ไอออนเร่งความเร็วในการคายประจุ กระบวนการของกระแสที่ต่อเนื่องที่ผิวหน้าของแคโทดจะถูกควบคุมโดยกระแสไอออน

ไบลิส [29] ได้ศึกษาการประยุกต์รูปแบบของการอาร์คในสุญญากาศโดยใช้การไฟท์เป็นแคโทดและสรุปว่ารูปแบบนี้เป็นพื้นฐานของการรักษาระดับของพลังงานจลน์ของการระเหยของขั้วแคโทด, การแผ่รังสีจากขั้วแคโทด และขบวนการการเกิดของพลาสมา รูปแบบนี้ประกอบไปด้วยการตั้งสมมติฐานทางฟิสิกส์และการใช้สมการคำนวณทางคณิตศาสตร์ ค่าพารามิเตอร์ตั้งเช่นค่าการกักตรอนที่ขั้วแคโทด, ระดับของขั้วแคโทดที่มีลดลง, อุณหภูมิผิวหน้าของแคโทด, ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า, สนามไฟฟ้า, ความหนาแน่นของพลาสมา และความเร็วในการเข้าใกล้ขอบเขตของแคโทดโดยใช้การคำนวณของนิวเมอริคัล การคำนวณจะรวมไปถึงค่าพารามิเตอร์อิสระต่างๆของจุดอาร์คแคโทดทั้งค่ากระแสและค่าเวลา ค่าพารามิเตอร์ของจุดอาร์คแคโทดที่เปลี่ยนแปลงขณะในช่วงเวลาในการเกิดจุดอาร์คมีค่าน้อยกว่า $10\mu\text{s}$ การคำนวณจะแสดงให้เห็นถึงค่าความร้อนที่น่าสนใจของขั้วแคโทดที่มีค่ามากกว่าค่าความร้อนของไอออน

ลี [23] ได้ศึกษาทฤษฎีของการแคโทดที่มีการระเหยเป็นไอของโลหะในการอาร์คและสรุปว่าทฤษฎีที่จะอธิบายการหยุดเหตุการณ์ที่ผิดปกติของกระแสในการอาร์ค ของไฟฟ้ากระแสสลับระดับต่ำๆ ประเด็นก็คือเหตุการณ์ที่ผิดปกตินี้ถูกควบคุมโดยแคโทดและขึ้นอยู่กับแรงดันที่ระเหยเป็นไอรวมถึงค่าความนำของโลหะที่เป็นวัสดุที่ทำขั้วแคโทด ค่าพารามิเตอร์ที่คำนวณในงานวิจัยนี้ก็คือ อุณหภูมิจุดอาร์คที่แคโทด, ค่าสนามไฟฟ้าที่แคโทด, ค่าความหนาแน่นของกระแสทั้งหมด, ค่าความหนาแน่นของกระแสอิเล็กตรอนและรัศมีของจุดอาร์ค สมการของค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 ค่า นั้นจะถูกพิจารณาโดยรวมเข้าด้วยกันและระดับของกระแสที่พบนั้นจะต่ำกว่าระดับที่ใช้ในการแก้ปัญหา

ลี [35] ได้ศึกษาการกระจายของพลังงานและผลของความเย็นของการแผ่รังสีของอิเล็กตรอนและสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของการทำงานที่ใช้ผลของความเย็นของอิเล็กตรอนที่ใช้ในบริเวณที่มีการแผ่รังสีของไอออนที่ลูกโซ่ช่วงจะทำให้เกิดผลลัพท์ที่ไม่ถูกต้องถ้าอุณหภูมินั้นมีค่าสูงเกิน 2000 K และค่าสนามไฟฟ้านั้นมีค่าอยู่ในช่วงที่สูง

ยาโน และคณะ [16] ได้ทำการศึกษาการไหลที่ไม่ปกติของกระแส Chopping ในเซอร์กิตเบรกเกอร์แบบสุญญากาศและสรุปว่า เมื่อทำการตัดวงจรหรือหยุดการไหลของกระแส Chopping จะเกิดแรงดันที่ผิดปกติขึ้นนั้นมีสาเหตุมาจากองค์ประกอบที่นำมาทำวัสดุที่เป็นขั้วแคโทด , อุณหภูมิของขั้วแคโทด และการลาดเอียงของเส้นกระแส Chopping ที่ค่ากระแสไม่เกิน 100 แอมป์ การแก้ปัญหาความไม่เสถียรภาพของกระแส Chopping นั้นขึ้นอยู่กับแรงดันของไอโลหะที่ฟุ้งกระจายและชนิดของวัสดุที่นำมาทำเป็นขั้วแคโทด

โมริมิยา และคณะ [24] ได้ทำการศึกษาความไม่เสถียรภาพของการอาร์คในสุญญากาศของขั้วแคโทดที่ทำจากทองแดงและพบว่าเมื่อค่ากระแสเริ่มลดลงจะเริ่มเกิดความไม่เสถียรภาพขึ้น ค่ากระแสจะเริ่มจากจุดๆหนึ่งไปจนถึงค่าของกระแสอีกจุดหนึ่ง และพบว่าจะไม่สามารถแก้ปัญหาได้เมื่อค่ากระแสต่ำกว่า 25 แอมป์ โดยสามารถอธิบายเป็นปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ได้ว่า เนื่องจากอิเล็กตรอนที่วิ่งกลับไปยังบริเวณเปลือกที่หุ้มประจุ จากพลาสมา มีอำนาจเหนือ ไอออนที่เป็นขั้วบวก ดังนั้นค่าของสนามไฟฟ้าที่บริเวณผิวหน้าของขั้วแคโทดนั้นควรจะมีค่าคือ $F_0^2 \leq 0$ ต้องต่ำกว่า 25 แอมแปร์

โคไบน์ และคณะ [36] ได้ศึกษาความไม่เสถียรภาพของการอาร์คและสรุปว่าความไม่เสถียรภาพของโลหะที่ระเหยในการอาร์คของไฟฟ้ากระแสตรงนั้น ไม่เกี่ยวกับความห่างของช่วงที่อาร์ค, การเคลื่อนไหวของขั้วอิเล็กโทรด , เส้นผ่านศูนย์กลางของขั้วอิเล็กโทรดหรือแม้แต่รูปทรงของห้องที่ใช้ในการอาร์ค แต่ค่าแคปซิเตอร์ที่ต่อขนานไว้นั้นจะทำให้ช่วงเวลาของการอาร์คลดลง แรงดันที่เปลี่ยนแปลงตลอดเวลาทำให้เกิดไอโลหะที่ฟุ้งกระจาย ความไม่เสถียรภาพของไอโลหะที่ฟุ้งกระจายจากการอาร์คนั้นขึ้นอยู่กับแรงดันที่ฟุ้งกระจายจากวัสดุที่นำมาทำขั้วแคโทด แรงดันระดับสูงที่ฟุ้งกระจายจากวัสดุที่นำมาทำขั้วแคโทดนั้นจะช่วยควบคุมความไม่เสถียรภาพของการอาร์คได้ดีกว่าระดับแรงดันที่ต่ำๆ

ชูชุกิและคณะ [26] ได้ทำการศึกษาความไม่เสถียรภาพของการอาร์คในสุญญากาศของขั้วแคโทดที่ทำจากทองแดงโดยใช้วิธีการวัดค่าที่ป้อนให้กับขั้วแคโทดและสรุปว่า เมื่อแรงดันที่ป้อนให้กับ ขั้วแคโทด มีค่าแปรเปลี่ยนไประหว่าง 5.5-7 โวลต์ จากกระแสอาร์คที่มีค่าระหว่าง 30-80 แอมป์ ค่าอุณหภูมิของแคโทด, ค่าความเข้มของกระแส, ค่าสัดส่วนกระแสอิเล็กตรอน, ค่าสนามไฟฟ้าที่แคโทด, แรงดันที่บริเวณเปลือกที่หุ้มประจุ และที่จุดอาร์คแคโทดจะมีค่าคือ 3800-3250K, $3.80 \cdot 10^9 - 5 \cdot 10^8$ A/cm², $0.35-1.12 \cdot 10^9 - 0.55 \cdot 10^9$ V/m², 7.5-4.5 V และ 50-210 μ m ตามลำดับ ในบริเวณขอบเขตค่ากระแสต่างๆ นั้นถ้าค่ากระแสมีค่าน้อยมากๆ ค่าต่างๆจะแปรเปลี่ยนไปอย่างรวดเร็วและถ้าค่ากระแสน้อยกว่า 20 แอมแปร์จะทำให้ไม่สามารถแก้ปัญหาความไม่เสถียรภาพได้

เมอร์ฟี และคณะ [9] ได้ศึกษาการแผ่รังสีของไอออน, การแผ่รังสีของสนามไฟฟ้าและการเปลี่ยนแปลงของบริเวณขอบเขตพื้นที่ต่างๆ ได้สรุปไว้ว่า การแผ่รังสีจะเริ่มจากจุดเพียงจุดเดียวจากนั้นก่อให้เกิดความร้อนและสนามไฟฟ้า สำหรับการแผ่รังสีทั้ง 2 อย่างนี้จะผลิตกระแสบริเวณตรงกลางระหว่างไอออนและสนามไฟฟ้า โดยทั่วไปการแผ่รังสีจะแสดงช่วงการเปล่งแสงในขณะที่ทำหน้าที่ของสนามไฟฟ้า, อุณหภูมิ จะถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบของจำนวนเต็ม โดยแต่ละชนิดจะมีการเชื่อมโยงการทำงานกันทางเทคนิค การประมาณค่าให้เป็นจำนวนเต็มนี้คุณลักษณะจะขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ 3 ประการ การประมาณค่าของสนามไฟฟ้าที่มีค่าต่ำๆ และค่าของอุณหภูมิสูงๆ นั้นจะใช้สูตรของการขยายตัวของ ริชาร์ดสันกับสต็อคส์ในการหาค่าการแผ่รังสี ค่าของอุณหภูมิและสนามไฟฟ้าที่ประยุกต์ขึ้น แต่ละส่วนใช้การพิจารณาที่มีเหตุผลเหมือนกับการประมาณจำนวนเต็ม สำหรับสนามไฟฟ้าที่มีค่าสูงๆ และอุณหภูมิต่ำๆ จะใช้สูตรการขยายตัวของ ฟลาวเลอร์นอร์เฮมในการหาค่าการแผ่รังสีของสนามไฟฟ้าเพื่อสร้างขอบเขตของอุณหภูมิและสนามไฟฟ้า