



วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 61(689) May–Aug, 2016

โดย สมาคมนิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

<http://MathThai.Org> MathThaiOrg@gmail.com



การอภิปรายในการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ Discussion in Mathematics Learning Management

สิริพร ทิพย์คง
Siriporn Thipkong

Faculty of Education, Kasetsart University

Email: fedusit@ku.ac.th

บทคัดย่อ

การอภิปรายในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ นักเรียนที่เป็นสมาชิกในกลุ่มหรือในห้องเรียนได้แสดงบทบาททั้งการเป็นผู้พูด ผู้ฟัง ผู้คิดวิเคราะห์ และแสดงความคิดเห็น ทำให้นักเรียนเกิดแนวคิด วิธีการที่หลากหลาย ใช้เหตุผลในการได้มาซึ่งคำตอบ และสามารถสรุปคำตอบที่สมาชิกทุกคนยอมรับได้ ตลอดจนนำความรู้ที่ได้จากการอภิปรายไปใช้ประโยชน์ในชีวิตจริง และเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในขั้นสูงต่อไป การอภิปรายอาจจะเริ่มด้วยคำถามของครู สถานการณ์หรือโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจ การกำหนดเวลาให้นักเรียนคิด หรือการให้นักเรียนศึกษาเรื่องที่จะอภิปรายร่วมกันล่วงหน้า ซึ่งเป็นการเตรียมตัวก่อนการอภิปราย จะช่วยให้นักเรียนได้ทบทวนความรู้และประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์

คำสำคัญ: การอภิปราย การเรียนรู้ คณิตศาสตร์

ABSTRACT

During discussion in learning mathematics, students who are members of the discussion groups will show their role as speakers, listeners, analytic thinkers, and opinion givers. These opportunities will make students getting concepts, realizing different ways to solve problem, providing reasoning for their responses, and being able to summarize the answer accepted by group members. Moreover,





students are able to apply the knowledge in their real-life situation and for their higher-level mathematics learning. The discussion can be started by the teacher's questions or interesting situations or problems. Providing sufficient time for student to think during discussion or assigning students to review the discussion topic in advance will help students to have chances to prepare necessary knowledge for the discussion and be successful in learning mathematics.

Keywords: Discussion, Learning, Mathematics

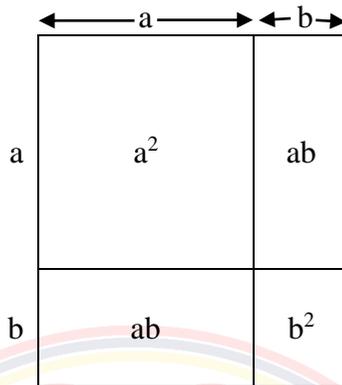
1. บทนำ

การอภิปราย [1] เป็นการแสดงความคิดเห็นของบุคคลหลายๆ คนเกี่ยวกับเรื่องใดเรื่องหนึ่งเพื่อหาข้อยุติที่มีเหตุผล มีความถูกต้อง เป็นไปได้ สามารถนำไปปฏิบัติได้ และส่งเสริมให้มีความรับผิดชอบในการทำงานร่วมกัน การอภิปรายในการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์จะช่วยให้นักเรียนเกิดแนวคิด วิธีการที่หลากหลาย มีเหตุผล และสามารถสรุปคำตอบได้ ตลอดจนสามารถ นำความรู้ที่ได้จากการอภิปรายไปใช้ประโยชน์ในชีวิตจริง และนำไปใช้ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในชั้นสูงต่อไป การอภิปรายจะเกิดประโยชน์มากถ้านักเรียนซึ่งเป็นสมาชิกภายในกลุ่มหรือห้องนั้นทราบบทบาทของตนเอง โดยแสดงบทบาทเป็นทั้งผู้ฟัง ผู้คิดวิเคราะห์ และผู้พูดแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับเรื่องที่น่ามาอภิปรายกัน

2. การถามคำถามที่นำไปสู่การอภิปราย

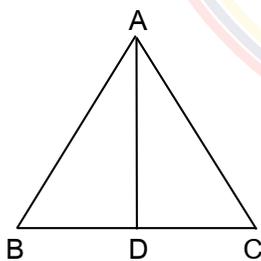
การอภิปรายในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เช่น การถามคำถามให้นักเรียนคิด ครูถามนักเรียนว่า “ทำไม $(a + b)^2$ จึงไม่เท่ากับ $a^2 + b^2$ ” นักเรียนอาจจะตอบว่า “ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ซึ่งไม่เท่ากับ $a^2 + b^2$ ” และนักเรียนอาจจะวาดรูปประกอบการอภิปรายดังรูป





รูปที่ 1 พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับ $(a + b)^2$

นอกจากนี้ครูอาจกำหนดโจทย์ปัญหาให้นักเรียนคิดและอภิปรายร่วมกัน เช่น “ถ้าความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งเท่ากับ 36 เซนติเมตร และส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว 12 เซนติเมตร พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปนี้เป็นเท่าไร” นักเรียนอาจจะเริ่มต้นการแก้โจทย์ปัญหาข้อนี้ด้วยการวาดรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ครูอาจจะถามนักเรียนว่า “โจทย์ปัญหาข้อนี้ใช้ความรู้คณิตศาสตร์อะไรในการแก้โจทย์ปัญหานี้” นักเรียนตอบว่า “ทฤษฎีบท พิทาโกรัส” พร้อมกับวาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้นักเรียนทราบ

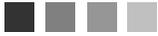


1. $AB = AC$ เนื่องจาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
2. $BD = CD$ เนื่องจาก $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ และแบ่งครึ่ง \overline{BC}
3. $AB + BD = 18$ ซม. เนื่องจาก $AB + BC + AC = 36$ ซม. และ $\frac{1}{2} \times 36 = 18$ ซม.
4. $AD = 12$ ซม.

รูปที่ 2 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC

ถ้ากำหนดให้ $BD = x$ ดังนั้น $AB = 18 - x$





ΔABD เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$(18 - x)^2 = 12^2 + x^2$$

$$324 - 36x + x^2 = 144 + x^2$$

$$-36x = -324 + 144$$

$$36x = 180$$

$$x = \frac{180}{36}$$

$$= 5$$

ดังนั้น BD ยาว 5 เซนติเมตร

$$BC = 2BD = 2 \times 5 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \text{ความยาวฐาน} \times \text{ความสูง}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12$$

$$= 60 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ดังนั้นพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้เท่ากับ 60 ตารางเซนติเมตร

ในการอภิปราย นักเรียนต้องนำความรู้ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วมาอภิปรายเพื่อให้ได้คำตอบ หรือแก้โจทย์ปัญหานั้นได้ หลังจากการอภิปรายร่วมกันแล้ว นักเรียนต้องช่วยกันสรุปคำตอบที่ได้ และครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปความรู้ที่นักเรียนได้รับจากการอภิปราย

3. แนวทางในการจัดการอภิปราย

แนวทางในการจัดการอภิปรายเพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ร่วมกันในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีดังนี้





1. ครูกำหนดคำถามให้นักเรียนคิดและทำให้เกิดการอภิปราย
2. ครูกำหนดโจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่น่าสนใจให้นักเรียนร่วมกันคิด ช่วยกันอภิปรายว่าจะใช้ความรู้อะไรในการหาคำตอบ และจะดำเนินการแก้โจทย์ปัญหาอย่างไร
3. การกำหนดเวลา เวลาที่กำหนดให้นักเรียนอภิปรายในการตอบคำถามหรือแก้โจทย์ปัญหาข้อใดนั้นต้องเหมาะสม ครูอาจจะทดลองตอบคำถามหรือลงมือแก้ปัญหานั้นก่อน แล้วให้เวลานักเรียนเป็น 3 เท่าของเวลาที่ครูใช้ในการคิด และครูควรจะมีคำถามเพิ่มเติมหรือโจทย์ปัญหาข้ออื่นๆ ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำในกรณีที่นักเรียนบางกลุ่มทำเสร็จก่อนกลุ่มอื่น เพื่อหลีกเลี่ยงพฤติกรรมอันไม่พึงประสงค์ เช่น การพูดคุยกัน การเล่นกัน
4. การดำเนินการอภิปราย ครูผู้สอนหรือสมาชิกคนใดคนหนึ่งในกลุ่มอาจจะทำหน้าที่เป็นผู้ดำเนินการอภิปรายและสมาชิกอีกคนหนึ่งทำหน้าที่เป็นผู้รักษาเวลา ผู้ดำเนินการอภิปรายอาจจะเริ่มการอภิปรายโดยการถามคำถามให้สมาชิกคนใดคนหนึ่งในกลุ่มแสดงความคิดเห็นหรือขออาสาสมัครจากสมาชิกในกลุ่ม ควรให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มได้แสดงความคิดเห็น และในกรณีที่สมาชิกไม่แสดงความคิดเห็น ผู้ดำเนินการอภิปรายอาจกล่าวว่า “พวกเรายังไม่ได้รับความเห็นจากคุณ คุณมีความเห็นอย่างไรเกี่ยวกับคำถาม (โจทย์ปัญหา) นี้”
5. บทบาทของสมาชิก บทบาทที่พึงประสงค์ ได้แก่ การที่สมาชิกภายในกลุ่มเตรียมตัวศึกษาเรื่องที่เคยเรียนไปแล้วมาก่อน และร่วมกันแสดงความคิดเห็นในเรื่องที่กำลังอภิปราย ขณะที่บุคคลหนึ่งพูด คนอื่นๆ ก็ตั้งใจฟังและคิดพิจารณาเหตุผล การคิดคำตอบของสมาชิกในกลุ่มที่ตอบด้วยคำพูดของตนเองที่สื่อความหมายให้กลุ่มเข้าใจดียิ่งขึ้น การให้ความช่วยเหลือสนับสนุนและการยอมรับสมาชิกคนอื่นๆ ในกลุ่ม การยกตัวอย่างประกอบการอภิปราย การตั้งคำถามสมาชิกคนอื่นๆ ให้แสดงความคิดเห็น การยอมรับฟังความคิดเห็นของกลุ่ม การช่วยแก้ไข





สถานการณ์ในกรณีที่มีสมาชิกบางคนแสดงความคิดเห็นไม่ตรงกับเรื่องที่กำลังอภิปรายกันอยู่ การให้การสนับสนุนเพื่อนสมาชิกด้วยการแสดงความคิดเห็นและดำเนินการอภิปรายภายในเวลาที่กำหนดและครอบคลุมทุกคำถาม ครูควรจะแนะนำและตักเตือนนักเรียนเกี่ยวกับบทบาทที่ไม่พึงประสงค์ที่อาจจะเกิดขึ้นในระหว่างการอภิปราย ได้แก่ การแสดงท่าทีที่ก้าวร้าวด้วยการตำหนิสมาชิกในกลุ่ม ที่แสดงความคิดเห็นที่ตนเองไม่เห็นด้วย การขัดแย้งความคิดเห็นของสมาชิกด้วยท่าทีที่ไม่สุภาพ การเป็นผู้พูดเพียงผู้เดียวตลอดการอภิปราย การแสดงท่าทีที่ไม่สนใจในเรื่องที่สมาชิกในกลุ่มกำลังอภิปราย การพูดคุยกับสมาชิกในกลุ่มขณะที่กำลังอภิปราย การนั่งงานอื่นๆ ขึ้นมาทำในระหว่างการอภิปราย

6. การสรุปการอภิปราย ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันสรุปคำตอบและข้อคิดที่ได้จากการอภิปรายและนำเสนอต่อชั้นเรียน การอภิปรายจะประสบความสำเร็จเมื่อครูผู้สอนได้เตรียมการล่วงหน้าในการตั้งคำถาม การเลือกโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจ โดยคำนึงถึงประโยชน์ที่นักเรียนจะได้รับจากการอภิปราย ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนสนุกกับการเรียนคณิตศาสตร์ ได้รับความรู้ต่างๆ สามารถจดจำความรู้นั้นได้และนำไปใช้ประโยชน์ต่อไป

4. ตัวอย่างคำถามและโจทย์ปัญหาที่นำไปสู่การอภิปราย

คำถามที่นำไปสู่การอภิปราย เช่น

1. เศษส่วนและอัตราส่วนต่างกันอย่างไร
2. นักเรียนจะวัดเส้นผ่านศูนย์กลางของลูกปิงปองได้อย่างไร
3. ทำไมผลคูณของจำนวนคี่กับจำนวนคู่จึงเป็นจำนวนคู่เสมอ
4. เมื่อใดการใช้มัธยฐานจึงจะเหมาะสมกว่าการใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตในการหาค่ากลางของข้อมูล
5. จุดตัดบนแกน Y ของกราฟ $Y = mx + b$ จะเป็นอย่างไร ถ้าค่าของ b เพิ่มขึ้น





6. ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม และ $\frac{x+5}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว x จะเป็นจำนวนใด
7. ในการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญห้าครั้ง แล้วเหรียญได้ออกหัวไปแล้วสี่ครั้ง ครั้งที่ห้าที่จะโยนเหรียญมีโอกาสออกหน้าได้มากกว่า หัวหรือก้อย

คำตอบของนักเรียนอาจจะมีดังนี้

1. มีโอกาสออกหัวมากกว่า เพราะออกไปแล้ว 4 ครั้ง ไม่ออกก้อยเลย
2. มีโอกาสออกก้อยมากกว่า เพราะยังไม่เคยออกก้อยเลย
3. มีโอกาสออกหัวและก้อยเท่ากัน เพราะเหรียญแต่ละเหรียญมีโอกาสออกหัวหรือก้อย เป็น $\frac{1}{2}$

นอกจากนี้ครูอาจจะตั้งคำถามเพิ่มเติมให้นักเรียนประเมินคำตอบของนักเรียนคนอื่น ให้นักเรียนให้เหตุผลโดยถามว่า เห็นด้วยกับคำตอบใด เพราะอะไร

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์ที่ช่วยกระตุ้นการคิดของนักเรียน [2] เช่น

1. ให้นักเรียนเลือกจำนวนต่อไปนี้ 104 12 640 20 32 3 10 8 เติมลงในช่องว่างของโจทย์ปัญหาให้ถูกต้อง

สนามบาสเกตบอลของโรงเรียนมีความยาว.....เมตร และมีความกว้าง.....เมตร ด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง.....เมตร ความยาวของรั้วรอบสนามบาสเกตบอล.....เมตร และพื้นที่ของสนามบาสเกตบอล.....เมตร ห่วงบาสเกตบอลอยู่สูงจากพื้นดิน.....เมตร

สมมติว่า นักเรียนตอบว่า “ความยาวของบาสเกตบอล 32 เมตร และความกว้างของสนามบาสเกตบอล 20 เมตร” ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนบอกเหตุผล โดยถามว่า “ทำไมคุณจึงคิดว่าความยาวของสนามบาสเกตบอลเป็น 32 เมตร และความกว้างเป็น 20 เมตร” ซึ่งนักเรียนอาจจะตอบว่า “104 เมตรนั้นยาวไป 12 เมตร นั้นสั้นไป และ 640 เมตรนั้นมากเกินไป และ 3 10 8 เมตรนั้นสั้นไปสำหรับความยาวของสนามบาสเกตบอล” และ “เมื่อนำความยาวของสนามบาสเกตบอล มา





เปรียบเทียบกับความกว้าง 12 เมตร ซึ่งตรงกับจำนวนโจทย์ที่กำหนด” ครูอาจจะถามนักเรียนว่า “นักเรียนจะหาความยาวของรั้วรอบสนามบาสเกตบอลได้อย่างไร” ครูอาจจะชี้แนะในกรณีที่นักเรียนตอบไม่ได้ว่า “สนามบาสเกตบอลนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมอะไร และความยาวของเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมนี้หาได้อย่างไร” นักเรียนก็จะตอบได้ว่า “สนามบาสเกตบอลเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และความยาวของเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่ากับ $(2 \times \text{ความยาวของสนาม}) + (2 \times \text{ความกว้างของสนาม})$ ซึ่งในที่นี้ $(2 \times 32) + (2 \times 20) = 64 + 40 = 104$ ” ครูถามนักเรียนต่อไปว่า “ใครสามารถบอกได้ว่าพื้นที่สนามบาสเกตบอลเท่ากับเท่าไร” และการวาดรูปสนามบาสเกตบอลจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจได้มากขึ้น สำหรับนักเรียนที่ยังสับสนระหว่างความยาวของเส้นรอบรูปและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



รูปที่ 3 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กขคก

จากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กขคก มี กข = คค และ ขค = กก ความยาวของเส้นรอบรูป เท่ากับ $กข + ขค + คค + กก = (2 \times กข) + (2 \times ขค)$ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่ากับ $กข \times ขค$ ในที่นี้ $กข = 32$ เมตร และ $ขค = 20$ เมตร ดังนั้นพื้นที่ของสนามบาสเกตบอลเท่ากับ $32 \times 20 = 640$ ตารางเมตร ครูถามนักเรียนว่า “จำนวนใดบ้างที่ยังเหลืออยู่ นักเรียนตอบว่า “3 10 8” ครูถามต่อไปว่า “ความสูงจากพื้นดินถึงห่วงบาสเกตบอลเป็นเท่าไร” ถ้านักเรียนตอบว่า “8 เมตร” ครูอาจจะถามว่า “8 เมตร เท่ากับกี่เซนติเมตร” นักเรียนจะตอบได้ว่า “800 เซนติเมตร” ซึ่งครูอาจจะเชื่อมโยงความสูง 800 เซนติเมตร กับความสูงของนักเรียน เมื่อนักเรียนบอกความสูงของนักเรียน ครูถามนักเรียนว่า “จะต้องใช้ความสูงของ





นักเรียนก็คน” ซึ่งนักเรียนพอจะมองเห็นแนวทางว่าความสูง 8 เมตร นั้น เป็นไปไม่ได้ และความสูง 10 เมตร ยิ่งเป็นไปไม่ได้เลย ดังนั้น ความสูงจากพื้นดินถึงห่วงบาสเกตบอลเท่ากับ 3 เมตร

2. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีพื้นที่ 784 ตารางหน่วย อยากทราบว่าความยาวแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นเท่าไร ในการแก้โจทย์ปัญหาข้อนี้ ครูอาจจะช่วยกระตุ้นความคิดของนักเรียนโดยการถามนักเรียนเกี่ยวกับสูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งเท่ากับความยาวด้าน \times ความยาวด้าน ดังนั้นคำตอบต่อมาสำหรับนักเรียนคือ จำนวนโดยยกกำลังสองแล้วได้ผลลัพธ์เท่ากับ 784

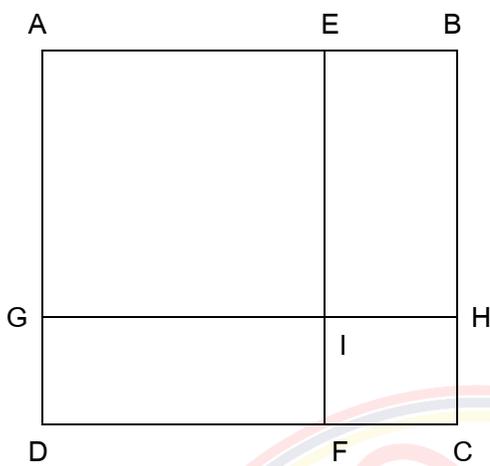
ในการหาคำตอบนักเรียนบางกลุ่มอาจนำจำนวนต่างๆ มายกกำลังสอง ดังนี้

จำนวน	ผลลัพธ์ของ จำนวนที่ยกกำลังสอง
20	400
21	441
⋮	⋮
25	625
26	676
27	729
28	784

ดังนั้น ความยาวแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้คือ 28 หน่วย

ขณะที่นักเรียนอีกกลุ่มอาจจะหาคำตอบโดยการพิจารณาจำนวนที่ยกกำลังสอง และจำนวน 784 อยู่ระหว่าง 20^2 กับ 30^2 จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ 784 ตารางหน่วย ดังนั้นความยาว แต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสควรจะอยู่ระหว่าง 20 กับ 30





ให้ $AE = 20$ หน่วย และ $BE = x$ หน่วย

$$\text{จะได้ } AB^2 = 784$$

$$\text{แต่ } AB = AE + EB$$

$$(AE + EB)^2 = (20 + x)^2$$

$$(20 + x)^2 = 784$$

$$400 + 40x + x^2 = 784$$

$$x^2 + 40x - 384 = 0$$

$$(x + 48)(x - 8) = 0$$

$$x = -48, 8$$

รูปที่ 4 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD

แต่ความยาวของด้านต้องเป็นจำนวนบวก

ดังนั้น $BE = 8$ หน่วย และ $AB = 20 + 8 = 28$ หน่วย

นั่นคือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านยาวด้านละ 28 หน่วย

3. จำนวนหนึ่งเป็นจำนวนที่มีสองหลัก ถ้าคูณจำนวนนี้ด้วยผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลัก จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 70 จำนวนนั้นคืออะไร

นักเรียนบางกลุ่มอาจจะกำหนดให้เลขโดดในหลักสิบ คือ a และเลขโดดในหลักหน่วยคือ b

$$\text{จะได้สมการ } (10a + b)(a + b) = 70$$

$$10a^2 + 11ab + b^2 = 70$$

ครูอาจจะถามนักเรียนว่า นักเรียนจะแก้สมการนี้ได้อย่างไร นักเรียนบางกลุ่มอาจจะตอบว่ายากและมีวิธีคิดอีกวิธีหนึ่งที่ทำได้ง่ายกว่า คือ การหาจำนวนสองจำนวนที่คูณกันแล้วได้ ผลลัพธ์เท่ากับ 70 นั่นคือ 1×70 , 2×35 , 5×14 และ 7×10

จะเห็นว่า $7 + 0 = 7 \neq 1$, $3 + 5 = 8 \neq 2$, $1 + 0 = 1 \neq 7$ แต่ $1 + 4 = 5$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

ดังนั้น คำตอบของจำนวนนั้นคือ 14





4. จงหาจำนวนสามจำนวนที่ตัวอักษรตัวเดียวกันแทนเลขโดดตัวเดียวกัน
เมื่อกำหนดให้

$$\begin{array}{r} \text{FOUR} \\ \text{FIVE} \\ \hline \text{NINE} \end{array} +$$

ในการอธิบายครุอาจะเริ่มต้นด้วยการให้นักเรียนสังเกตตัวอักษรที่แทนเลขโดดที่นำมาบวกกันแล้วได้ผลลัพธ์เท่าเดิม ในที่นี้ $R + E = E$ ซึ่งตรงกับเอกลักษณ์ของการบวก เช่น $0 + 3 = 3$ ดังนั้น $R = 0$ และ $U + V$ ต้องมากกว่า 10 และ $O + I = I$ ซึ่ง $O \neq 0$ เนื่องจาก $R = 0$ แล้ว ดังนั้น O ควรจะเป็น 9 และ I ควรจะเป็น 1 หรือ 2 เท่านั้น เนื่องจาก $U + V$ มีผลบวกมากกว่า 10 จึงทดมา 1 ซึ่งจะรวมกับ $O + I = I$ และ $F + F = N$ ในที่นี้ $U + V = N$ และ $F + F = 2F = N$ แต่ $U \neq 9$ เนื่องจาก $U + V = 13$ หรือ $U + V = 15$ และ F จะต้องน้อยกว่า 5 ดังนั้น N จะต้องเท่ากับ 3 หรือ 5 เท่านั้น

ในกรณีที่ $U + V = 13$ จะได้ว่า $U = 7$ และ $V = 6$ หรือ $U = 8$ และ $V = 5$

ในกรณีที่ $U + V = 15$ จะได้ว่า $U = 7$ และ $V = 8$ หรือ $U = 8$ และ $V = 7$

เมื่อนำเลขโดดมาตรวจสอบจะได้ว่าจำนวนสองจำนวนที่นำมาบวกกันแล้ว
ได้จำนวนที่สาม คือ

$$\begin{array}{r} 1980 \\ 1256 \\ \hline 3236 \end{array} + \quad \text{หรือ} \quad \begin{array}{r} 2980 \\ 2173 \\ \hline 5153 \end{array} +$$

5. จงหาค่าของ n ที่ทำให้ $5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n = 5^{25}$

ครุอาจะเริ่มต้นถามนักเรียนว่า “ 5^n เป็นจำนวนอะไร” นักเรียนตอบว่า “ 5^n เป็นเลขยกกำลัง และ 5^n บวกกัน 5 จำนวน เท่ากับ 5 คูณ 5^n โดยสมบัติของเลขยกกำลัง $5 \cdot 5^n = 5^{n+1}$ และ $5^{n+1} = 5^{25}$

ดังนั้น $n + 1 = 25$ นั่นคือ $n = 24$





ในการอภิปรายบางครั้งนักเรียนไม่สามารถจะตอบสมบัติต่างๆ ได้ ครูอาจจะต้องช่วยชี้แนะ

6. ในรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$, $\hat{A}D = 90^\circ$, $\hat{A}B C = \hat{B}C D = 120^\circ$, $AB = 3$ หน่วย และ $BC = 4$ หน่วย จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เมื่อนำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มาวาดรูปจะได้

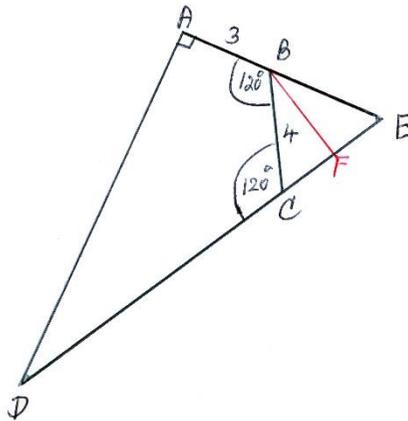


รูปที่ 5 รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$

ครูถามนักเรียนว่า “รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมอะไร” นักเรียนตอบว่า “รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า” ครูถามต่อไปว่า “สูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าเป็นอะไร” นักเรียนตอบว่า “ไม่มีสูตร” ครูถามต่อไปว่า “นักเรียนจะหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ได้อย่างไร”

นักเรียนบางกลุ่มอาจจะอภิปรายร่วมกันและดำเนินการแก้ปัญหาโดยการต่อความยาวของด้าน AB และด้าน DC ไปพบกันที่จุด E ดังรูป





รูปที่ 6 รูปสามเหลี่ยม ADE

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD = พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ADE -
พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCE

$\angle CBE = \angle BCE = 60^\circ$ เนื่องจาก $\angle ABC = 120^\circ$ และ $\angle BCD = 120^\circ$

ดังนั้นรูปสามเหลี่ยม BCE เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เนื่องจาก

$\angle CBE = \angle BCE = \angle BEC = 60^\circ$ และ $BC = CE = BE = 4$ หน่วย

ลาก $\overline{BF} \perp \overline{CE}$ ที่จุด F จะได้ $CF = FE = 2$ หน่วย

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$BC^2 = CF^2 + BF^2 \quad \text{หรือ} \quad BF^2 = BC^2 - CF^2$$

$$BF^2 = 4^2 - 2^2$$

$$= 16 - 4 = 12 \text{ หน่วย}$$

$$BF = \pm\sqrt{12}$$

ดังนั้น $BF = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ หน่วย

$$\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCE} = \frac{1}{2} \times CE \times BF$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ ตารางหน่วย}$$





รูปสามเหลี่ยม ADE เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\frac{AD}{AE} = \tan 60^\circ$$

$$AD = AE \tan 60^\circ$$

$$AE = AB + BE = 3 + 4 = 7 \text{ หน่วย และ } \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{ดังนั้น } AD = 7\sqrt{3} \text{ หน่วย}$$

$$\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ADE} = \frac{1}{2} \times AE \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 7\sqrt{3}$$

$$= \frac{49\sqrt{3}}{2} \text{ ตารางหน่วย}$$

$$\text{ดังนั้นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD} = \frac{49\sqrt{3}}{2} - 4\sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (49 - 8)$$

$$= \frac{41\sqrt{3}}{2} \text{ ตารางหน่วย}$$

ในการอภิปราย เมื่อหาคำตอบได้แล้ว และยังมีเวลาเหลือจากที่กำหนดไว้ ครูควรกระตุ้นให้นักเรียนลองใช้วิธีการอื่นๆ อีกในการแก้ปัญหาที่นั่น เพื่อนักเรียนจะได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันและแสดงความคิดเห็นของตน ในวิชาคณิตศาสตร์การตอบคำถามแต่ละคำถามนั้นต้องอาศัยเหตุและผล นักเรียนจะได้ทราบว่าทำไมจึงทำอย่างนี้ได้ ทำไมจึงตอบเช่นนี้ เพราะเหตุใด

5. สรุป

การอภิปรายร่วมกันในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ร่วมกัน ช่วยเหลือกัน นักเรียนกล้าแสดงความคิดเห็น มีความกระตือรือร้นในการเรียน ช่วยลดพฤติกรรมอันไม่พึงประสงค์ ทำให้นักเรียน





สนุกกับการเรียนคณิตศาสตร์ ได้ฝึกทักษะการเป็นผู้พูดและผู้ฟัง ตลอดจนทักษะการคิด ซึ่งจะทำให้ให้นักเรียนมีความรู้คณิตศาสตร์มากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] Hill, W.M. Fawcett. *Learning through Discussion, Guide for Leaders and Members of Discussion Groups*. California, Beverly Hills: Sage, 1982.
- [2] National Council of Teachers of Mathematics, *Mathematics Teacher and Problems of the Months*. Retrieved 1 June 2016 from <http://www.nctm.org/publications/mathematics-teacher/>

