

บทที่ 5

ความเค้นและตัวประกอบความเข้มของความเค้น

ในบทนี้จะเป็นการนำเทคนิคโฟโตอีลาสติกซี้ดี และโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปรับขนาดโดยอัตโนมัติ มาหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น แต่ก่อนจะกล่าวถึงตัวประกอบความเข้มของความเค้นนั้น จำเป็นต้องมีการศึกษาทฤษฎีกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้นที่เป็นพื้นฐานในการวิจัยนี้ ซึ่งจะกล่าวอย่างละเอียดในบทนี้

5.1 กลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น

ในปัจจุบันการออกแบบชิ้นส่วนต่าง ๆ ต้องคำนึงถึงความเสี่ยงของวัสดุเป็นหลัก โดยการออกแบบในปัจจุบันจะออกแบบให้ใช้วัสดุในช่วงอีลาสติกเท่านั้น แต่ก็ยังเกิดความเสียหายเนื่องมาจากการรับภาระแบบซ้ำไปซ้ำมาหรือที่เรียกว่าการล้าของวัสดุ นั้น ๆ อยู่ ดังตัวอย่างความเสียหายที่เคยเกิดขึ้นกับเครื่องบิน Aloha 737 ในปี ค.ศ.1988 ที่ใช้โดยสารขึ้นและลงจอดเป็นเวลา 19 ปี โดยผ่านความดันที่สูงและต่ำเป็นวงรอบทำให้เกิดการล้าในวัสดุ เกิดความเสียหาย ดังแสดงในภาพที่ 5.1



ภาพที่ 5.1

ความเสียหายของเครื่องบิน Aloha 737

ทำให้ต้องมีการศึกษาถึงองค์ประกอบการเติบโตของรอยร้าว พฤติกรรมการเกิดการล้าตัวในวัสดุ เพื่อทำนายอายุการใช้งานของวัสดุที่ออกแบบไว้ โดยจุดเริ่มต้นของการเกิดการล้าจะเกิดจากรอยร้าวหรือรอยตำหนิที่เกิดขึ้น ซึ่งการศึกษาวัดวัสดุที่มีรอยร้าวหรือรอยตำหนิจึงเป็นการศึกษาที่สำคัญที่จะทำให้ทราบถึงความแข็งแรงของวัสดุที่มีรอยร้าวได้ โดยมีผลการศึกษาถึงผลกระทบดังต่อไปนี้

ในปี ค.ศ.1920 Griffith ได้ทำการประยุกต์ใช้กฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์เพื่อหาความสัมพันธ์ของการเจริญเติบโตของรอยร้าวภายใต้ความสมดุลของพลังงาน โดยกล่าวว่า รอยร้าวจะมีการขยายตัวเพิ่มขึ้น เมื่อพลังงานความเครียดยืดหยุ่นมีค่ามากกว่าพลังงานที่วัสดุต้องการสร้างผิวของรอยร้าวใหม่ แต่ความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ใช้เฉพาะวัสดุเปราะเท่านั้น

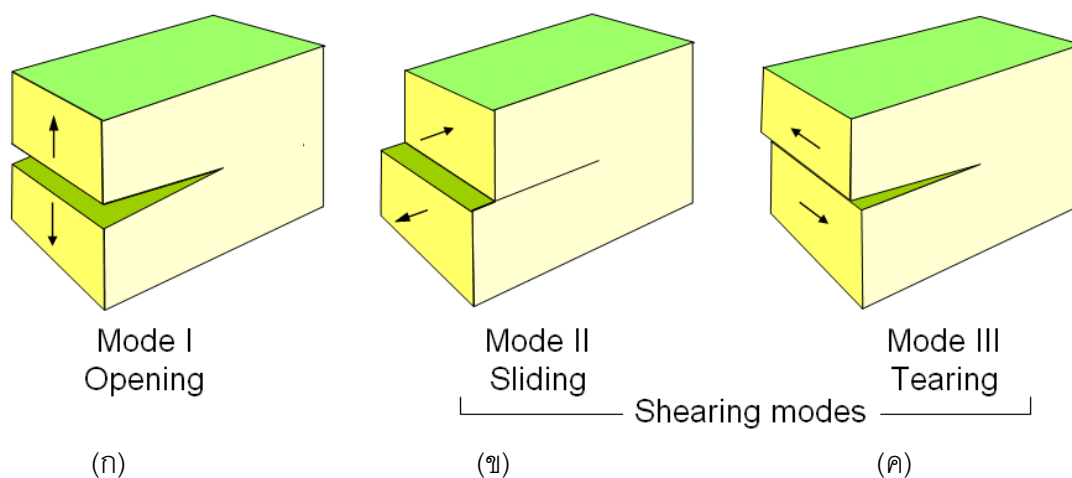
ต่อมาในปี ค.ศ.1948 Irwin และ Orowan ได้ทำการพัฒนารูปแบบความสัมพันธ์ของ Griffith ขึ้นเพื่อให้สามารถนำรูปแบบความสัมพันธ์นี้ไปใช้กับวัสดุเหนียวด้วย โดยได้เพิ่มผลของพลาสติกเข้าไปในรูปแบบความสัมพันธ์

และในปี ค.ศ.1956 Irwin ได้เสนอวิธีการทางพลังงานสำหรับการแตกหักโดยกำหนดปริมาณอัตราการปลดปล่อยพลังงานความเครียดขึ้นมา ซึ่งเป็นพลังงานที่ใช้ในการขยายตัวของรอยร้าวหนึ่งหน่วยต่อความหนาหนึ่งหน่วย โดยปริมาณนี้จะเป็นปริมาณที่แสดงถึงภาพรวมของการขยายตัวของรอยร้าว และมีความสัมพันธ์กับพารามิเตอร์ตัวประกอบความเข้มของความเค้น ซึ่งเป็นพารามิเตอร์หลักที่เป็นตัวควบคุมพฤติกรรมของรอยร้าว

แนวทางในการศึกษาปัญหาที่มีรอยร้าวมีด้วยกันหลายแนวทาง หนึ่งในแนวทางคือ กลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear elastic fracture mechanics: LEFM) สามารถประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาที่มีรอยร้าวและการเสียรูปแบบพลาสติก เหมาะกับการนำมาวิเคราะห์ปัญหาที่มีรอยร้าวที่การเสียรูปเชิงเส้นบริเวณปลายรอยร้าว โดยแนวทางกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่น อาศัยค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ได้พัฒนาขึ้นเพื่อแสดงสถานะความรุนแรงของปลายรอยร้าวที่ขนาดภาระและค่าความยาวรอยร้าวต่าง ๆ บนชิ้นงาน ทำให้เข้าถึงพฤติกรรมการเติบโตของรอยร้าวได้ พารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

5.1.1 ลักษณะของภาระที่กระทำต่อรอยร้าว

พารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องนั้น เกี่ยวข้องกับรูปแบบแรงที่มากระทำกับวัสดุ เมื่อพิจารณาในวัสดุที่มีรอยร้าวเกิดขึ้น สามารถแบ่งรูปแบบภาระที่กระทำกับรอยร้าวได้ 3 รูปแบบดังต่อไปนี้ ซึ่งแบ่งตามความแตกต่างของการเคลื่อนตัวของผิวหน้ารอยร้าวแสดงในภาพที่ 5.2



ภาพที่ 5.2

รูปแบบลักษณะการกระทำต่อรอยร้าว

(ก) คือ แบบเปิด

(ข) คือ แบบเฉือน

(ค) คือ แบบฉีก

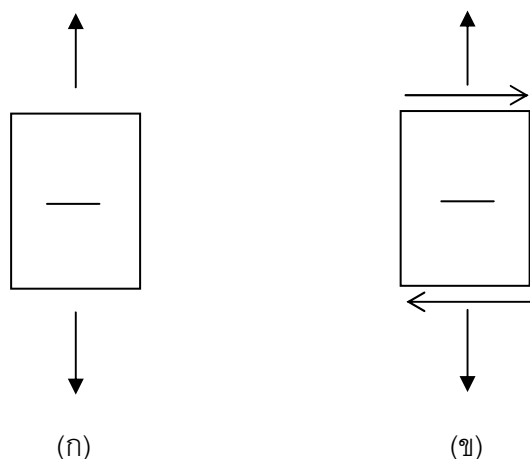
1. แบบเปิด (Opening mode: Mode I) มีลักษณะคือภาระที่มากระทำตั้งฉากกับระนาบของรอยร้าว เป็นลักษณะการเปิดรอยร้าว ซึ่งในทางวิศวกรรมถือว่ามีความรุนแรงมากที่สุด เพราะเป็นการเร่งให้เกิดการขยายตัวของรอยร้าวโดยตรง นำไปสู่ความเสียหายมากกว่ารูปแบบอื่น ๆ

2. แบบเฉือน (Shearing or sliding mode: Mode II) มีลักษณะคือภาระที่มากระทำขนานกับระนาบของรอยร้าวในลักษณะไกลผิวของรอยร้าวในทิศทางตั้งฉากกับผิวหน้ารอยร้าว

3. แบบฉีก (Tearing mode: Mode III) มีลักษณะเหมือนแบบเฉือน คือ ภาระที่มากระทำขนานกับระนาบของรอยร้าวในลักษณะไกลผิวของรอยร้าวแต่ในทิศทางขนานกับรอยร้าวลักษณะเหมือนการฉีกรอยร้าว

แต่การใช้งานจริงนั้น เราไม่สามารถบังคับรูปร่างและทิศทางของรอยร้าวที่เกิดขึ้นได้ บ่อยครั้งที่รอยร้าวที่เกิดขึ้นไม่ตรงตามลักษณะรูปแบบทั้ง 3 ลักษณะที่กล่าวมา แต่จะเป็นการผสมกันของรูปแบบ หรือที่เรียกว่า Mixed mode ซึ่งอาจเป็นการผสมกันระหว่าง 2 รูปแบบ หรือ 3 รูปแบบขึ้นอยู่กับลักษณะของรอยร้าว นั้น ๆ โดยในงานวิจัยฉบับนี้ศึกษาถึงผลที่เกิดขึ้นจาก

รูปแบบเปิดอย่างเดียว กับการผสมกันของรูปแบบเปิดและเฉือน (Mixed mode: Mode I and Mode II) ซึ่งส่งผลต่อความเสียหายไม่น้อยกว่าแบบเปิดเพียงอย่างเดียว ดังแสดงในภาพที่ 5.3



ภาพที่ 5.3

ลักษณะของรอยร้าวในรูปแบบเปิดและแบบผสม

(ก) แบบเปิดอย่างเดียว

(ข) แบบเปิดผสมกับแบบเฉือน

5.1.2 ความเค้นระนาบและความเครียดระนาบ

อีกหนึ่งพารามิเตอร์ที่ต้องศึกษาคือ เรื่องของความเค้นระนาบ และความเครียดระนาบ เป็นอีกปัจจัยที่ส่งผลต่อรูปแบบการเสียรูปที่จะเกิดขึ้น เนื่องจากแนวทางทางกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่น อยู่ในสมมติฐานที่ว่าวัสดุอยู่ในช่วงอีลาสติกเท่านั้น

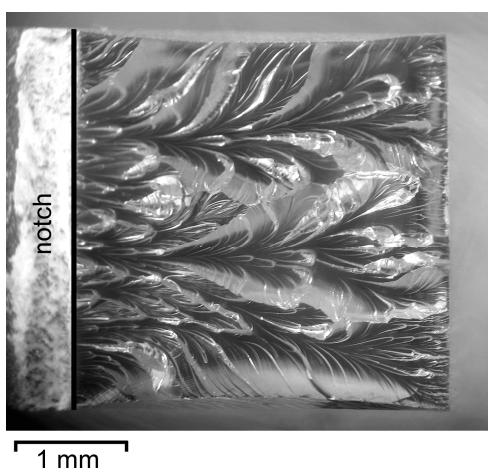
แบ่งได้เป็น 2 ลักษณะ คือ ความเค้นระนาบ และความเครียดระนาบ ขึ้นอยู่กับรูปร่างของวัสดุที่พิจารณาดังนี้

1. ความเค้นระนาบ (Plane Stress)

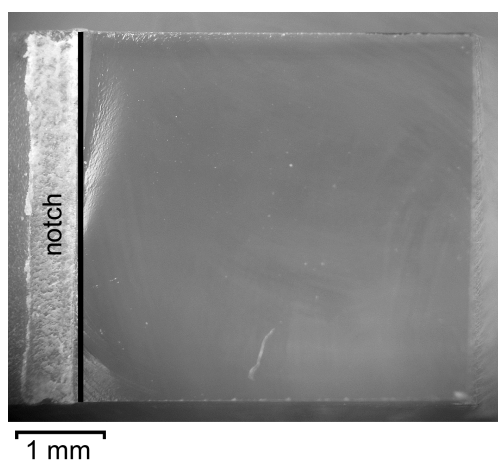
เกิดกับวัสดุที่มีขนาดบาง โดยจะมีการเปลี่ยนแปลงค่าความเครียดอย่างอิสระในแนวตั้งฉากกับระนาบทั้ง 3 มิติ แต่จะมีการเปลี่ยนแปลงค่าความเค้นเพียง 2 มิติ ในแนวระนาบเท่านั้น ลักษณะการเกิดนี้ จะทำให้วัสดุมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างเห็นได้ชัดเจน ซึ่งหากพิจารณาผิวของการแตกหัก (Fracture surface) จะแสดงความเสียหายแบบวัสดุเหนียว (Ductile fracture) ดังภาพที่ 5.4ก

2. ความเครียดระนาบ (Plane Strain)

เกิดกับวัสดุที่มีขนาดหนามาก ซึ่งเป็นวัสดุที่ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงค่าความเครียดได้อย่างอิสระในแนวตั้งฉากกับระนาบ โดยจะมีการเปลี่ยนแปลงความเครียดในแนวระนาบแบบ 2 มิติเท่านั้น ส่งผลให้มีการเปลี่ยนแปลงความเค้นอย่างอิสระบริเวณปลายรอยร้าว ทำให้เกิดความเสียหายโดยที่ยังไม่มีการเสียรูป หากพิจารณาที่ผิวของการแตกหัก (Fracture surface) จะแสดงความเสียหายแบบวัสดุเปราะ (Brittle fracture) ดังภาพที่ 5.4 ซึ่งเป็นกรณีที่รุนแรง การออกแบบวัสดุทางวิศวกรรมและการวิเคราะห์ความต้านทานการแตกหักของชิ้นส่วนจึงมักคำนึงถึงสภาพความเครียดระนาบเป็นหลัก



(ก)



(ข)

ภาพที่ 5.4

ตัวอย่างพื้นผิวความเสียหายของชิ้นทดสอบแบบต่าง ๆ [21]

(ก) ผิวความเสียหายแบบวัสดุเหนียว

(ข) ผิวความเสียหายแบบวัสดุเปราะ

แต่บริเวณปลายรอยร้าวมีค่าความเค้นที่สูง ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดแบบถาวร (Plastic deformation) ที่ส่วนปลายของรอยร้าว (crack tip) จึงจำเป็นต้องควบคุมขนาดของ plastic deformation zone เพื่อให้วัสดุแสดงพฤติกรรมแบบอีลาสติกเชิงเส้นและอยู่ในสภาพความเครียดแบบระนาบ ซึ่งสภาพดังกล่าวจะเกิดขึ้นเมื่อ [20]

$$B, a, (w-a) > 2.5 \left(K_Q / \sigma_y \right)^2 \quad (5.1)$$

โดย	B	คือ	ความหนาของวัสดุ
	a	คือ	ความยาวรอยร้าว
	w	คือ	ความกว้างของวัสดุ
	K_Q	คือ	ค่าวิกฤติของตัวประกอบความเข้มของความเค้น (Critical stress intensity factor)
	σ_y	คือ	ความเค้นคราก (Yield stress)

5.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น

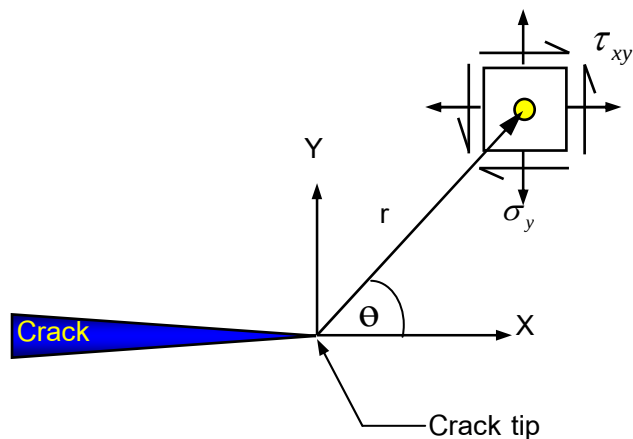
สำหรับวัสดุที่มีรอยร้าว ถูกกระทำด้วยภาระภายนอก สามารถทำการวิเคราะห์หาความเค้นที่เกิดขึ้นบริเวณปลายรอยร้าวภายใต้เงื่อนไขกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้นได้หลายวิธีด้วยกัน โดยการศึกษาความเค้นดังกล่าวนี้ถูกจำกัดสำหรับวัสดุที่มีขนาดใหญ่ (Infinite body) รูปร่างและเงื่อนไขไม่ซับซ้อนมาก ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในรูปแบบเปิดและรูปแบบเฉือนในแนวทางกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้นโดยที่ไม่สนใจเทอมที่เป็นอนุพันธ์อันดับสูง (Higher order terms) [1] สามารถเขียนในรูปแบบดังนี้

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (5.2)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (5.3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (5.4)$$

โดยที่ K_I และ K_{II} คือ ค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในรูปแบบเปิดและรูปแบบเฉือนตามลำดับ, r และ θ คือระยะและมุมในพิกัดเชิงขั้วดังแสดงในภาพที่ 5.5 ส่วน σ_x , σ_y และ τ_{xy} คือความเค้นในแนวแกน X ความเค้นในแนวแกน Y และความเค้นเฉือนในระนาบ XY



ภาพที่ 5.5
ระยะและมุมในพิกัดเชิงขั้ว

ส่วนพารามิเตอร์ตัวประกอบความเข้มของความเค้น (Stress intensity factor) สามารถเขียนในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$K_I = \lim_{\theta, r \rightarrow 0} (\sigma_y \cdot \sqrt{2\pi r}) \quad (5.5)$$

พารามิเตอร์ตัวประกอบความเข้มของความเค้น (K) คือ พารามิเตอร์ที่แสดงถึงระดับความรุนแรงของสถานะที่ปลายรอยร้าวขึ้นอยู่กับรูปแบบภาระที่มากกระทำ ขนาด และรูปร่างของรอยร้าว เขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$K = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (5.6)$$

โดยที่ F คือ ตัวประกอบเรขาคณิต
 σ คือ ภาระความเค้นที่มากกระทำ
 a คือ ความยาวรอยร้าว

5.1.4 ความแข็งแรงหรือความต้านทานการแตกหัก (Fracture toughness)

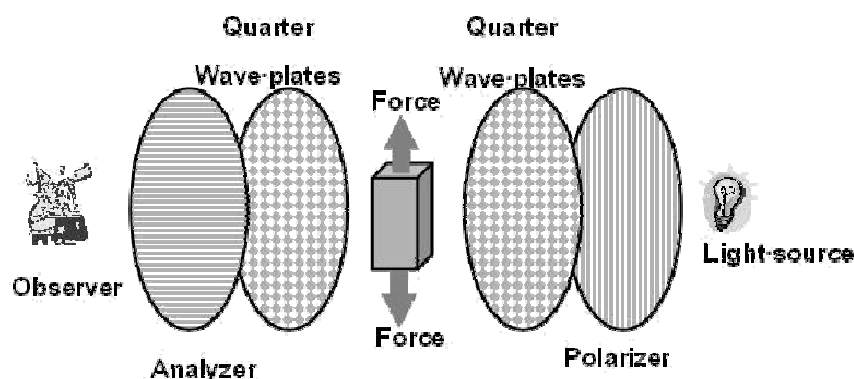
จากทฤษฎีกลศาสตร์การแตกหัก วัสดุที่แสดงพฤติกรรมแบบอีลาสติกเชิงเส้น (Linear elastic material) จะมีค่าความต้านทานการแตกหัก (Fracture toughness) ซึ่งเรียกว่า ค่าวิกฤติของตัวประกอบความเข้มของความเค้น (critical stress intensity factor, K_{Ic}) ซึ่งค่าวิกฤตินี้เป็นค่าเฉพาะตัวของวัสดุที่สภาพใดสภาพหนึ่ง และสามารถหาได้จากการทดสอบ [21] โดยเป็นค่าต่ำสุดที่วัสดุจะทนต่อการแตกหักได้

การพิจารณาการเติบโตของรอยร้าว สิ่งที่ต้องคำนึงคือ เมื่อตัวประกอบความเข้มของความเค้น (Stress intensity factor, K) บนชิ้นส่วนนั้น ซึ่งเป็นตัวแปรที่อยู่ในความสัมพันธ์ระหว่างขนาดรอยร้าว รูปร่าง และภาระที่กระทำ มีขนาดเท่ากับหรือมากกว่า K_{Ic} จะเกิดการขยายตัวของรอยร้าวขึ้น

ในงานวิจัยนี้ศึกษาแนวทางกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้นเพื่อหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น โดยพิจารณาในสภาพความเครียดระนาบ ในรูปแบบเปิดเพียงอย่างเดียว และรูปแบบผสมระหว่างรูปแบบเปิด และรูปแบบเฉือน ด้วยเทคนิคโฟโตอีลาสติกซิตี และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบปรับขนาด โดยจะกล่าวถึงรายละเอียดในหัวข้อต่อไป

5.2 เทคนิคโฟโตอีลาสติกซิตี

โฟโตอีลาสติกซิตี (Photoelasticity) เป็นวิธีการวัดความเค้นด้วยการทดสอบวัตถุใส โดยการฉายคลื่นแสงผ่านวัตถุ [7-10] หลักการเบื้องต้นคือ เมื่อเกิดความเค้นในวัตถุใสจะทำให้คุณสมบัติในการหักเหแสงของวัตถุนั้นเปลี่ยนไปจากเดิมทำให้เกิดการแทรกสอดขึ้น การมองเห็นปรากฏการณ์แทรกสอดของแสงนี้ทำได้โดยการมองผ่านชุดฟิลเตอร์ตัดแสง ซึ่งประกอบด้วยแผ่นโพลาไรเซอร์ (Polarizer) แผ่นอนาไลเซอร์ (Analyzer) และแผ่นคลื่นหรือแผ่นควอเตอร์เวฟ (Quarter wave plates) ซึ่งจัดเรียงกันดังภาพที่ 5.6 อุปกรณ์ทั้งหมดนี้รวมเรียกว่าโพลาริสโคป (Polariscope)



ภาพที่ 5.6

โพลาไรสโคป

จากหลักการที่กล่าวมาจะเห็นว่าโพลาไรสโคป สามารถใช้ตรวจสอบความเค้นแบบ 2 มิติในวัตถุได้โดยจะแสดงผลในรูปแบบของแถบไอโซโครเมติก (Isochromatic fringe order) ซึ่งสามารถใช้วัดค่าความเค้นเฉือนสูงสุด และ แถบไอโซคลีนิก ซึ่งบอกทิศทางของความเค้นหลักสูงสุด [6-10] จากที่กล่าวมาจะทำให้สามารถหาค่าความเค้นเฉือนสูงสุดจากเทคนิคโฟโตอีลาสติกซิตีในรูปแบบดังนี้

$$2\tau_m = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{t} \quad (5.7)$$

เมื่อ τ_m คือ ค่าความเค้นเฉือนสูงสุด, $\sigma_1 - \sigma_2$ คือ ผลต่างของความเค้นหลัก, N คือ จำนวนรอบของการหน่วงช้าและนับด้วยอันดับของแถบแสง (fringe order), f_σ คือค่าแถบแสงของวัสดุ (Material stress fringe value) และ t คือความหนาของวัสดุ ค่าความเค้นเฉือนสูงสุดสามารถหาความสัมพันธ์กับความเค้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน [6-10] ในรูปแบบดังนี้

$$(2\tau_m)^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \quad (5.8)$$

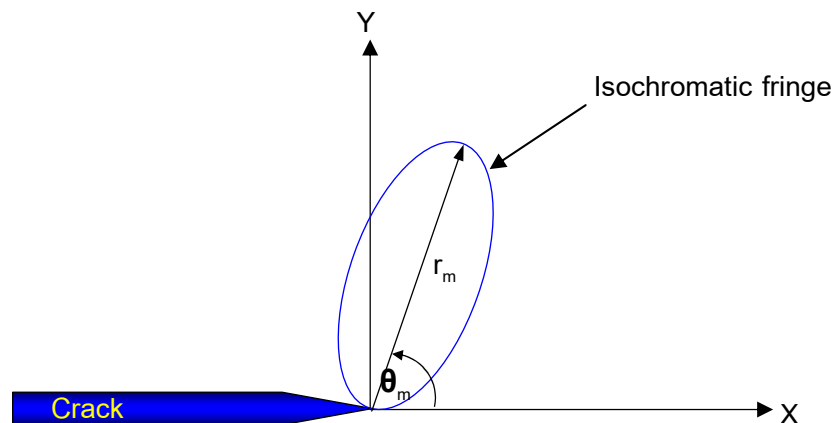
จากสมการที่ (5.2) – (5.4) และสมการที่ (5.8) สามารถหาความสัมพันธ์ของค่าความเค้นเฉือนสูงสุดและค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในรูปแบบเปิดและรูปแบบเฉือน [7] ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} (2\tau_m)^2 = & \frac{1}{2\pi r} \left[(K_I \sin \theta + 2K_{II} \cos \theta)^2 + (K_{II} \sin \theta)^2 \right] \\ & + \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin \theta (1 + 2 \cos \theta) \right] \\ & + K_{II} (1 + 2 \cos^2 \theta + \cos \theta) \end{aligned} \quad (5.9)$$

จากสมการที่ (5.7) และสมการที่ (5.9) เมื่อแรงกระทำตั้งฉากกับรอยร้าวค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในรูปแบบเฉือนจะมีค่าเป็นศูนย์ทำให้สามารถหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในรูปแบบเปิด [7] ได้ในรูปแบบดังนี้

$$K_I = \frac{Nf_\sigma}{t} \frac{\sqrt{2\pi r_m}}{\sin \theta_m} \left[1 + \left(\frac{2}{3 \tan \theta_m} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(1 + \frac{2 \tan \frac{3\theta_m}{2}}{3 \tan \theta_m} \right) \quad (5.10)$$

เมื่อ θ_m และ r_m คือมุมและความยาวรัศมีของแต่ละแถบไอโซโครเมติกดังแสดงในภาพที่ 5.7



ภาพที่ 5.7

มุมและความยาวรัศมีของแถบไอโซโครเมติก 1 แถบ

จากสมการที่ (5.10) เมื่อพิจารณาจุด 2 จุดบนแถบไอโซโครเมติก 2 แถบจะได้สมการหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในรูปแบบเปิดโดยไม่ต้องพิจารณา θ_m และวัดความยาวรัศมี (r) ของแถบไอโซโครเมติกในทิศทางตั้งฉากกับรอยร้าวตรงจุดปลายรอยร้าวในรูปแบบ [7] ดังนี้

$$K_I = \frac{f_\sigma}{t} \sqrt{2\pi r} \frac{(N_1 - N_2)}{1 - (r_1/r_2)^{1/2}} \quad (5.11)$$

เมื่อแรงกระทำไม่ตั้งฉากกับรอยร้าวจะทำให้มีทั้งค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในรูปแบบเปิดและค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในรูปแบบเฉือน จากสมการที่ (5.9) ทำการหาอนุพันธ์ของ τ_m เท่ากับศูนย์ [7] ได้รูปแบบดังนี้

$$\left(\frac{K_{II}}{K_I} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right) \cot 2\theta_m - \frac{1}{3} = 0 \quad (5.12)$$

สมการที่ (5.12) ค่า K_{II}/K_I จะขึ้นอยู่กับ θ_m ซึ่งควรจะวัดที่แถบไอโซโครเมติกที่เกิดขึ้นใกล้ปลายรอยร้าวมากที่สุด

5.3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตัวประกอบความเข้มของความเค้น คือ พารามิเตอร์ที่แสดงถึงระดับความรุนแรงของสภาวะที่ปลายรอยร้าว ขึ้นอยู่กับรูปแบบภาระที่มากระทำ ขนาดและรูปร่างของรอยร้าว [5, 6] เขียนอยู่ในรูปทั่วไปดังนี้

$$K = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (5.13)$$

เมื่อ F คือ ตัวประกอบเรขาคณิต (Geometry factor) จะขึ้นอยู่กับรูปร่างของปัญหาที่พิจารณา σ คือ ความเค้นที่กระทำกับปัญหาที่พิจารณา และ a คือความยาวรอยร้าว

ตัวประกอบความเข้มของความเค้นยังสามารถหาได้จากการประมาณค่าระยะเคลื่อนตัวบริเวณปลายรอยร้าว [5, 6] (Displacement extrapolation near the crack tip) สามารถเขียนในรูปแบบดังนี้

$$K_I = \frac{E}{3(1+\nu)(1+\kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left(4(v_b - v_d) - \left(\frac{v_c - v_e}{2} \right) \right) \quad (5.14)$$

$$K_{II} = \frac{E}{3(1+\nu)(1+\kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left(4(u_b - u_d) - \left(\frac{u_c - u_e}{2} \right) \right) \quad (5.15)$$

เมื่อ	E	คือ	ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นของวัสดุ
	ν	คือ	อัตราส่วนปัวส์ซอง
	κ	คือ	พารามิเตอร์ของความยืดหยุ่นที่มีค่าเท่ากับ (3-4ν) สำหรับปัญหาความเครียดระนาบ (Plane strain) และมีค่าเท่ากับ (3-ν)/(1+ν) สำหรับปัญหาความเค้นระนาบ (Plane stress)
	L	คือ	ความยาวของเอลิเมนต์
	u และ v	คือ	ค่าระยะเคลื่อนตัวในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

สำหรับรอยร้าวที่มีความสมมาตร พิจารณาที่ผิวด้านบนของรอยร้าวแทนค่าบนจุดต่อคือ b และ c ดังแสดงในภาพที่ 5.8 ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการ ที่ (5.16) ได้ดังนี้

$$K_I = \frac{E}{3(1+\nu)(1+\kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left(4(v'_b - v'_d) - \left(\frac{v'_c - v'_e}{2} \right) \right) \quad (5.17)$$

$$K_{II} = \frac{E}{3(1+\nu)(1+\kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left(4(u'_b - u'_d) - \left(\frac{u'_c - u'_e}{2} \right) \right) \quad (5.18)$$

โดย

$$\begin{aligned} u' &= u \cos \theta + v \sin \theta \\ v' &= v \cos \theta - u \sin \theta \end{aligned}$$

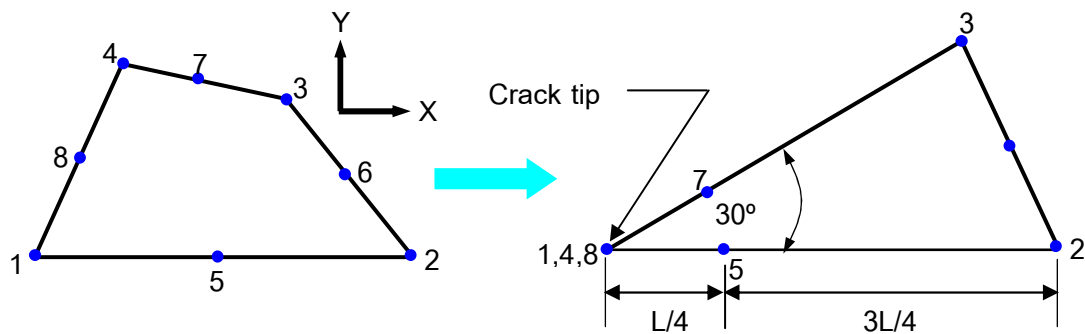
ในการวิเคราะห์ปัญหารอยร้าวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะเริ่มจากการวิเคราะห์ความเค้นและการเสียรูปของของแข็งที่มีความยืดหยุ่น ในที่นี้ทำการวิเคราะห์ปัญหาในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 2 มิติ ซึ่งประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงความสมดุลของของแข็งยืดหยุ่น [2] โดยสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบของสมการเมตริกซ์ดังนี้

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (5.19)$$

เมื่อ

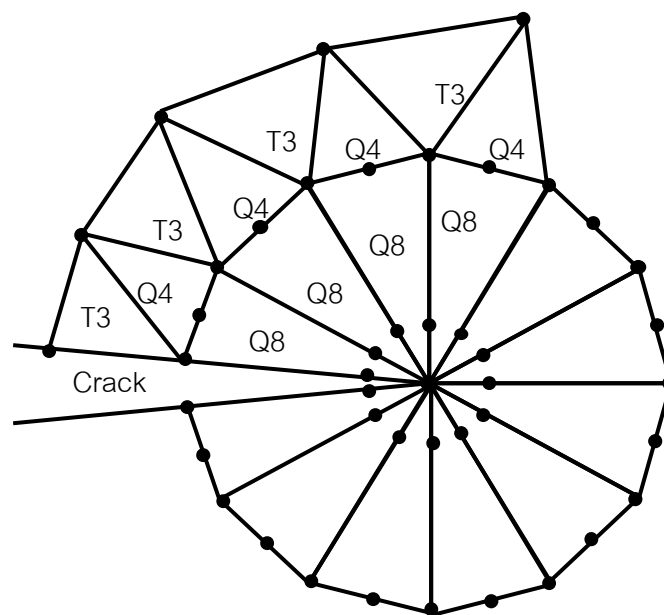
$[K]$	คือ	เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง
$\{\delta\}$	คือ	เมตริกซ์ของการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ
$\{F\}$	คือ	เมตริกซ์ของแรงกระทำที่จุดต่อ

ในงานวิจัยนี้เพื่อให้ได้คำตอบที่มีความแม่นยำมากขึ้นจึงทำการประยุกต์ใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมแปดจุดต่อ (Eight-node quadrilateral element; Q8) บริเวณรอบปลายรอยร้าวจำนวนทั้งหมด 12 เอลิเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 5.10 ส่วนในบริเวณอื่นใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ (Triangular elements; T3) [5] โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อ (Four-node quadrilateral elements; Q4) เป็นเอลิเมนต์เชื่อมต่อ ดังแสดงในภาพที่ 5.11



ภาพที่ 5.10

เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมแปดจุดต่อ



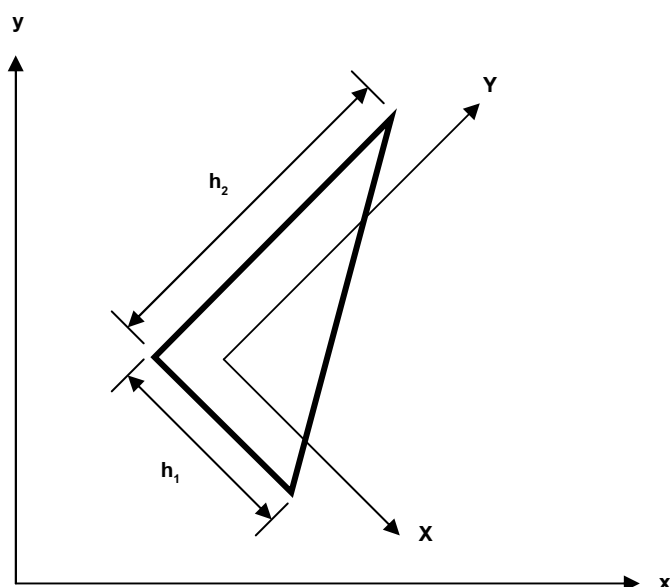
ภาพที่ 5.11

แสดงการจัดเรียงตัวของเอลิเมนต์แบบต่าง ๆ

5.3.1 ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ มีหลักการทั่วไปคือ การใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าของเกรเดียนท์ของคำตอบสูง และใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าของเกรเดียนท์ของคำตอบต่ำ

ภาพที่ 5.12 แสดงแนวคิดสำหรับเอลิเมนต์ที่มีขนาดเหมาะสม สมมติว่าภายในเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงในแนวแกน X มากกว่าในแนวแกน Y ดังนั้นเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณาจึงควรมีขนาดของเอลิเมนต์ h_1 ในแนวแกน X สั้นกว่าขนาดของเอลิเมนต์ h_2 ในแนวแกน Y เพื่อให้ผลลัพธ์ในแนวแกน X ที่คำนวณได้มีความถูกต้องสูง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องคำนวณหาทิศทางแกน X และ Y รวมทั้งขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในแนวแกนทั้งสอง



ภาพที่ 5.12

แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงความเค้นในแนวแกน X และ Y

จากหลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (Principal stress) และทิศทางของแนวแกนหลัก (Principal direction) ในปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) สามารถนำมาประยุกต์เพื่อใช้หาทิศทางของแกน X และแกน Y รวมทั้งขนาดของค่า h_1 และ h_2 ซึ่งหลักการดังกล่าวมีดังต่อไปนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของความเค้นที่ตำแหน่งใด ๆ บนระนาบ x-y นั้น ประกอบไปด้วย $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}$ และ $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}$ ซึ่งจะนำค่าทั้งสามนี้มาคำนวณหาอัตรา

การเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของความเค้นในแนวแกนหลัก X-Y รวมทั้งทิศทางของแกนหลัก โดยใช้แนวคิดดังที่สมการที่ 5.20

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial Y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

คำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ h_1 และ h_2 จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนท์ของความเค้นในแนวแกนหลัก X-Y ที่คำนวณได้จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2} \right| h_1^2 = \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial Y^2} \right| h_2^2 = \lambda_{\max} h_{\min}^2 = \text{ค่าคงที่} \quad (5.21)$$

โดย $\lambda_{\max} = \max \left[\left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial Y^2} \right| \right]$ ของทุกจุดต่อในแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น

และ $h_{\min}$ เป็นขนาดความกว้างของเอลิเมนต์ที่สั้นที่สุดที่จะใช้ในการสร้างรูปแบบจำลองเอลิเมนต์ใหม่ต่อไป