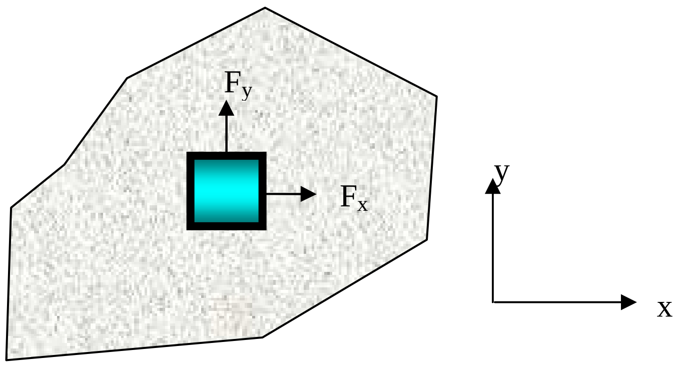
# บทที่ 4

# ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาของแข็งที่มีความยืดหยุ่น

โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาของแข็งที่มีความยืดหยุ่น เริ่มจากการวิเคราะห์ความเค้นและการเสียรูปของของแข็งที่มีความยืดหยุ่น โดยทำการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 2 มิติ ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลของของแข็งยืดหยุ่น ลักษณะเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ที่กระทำกับปัญหานี้ สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับระยะการเคลื่อนตัว และขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งยืดหยุ่น

## 4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของของแข็งในสองมิติ

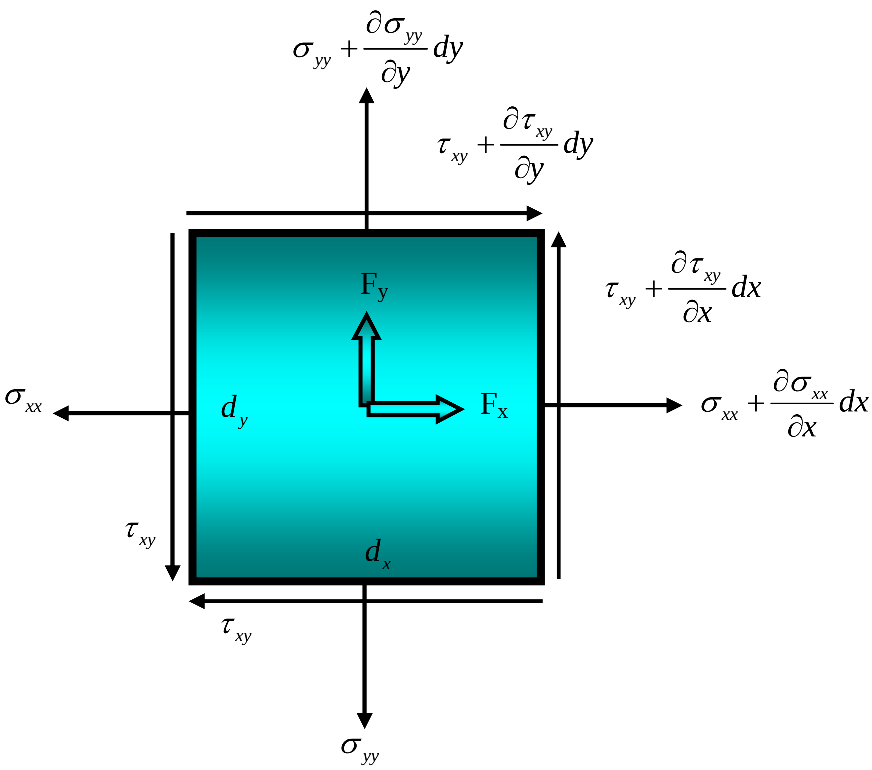
เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำกับของแข็งยืดหยุ่น จะเกิดการเสียรูปและความเค้นเกิดขึ้น โดยของแข็งยืดหยุ่นที่ถูกกระทำด้วยแรงภายนอกภายใต้สภาวะสมดุล การกระจายของการเคลื่อนที่และความเค้นของของแข็งยืดหยุ่นวางอยู่ในระนาบ x - y ดังเช่นแสดงในภาพที่ 4.1




ภาพที่ 4.1

ของแข็งยืดหยุ่นถูกกระทำด้วยแรงภายนอกภายใต้สภาวะสมดุล

เมื่อพิจารณาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเล็ก ๆ ภายใต้ภาวะสมดุลของของแข็งยืดหยุ่น ดังแสดงในภาพที่ 4.2




ภาพที่ 4.2

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเล็ก ๆ ภายใต้ภาวะสมดุลของของแข็งยืดหยุ่นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนสองมิติ

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+F_x=0 \tag{4.1 a}$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+F_y=0 \tag{4.1 b}$$

โดย $\sigma_{xx}$ และ $\sigma_{yy}$ คือ ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

$\tau_{xy}$ คือ ความเค้นเฉือน

$F_x, F_y$ คือ แรงในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

## 4.2 สมการเงื่อนไขขอบเขต

โดยทั่วไปแล้วเงื่อนไขขอบเขตในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งที่มีการเคลื่อนที่ในสองมิติ ประกอบด้วยการกำหนดเงื่อนไขความเค้นที่ผิวตรงขอบนอกบางส่วน และกำหนดค่าการเสียรูปหรือการเคลื่อนตัวบนผิวบางส่วนโดยแสดงได้ดังนี้

### 4.2.1 **กำหนดค่าเคลื่อนตัว** (Displacements)

การกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหา โดยกำหนด u และ v คือค่าเคลื่อนตัวในทิศ x และ yตามลำดับ

$$u = u_1(x, y) \tag{4.2 a}$$

$$v = v_1(x, y) \tag{4.2 b}$$

### 4.2.2. **กำหนดแรงกระทำที่ขอบนอก** (Applied forces)

โดยที่กำหนดให้ $T_x, T_y$ คือ แรงที่ขอบนอกในทิศทาง x และ y ตามลำดับ สามารถเขียนอยู่ในรูปของความเค้นย่อยได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{n_x} \\ \overline{n_y} \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

โดย $T_x, T_y$ คือ ความเค้นที่ผิวในทิศแกน x , y ตามลำดับ

$\overline{n_x}, \overline{n_y}$ คือ ทิศทางโคไซน์ของเวคเตอร์

$$\bar{n} = \overline{n_x}\hat{i} + \overline{n_y}\hat{i} \tag{4.4}$$

โดย $\bar{n}$ คือ เวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิว

จากเงื่อนไขที่กล่าวมาแล้ว อาจมีความเครียดชั้นต้นทั่วไปที่เกิดขึ้นอยู่ก่อน ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดทั่วไป คือ

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon - \varepsilon_0\} \quad (4.5)$$

$$\{\sigma\}^T = \lfloor \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy} \rfloor \quad (4.6)$$

$$\{\varepsilon\}^T = \lfloor \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \rfloor \quad (4.7)$$

เมตริกซ์ $[C]$ และ $\{\varepsilon_0\}$ ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาว่าเป็นลักษณะของความเค้นระนาบหรือความเครียดระนาบ

ในกรณีของความเค้นระนาบ จะได้

$$[C] = \frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & \upsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

ในกรณีของความเครียดระนาบ จะได้

$$[C] = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\begin{bmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

โดย $\upsilon$ คือ อัตราส่วนปัวส์ซง (Poisson's ratio)

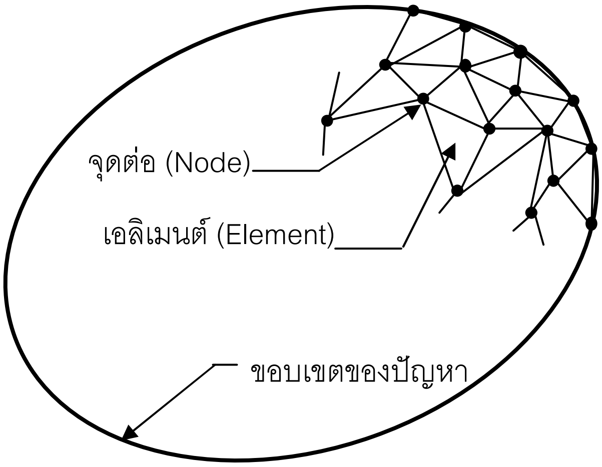
$E$ คือ ค่าคงที่ของการยืดหยุ่น (Modulus of elastic)

## 4.3 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์ ประกอบด้วยขั้นตอนหลัก 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

### 4.3.1 แบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการ

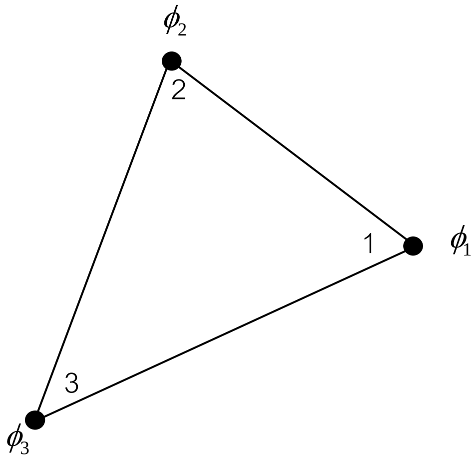
การหาผลเฉลยของปัญหาขั้นตอนแรงต้องแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังรูปที่ 4.3




ภาพที่ 4.3
การแบ่งขอบเขตของปัญหาให้เป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

4.3.2 **การเลือกฟังก์ชันประมาณในเอลิเมนต์** (Element Interpolation Function)

ซึ่งเป็นรูปแบบการกระจายตัวของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์ เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยม เอลิเมนต์ดังกล่าวประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ3 กำกับที่เอลิเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 4.4




ภาพที่ 4.4
เอลิเมนต์สามเหลี่ยมประกอบด้วย 3 จุดต่อ โดยมีตัวไม่ทราบค่า ณ จุดต่อแต่ละจุด

โดยที่จุดต่อนี้นั้นเป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (Nodal unknowns) ซึ่งคือ $\phi_1, \phi_2$ และ $\phi_3$ ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้ คือค่าการยืดหรือหดตัว (Displacement) เมื่อเป็นการทำปัญหาเกี่ยวกับความยืดหยุ่นในของแข็ง ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้ สามารถเขียนให้อยู่รูปฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ ดังนี้

$$\varphi(x, y) = N_1(x, y)\varphi_1 + N_2(x, y)\varphi_2 + N_3(x, y)\varphi_3 \tag{4.10}$$

โดย $N_i(x, Y), i = 123$ คือ ฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation function)

สามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\varphi(x, y) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = N_i \varphi_i \tag{4.11}$$

โดย $\lfloor N_i \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\varphi_i\}$ คือ เวกเตอร์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

### 4.3.3 **สร้างสมการของเอลิเมนต์** (Element equation)

ขั้นตอนที่ 3 คือการสร้างสมการของเอลิเมนต์ ตัวอย่างเช่น สมการเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ดังแสดงในภาพที่ 4.4 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \tag{4.12}$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[K]_e \{\varphi\}_e = \{F\}_e \qquad (4.13)$$

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการเอลิเมนต์ในรูปแบบของสมการที่ (4.12) สามารถทำได้หลายวิธีดังนี้

1. วิธีการโดยตรง (Direct approach)
2. วิธีการแปรผัน (Variation approach)
3. วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weight residuals)

### 4.3.4 **รวมสมการแต่ละเอลิเมนต์**

เป็นขั้นตอนที่นำสมการที่ได้จากแต่ละเอลิเมนต์มาประกอบกันเป็นสามารถที่ครอบคลุมทั้งระบบ ทำให้เกิดสมการในรูปแบบดังนี้

$$[K]_{sys} \{\varphi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \qquad (4.14)$$

### 4.3.5 **การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต** (Boundary condition)

เมื่อได้สมการของทั้งระบบที่พิจารณาแล้ว ขั้นตอนถัดมาคือการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงในสมการที่ (4.15) แล้วแก้สมการเพื่อหาค่าของ $\{\varphi\}_{sys}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ซึ่งอาจจะเป็นค่าของการเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของโครงสร้าง

### 4.3.6 **การคำนวณค่าต่าง ๆ ที่แต่ละจุดต่อ**

ในขั้นตอนสุดท้ายคือการหาค่าต่าง ๆ ของแต่ละจุดต่อ เพราะเมื่อได้ค่าตัวไม่ทราบค่าแล้ว ในที่นี้กำหนดให้เป็น ค่าการเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของโครงสร้าง สามารถนำไปหาอื่น ๆ เช่น ค่าความเครียด ค่าความเค้น หรือค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นต่อไป