ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมโยธา)

ปริญญา

วิศวกรรมโยธา
สาขา

วิศวกรรมโยธา
ภาควิชา

เรื่อง ไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 มิติ สำหรับคอนกรีตเสริมเหล็กโดยใช้เทคนิคการฝังเหล็กเสริม

Three-Dimensional Finite Element of Reinforced Concrete using Embedded Reinforcement Technique

นามผู้วิจัย นายยุทธการ มณีจันทร์

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก .....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์กิจพัฒน์ ภู่วรวรรณ, Ph.D.)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม .....

(อาจารย์วรพงศ์ ศรีโสพัส, D.Eng.)

หัวหน้าภาควิชา .....

(รองศาสตราจารย์ก่อโชค จันทวรางกูร, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

.....

(รองศาสตราจารย์กัญจนา ธีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ ..... **เดือน** ..... **พ.ศ.** .....

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

ไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 มิติ สำหรับคอนกรีตเสริมเหล็กโดยใช้เทคนิคการฝังเหล็กเสริม

Three-Dimensional Finite Element of Reinforced Concrete using Embedded Reinforcement Technique

โดย

นายยุทธการ มณีจันทร์

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรรมโยธา)
พ.ศ. 2553

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ยุทธการ มณีจันทร์ 2553: ไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 มิติ สำหรับคอนกรีตเสริมเหล็กโดยใช้เทคนิคการฝังเหล็กเสริม ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมโยธา) สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผู้ช่วยศาสตราจารย์กิจพัฒน์ ภู่วรวรรณ, Ph.D. 113 หน้า

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูปแบบเอลิเมนต์ 3 มิติ ของคอนกรีตเสริมเหล็ก และเสนอการสร้างเอลิเมนต์ขึ้นใหม่ โดยเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นนี้จะเกิดจากการรวมกันของเอลิเมนต์ที่เป็นทรงสี่เหลี่ยม 8 จุดต่อเป็นเอลิเมนต์ของคอนกรีตและเอลิเมนต์ของเหล็กเสริมจะเป็นเอลิเมนต์แบบแท่งโดยจะใช้ทฤษฎีของการฝัง (embedded) กระจายคุณสมบัติของเอลิเมนต์แบบแท่งให้รวมเข้ากับเอลิเมนต์ทรงสี่เหลี่ยม 8 จุดต่อ ด้วยวิธีสร้างเอลิเมนต์แบบนี้จะทำให้เมื่อเข้าสู่ขั้นตอนของการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) จะทำให้จุดต่อ (node) ของเอลิเมนต์แบบแท่งถูกกำจัดออกจากการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) ทำให้เอลิเมนต์ของเหล็กเสริมซึ่งเป็นเอลิเมนต์แบบแท่งหายไปด้วย จึงทำให้รูปแบบของการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) ในการขึ้นรูปแบบจำลอง (Modeling) ไม่ขึ้นกับรูปร่างและตำแหน่งของเหล็กเสริม และเมื่อนำไปเปรียบเทียบกันโปรแกรมคำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์อื่น ๆ ผลลัพธ์ที่ออกมามีความใกล้เคียงของคำตอบในระดับที่สามารถยอมรับได้และมีแนวโน้มไปในทางเดียวกัน

การสร้างแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝังจะสามารถแก้ไขปัญหาความยุ่งยากในการสร้างแบบจำลองในขั้นตอนของการแบ่งเอลิเมนต์ได้ ด้วยความสามารถที่ไม่จำเป็นต้องแบ่งเอลิเมนต์ให้จุดต่อของคอนกรีตตรงกับตำแหน่งเหล็กเสริม นั้นหมายถึงข้อจำกัดของจำนวนเอลิเมนต์เมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) จะหายไปทันทีซึ่งจะลดความยุ่งยากของผู้ใช้โปรแกรมได้มากอีกทั้งผลลัพธ์จากแบบจำลองทั้งสองให้ค่าที่ใกล้เคียงกันและไปในทิศทางเดียวกัน จึงทำให้สรุปได้ว่าเอลิเมนต์ที่เสนอเหมาะสำหรับการสร้างแบบจำลองของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กที่มีความยุ่งยากในการแบ่งเอลิเมนต์จากตำแหน่งของเหล็กเสริมนั้นเอง

_____ _____ __ / __ / __

ลายมือชื่อนิสิต ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Yuthakarn Maneejun 2010: Three-Dimensional Finite Element of Reinforced Concrete using Embedded Reinforcement Technique. Master of Engineering (Civil Engineering), Major Field: Civil Engineering, Department of Civil Engineering. Thesis Advisor: Assistant Professor Kitjapat Phuvoravan, Ph.D. 113 pages.

The objective of this research is to develop a three dimensional (3-D) finite element for reinforced concrete structures. The new element is created by combining eight nodes solid element with two nodes bar element. The technique is to apply the theory of embedded element to distribute the stiffness and resisting forces from bar element to the new solid element. By this manner bar nodes are eliminated from the final mesh of the model. Thus, the meshed model does not depend on the shape and the location of the reinforcing steel. The results from the developed finite element give the exact correlation to the manual calculation. Furthermore, when compared with other finite element program the results are acceptable.

Modeling with embedded technique is easy to meshing and when compared with discrete model the results are acceptable. Therefore it is concluded that embedded technique is suitable to be used for reinforced concrete model.

.

_____ _____ ___ / ___ / ___

Student's signature Thesis Advisor's signature

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้ จะไม่สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดีได้เลยถ้าขาดบุคคลอันเป็นที่เคารพรักเหล่านี้ ผู้ช่วยศาสตราจารย์กิจพัฒน์ ภู่วรวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ที่ให้คำปรึกษาแนะนำและตรวจแก้ไขข้อบกพร่องในวิทยานิพนธ์ ตลอดจนให้ความช่วยเหลือดูแลข้าพเจ้าในทุกๆ ด้านตลอดระยะเวลาของการเป็นนิสิตมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์อีกทั้งยังได้ปลูกฝังแนวความคิดทางด้านวิศวกรรม และจริยธรรมที่มีส่วนช่วยส่งเสริมต่อการพัฒนาศักยภาพของข้าพเจ้า, อาจารย์วรพงศ์ ศรีโสพส อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ที่ให้คำปรึกษาแนะนำสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อการดำเนินงาน

ยุทธการ มณีจันทร์

กรกฎาคม 2553

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญ

หน้า

สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(4)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	4
การตรวจเอกสาร	6
อุปกรณ์และวิธีการ	45
อุปกรณ์	45
วิธีการ	45
ผลและวิจารณ์	48
สรุปและข้อเสนอแนะ	93
สรุป	93
ข้อเสนอแนะ	94
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	96
ภาคผนวก	99
ประวัติการศึกษา และการทำงาน	113

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	รูปแบบการให้แรงกับแบบจำลองในกรณีศึกษาที่ 1	53
2	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 1 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ	53
3	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 1 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส	54
4	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 1 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ	54
5	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 1 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส	55
6	คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 2	58
7	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 2	58
8	รูปแบบการให้แรงของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 3	60
9	คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 3	60
10	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 3 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ	61
11	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 3 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส	61
12	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 3 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ	62
13	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 3 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส	62
14	รูปแบบการให้แรงของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 4	66
15	ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 4	66
16	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ	67

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า
17	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส	67
18	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ	68
19	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส	68
20	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 3 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ	69
21	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 3 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส	69
22	รูปแบบการให้แรงของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 5	75
23	ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 5	75
24	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 5 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ	75
25	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 5 วิเคราะห์โดยใช้ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 6	76
26	ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 7	77
27	ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 7	88
28	สรุปแบบจำลองทั้งสองกรณีที่ใช้ในกรณีศึกษาที่ 7	89
29	เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ในทิศทาง Z ของแบบจำลองทั้งสองกรณี	91

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	ความสัมพันธ์ความเค้น-การกระจัดได้จากการทดสอบแรงอัดแบบสามแกนสำหรับแรงอัด 3 ระดับ	7
2	ผลของการทดสอบการรับแรงอัดในแกนเดียว	8
3	รูปแบบรอยแตกร้าวขนาดเล็กภายใต้แรงดึงแกนเดียว	9
4	ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดของเหล็กเสริม	10
5	ความสัมพันธ์ของน้ำหนักและการแอ่นตัวของคานคอนกรีตเสริมเหล็กทั่วไป	12
6	ความสัมพันธ์โดยทั่วไปของความเค้นยึดเกาะกับการเลื่อนตัว	13
7	แรงยึดเหนี่ยวในเส้นเหล็ก	14
8	เอลิเมนต์วัสดุท่อน	19
9	เอลิเมนต์วัสดุท่อนในระบบแกนรวม	21
10	การแปลงเอลิเมนต์ทรงหกหน้าให้อยู่ในระบบธรรมชาติ	23
11	การอินทิเกรตฟังก์ชันโดยใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์	27
12	แบบจำลองแยกกัน (Discrete Model)	29
13	แบบจำลองฝัง (Embedded Model)	30
14	แบบจำลองกระจาย (Smeared Model)	31
15	การเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองแบบกระจายตัว (Smeared Model) และแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model)	33
16	การเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) และแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model)	34
17	การสร้างแบบจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กแบบแยกตัว (discrete model)	34
18	การสร้างแบบจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กด้วยเทคนิคการฝัง (embedded technique)	35
19	Embedded Reinforcement along Local Coordinate Lines	42
20	Embedded Reinforcement in 3D Mesh of Concrete Element	43
21	Some reinforcement bar patterns in element natural co-ordinate system	48

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
22	ตัวอย่าง ส่วนต่อประสานกับผู้ใช้ (user interface, UI) ของโปรแกรมที่นำเสนอ	49
23	แผนผัง (Flow Chart) การทำงานของโปรแกรม	51
24	ขนาดรูปร่างและการใส่จุดยึดรั้งของกรณีศึกษาที่ 1	52
25	ขนาดรูปร่างและการใส่จุดยึดรั้งของกรณีศึกษาที่ 2	56
26	ภาพตำแหน่งแรงที่กระทำกับเอลิเมนต์ของการศึกษากรณีที่ 2	57
27	ขนาดรูปร่างและการใส่จุดยึดรั้งของกรณีศึกษาที่ 3	59
28	ขนาดรูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 4	64
29	ขนาดรูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 4 เมื่อสร้างแบบจำลองด้วยโปรแกรมแอนซิส	65
30	การใส่จุดยึดรั้งของแบบจำลองกรณีที่ 4	65
31	การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมในเอลิเมนต์ที่นำเสนอในกรณีศึกษาที่ 4	70
32	การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมแบบจำลองแบบแยกตัวในกรณีศึกษาที่ 4	71
33	รูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 5	73
34	รูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 5 หลังจากที่แบ่งเอลิเมนต์แล้ว	74
35	แสดงจุดยึดรั้งของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 5	74
36	การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมในเอลิเมนต์ที่นำเสนอในกรณีศึกษาที่ 5	77
37	การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมแบบจำลองแบบแยกตัวในกรณีศึกษาที่ 5	77
38	รูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 6	78
39	ตำแหน่งของเหล็กเสริมและรูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 6	79

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
40	กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในทิศทางแนวแกน Y	80
41	ลักษณะการให้แรงกับแบบจำลองในกรณีศึกษาที่ 6	81
42	การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 6	81
43	รูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 7	82
44	รูปร่างของแบบจำลองและตำแหน่งเหล็กเสริมกรณีศึกษาที่ 7	83
45	การแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded model) กรณีศึกษาที่ 7	84
46	การแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) กรณีศึกษาที่ 7	85
47	การกำหนดจุดยึดรั้งของแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model)	86
48	การกำหนดจุดยึดรั้งของแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model)	87
49	การกำหนดแรงกระทำของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 7	88
50	แบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model) หลังจากทำการวิเคราะห์ผล	89
51	แบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) หลังจากทำการวิเคราะห์ผล	90
52	ตำแหน่งที่ทำการเปรียบเทียบข้อมูลการเคลื่อนที่	90
53	เปรียบเทียบการถ่ายโอนค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็ง ของแบบจำลอง	92

ภาพผนวกที่

1	หน้าต่างหนักของโปรแกรม (main user interface)	102
2	การสร้างรูปร่างของแบบจำลอง	103
3	การใส่เหล็กเสริมให้กับแบบจำลอง	103
4	การแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลอง	104

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพผนวกที่		หน้า
5	การกำหนดคุณสมบัติของวัสดุใจแบบจำลอง	104
6	การใส่จุดยึดรั้งให้กับแบบจำลอง	105
7	การกำหนดแรงให้กับแบบจำลอง	105
8	วิธีการคำนวณของโปรแกรม	106
9	การดูผลการเคลื่อนที่ ที่เกิดขึ้นกับแบบจำลองหลังการคำนวณ	106
10	การแบ่งการแสดงค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็ง	107
11	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีต ส่วนที่ 1/4	107
12	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีต ส่วนที่ 2/4	108
13	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีต ส่วนที่ 3/4	108
14	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีต ส่วนที่ 4/4	108
15	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติเหล็กเสริม ส่วนที่ 1/4	109
16	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติเหล็กเสริม ส่วนที่ 2/4	109
17	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติเหล็กเสริม ส่วนที่ 3/4	109
18	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติเหล็กเสริม ส่วนที่ 4/4	110
19	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีตเสริมเหล็ก ส่วนที่ 1/4	110
20	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีตเสริมเหล็ก ส่วนที่ 2/4	110
21	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีตเสริมเหล็ก ส่วนที่ 3/4	111
22	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีตเสริมเหล็ก ส่วนที่ 4/4	111
23	เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมก่อนการกระจายด้วยเทคนิคการฝัง	112

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 มิติ สำหรับคอนกรีตเสริมเหล็กโดยใช้เทคนิคการฝังเหล็กเสริม

Three-Dimensional Finite Element of Reinforced Concrete using Embedded Reinforcement Technique

คำนำ

ในปัจจุบันคอนกรีตเสริมเหล็ก (reinforced concrete) ได้เข้ามามีบทบาทอย่างมากในงานวิศวกรรมโยธา และใช้กันอย่างแพร่หลายในงานก่อสร้าง เนื่องด้วยคอนกรีตนั้นมีคุณสมบัติสามารถรับแรงอัดได้สูงขณะที่ความสามารถในการรับแรงดึงต่ำ เมื่อรับแรงดึง จึงทำให้คอนกรีตเกิดการแตกเปราะได้ง่าย ด้วยสาเหตุนี้ ระบบคอนกรีตเสริมแรงจึงถูกนำมาใช้ โดยการนำวัสดุอื่นที่สามารถรับแรงดึงได้ เช่นเหล็ก มาใส่ไว้ภายในคอนกรีตเพื่อเพิ่มความสามารถในการรับแรง โดยอาจกล่าวได้ว่า คอนกรีตรับแรงอัด และช่วยเหล็กรับแรงดึงนั้นเอง จึงทำให้เกิดเป็นคอนกรีตเสริมเหล็กขึ้น ซึ่งมีคุณสมบัติรับแรงอัดได้ดี และยังสามารถรับแรงดึงได้ด้วย

การใช้งานคอนกรีตเสริมเหล็กเกิดขึ้นในช่วงคริสต์ศตวรรษที่ 19 คุณสมบัติทางกายภาพ 3 อย่างที่ทำให้คอนกรีตเสริมเหล็กเป็นที่นิยม อย่างที่หนึ่งคือค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวของคอนกรีตและเหล็ก มีค่าใกล้เคียงกันมาก ซึ่งเมื่ออุณหภูมิเปลี่ยนแปลง ทำให้คอนกรีตและเหล็กขยายตัวหรือหดตัวได้พร้อมกัน อย่างที่สองคือเมื่อคอนกรีตแข็งตัว คอนกรีตจะจับเหล็กเสริมได้แน่น ซึ่งทำให้เกิดการการถ่ายเทแรงภายในระหว่างคอนกรีตและเหล็กเสริม เหล็กข้ออ้อยนิยมถูกนำมาใช้ในโครงสร้างหลัก เนื่องจาก สัมประสิทธิ์แรงยึดเหนี่ยวระหว่างคอนกรีตและเหล็กเสริมมีค่ามาก เมื่อเทียบกับเหล็กกลม อย่างที่สามคือค่าพีเอช (pH) ของสารเคมีที่เกิดจากพอร์ตแลนด์ซีเมนต์ (Portland cement) เมื่อคอนกรีตแข็งตัวจะมีสารเคมีออกมาเคลือบเหล็กเส้นเป็นฟิล์มบางๆ ไว้ป้องกันไม่ให้เหล็กเส้นถูกกัดกร่อนหรือเป็นสนิม

เมื่อคอนกรีตเสริมเหล็กได้รับความนิยมและนำมาใช้จึงทฤษฎีมากมายที่มารองรับการออกแบบและวิเคราะห์พฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็กได้อย่างถูกต้อง แต่การวิเคราะห์คำนวณที่ถูกต้องและครอบคลุมพฤติกรรมทั้งหมดของคอนกรีตเสริมเหล็กนั้นทำได้ยาก อีกวิธีในการทำให้ทราบถึงพฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็กนั้นคือวิธีการทดสอบพฤติกรรมที่จะเกิดขึ้นจริงของชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กในห้องทดลองนั้นเอง วิธีการนี้จะทำให้เราทราบถึงพฤติกรรม

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ที่จะเกิดขึ้นจริงของคอนกรีตเสริมเหล็กได้อย่างถูกต้อง ถึงกระนั้นก็ตามการทดสอบพฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็กในห้องทดลองนั้นต้องค่าใช้จ่ายที่สูง

อีกหนึ่งวิธีที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็กคือการจำลองโดยใช้วิธีการคำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element analysis) ซึ่งสามารถสร้างแบบจำลองของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กที่ต้องการจะทราบพฤติกรรมและทำการวิเคราะห์หาพฤติกรรมที่จะเกิดขึ้นตามเงื่อนไขการรับแรงของแบบจำลองนั้น โดยส่วนใหญ่แล้วการวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์จะทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ เนื่องจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องแก้ปัญหาสมการหลาย ๆ ตัวแปร ขึ้นอยู่กับจำนวนและความละเอียดของการแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลอง โปรแกรมเชิงพาณิชย์ที่ได้รับความนิยมใช้มีอยู่มากมายเช่น โปรแกรมแอนซิส (ANSYS), โปรแกรมอาบาคัส (ABACUS) และโปรแกรมนาสแทน (NASTRAN) เป็นต้น

จากโปรแกรมที่กล่าวถึงหากต้องการใช้เพื่อสร้างแบบจำลองของคอนกรีตเสริมเหล็กจะสามารถสร้างแบบจำลองได้สองรูปแบบคือ การสร้างแบบจำลองกระจายตัว (Smeared Model) โดยแบบจำลองแบบกระจายตัวนั้นจะทำการสร้างแบบจำลองโดยเสมือนกระจายเหล็กเสริมเข้าไปในคอนกรีตซึ่งจะกระจายเท่ากันตลอดทั้งเอลิเมนต์คอนกรีต และแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) ซึ่งจะทำการจำลองโดยใช้เอลิเมนต์ของคอนกรีตและเหล็กเสริมแยกกันโดยมีเงื่อนไข ต้องแบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์โดยให้จุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีตและเหล็กเสริมอยู่ตำแหน่งเดียวกันเสมอทำให้เกิดความยุ่งยากในการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) ซึ่งมีวิธีการสร้างแบบจำลองอีกวิธีนึง ซึ่งโปรแกรมที่นิยมใช้กันนั้นไม่มีเครื่องมือในการสร้างแบบจำลองวิธีนี้ คือการสร้างแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝังเหล็กเสริม (Embedded Model) การสร้างแบบจำลองด้วยวิธีนี้การแบ่งเอลิเมนต์จะไม่คำนึงถึงตำแหน่งของเหล็กเสริมโดยการแบ่งเอลิเมนต์จะแบ่งเฉพาะคอนกรีตเท่านั้น จากนั้นเอลิเมนต์จะทำการเก็บตำแหน่งของเหล็กเสริมไว้แล้วทำการคำนวณต่อไป

วิทยานิพนธ์นี้ได้เสนอการศึกษาพฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็ก โดยจะทำการสร้างเอลิเมนต์โดยรวมพฤติกรรมของคอนกรีตและเหล็กเสริมเข้าด้วยกันโดยใช้เทคนิคการฝังเหล็กเสริม (embedded reinforcement technique) เพื่อลดความยุ่งยากในขั้นตอนการแบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์ (mesh) โดยเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นจะสามารถแบ่งเอลิเมนต์ของคอนกรีตเสริมเหล็กโดยไม่ถูกจำกัดด้วยตำแหน่งของเหล็กเสริม ทำให้ลดความยุ่งยากในการแบ่งเอลิเมนต์ ของคอนกรีตและ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เหล็กเสริมให้จุดต่อ (node) ของทั้งคอนกรีตและเหล็กเสริมตรงกัน เอลิเมนต์ที่เสนอได้พัฒนาผ่านโปรแกรมที่เขียนขึ้นโดยใช้ภาษา C# และใช้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนี้เพื่อทดสอบความถูกต้องของเอลิเมนต์ การเปรียบเทียบความถูกต้อง ทำโดยเปรียบเทียบกับโปรแกรมเชิงพาณิชย์ที่มีชื่อว่า แอนซิส (ANSYS) เป็นเครื่องมือช่วยในการเปรียบเทียบความถูกต้องของเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาถึงขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และขั้นตอนและวิธีการพัฒนาเอลิเมนต์ด้วยเทคนิคการฝังเหล็กเสริม (embedded reinforcement technique)

2. เพื่อศึกษาปัญหาที่อาจเกิดขึ้นในแต่ละขั้นตอนของการคำนวณด้วยวิธีการเขียนโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

3. เพื่อศึกษาถึงแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์

4. เพื่อศึกษาวิธีการพฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็กในช่วงอีลาสติก (elastic)

ขอบเขตของการวิจัย

ในการศึกษาจะทำการศึกษาโดยสร้างเอลิเมนต์ใหม่ขึ้นมาเพื่อใช้วิเคราะห์โดยวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์โดยเอลิเมนต์นี้จะมีคุณสมบัติของคอนกรีตและเหล็กเสริมโดยจะมีข้อจำกัดในพฤติกรรมของเอลิเมนต์ดังนี้ พฤติกรรมของคอนกรีตจะอยู่ในช่วงอีลาสติก (elastic) เท่านั้น พฤติกรรมของเหล็กเสริมจะอยู่ในช่วงอีลาสติก (elastic) เท่านั้น การพิจารณาถึงแรงยึดเหนี่ยวระหว่างคอนกรีตกับเหล็กเสริมให้เป็นการเชื่อมแน่น (perfect bond)

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้มีการเปรียบเทียบความถูกต้องของแบบจำลองจากโปรแกรมที่สร้างขึ้นโดยจะทำการเปรียบเทียบกับโปรแกรมเชิงพาณิชย์ที่มีชื่อว่า แอนซิส (ANSYS) เพื่อเป็นการพิสูจน์ว่าเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นสามารถทำนายพฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็กในช่วงอีลาสติก (elastic) ได้อย่างถูกต้อง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เข้าใจถึงขั้นตอนการคำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์ และขั้นตอนการพัฒนาเอลิเมนต์ด้วยเทคนิคการฝังเหล็กเสริม (embedded reinforcement technique)

2. เข้าใจถึงปัญหาและขั้นตอนการเขียนโปรแกรมคำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์

3. เพื่อเป็นแนวทางในพัฒนาโปรแกรมคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไปในอนาคต

4. ทราบถึงพฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็กในช่วงอีลาสติก (elastic)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

การตรวจเอกสาร

ในปัจจุบันคอนกรีตเสริมเหล็ก (reinforced concrete) เป็นวัสดุที่ได้รับความนิยมและมีความสำคัญอย่างยิ่งในงานก่อสร้าง ด้วยคุณสมบัติด้านราคา, ประสิทธิภาพและความสามารถในการรับน้ำหนัก ทำให้คอนกรีตเสริมเหล็กนั้นสามารถใช้งานกับโครงสร้างรูปแบบต่าง ๆ ได้อย่างหลากหลาย สำหรับการใช้คอนกรีตเสริมเหล็กอย่างมีประสิทธิภาพนั้นควรประกอบด้วยเงื่อนไขต่าง ๆ ดังนี้

1. โครงสร้างจะต้องมีความแข็งแรงและปลอดภัย การคำนวณที่ถูกต้องครอบคลุมถึงลักษณะการใช้งานและพฤติกรรมของวัสดุ

2. โครงสร้างต้องอยู่ในสภาพสมบูรณ์ ไม่มีรอยแตกร้าวเกิดขึ้นตามที่ได้ออกแบบ สามารถรับแรงใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพ

3. โครงสร้างจะต้องถูกออกแบบอย่างประหยัด คอนกรีตเสริมเหล็กจะต้องถูกใช้อย่างมีประสิทธิภาพ

โดยในหัวข้อการตรวจเอกสารนี้แบ่งออกเป็นหัวข้อหลัก ดังนี้

1. คุณสมบัติของวัสดุ

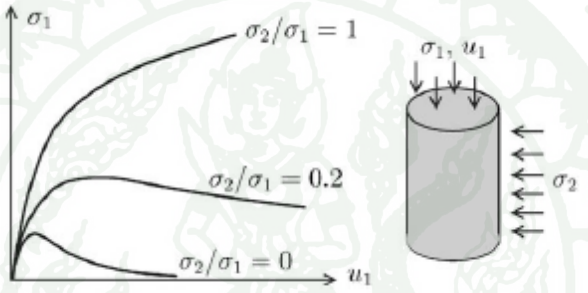
2. ระเบียบวิธีการและการแก้ปัญหาไฟไนต์เอลิเมนต์

3. ประวัติของแบบจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

คุณสมบัติทางวัสดุของคอนกรีต

พฤติกรรมการการวิบัติของคอนกรีตในสภาวะแรงอัดต่ำจะมีความแตกต่างจากในสภาวะแรงอัดสูง โดยธรรมชาติที่สภาวะแรงอัดต่ำจะเกิดการวิบัติแบบเปราะ เช่นกรณีของความเค้นดึงและความเค้นอัดที่อยู่ในสภาวะแรงดันชลสถิตย์ต่ำ ถ้าคอนกรีตอยู่ภายใต้สภาวะแรงดันชลสถิตสูง วัสดุจะสามารถยืดตัวได้ในพื้นผิวของการวิบัติ คล้ายกับวัสดุที่มีความเหนี่ยวก่อนการวิบัติแบบเครียด ซึ่งพฤติกรรมนี้สามารถสังเกตได้ในการทดสอบการอัดในสามแกนของคอนกรีตทรงกระบอกซึ่งมีผลการทดสอบแสดงดังในภาพที่ 1



ภาพที่ 1 ความสัมพันธ์ความเค้น-การกระจัดได้จากการทดสอบแรงอัดแบบสามแกนสำหรับแรงอัด 3 ระดับ

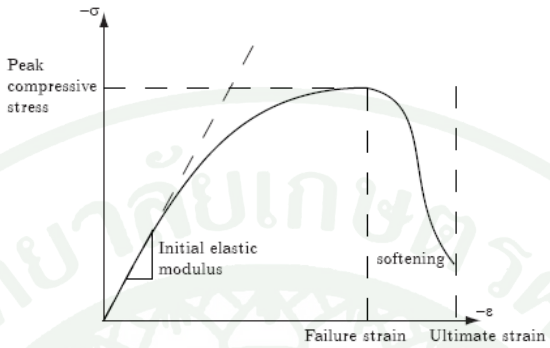
ที่มา: Kwak and Filippou (1990)

คุณสมบัติภายใต้แรงอัด

จากการทดสอบแสดงให้เห็นว่าคอนกรีตมีพฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้นในการทดสอบการรับแรงอัดในแกนเดียว ดังแสดงให้เห็นในภาพที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด จะเป็นเส้นตรงจนถึงประมาณ 30 เปอร์เซ็นต์ของกำลังอัดประลัย หลังจากนั้นจะค่อยๆเพิ่มขึ้นประมาณ 70 ถึง 75 เปอร์เซ็นต์ของกำลังอัดประลัย ในช่วงนี้ ความเครียดจะตั้งฉากกับการเพิ่มน้ำหนักซึ่งนำไปสู่เพิ่มการแตกร้าวระหว่างมวลรวมกับซีเมนต์เพสต์ในทิศทางของการเพิ่มน้ำหนัก ด้วยเหตุนี้ทำให้ความแข็งแรงลดลง นำไปสู่ความสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้นระหว่างความเค้น-ความเครียด ซึ่งเมื่อเพิ่มน้ำหนักต่อไปการแตกร้าวก็จะเพิ่มมากขึ้น หลังจากที่ถึงค่าสูงสุด ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ความเครียดจะลดลงซึ่งถูกกำหนดโดยซอฟเทนนิ่ง การวิบัติแบบอัดประลัย (Crushing) จะเกิดขึ้นที่ความเครียดประลัย



ภาพที่ 2 ผลของการทดสอบการรับแรงอัดในแกนเดียว

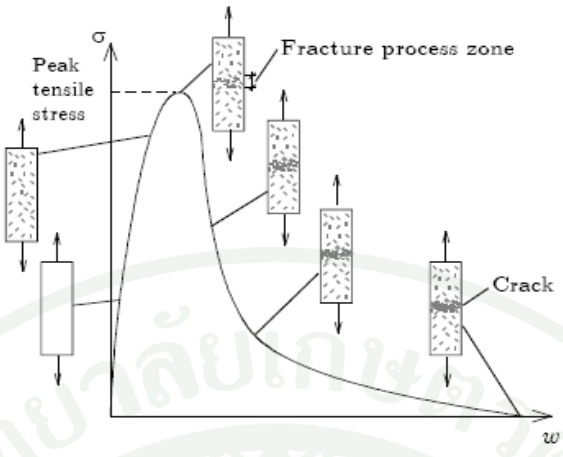
ที่มา: Kwak and Filippou (1990)

คุณสมบัติภายใต้แรงดึง

การวิบัติแบบแรงดึงในวัสดุที่มีคุณสมบัติแบบเปราะ มีสาเหตุมาจากการเพิ่มขนาดและจำนวนของรอยแตกร้าวขนาดเล็ก ซึ่งรอยแตกขนาดเล็กเหล่านี้ส่งผลให้เกิดความเสียหายเบื้องต้นทำให้วัสดุอ่อนลงและส่งผลให้เกิดความเค้นมหาศาลระหว่างมวลรวมและซีเมนต์เพสต์

ในการทดสอบการรับแรงดึงของวัสดุแบบเปราะการยืดหดตัวของวัสดุจะถูกควบคุมโดยความเค้นดึงที่เพิ่มขึ้นรวมถึงการเพิ่มขึ้นของขนาดของรอยแตกร้าว จนกระทั้งความเค้นดึงถึงจุดสุดสุด ดังแสดงในภาพที่ 3 หลังจากนี้ความเค้นดึงจะลดลงจนกระทั่งวัสดุเกิดการวิบัติ ซึ่งจากภาพจะเห็นว่า ช่วงก่อนเกิดความเค้นดึงสูงสุดรอยแตกร้าวจะมีขนาดเล็กและกระจายไปทั่วแท่งตัวอย่าง ที่จุดความเค้นดึงสูงสุดรอยแตกร้าวขยายตัวมากขึ้นแต่ยังอยู่ในขอบเขตที่จำกัดหรือเรียกว่า ขอบเขตของการแตกร้าว ซึ่งหลังจากนี้รอยแตกร้าวทั้งหมดจะเกิดขึ้นภายในบริเวณขอบเขตของการแตกร้าวนี้ ซึ่งการเพิ่มของการยืดตัวเป็นสาเหตุนำไปสู่การเพิ่มของขนาดและจำนวนของรอยแตกร้าว หลังจากจุดนี้กราฟของความเค้น-การยืดตัวจะลดลงเนื่องจากคุณสมบัติของวัสดุที่อ่อนลง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 3 รูปแบบรอยแตกร้าวขนาดเล็กภายใต้แรงดึงแกนเดียว

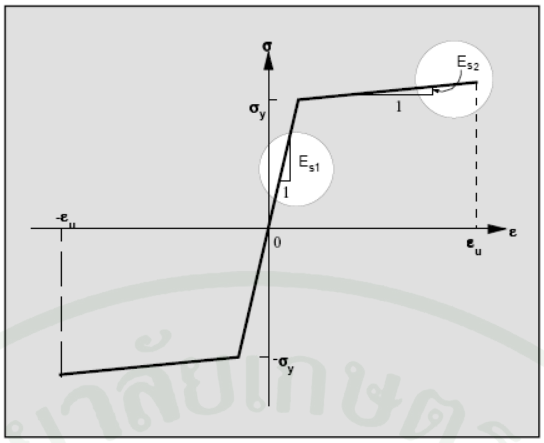
ที่มา: Kwak and Filippou (1990)

คุณสมบัติทางวัสดุของเหล็กเสริม

คุณสมบัติของเหล็กเสริมแตกต่างจากคอนกรีต ซึ่งโดยทั่วไปแล้วคุณสมบัติของเหล็กเสริมจะไม่ขึ้นอยู่กับสภาวะแวดล้อมหรือเวลา ดังนั้นความสัมพันธ์ของความเค้น-ความเครียดของเหล็กเสริมจึงมีความแตกต่างกับคอนกรีต ดังนั้นในการวิเคราะห์โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กทั่วไปจึงจำเป็นต้องมีการกำหนดคุณสมบัติของเหล็กให้ถูกต้อง

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดของเหล็กเสริมสามารถหาได้จากการทดสอบการดึงเหล็กโดยเพิ่มอัตราการดึงแบบคงที่ ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดของเหล็กเสริมจะเหมือนกันทั้งในทั้งพฤติกรรมการรับแรงดึงและการรับแรงอัดแรงอัด (ดังภาพที่ 4) จากภาพจะเห็นว่ากราฟแบ่งออกเป็น 2 ช่วง ช่วงแรกคือ ช่วงยืดหยุ่นแบบเส้นตรง ช่วงที่สองคือ ช่วงที่เหล็กเกิดการคราก หรือเรียกว่า ช่วงสเตรนฮาดเดนนิ่ง (stain hardening) จากนั้นเกิดจะเกิดการวิบัติของเหล็กเสริม ช่วงสเตรนฮาดเดนนิ่งนี้จะเป็นฟังก์ชั่นที่ขึ้นกับกำลังรับแรงดึงของเหล็กเสริม ซึ่งโดยทั่วไปเหล็กเสริมที่มีปริมาณคาร์บอนสูงหรือในเหล็กเสริมกำลังสูงจะมีช่วงสเตรนฮาดเดนนิ่งที่สั้นกว่าเหล็กเสริมที่มีปริมาณคาร์บอนต่ำหรือเหล็กเสริมกำลังต่ำ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดของเหล็กเสริม

ที่มา: Kwak and Filippou (1990)

พฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็ก

คอนกรีตเสริมเหล็กเป็นวัสดุก่อสร้างที่นิยมใช้กันมากในงานก่อสร้างทั่วไป เนื่องจากเป็นวัสดุที่มีราคาประหยัด ก่อสร้างง่าย มีอายุการใช้งานที่ยาวนาน มีความคงทนสูง โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กประกอบด้วยวัสดุ 2 ชนิด คือ คอนกรีตและเหล็ก ซึ่งลักษณะเด่นของคอนกรีต คือ สามารถรับแรงอัดได้ดี แต่มีข้อจำกัดในการรับแรงดึง ด้วยเหตุนี้จึงมีการใช้เหล็กเสริมเข้ามาเพื่อทำหน้าที่รับแรงดึงแทนคอนกรีต

เหล็กได้รับความนิยมในการนำมาเสริมคอนกรีตก็เพราะมีราคาไม่แพง และมีประสิทธิภาพสูง เมื่อเทียบกับโลหะ หรือวัสดุสังเคราะห์ชนิดอื่น นอกจากนี้ เหล็กยังมีสัมประสิทธิ์ของการขยายตัวเนื่องจากความร้อนใกล้เคียงกับคอนกรีต จึงทำให้คอนกรีตส่วนที่หุ้มเหล็กไม่แตกร่อนออกมา อันเนื่องจากการขยายตัวที่ไม่เท่ากัน เหล็กเสริมที่ถูกห่อหุ้มเป็นอย่างดีด้วยคอนกรีตจะมีอายุการใช้งานได้นานหลายสิบปีโดยไม่มีการเสื่อมสภาพปรากฏให้เห็น

เหล็กเสริมที่ใช้กับคอนกรีตเสริมเหล็ก เป็นเหล็กกล้าละมุม (Mild steel) ซึ่งได้จากกระบวนการผลิตแบบรีดร้อน (Hot-rolled process) คือขึ้นรูป รีดเป็นเส้นในขณะที่เหล็กยังมีอุณหภูมิสูงมาก วิธีนี้เหล็กจะไม่มีหน่วยแรงคงค้างภายใน (Residual stress) จึงเหมาะที่จะเสริมในองค์อาคารคอนกรีตเสริมเหล็ก องค์ประกอบทางเคมีประกอบด้วย คาร์บอน กำมะถัน ฟอสฟอรัส เหล็กละมุน

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

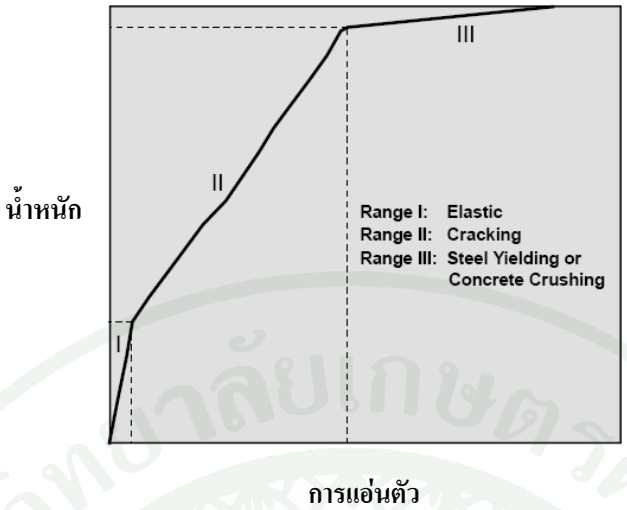
เหล็กกล้า ซึ่งจะอยู่ในรูปของสินแร่ธรรมชาติ สินแร่นี้คือผลที่เกิดจากปฏิกิริยาระหว่างโลหะกับสิ่งแวดล้อมซึ่งจะอยู่ในรูปของ ออกไซด์ ซัลไฟด์ และปฏิกิริยาแบบอื่นๆ ในระหว่างการถลุงแร่โลหะจะดูดซับเอาพลังงานที่ใช้ในการแยกโลหะออกจากแร่ และพลังงานนี้จะฝังตัวอยู่ในโลหะที่ได้ การอยู่ในรูปโลหะจะไม่คงตัว (unstable) เพราะโลหะที่ถลุงได้นี้จะพยายามปลดปล่อยตัวเองจากพลังงานนี้ โดยจะพยายามรวมตัวเข้ากับสิ่งแวดล้อมเพื่อกลับเข้าสู่สถานะเดิม ขบวนการย้อนกลับเข้าสู่สถานะเดิมเมื่อเป็นสินแร่ก็คือ ขบวนการออกซิเดชัน หรือขบวนการเกิดสนิมนั่นเอง (Virmani and Clemena, 1998)

โดยทั่วไปแล้ว เหล็กเสริมที่อยู่ในคอนกรีตเสริมเหล็กนั้น จะอยู่ในสภาวะที่ไม่เกิดสนิม เนื่องจากมีเยื้อหุ้มบาง ๆ (passivation film) ที่เกิดจากปฏิกิริยาไฮเดรชัน (Hydration) ของซีเมนต์กับน้ำในระหว่างการพัฒนากำลังของคอนกรีต ทำให้คอนกรีตมีค่าอัลคาลินิตี้ (alkalinity) สูง (Lambert, 2002) ส่งผลให้เนื้อคอนกรีตมีฤทธิ์เป็นด่าง (ค่า pH อยู่ระหว่าง 12-13.8 ค่าทั่วไปคือ 12.6) สภาพเช่นนี้ทำให้เกิดแผ่น ฟิล์มบางๆหนา 10 นาโนเมตร (Hartt et al., 2004) เคลือบอยู่บนผิวของเหล็กเสริม แผ่นฟิล์มนี้ส่วนหนึ่งเป็นออกไซด์และไฮดรอกไซด์ และอีกส่วนหนึ่งเป็นแร่จากปูนซีเมนต์ หากมีความเสียหายเล็กน้อยเกิดขึ้น ก็จะสามารถซ่อมแซมตัวเองได้ (Phares *et al*., 2006) ตราบใดที่แผ่นฟิล์มนี้ไม่ถูกทำลาย เหล็กเสริมก็จะไม่เป็นสนิม จึงกล่าวได้ว่า คอนกรีตที่หุ้มเหล็กทำหน้าที่ป้องกันมิให้เหล็กเสริมเป็นสนิมทั้งในทางเคมี คือ การที่มีสภาพเป็นด่างสูง และในทางกายภาพ คือ หุ้มเหล็กเสริมมิให้ สัมผัสกับบรรยากาศโดยตรง

อย่างไรก็ตาม แผ่นฟิล์มนี้อาจถูกทำลายหรือเปลี่ยนสภาพได้ เนื่องจาก 2 สาเหตุหลัก คือ ผลกระทบของก๊าซคาร์บอนไดออกไซด์ในคอนกรีต (Carbonation) และผลกระทบของคลอไรด์ในคอนกรีต ส่งผลให้เกิดการเริ่มก่อตัวของสนิม

เป็นที่ทราบดีว่าคอนกรีตเสริมเหล็กประกอบด้วยวัสดุที่มีความแตกต่างกันสองชนิด คือ คอนกรีตและเหล็ก คุณสมบัติทางวัสดุของเหล็กสามารถพิจารณาให้เป็นเนื้อวัสดุเดียว (Homogeneous) ได้ ในส่วนของคอนกรีตจะมีส่วนผสมของวัสดุต่างๆที่ประกอบกันขึ้นมาเป็นคอนกรีต ได้แก่ ซีเมนต์มอร์ต้า และมวลรวม ซึ่งวัสดุเหล่านี้มีความแตกต่างกันทางวัสดุทั้งสิ้น โดยเหตุนี้จึงทำให้ไม่สามารถที่จะกำหนดคุณสมบัติของคอนกรีตอย่างแน่นอนได้ อย่างไรก็ตาม เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์และออกแบบบ่อยครั้งมักจะพิจารณาเป็นวัสดุเนื้อเดียว

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 5 ความสัมพันธ์ของน้ำหนักและการแอ่นตัวของคานคอนกรีตเสริมเหล็กทั่วไป

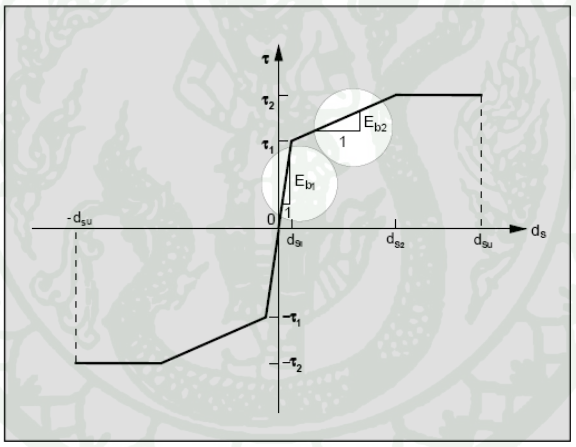
ที่มา: Kwak and Filippou (1990)

จากภาพจะเห็นได้ว่าพฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็กภายใต้การรับแรงดัดนั้นอยู่ในสภาวะที่ไม่เป็นเส้นตรง ซึ่งพฤติกรรมที่เกิดขึ้นนี้มีสาเหตุหลักมาจาก การเกิดรอยแตกร้าวของคอนกรีตในส่วนที่รับแรงดึงและการคราก ของเหล็กเสริมหรือการถูกบดขยี้ของคอนกรีตในส่วนที่รับแรงอัด นอกจากนี้แล้วพฤติกรรมความไม่เป็นเส้นตรงของคอนกรีตยังมีสาเหตุมาจากการเลื่อนของแรงยึดเกาะ (Bond-slip) ระหว่างเหล็กเสริมและคอนกรีตที่หุ้มอยู่โดยรอบ การประสานกันของมวลรวมบริเวณรอยร้าว ผลของเหล็กเดือยของเหล็กตามแนวรอยร้าว รวมไปถึงผลกระทบที่ขึ้นกับเวลา เช่น การคืบ การหดตัวเนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง ปัจจัยทั้งหมดที่กล่าวมานั้นส่งผลต่อพฤติกรรมความไม่เป็นเชิงเส้นของคอนกรีตทั้งสิ้น

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

แรงยึดเกาะระหว่างเหล็กเสริมและคอนกรีต

แรงยึดเกาะคือผลของแรงปฏิสัมพันธ์ (Interaction) ระหว่างเหล็กเสริมและคอนกรีตที่หุ้มเหล็กอยู่โดยรอบ การถ่ายแรงจากเหล็กไปสู่คอนกรีตเกิดจากขบวนการที่แตกต่างกัน 3 อย่าง คือ (1) แรงยึดเกาะทางเคมีระหว่างมอร์ต้ากับผิวของเหล็กเสริม (2) แรงเสียดทานและผลของมวลเม็ดทรายขนาดเล็กที่เข้าไปขัด (Wedging action) อยู่ระหว่างเหล็กเสริมกับคอนกรีตที่อยู่โดยรอบ และ (3) แรงทางกลระหว่างคอนกรีตกับเหล็กเสริม แรงยึดเกาะของเหล็กเส้นกลมโดยส่วนใหญ่จะได้มาจาก (1) กับ (2) ส่วนเหล็กข้ออ้อยจะมีแรงยึดเกาะดีกว่าเหล็กเส้นกลมเนื่องจาก แรงส่วนใหญ่ในเหล็กจะถูกถ่ายผ่านปั้ง (Lugs) ของเหล็กสู่คอนกรีต แรงเสียดทานและแรงยึดเกาะทางเคมีจะถูกนำมาพิจารณาด้วย แต่จะมีความสำคัญเป็นลำดับสอง ซึ่งแรงเหล่านี้จะลดลงเมื่อเหล็กเสริมเริ่มเกิดการเลื่อนตัว (Slip)

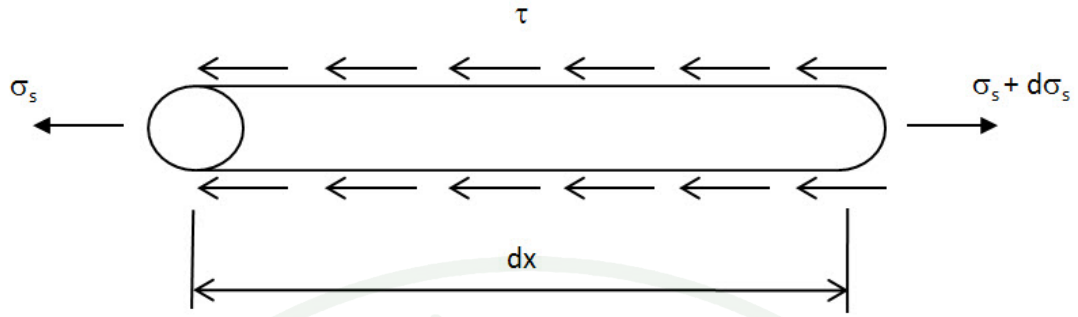


ภาพที่ 6 ความสัมพันธ์โดยทั่วไปของความเค้นยึดเกาะกับการเลื่อนตัว

ที่มา: Kwak and Filippou (1990)

หน่วยแรงยึดเหนี่ยว (Bond stress) ในโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กเกิดขึ้นจากการเฉือนระหว่างผิวสัมผัสของเหล็กเสริมกับคอนกรีตที่หุ้มห่อโดยรอบในขณะที่มีการรับและถ่ายแรงระหว่างคอนกรีตกับเหล็กเสริมนั้น คือ หน่วยแรงยึดเหนี่ยวมีค่าเท่ากับหน่วยแรงเฉือนต่อหน่วยพื้นที่รอบผิวสัมผัสของเหล็กเสริม Bond-slip คือ ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ระหว่างเหล็กเสริมและคอนกรีต โดยทั่วไปสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงยึดเหนี่ยวและค่าการลื่นหลุดได้จากการทดสอบแบบ Pullout Test

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 7 แรงยึดเหนี่ยวในเส้นเหล็ก

เมื่อพิจารณาแรงสมดุลในชิ้นส่วนของเหล็กเสริมที่มีความยาว dx ดังแสดงในภาพที่ 7 สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงยึดเหนี่ยวและหน่วยแรงในเหล็กเสริมได้ดังสมการที่ 1

$$\tau = \frac{A_s}{\Sigma_0} \times \frac{d\sigma}{dx} \qquad (1)$$

เมื่อ τ คือ หน่วยแรงยึดเหนี่ยว (Bond stress) ที่ผิวของเหล็กเสริม, $\sum_0$ คือเส้นรอบรูปของเหล็กเสริม, A_s คือ พื้นที่หน้าตัดของเหล็กเสริม, $d\sigma$ คือ ความแตกต่างระหว่างหน่วยแรงในเหล็กเสริมเมื่อเทียบกับความยาว dx

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในอดีตเนื่องจากข้อจำกัดทางด้านอุปกรณ์ทางคอมพิวเตอร์ ทำให้แนวคิดการคำนวณโครงสร้างทางด้านตัวเลขไม่ได้รับความนิยมมากนักเนื่องจากยากแก่การแก้ปัญหา ปัจจุบันความก้าวหน้าทางด้านคอมพิวเตอร์มีมากขึ้น รวมทั้งเครื่องคอมพิวเตอร์มีราคาที่ถูกลงจึงสามารถประยุกต์ใช้วิธีการเชิงตัวเลขมาใช้ในการคำนวณได้มากขึ้น

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ใช้สำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมใช้วิเคราะห์ปัญหาด้านวิศวกรรมอย่างกว้างขวาง ซึ่งสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหากลศาสตร์ของแข็งเช่น วิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ความเค้นของชิ้นส่วนเครื่องจักรกล โครงสร้างเครื่องบิน อาคาร สะพานและโครงสร้างอื่นๆที่ซับซ้อนได้เป็นอย่างดี ไม่ว่าวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์นั้นจะอยู่ในสภาพยืดหยุ่น (Elastic) หรือในสภาพยืดตัว (Plastic) นอกจากนี้วิธีไฟไนต์

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เอลิเมนต์ยังสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาด้านพลศาสตร์ เช่น การสั่นสะเทือนของโครงสร้าง รวมทั้งยังสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน การไหลของของไหล เป็นต้น

การแก้ปัญหาทางไฟไนต์เอลิเมนต์ อยู่บนพื้นฐานของการประมาณค่าผลเฉลยโดยการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต ในการแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ปัญหานั้นจะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบที่กำหนดมาให้ ค่าผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) ของปัญหาดังกล่าวจะประกอบด้วยค่าของตัวแปรต่างๆกันตามตำแหน่งต่างๆบนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ค่าผลเฉลยแม่นตรงจะประกอบด้วยค่าต่างๆทั้งหมดนับเป็นจำนวนอนันต์ค่า แทนที่จะทำการหาค่าแม่นตรงที่ประกอบด้วยค่าต่างๆจำนวนมากมาย ซึ่งในทางปฏิบัติไม่สามารถทำได้ หลักการก็คือทำการเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่มีจำนวนอนันต์ค่านั้นมาเป็นค่าโดยประมาณที่มีจำนวนที่นับได้ (Finite) ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ (Element)

วิธีการดังกล่าวบ่งชี้เป็นนัยว่า ผลเฉลยของแต่ละเอลิเมนต์นั้นจำเป็นต้องสอดคล้อง (Satisfy) กับสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ในปัญหานั้นๆ ซึ่งหมายความว่าหลักการของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มต้นจากการพิจารณาเอลิเมนต์ทีละเอลิเมนต์ โดยทำการสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานที่ว่า สมการที่สร้างขึ้นมานั้นจำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่ทำอยู่นั้น จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาได้มาประกอบกัน ก่อให้เกิดระบบสมการชุดใหญ่ ซึ่งในความหมายทางกายภาพก็คล้ายกับการเอาเอลิเมนต์มาประกอบรวมเข้าด้วยกันก่อให้เกิดเป็นรูปร่างลักษณะทั้งหมดของปัญหาที่แท้จริง จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่ให้มาลงไปในระบบสมการชุดใหญ่นี้แล้วจึงทำการแก้ไขสมการดังกล่าว ก่อให้เกิดผลเฉลยโดยประมาณที่ต้องการ ณ ตำแหน่งต่างๆ ของปัญหานั้น

วิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นเรากำหนดให้เอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ถือเป็นโครงสร้างชิ้นเล็ก ๆ โดยแต่ละชิ้นจะเชื่อมต่อที่จุดซึ่งเราเรียกกว่าจุดเชื่อมต่อ (node) และ เอลิเมนต์ที่มาประกอบเข้าด้วยกันเราจะเรียกว่าเป็นระบบโครงสร้างในชิ้นงานโดยการจัดเรียงตัวของระบบโครงสร้างโดยการแบ่งระบบโครงสร้างออกเป็นเอลิเมนต์เล็ก ๆ เราเรียกว่าการแบ่งเอลิเมนต์ (Mesh) ซึ่งการเรียงตัวของการเอลิเมนต์ นี้เองเป็นตัวแสดงถึงรูปทรงและลักษณะของการคำนวณที่จะใช้ในการแก้ปัญหานั้น ๆ ซึ่งการแบ่งเอลิเมนต์ นี้มีส่วนสำคัญอย่างมากในการช่วยให้ผลลัพธ์มีค่าถูกต้อง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

แม่นยำ โดยการแบ่งแบบจำลอง ให้จำนวนเอลิเมนต์พอเหมาะจะทำให้การแก้ปัญหามีประสิทธิภาพและได้คำตอบที่แม่นยำ

วิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นสามารถประยุกต์กับการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมได้อย่างดี ข้อดีของวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์มีอยู่หลายประการสรุปได้ดังนี้

1. วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถประยุกต์ใช้ได้หลากหลาย

2. วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ไม่มีข้อกำจัดด้านรูปร่าง ชิ้นงานที่เราจะใช้วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์จะมีรูปร่างอย่างไรก็ได้

3. วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ไม่มีข้อจำกัดด้านเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) และแรงกระทำ (Force) เราสามารถจับชิ้นงานยึดหรือใส่แรงกระทำตรงไหนก็ได้ โดยแรงกระทำที่กำหนดจะเป็นจุด หรือเป็นแรงแบบแผ่กระจายก็ได้

4. วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ไม่มีข้อจำกัดในคุณสมบัติของวัสดุ (material properties) ที่ใช้ วัสดุที่ใช้วิเคราะห์จะเป็นอะไรก็ได้

5. ส่วนประกอบต่างรูปแบบต่าง คุณสมบัติกันไม่ว่ารูปทรง คุณสมบัติของวัสดุสามารถนำมาคำนวณรวมกันได้

การแบ่งเอลิเมนต์ (Discretization) คือการแบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์ของวิธีไฟไนต์ ซึ่งโดยปกติแล้วการแบ่งนี้ จะทำให้มีข้อผิดพลาด (error) หรือความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นได้ 3 ชนิด คือ การสร้างผิดรูปทรง (modeling error), การเลือกจำนวนเอลิเมนต์ไม่เหมาะสม (discretization error) และการปัดเศษทศนิยม (mathematical error) ซึ่งตามปกติแล้วจะมีค่าน้อยแต่อาจส่งผลมากหากการทำแบ่งเอลิเมนต์ (discretization) ไม่ดี การแก้ปัญหาข้อผิดพลาดเหล่านี้สามารถทำได้โดยการสร้างแบบจำลอง (model) ที่เหมาะสม การเลือกจำนวนเอลิเมนต์ที่เหมาะสม

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

หลักการคำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีการทางไฟไนต์เอลิมเนต์มีหลายวิธีด้วยกัน เช่น

1. Stiffness method
2. Variational method
3. Energy method
4. Weighted residual method

ในโครงการนี้จะใช้หลักการของการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากวิธีการโดยตรง (stiffness method) ซึ่งเป็นวิธีการหาการเคลื่อนที่ (displacement), การเสียรูป (deformation),ค่าหน่วยแรง (stress) ที่นิยมใช้กันมากในโปรแกรม (software) ต่าง ๆ โดยมีหลักการโดยการใช้เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง (elemet stiffness matrix) ช่วยในการคำนวณ ดังในสมการต่อไปนี้

ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วย 6 ขั้นตอนหลักดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ขอบเขตดังกล่าวอาจเป็นขอบเขตของปัญหาชนิดต่าง ๆ เช่น ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง (elasticity problem) ปัญหาที่เกี่ยวกับอุณหภูมิและความร้อน (thermal problem) รวมทั้งปัญหาของการไหลเป็นต้น

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation functions) เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม โดยมีจุดต่อเป็นตำแหน่งที่ตั้งของตัวไม่รู้ค่า (nodal unknowns) ซึ่งตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่ออาจเป็นค่าของการเสียรูป (displacement) หากเราวิเคราะห์ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง หรืออาจเป็นค่าของอุณหภูมิหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นความเร็วของการไหลหากเราวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการไหลเป็นต้น

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างเอลิเมนต์ (element equation) โดยสมการที่ได้จะอยู่ในรูปของสมการ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$[K]element\{Ø\}element = \{F\}element \quad (2)$$

โดยที่ {Ø}element แทนเวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น , [K]element แทนเมทริกซ์ของความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ และ {F}element แทนค่าเวกเตอร์เมทริกซ์ของแรงที่กระทำกับเอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 3 ถือเป็นหัวใจสำคัญของการศึกษาระเบียบวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของอิเลเมนต์สามารถทำได้โดย

1. วิธีการโดยตรง (direct approach)
2. วิธีการแปรผัน (variational approach)
3. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals)

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์มาประกอบรวมกันเข้า ก่อให้เกิดระบบสมการรวม (system of simultaneous equations) ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\Sigma(\text{ element equations }) \longrightarrow [K]sys\{Ø\}sys = \{F\}sys \quad (3)$$

โดยที่ {Ø}sys แทนเวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์แบบจำลองทั้งหมด, [K]element แทนเมทริกซ์ของความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ของแบบจำลองทั้งระบบ และ {F}element แทนค่าเวกเตอร์เมทริกซ์ของแรงที่กระทำกับเอลิเมนต์ของแบบจำลองทั้งระบบ

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ลงในระบบสมการรวมแล้วจึงแก้ระบบสมการนี้เพื่อหา {Ø}sys อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ของโครงสร้าง หรือเป็นค่าอุณหภูมิที่จุดต่อ หากเป็นการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นค่าของความเร็วของการไหลตามจุดต่อหากเป็นปัญหาเกี่ยวกับการไหลเป็นต้น

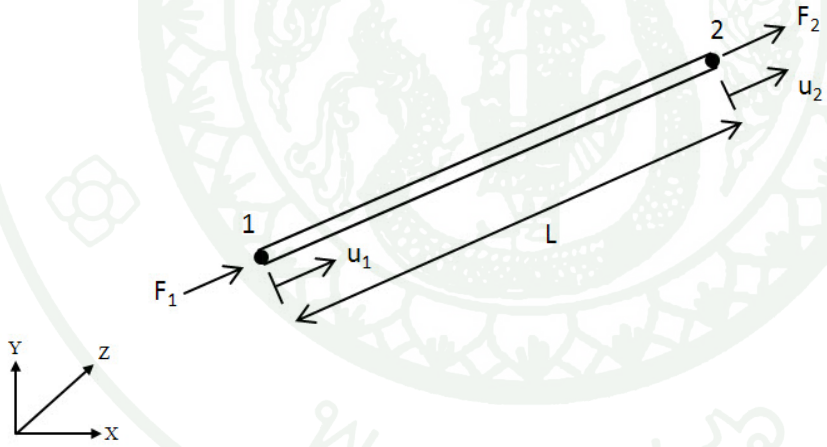
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่าง ๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถนำมาใช้เพื่อหาค่าอื่น ๆ ที่ต้องการต่อไปได้อีก เช่น เมื่อรู้ค่าการเสียรูป (displacement) ตามจุดต่อต่าง ๆ ของโครงสร้างก็สามารถนำไปใช้หาค่าความเครียด (strain) และหน่วยแรง (stress) ได้ตามลำดับ หรือเมื่อรู้ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อก็สามารถไปนำไปคำนวณหาปริมาณการถ่ายเทความร้อนได้ หรือเมื่อรู้ค่าความเร็วของของไหลที่จุดต่อก็สามารถนำไปคำนวณหาปริมาณการไหลได้ เป็นต้น

จากขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอนนี้จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีการที่มีแบบแผนอย่างเป็นขั้นเป็นตอน โดยมีหัวใจสำคัญที่การสร้างสมการของเอลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 3

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ท่อน (truss element)

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวัสดุท่อนมีความยาว L อันประกอบด้วยสองจุดต่อ (Node) และวางตัวอยู่ในแนวย่อยแกน x ซึ่งอาจอยู่ในทิศทางใด ๆ ในระบบแกนรวม



ภาพที่ 8 เอลิเมนต์วัสดุท่อน

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์นี้สามารถประดิษฐ์ได้โดยเริ่มต้นจากการกำหนดลักษณะการกระจายของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนย่อยของเอลิเมนต์ ซึ่งในกรณีนี้คือ

$$u(x) = [N_1(x)\ N_2(x)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} \quad (5)$$

ดังนั้นความเครียดในแนวแกนย่อย x คือ

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B]\{\delta\} \quad (6)$$

โดย เมทริกซ์ N คือ ค่าสมมุติลักษณะการกระจายการเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์, เมทริกซ์ [B] คือ ค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความเค้น เมื่อทราบค่าของเมทริกซ์ N และ [B] ก็จะสามารถหาเมทริกซ์ต่าง ๆ ในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เช่น เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง คือ

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV \quad (7)$$

เมื่อ เมทริกซ์ [K] คือเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ ในกรณีสำหรับเอลิเมนต์ท่อน ค่าเมทริกซ์ D จะเท่ากับค่า E ซึ่งคือค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น และ dV = A dx ดังนั้น

$$[K] = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A dx \quad (8)$$

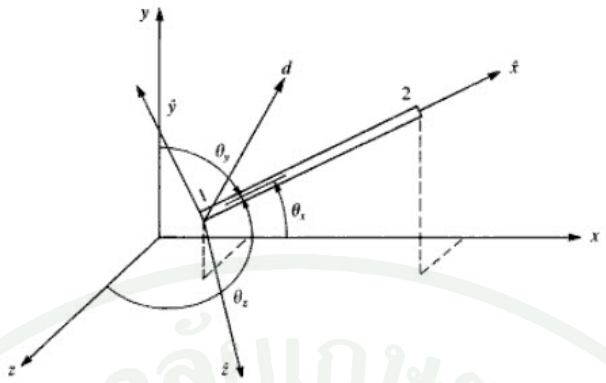
ซึ่งหากพื้นที่หน้าตัดของเอลิเมนต์ท่อนมีค่าคงที่ เท่ากับ A จะได้

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์เช่นนี้นั้นจะสอดคล้องกับเอลิเมนต์ในแนวแกนย่อย x ดังแสดงในภาพที่ 8 ซึ่งในทางปฏิบัติแล้วเอลิเมนต์นี้จะเป็นเพียงเอลิเมนต์หนึ่งของหลาย ๆ เอลิเมนต์ในระบบแกนรวม ดังนั้นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้จึงจำเป็นต้องแปลงในไปอยู่ในระบบแกนรวม โดยใช้หลักการวิธีการแปลงเมทริกซ์ (coordinate transformation)

ในการใช้งานแล้วระบบที่ใช้จริงคือระบบแกนรวมซึ่งเป็นระบบแกนในระบบ 3 มิติ (x,y,z) จึงจำเป็นจะต้องแปลงค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ให้อยู่ในระบบแกนรวมเสียก่อน

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 9 เอลิเมนต์วัสดุท่อนในระบบแกนรวม

จากภาพที่ 9 จะเห็นว่าสิ่งที่จำเป็นสำหรับการแปลงค่าระบบของเอลิเมนต์คือค่า มุมระหว่างแกนย่อยของเอลิเมนต์ท่อนกับ แกน x, y, z ของระบบแกนรวม

$$L = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \tag{10}$$

$$C_x - \cos\theta_x \quad C_y - \cos\theta_y \quad C_z - \cos\theta_z \tag{11}$$

เมื่อ C_x , C_y , C_z คือค่าโคไซน์ของมุมระหว่างแกนย่อยของเอลิเมนต์ท่อนกับแกนของระบบแกนหลัก, L คือความยาวของเอลิเมนต์ท่อน ดังนั้น

$$u_1 = C_x U + C_y U + C_z W \tag{12}$$

เมื่อ U, V, W คือค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน x, y , z ที่เกิดขึ้นในระบบแกนรวม ดังนั้นจึงสามารถเขียนในรูปของสมการเมทริกซ์ได้

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{Bmatrix} \tag{13}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \tag{14}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

[T] คือ เมทริกซ์การแปลงระบบซึ่งจะทำให้ค่าต่าง ๆ ในระบบแกนย่อยของเอลิเมนต์ท่อนเปลี่ยนเป็นค่าในระบบแกนรวม ดังนั้นจะสามารถหาค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ท่อนในระบบแกนรวมได้โดย

$$[K] = [T]^T[k][T] \tag{15}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ C_y & 0 \\ C_z & 0 \\ 0 & C_x \\ 0 & C_y \\ 0 & C_z \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \tag{16}$$

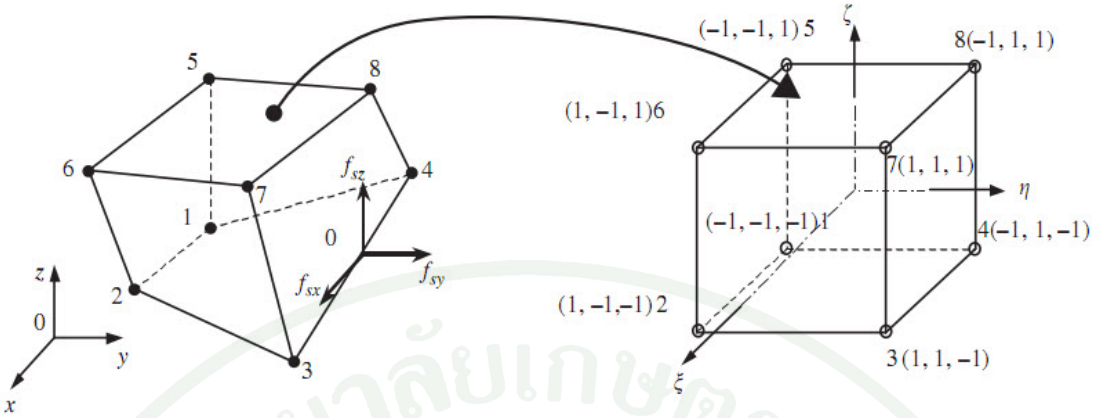
$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_xC_y & C_xC_z & -C_x^2 & -C_xC_y & -C_xC_z \\ & C_y^2 & C_yC_z & -C_xC_y & -C_y^2 & -C_yC_z \\ & & C_z^2 & -C_xC_z & -C_yC_z & -C_z^2 \\ & & & C_x^2 & C_xC_y & C_xC_z \\ & & & & C_y^2 & C_yC_z \\ \text{Symmetry} & & & & & C_z^2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

เมทริกซ์ [k] คือค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ท่อนในระบบย่อย จะได้ค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ท่อนในระบบรวมดังสมการ โดยเมทริกซ์นี้จะมีขนาด 6 x 6 ซึ่งโดยปกติแล้วเอลิเมนต์ท่อนนี้จะนิยมใช้เป็นแบบจำลองของเหล็กเสริม

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ทรงหกหน้า (3D Solid Element)

การสร้างสมการสำหรับเอลิเมนต์ทรงหกหน้าซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 8 จุดต่อในแต่ละจุดต่อสามารถเคลื่อนที่ได้ 3 ทิศทาง โดยปกติแล้วการที่เอลิเมนต์ทรงหกหน้านี้จะมีหน้าคู่ตรงกันข้ามกันขนานกันนั้นเป็นไปได้ยาก จึงทำให้การหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ทำได้ยาก เพราะจะต้องอินทิเกรตบนปริมาตรทั้งหมดของเอลิเมนต์ ดังนั้นเพื่อลดความยุ่งยากดังที่กล่าวมา จึงแปลงรูปเอลิเมนต์ทรงหกหน้าซึ่งอยู่ในพิกัดระบบรวมให้อยู่ในพิกัดธรรมชาติ (natural coordinate) ($\xi - \eta - \zeta$) ดังแสดงในภาพ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 10 การแปลงเอลิเมนต์ทรงหกหน้าให้อยู่ในระบบธรรมชาติ (natural coordinate system)

ที่มา: BANGASH (1989)

ค่าการกระจายการเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์ทรงหกหน้า (Shape function) สามารถเขียนให้อยู่ในระบบธรรมชาติสามารถได้ดังนี้

$$N_1 = \frac{1}{8}(1 \quad \xi)(1 \quad \eta)(1 \quad \zeta) \tag{18}$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \tag{19}$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \tag{20}$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \tag{21}$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \tag{22}$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \tag{23}$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \tag{24}$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \tag{25}$$

จากสูตรเบื้องต้นของไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์ทรงหกหน้าในระบบพิกัดธรรมชาติคือ

$$[K] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B]^T[D][B]|J|d\xi d\eta d\zeta \tag{26}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เมื่อ [K] คือ เมทริกซ์ค่าความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์, B คือ เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด, [D] คือ เมทริกซ์ค่าคุณสมบัติของวัสดุ, |J| คือ จาโคเบียนเมทริกซ์ (Jacobian matrix) โดยถ้าต้องการทราบ เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์จำเป็นต้องทราบตัวแปรที่เหลือทั้งหมด ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้

จากค่าความเครียดที่เกิดขึ้น

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{27}$$

เมื่อ ε คือ ค่าความเครียด, γ คือ ค่าความเครียดเฉือน เมื่อแทนค่าลงในสมการ

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \tag{28}$$

$$[B] = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \quad B_5 \quad B_6 \quad B_7 \quad B_8] \tag{29}$$

จะสามารถหาค่า [B] ได้ คือ

$$B_1 = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} \end{bmatrix} \tag{30}$$

จากทฤษฎีอีลาสติก (theory of elasticity) ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความเค้นของเอลิเมนต์จะสามารถหาค่าเมทริกซ์ [D] ได้ คือ จาก

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{31}$$

จะได้ค่าเมทริกซ์ [D] สำหรับระบบ 3 มิติ คือ

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{32}$$

เมื่อ E คือ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น, ν คือ ค่าอัตราส่วนของปัวซอง (poisson ratio) และจาโคเบียนเมทริกซ์หาได้จาก

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{33}$$

โดยที่

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}}{|J|} \tag{34}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial f}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial f}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}}{|J|} \tag{35}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial f}{\partial \zeta} \end{vmatrix}}{|J|} \quad (36)$$

เมื่อทราบค่าของเมทริกซ์เหล่านี้แล้ว จึงสามารถหาค่าเมทริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์ทรงหกหน้าได้จากสมการข้างต้น

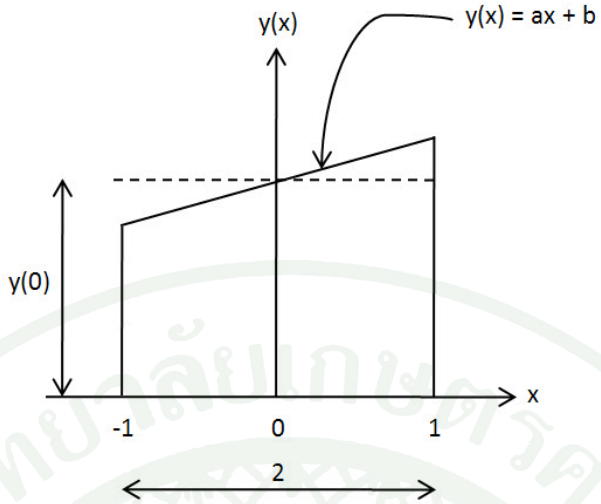
เอลิเมนต์ชนิดนี้เป็นไอโซพาราเมทริกซ์เอลิเมนต์เช่นกัน ในการคำนวณสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทั่วไปจะต้องทำการอินทิเกรตรอบเนื้อที่ขอบเขตทั้งหมดของเอลิเมนต์ เมื่อเอลิเมนต์มีด้านที่ไม่เท่ากันดังแสดงในภาพที่ 10 การจะทำการอินทิเกรตจะมีความยุ่งยากมาก จึงจำเป็นต้องแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์เหล่านั้นให้อยู่ในระบบธรรมชาติ โดยความยาวของเอลิเมนต์ทรงหกหน้าในระบบธรรมชาตินี้ จะมีลิมิต (limit) จาก -1 จนถึง +1 ซึ่งทำให้ง่ายต่อการอินทิเกรต

การอินทิเกรตในสมการของไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ทรงหกหน้าจะมีความยุ่งยากมาก แต่เมื่อแปลงให้อยู่ในระบบธรรมชาติแล้วจะสามารถใช้ สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre integration formulas) ได้

การหาค่าอินทิเกรตด้วยวิธีของเกาส์-เลอจองด์

ตัวอย่างการหาค่าอินทิเกรตโดยใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ต้องการอินทิเกรตสมการ $y(x) = ax + b$ โดยอินทิเกรตลิมิตจาก -1 ถึง 1 ดังแสดงในภาพที่ 11

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 11 การอินทิเกรตฟังก์ชันโดยใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์

ที่มา: ปราโมทย์ (2546)

$$\int_{-1}^{1} y(x)dx = 2(\text{น้ำหนัก}) \times y(0)(\text{ตำแหน่งจุดเกาส์}) \tag{37}$$

จากสมการเราจะเรียกค่า 2 นี้ว่าเป็นน้ำหนัก (Weight) และตำแหน่งที่ y(0) ว่าเป็นค่าของฟังก์ชันที่ตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss point location) ในกรณีใช้จุดเกาส์ จำนวน 1 จุด ตำแหน่งคือจุด x = 0 ซึ่งคือตำแหน่งที่เราหาค่าฟังก์ชัน y ลักษณะผลลัพธ์ดังกล่าวสามารถเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\int_{-1}^{1} y(x)dx \cong \sum_{i=1}^{NG} W_i y(x_i) \tag{38}$$

โดย NG แทน จำนวนของจุดเกาส์ (Number of Gauss points), W_i แทนน้ำหนัก (Weights), x_i แทนตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss point location) ผลจากการอินทิเกรตจะได้แม่นยำมากน้อยเพียงใดขึ้นกับลักษณะของฟังก์ชัน และจำนวนจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรตนั้น นอกจากนั้นค่าของน้ำหนักและตำแหน่งของจุดเกาส์จะแตกต่างกันออกไปโดยขึ้นอยู่กับจำนวนของจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรต หลักการสำคัญคือ หากใช้จำนวนของจุดเกาส์เท่ากับ NG จุด จะก่อให้เกิดผลแม่นตรงจากการอินทิเกรตฟังก์ชัน เมื่อฟังก์ชันที่ต้องการจะอินทิเกรตอยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ที่มีอันดับ 2NG – 1 หรือต่ำกว่านั้น

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ดังนั้นหากฟังก์ชัน y(x) มีการกระจายแบบเชิงเส้นตรง จะได้ผลเฉลยแม่นตรงกับการอินทิเกรตโดยใช้จำนวนจุดเกาส์เพียงจุดเดียว หากฟังก์ชัน y(x) มีการกระจายแบบพหูนามสองอันดับหรือสาม จะได้ผลเฉลยแม่นตรงก็ต่อเมื่ออินทิเกรตโดยการใช้จุดเกาส์จำนวน 2 จุด เป็นต้น

สมการเบื้องต้นของเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ทรงหกหน้าในพิกัดระบบรวมจะมีขนาด 24 x 24 และมีสมการดังนี้

$$[K] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B]^T[D][B]|J|d\xi d\eta d\zeta \tag{39}$$

ต้องอินทิเกรตเพื่อหาค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็งดังนั้น จะใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ในการหาค่าการอินทิเกรตเพื่อลดความยุ่งยาก เอลิเมนต์ทรงหกหน้ามี 8 จุดต่อ ในหนึ่งแนวแกนของเอลิเมนต์ใช้ จุดเกาส์ในการอินทิเกรต 2 จุด ฉนั้น จะมีจุดเกาส์ทั้งสิ้น 8 จุด (2 x 2 x 2 rule) เมื่อ J คือจาโคเบียนเมทริกซ์ ดังนั้นจะได้เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ดังนี้

$$[K] = \sum_{i=8}^{8}[B]^T[D][B]|J|W_iW_jW_k \tag{40}$$

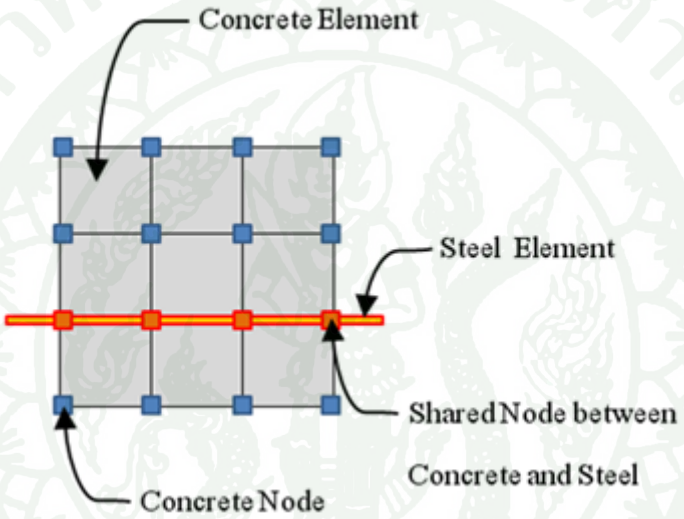
แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของคอนกรีตเสริมเหล็ก

เทคนิคการสร้างแบบจำลองของเหล็กเสริมในแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของคอนกรีตเสริมเหล็กมีอยู่ด้วยกัน 3 แบบคือ

แบบจำลองที่แยกกันระหว่างเหล็กเสริมและคอนกรีต (Discrete Model) ดังแสดง ในภาพที่ 12 แบบจำลองนี้จะประกอบด้วยเอลิเมนต์ 2-3 ชนิด ชิ้นส่วนของเหล็กเสริมที่ใช้ในแบบจำลองชนิดนี้จะเป็นแบบแท่ง (Bar Element) หรือ แบบคาน (Beam Element) โดยจุดต่อของชิ้นส่วนที่เป็นเหล็กเสริมและชิ้นส่วนที่เป็นคอนกรีตจะอยู่ในตำแหน่งเดียวกัน และในกรณีที่ต้องการแสดงการยึดเหนี่ยวระหว่างคอนกรีตกับหล็กเสริมจะใช้สปริงเอลิเมนต์ (spring element) ในการเชื่อมต่อระหว่างจุดต่อของคอนกรีตและเหล็กเสริมเพื่อให้ความแข็งเกร็งของสปริงเอลิเมนต์ทำให้ที่แสดงพฤติกรรมของแรงยึดเหนี่ยวและการลื่นหลุดนั้นเอง (bond slip)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

การสร้างแบบจำลองแบบนี้เอลิเมนต์ของคอนกรีตจำเป็นต้องมีจุดต่อที่อยู่ตำแหน่งเดียวกับจุดต่อของเอลิเมนต์เหล็กเสริม ดังนั้นข้อเสียของแบบจำลองชนิดนี้คือการแบ่งชิ้นส่วนของคอนกรีตจะถูกจำกัดโดยตำแหน่งของเหล็กเสริม ยิ่งถ้ารูปแบบการวางเหล็กเสริมซับซ้อนยิ่งทำให้ขั้นตอนของการแบ่งแบบจำลองเป็นเอลิเมนต์ (meshing) จะเกิดความยุ่งยากขึ้นมาก รวมถึงปริมาตรของคอนกรีตจะไม่ถูกหักออกจากปริมาตรของเหล็กเสริม แต่อย่างไรก็ดีการสร้างแบบจำลองรูปแบบนี้ก็มีข้อดี คือการที่สามารถจำลองพฤติกรรมของแรงยึดเหนี่ยวและการลื่นหลุดนั้นเอง (bond slip) ระหว่างคอนกรีตและเหล็กเสริมได้นั้นเอง

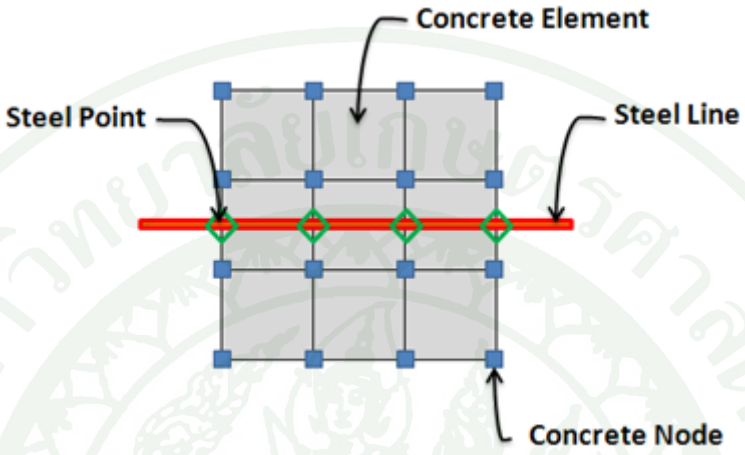


ภาพที่ 12 แบบจำลองแยกตัว (Discrete Model)

แบบจำลองฝัง (Embedded Model) ดังแสดงในภาพที่ 13 แบบจำลองชนิดนี้ช่วยลดข้อจำกัดของการแบ่งชิ้นส่วนของเหล็กเสริมได้ดีขึ้น เนื่องจากค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมจะถูกแยกหาค่าต่างหากจากชิ้นส่วนของคอนกรีต แบบจำลองนี้ถูกสร้างขึ้นโดยการเคลื่อนตำแหน่งของเหล็กเสริมจะสอดคล้องกับคอนกรีตที่หุ้มอยู่รอบเหล็กเสริมนั้น แบบจำลองนี้เหมาะสำหรับคอนกรีตที่เสริมเหล็กแบบซับซ้อนอีกทั้งยังสามารถหาพฤติกรรมของแรงยึดเหนี่ยวและการลื่นหลุด (bond slip) ได้ อย่างไรก็ตามแบบจำลองชนิดนี้จะทำให้จุดต่อและความอิสระในการเคลื่อนที่ (DOF) เพิ่มมากขึ้น ดังนั้นจึงทำให้การคำนวณใช้เวลามากขึ้นไปด้วย

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

แบบจำลองแบบนี้จึงเหมาะสมกับการสร้างแบบจำลองโครงสร้างที่ประกอบด้วยเหล็กเสริมที่วางตัวอย่างซับซ่อนเนื่องด้วยไม่ต้องคำนึงถึงตำแหน่งที่อยู่ของเหล็กเสริมในการแบ่งเอลิเมนต์ แต่ตำแหน่งของเหล็กเสริมก็มีผลต่อการถ่ายโอนความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมซึ่งจะได้อธิบายต่อไป

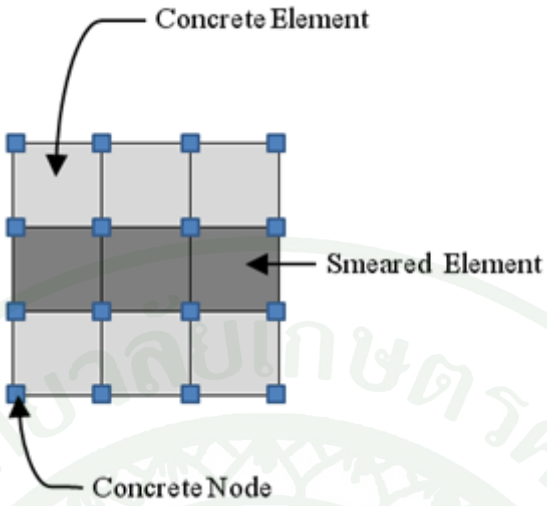


ภาพที่ 13 แบบจำลองฝัง (Embedded Model)

แบบจำลองกระจาย (Smeared Model) ดังแสดงในภาพที่ 14 มีสมมุติฐานว่าเหล็กเสริมจะกระจายอย่างสม่ำเสมอในบริเวณเนื้อคอนกรีตที่ได้กำหนดไว้ในการแบ่ง (mesh) ของไฟไนต์เอลิเมนต์ จะเห็นได้ชัดว่าวิธีการนี้ไม่คำนึงถึงตำแหน่งของเหล็กเสริมเลย และตำแหน่งของเหล็กเสริมก็ไม่มีผลต่อการถ่ายโอนค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมด้วยอีกทั้งยังไม่สามารถแสดงให้เห็นถึงพฤติกรรมการลื่นหลุดนั้นเอง (bond slip) ระหว่างคอนกรีตและเหล็กเสริมซึ่งจะแตกต่างกับแบบจำลองแบบฝังและแบบจำลองแบบแยกตัว วิธีนี้จึงมีความละเอียดน้อยที่สุดใน 3 วิธีที่กล่าวมา

วิธีการนี้เหมาะจะใช้สำหรับแบบจำลองที่มีอัตราส่วนขนาดใหญ่ (Large-scale) เมื่อเหล็กเสริมส่งผลต่อโครงสร้างโดยรวมน้อยหรือ ไม่มีความสำคัญต่อการตอบสนองทั้งหมดของโครงสร้าง เช่นการสร้างแบบจำลองเพื่อดูภาพรวมของแบบจำลองเพื่อลดระยะเวลาในการคำนวณและก็ได้ค่าผลลัพธ์ที่ยอมรับได้ก็จะเลือกใช้วิธีสร้างแบบจำลองแบบกระจายตัวนั้นเอง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 14 แบบจำลองกระจาย (Smeared Model)

การพัฒนาเอลิเมนต์ด้วยเทคนิคการฝังเหล็กเสริม

การพัฒนาเอลิเมนต์ด้วยเทคนิคการฝัง (embedded reinforcement technique) คือการรวมคุณสมบัติของเอลิเมนต์ทั้งสองเข้าด้วยกัน ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอเอลิเมนต์ใหม่ที่เกิดจากการใช้เทคนิคการฝัง คุณสมบัติของเอลิเมนต์แท่ง (bar element) ไว้ในเอลิเมนต์ทรงหกหน้า (8 nodes solid element) โดยจะอธิบายรูปแบบและข้อแตกต่างของการใช้เทคนิคการฝังและสร้างแบบจำลองแบบไม่ใช้เทคนิคนี้ ต่อไป

ในการพัฒนาเอลิเมนต์คอนกรีตเสริมเหล็กนี้ได้กำหนดให้เอลิเมนต์แบบแท่งเป็นตัวแทนของเหล็กเสริม และให้เอลิเมนต์ทรงหกหน้าเป็นตัวแทนของคอนกรีต จากที่กล่าวถึงคุณสมบัติและการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์ทั้งสอง ทำให้เราทราบวิธีการได้มาซึ่งเมทริกต์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์ และทราบถึงมิติของเมทริกซ์นั้นคือ เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์แท่งมีขนาด 6 x 6 และเอลิเมนต์ทรงหกหน้ามีขนาด 24 x 24 รวมคุณสมบัติความแข็งเกร็งของทั้งสองเอลิเมนต์เข้าด้วยกันจะได้เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ใหม่

$$[K_{RC}]_{24\times24} = [K_C]_{24\times24} + \Sigma[K_S]_{6\times6} \qquad (41)$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

โดยที่ $[K_{RC}]$ คือ เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ที่รวมคุณสมบัติของเหล็กและคอนกรีต, $[K_C]$ คือ เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเหล็กเสริม, $[K_S]$ คือ เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเหล็กเสริม จากสมการจะสามารถหาค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ใหม่จำเป็นต้องทำให้เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันก่อน ดังนั้นจึงต้องเปลี่ยนขนาดของเมทริกส์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์แท่งให้มีขนาด 24 x 24 โดยทำได้ดังสมการต่อไป

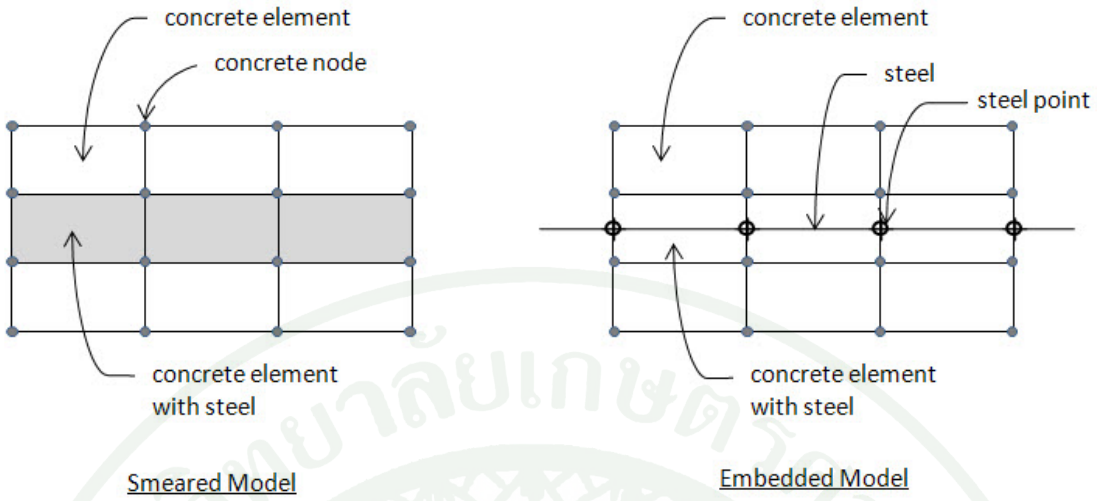
$$[K_g]_{24x24} = [T^*]^T_{24x6}[k_g]_{6x6}[T^*]_{6x24} \tag{42}$$

$$[T^*] = \begin{bmatrix} N_{i1} & 0 & 0 & \ldots & N_{i8} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i1} & 0 & \ldots & 0 & N_{i8} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i1} & \ldots & 0 & 0 & N_{i8} \\ N_{j1} & 0 & 0 & \ldots & N_{j8} & 0 & 0 \\ 0 & N_{j1} & 0 & \ldots & 0 & N_{j8} & 0 \\ 0 & 0 & N_{j1} & \ldots & 0 & 0 & N_{j8} \end{bmatrix}_{6x24} \tag{43}$$

โดยที่ [T*] คือเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงมิติ ซึ่งเกิดจากฟังก์ชันการกระจายการเคลื่อนที่ (shape function) ของเอลิเมนต์ทรงหกหน้า โดยแทนค่าพิกัดของจุดต่อของเอลิเมนต์แท่งในระบบธรรมชาติลงใน ค่าฟังก์ชันการกระจายการเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์ทรงหกหน้าก็จะได้เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงมิติโดยจะเปลี่ยนให้ ความแข็งเกร็ง (stiffness) ของเอลิเมนต์แท่งอยู่ในระบบธรรมชาติและมีขนาด 24 x 24 ก็จะสามารถหาค่า $[K_{RC}]_{(24x24)}$ ได้

เปรียบเทียบระหว่างวิธีการแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model) กับวิธีสร้างแบบจำลองกระจาย (Smeared Model) สิ่งที่เหมือนกันคือการแบ่งแบบจำลองเป็นเอลิเมนต์ (meshing) ของแบบจำลองทั้งสองแบบจะไม่ขึ้นอยู่กับเหล็กเสริมเลย กล่าวคือแบบจำลองทั้งสองแบบการแบ่งเอลิเมนต์จะขึ้นอยู่กับรูปร่างของคอนกรีตเท่านั้นซึ่งคือเอลิเมนต์ทรงหกหน้านั้นเอง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

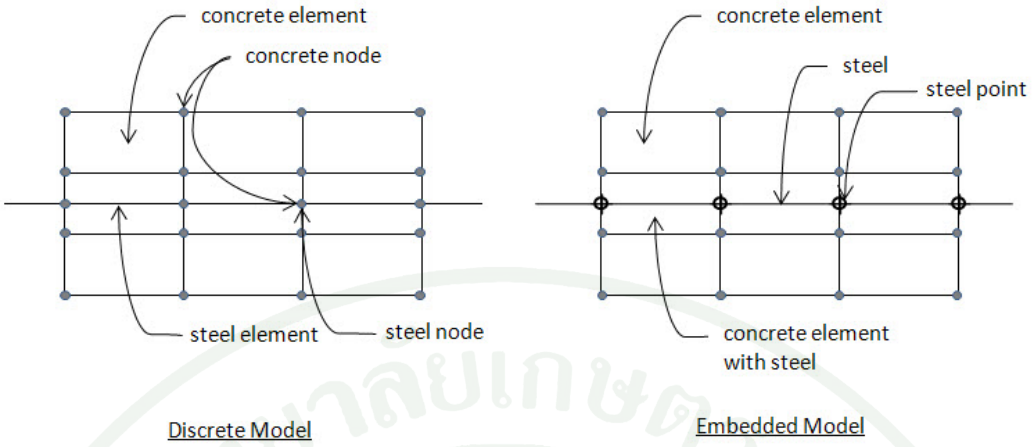


ภาพที่ 15 การเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองแบบกระจายตัว (Smeared Model) และแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model)

สิ่งที่ต่างกันอย่างเห็นได้ชัดคือการกระจายตัวของค่าความแข็งเกร็ง (stiffness) ของแบบจำลองทั้งสองคือ แบบจำลองแบบกระจายตัว (Smeared Model) จะกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมเข้าไปที่จุดต่อ (node) ของเอลิเมนต์คอนกรีตทั้ง 8 จุด เท่า ๆ กันทั้ง 8 จุดต่อโดยไม่คำนึงถึงตำแหน่งของเหล็กเสริม ต่างกับวิธีสร้างแบบจำลองแบบฝัง (Embedded Model) ซึ่งตำแหน่งของเหล็กเสริมจะมีผลต่อการกระจายของค่าความแข็งเกร็ง โดยระยะห่างระหว่างจุดที่เหล็กเสริมสัมผัสกับผิวเอลิเมนต์คอนกรีต กับจุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีต ถูกนำมาคิดในขั้นตอนของการกระจายค่าความแข็งเกร็งด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Technique) จึงจะเห็นได้ว่าวิธีสร้างแบบจำลองแบบฝัง (Embedded Model) จะให้ค่าที่ใกล้กับความเป็นจริงมากกว่า

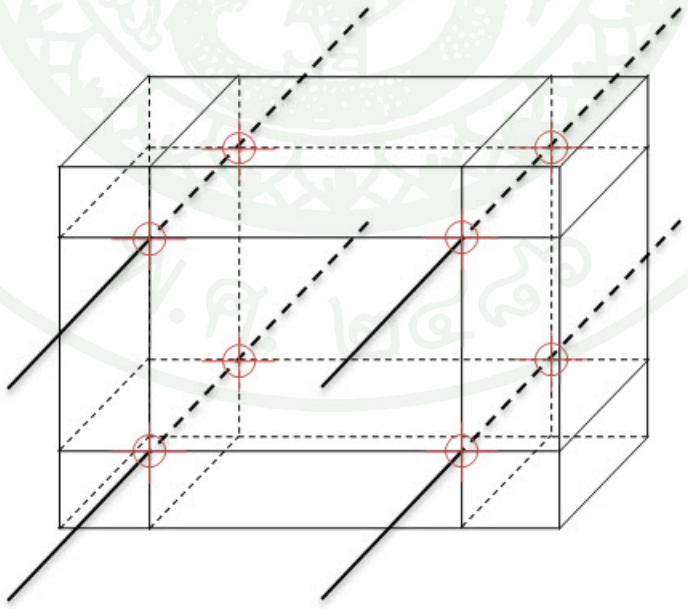
เปรียบเทียบระหว่างวิธีการแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model) กับวิธีสร้างแบบจำลองแบบแยกกันระหว่างเหล็กเสริมและคอนกรีต (Discrete Model) สิ่งที่เหมือนกันระหว่างแบบจำลองทั้งสองแบบคือ การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมเข้าในเอลิเมนต์คอนกรีตโดยคำนึงถึงตำแหน่งของเหล็กเสริม แต่สิ่งที่ต่างกันระหว่างรูปแบบจำลองทั้งสอง คือข้อกำจัดในการแบ่งเอลิเมนต์

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



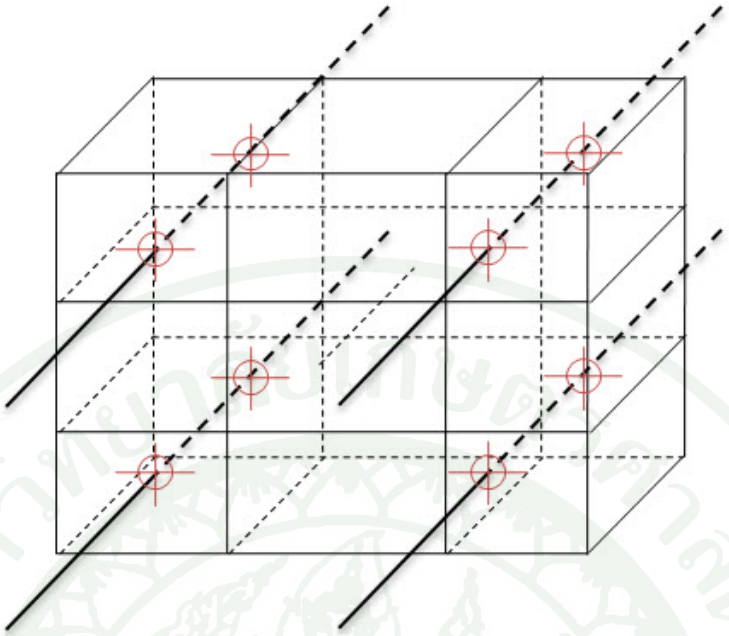
ภาพที่ 16 การเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) และแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model)

การแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) จะถูกกำหนดด้วยตำแหน่งของเหล็กเสริม คือ ตำแหน่งจุดต่อ (node) ของเอลิเมนต์เหล็กเสริมและเอลิเมนต์คอนกรีตจะต้องอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันเท่านั้น เช่นถ้ามีเหล็กเสริมผ่านเอลิเมนต์คอนกรีตจะต้องแบ่งเอลิเมนต์นั้นเพื่อให้จุดต่อของเอลิเมนต์ของคอนกรีตและเหล็กเสริมตรงกัน จึงจะสามารถคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้



ภาพที่ 17 การสร้างแบบจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กแบบแยกตัว (discrete model)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 18 การสร้างแบบจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กด้วยเทคนิคการฝัง (embedded technique)

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าการสร้างแบบจำลองด้วยวิธีฝังจะมีข้อดีหลัก ๆ 2 ข้อ คือ การกระจายความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมเข้าในเอลิเมนต์ของคอนกรีตจะคำนึงถึงตำแหน่งของเหล็กเสริมด้วย และการแบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนย์ย่อยจะไม่ต้องคำนึงถึงตำแหน่งของเหล็กเสริมทำให้ง่ายต่อการแบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์ (meshing)

ปัญหาการแก้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

การคำนวณด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องแบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์เล็ก ๆ จำนวนหลายเอลิเมนต์ ซึ่งจำนวนเอลิเมนต์จะส่งผลต่อความถูกต้องของแบบจำลองเมื่อจำนวนเอลิเมนต์มากขึ้นความถูกต้องของแบบจำลองก็จะมากขึ้นด้วย ดังนั้นในช่วงของการคำนวณแก้ปัญหาด้วยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ จึงจำเป็นต้องแก้ระบบสมการ (system of equations) ที่มีขนาดใหญ่ที่ประกอบด้วยสมการย่อยและตัวไม่รู้ค่าจำนวนมาก ซึ่งไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้หากไม่มีความเข้าใจในวิธีการแก้ระบบสมการนั้น จากสมการหลักของไฟไนต์เอลิเมนต์

$$\{F\} = [K]\{d\} \tag{44}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เมื่อ F คือ เมทริกซ์ของแรงที่กระทำ, K คือ เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง (stiffness matrix) และเมทริกซ์ d คือ เมทริกซ์การเคลื่อนที่ของจุดต่อในเอลิเมนต์ซึ่งเป็นตัวที่ไม่ทราบค่าและต้องการแก้สมการหาค่า ซึ่งหากมีเอลิเมนต์จำนวนมาก ๆ ตัวไม่ทราบค่าที่ต้องการแก้สมการหาก็จะมากไปด้วย หลักการแก้สมการง่าย ๆ คือ เมื่อต้องการหาค่า d และทราบค่า F กับ K ก็จะอินเวอร์สค่า K และย้ายข้างของสมการเพื่อหาค่า d ดังนี้

$$\{d\} = [K]^{-1}\{F\} \tag{45}$$

การแก้สมการที่มีการกำหนดขอบเขตเงื่อนไข

การแก้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องมีการกำหนดขอบเขตเงื่อนไขเพื่อให้สามารถแก้สมการได้ และเพื่อกำหนดจุดยึดรั้งในการสร้างแบบจำลอง กล่าวคือทุก ๆ แบบจำลองจะต้องมีการยึดรั้งหรือฐานรองรับเพื่อให้สามารถกำหนดขอบเขตเงื่อนไขของปัญหาได้ ตัวอย่าง $F = Kd$ ถ้ากำหนดให้ $d_1 = a_1$ ซึ่งเป็นค่าที่กำหนดเงื่อนไขของแบบจำลอง อาจเท่ากับศูนย์หรือไม่ก็ได้ เมื่อทราบค่า a_1 จึงสามารถใช้วิธีกำจัดแถว หลักเพื่อลดขนาดเมทริกซ์และสามารถแก้สมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{46}$$

เมื่อทำการกำจัดแถว หลักที่ทราบค่าแล้วจะได้เป็น

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2N} \\ K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N2} & K_{N3} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 - K_{21}a_1 \\ F_3 - K_{31}a_1 \\ \vdots \\ F_N - K_{N1}a_1 \end{Bmatrix} \tag{47}$$

เมื่อผ่านวิธีการกำจัดจะเห็นว่าจะตัดแถว หลักที่ทราบค่าเงื่อนไข ทำให้เมทริกซ์ความแข็งเกร็งมีขนาดลดลงและทำให้สามารถแก้สมการที่มีการทราบค่า หรือกำหนดค่าเงื่อนไขได้ วิธีการนี้จะให้ค่าที่ถูกต้องแม่นยำในการแก้สมการ หากแต่ถ้ามองในแนวทางการพัฒนาโปรแกรมบางท่านอาจจะเห็นว่าเป็นวิธีการที่ยุ่งยากในการพัฒนาโปรแกรม ในการแก้ปัญหาที่ทราบค่าเงื่อนไขยังมีอีก

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิธีที่มีขั้นตอนการพัฒนาโปรแกรมที่ง่ายกว่าคือ วิธี Penalty Approach (Tirupathi R. Chandrupatla and Ashok D. Belegundu, 2002) ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

การแก้สมการที่ทราบค่าเงื่อนไขด้วยวิธี Penalty Approach

ในวิธีการ Penalty Approach เมื่อทราบค่า $d_1 = a_1$ ซึ่งเป็นค่าที่กำหนดเงื่อนไขของแบบจำลอง อาจเท่ากับศูนย์หรือไม่ก็ได้วิธีการนี้จะทำการดัดแปลงแก้ไขเมทริกซ์ของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วยการใช้ค่ามาก ๆ ค่าหนึ่งในการแก้สมการโดยสมมุติให้ค่านั้นคือค่า C โดยค่าความถูกต้องจะขึ้นอยู่กับการเลือกค่า C นั้นเองโดยมีรูปแบบขั้นตอนดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{48}$$

เมื่อใช้วิธีการ Penalty Approach ระบบสมการจะเปลี่ยนไปเป็น

$$\begin{bmatrix} (K_{11} + C) & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{22} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + Ca_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \tag{49}$$

จะเห็นว่าเมื่อใช้วิธีการ Penalty Approach นี้เป็นวิธีการประมาณ ยิ่งค่า C มากความถูกต้องของการแก้สมการยิ่งมากขึ้นไปด้วย การแก้สมการด้วยวิธีการนี้จะลดความยุ่งยากให้การเขียนโปรแกรมลงมากแต่ก็ต้องแลกมาด้วยการลดความถูกต้องลงไปนั้นเอง

วิธีการที่กล่าวมาข้างต้นนี้เมื่อทำการแก้สมการ จำเป็นต้องต้องหาค่าอินเวอร์สของเมทริกซ์ความแข็งเกร็ง ($[K]^{-1}$) ซึ่งเมื่อเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของแบบจำลองมีขนาดใหญ่มากขั้นตอนการหาค่าอินเวอร์ส จะยุ่งยากมาก ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงใช้ วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method) ในการแก้สมการเพื่อหาค่าเมทริกซ์ {d} โดยวิธีการแก้สมการด้วยการกำจัดแบบเกาส์มีหลักการและขั้นตอนดังนี้ (ปราโมทย์, 2551)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method)

ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์จัดได้ว่าเป็นระเบียบวิธีการแก้สมการที่ได้รับความนิยมมากวิธีหนึ่ง เป็นวิธีที่มักนิยมใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขนาดใหญ่ซึ่งใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ โดยทั่วไปการจำกัดแบบเกาส์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอน คือ

การกำจัดไปข้างหน้า (forward elimination) หากเรามีระบบสมการที่ประกอบด้วย 3 สมการย่อย ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \tag{50}$$

การกำจัดไปข้างหน้าคือการเปลี่ยนระบบสมการไปให้อยู่ในรูปแบบซึ่งเมทริกซ์จัตุรัสทางด้ายซ้ายของสมการ กลายเป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยค่าศูนย์ตลอดแถบล่างซ้ายของเมทริกซ์นั้นในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{Bmatrix} \tag{51}$$

เครื่องหมายที่เป็นตัวยกของสัมประสิทธิ์แสดงว่าสัมประสิทธิ์นั้นเป็นค่าใหม่ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปจากสัมประสิทธิ์ค่าเดิม

การแทนค่าย้อนกลับ (back substitution) เมื่อจัดระบบสมการให้อยู่ในรูปแบบด้วยวิธีกำจัดไปข้างหน้าแล้ว ก็เป็นการง่ายที่จะคำนวณค่า x โดยเริ่มจากสมการสุดท้ายก่อน แล้วทำไล่ย้อนกลับขึ้นไปเพื่อหาค่า x ที่ละสมการดังนี้

$$x_3 = b''_3 / a''_{33} \tag{52}$$

$$x_2 = (b'_2 - a'_{23} x_3) / a'_{22} \tag{53}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \quad (54)$$

จะเห็นว่าวิธีการกำจัดแบบเกาส์มีขั้นตอนที่ชัดเจนและง่ายต่อการนำมาเขียนเป็นโปรแกรมในการคำนวณ แต่วิธีการโดยตรงของการจำกัดแบบเกาส์นั้นยังอาจเกิดข้อผิดพลาดขึ้นได้จากหลายสาเหตุดังนี้

- ปัญหาจากการหารด้วยศูนย์ จะเห็นว่าการแก้สมการด้วยการจำกัดแบบเกาส์นั้นจำเป็นจะต้องมีการหารด้วยจำนวนที่อยู่ในแนวทแยงมุมหลัก (diagonal term) ของเมทริกซ์จัตุรัสดังนั้นถ้าค่านั้นมีค่าเป็นศูนย์จะทำให้การจำกัดแบบเกาส์ไม่สามารถทำงานได้

- ความผิดพลาดจากการปัดเศษ เนื่องจากการกำจัดแบบเกาส์จะทำการคูณหารเลขอยู่ตลอดเวลา ความผิดพลาดจากการปัดเศษที่เกิดขึ้นสามารถแพร่กระจายออกไปได้ ซึ่งอาจก่อให้เกิดความผิดพลาดต่อเนื่องสู่ผลลัพธ์ที่คำนวณได้

- ปัญหาระบบสมการในสภาวะที่ไม่เหมาะสม ด้วยสาเหตุที่ว่าถ้าสัมประสิทธิ์ในเมทริกซ์จัตุรัสเปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อย กลับก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างมากกับผลลัพธ์ที่ได้ สามารถตรวจสอบได้ว่าเมทริกซ์นั้นอยู่ในสภาวะทีเหมาะสมหรือไม่ด้วยการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) ของเมทริกซ์นั้น

จากที่กล่าวมาข้างต้นอธิบายได้ว่าปัญหาที่เกิดจากการกำจัดแบบเกาส์ เกิดจากความผิดพลาดจากการปัดเศษและการหารด้วยศูนย์ ปัญหาความผิดพลาดจาการปัดเศษสามารถแก้ไขได้ในขั้นตอนการเขียนโปรแกรม โดยให้ตัวแปรสามารถเก็บตัวเลขนัยสำคัญได้มากขึ้น ส่วนปัญหาอื่นสามารถแก้ได้ด้วยวิธีต่อไปนี้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

การเลือกตัวหลัก (pivoting)

การเลือกตัวหลัก (pivoting) ดังที่กล่าวไว้หาสัมประสิทธิ์ใด ๆ ในแถวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์จัตุรัสมีค่าเป็นศูนย์แล้ว วิธีการกำจัดแบบเกาส์จะไม่สามารถดำเนินต่อไปได้ ถึงแม้ค่าสัมประสิทธิ์ดังกล่าวจะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ก็ตาม หากมีค่าน้อยมากก็อาจก็ให้เกิดปัญหาเนื่องจากความผิดพลาดของการปัดเศษได้เช่นกัน ปัญหาอาจแก้ด้วยขั้นตอนที่เรียกว่า การเลือกตัวหลัก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 3.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0001 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} \tag{55}$$

จากระบบสมการข้างต้นคำตอบที่ถูกต้องคือ $x_1 = 1/3$ และ $x_2 = 2/3$ จะเห็นได้ว่าค่าตามแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์จัตุรัสนี้มีค่าน้อยมาก (0.0003) เมื่อเทียบกับค่าสัมประสิทธิ์ที่อยู่รอบข้าง เมื่อใช้วิธีการกำจัดด้วยเกาส์แก้สมการจะได้ผลลัพธ์คือ $x_1 = 0.3000$ และ $x_2 = 0.66667$ ซึ่งจะผิดจากคำตอบที่ถูกต้องไปถึง 10%

หากเราทำการสลับสมการย่อยเสียใหม่ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.0003 & 3.0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 2.0001 \end{Bmatrix} \tag{56}$$

แล้วใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์แก้ระบบสมการนี้ จะได้ค่าคำตอบของสมการคือ $x_1 = 0.3333$ และ $x_2 = 0.66667$ จะเห็นว่าค่าที่ได้จากสลับสมการนี้มีความผิดพลาดเพียง 0.001% เท่านั้น

การจัดสเกล (Scaling)

การจัดสเกล (Scaling) ระบบสมการในการแก้ปัญหาทางไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วยสมการย่อยต่าง ๆ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์จำนวนมาก จึงมีโอกาสที่ค่าสัมประสิทธิ์แต่ละค่าจะมีค่าแตกต่างกันมาก ซึ่งการจัดสเกลจะช่วยแก้ปัญหานี้ ดังตัวอย่าง

$$\begin{bmatrix} 2 & 100,000 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100,000 \\ 2 \end{Bmatrix} \tag{57}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ซึ่งคำตอบที่ถูกต้องของระบบสมการนี้คือ $x_1 = 1.00002$ และ $x_2 = 0.99998$ หากเราใช้การคำนวณโดยมีตัวเลขนัยสำคัญเพียง 3 ตำแหน่งในการคำนวณ แล้วใช้การกำจัดแบบเกาส์คำนวณจะได้ผลลัพธ์ดังนี้ $x_1 = 0.00$ และ $x_2 = 1.00$ จะเห็นได้ว่ามีความผิดพลาดเกิดขึ้นถึง 100%

หากเราทำใหม่โดยใช้วิธีการจัดสเกล กล่าวคือ ทำการหารตลอดทุก ๆ สมการด้วยสัมประสิทธิ์ที่มีค่าสูงสุดของสมการนั้น ระบบสมการจะมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} 0.00002 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \tag{59}$$

จากนั้นใช้วิธีการเลือกตัวหลัก ในการจัดรูปแบบระบบสมการ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.00002 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{60}$$

ซึ่งเมื่อทำการแก้ระบบสมการนี้ด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์แล้วจะได้ผลลัพธ์เป็น $x_1 = 1.00$ และ $x_2 = 1.00$ ซึ่งจะเห็นว่าได้คำตอบที่มีความถูกต้องขึ้นมาก

ประวัติของการจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

Fanning (2001) สร้างแบบจำลองการตอบสนองของเหล็กเสริม ในคานคอนกรีตเสริมเหล็กโดยใช้แบบจำลอง 2 แบบคือ แบบจำลองแยกกัน (Discrete Model) และแบบจำลองกระจาย (Smeared Model) ซึ่งพบว่าแบบจำลองที่ให้ผลตอบสนองที่ดีที่สุดของพฤติกรรมเหล็กเสริม คือการใช้แบบจำลองแยกกัน (Discrete Model)

ในยุคแรกของการศึกษาเกี่ยวกับแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กได้เริ่มขึ้นโดยการเสนอของ Ngo and Scordelis (1967) นำเสนอการวิเคราะห์แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของคานคอนกรีตเสริมเหล็กอย่างง่าย ซึ่งคอนกรีตและเหล็กเสริมจะถูกแทนด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (CST Element) จุดเชื่อมต่อระหว่างคอนกรีตและเหล็กเสริมใช้ Bond link Element โดยที่ Bond link Element ไม่มีรูปร่างและขนาด ทำหน้าที่คล้ายสปริงเท่านั้น รวมทั้งอธิบายผลของแรงยึดเกาะและการลื่นไถลของเหล็กเสริมด้วย มีการวิเคราะห์คานแบบทฤษฎีเส้นตรง กำหนดรอยแตกร้าวไว้ล่วงหน้าโดยใช้การจำลองแบบจำลองแบบที่แยกกันระหว่างคอนกรีตและเหล็กเสริม (Discrete Model) เพื่อที่จะหาความเค้นหลักในคอนกรีต ความเค้นในเหล็ก

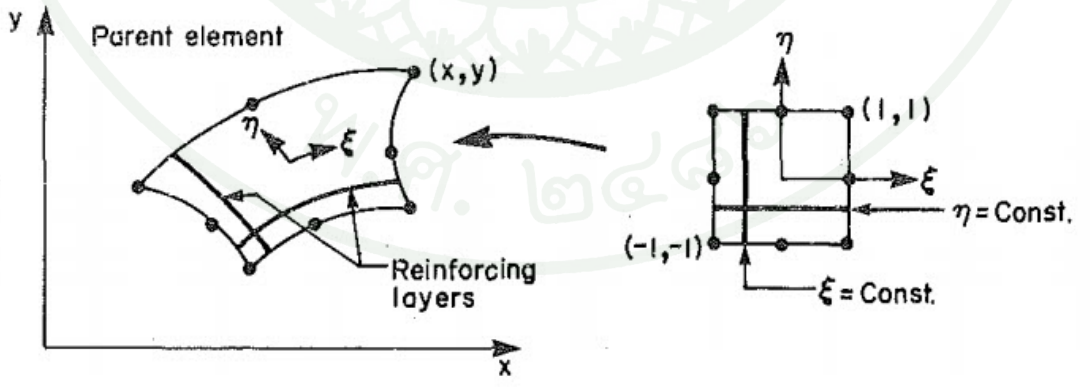
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เสริม หลังจากนั้นมาจึงเริ่มมีผู้ให้ความสนใจการวิเคราะห์โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์กันมากขึ้น

Rashid (1968) ได้เสนอแนวความคิดของวิธีการสร้างแบบจำลองกระจาย (Smeared Model) เพื่อศึกษาการตอบสนองของคอนกรีตอัดแรง (Prestress concrete) โดยคิดถึงผลกระทบของรอยแตกร้าว (crack) และอุณหภูมิที่เปลี่ยนไป การล้าของคอนกรีต (creep) และแรงที่เคยเกิดขึ้นในคอนกรีต (load history) โดยในปัจจุบันวิธีการสร้างแบบจำลองแบบกระจายตัวได้รับความนิยมอย่างมากในการวิเคราะห์โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear analysis)

ต่อมา Scordelis (1974) ได้มีการใช้รูปแบบการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบเดียวกันนี้ทำการศึกษาผลกระทบของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในคานที่มีรอยแตกร้าวในแนวทแยงมุมเนื่องจากแรงดึง โดยศึกษาถึงผลกระทบของเหล็กปลอก เหล็กเดือย การยึดเกาะของมวลรวมและรอยแตกตามแนวยาวของเหล็กเสริมบริเวณใกล้กับจุดรองรับ

Alaa and Terry (1991) ได้มีการเสนอความคิดในการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้เทคนิคการฝัง (embedded technique) ในการวิเคราะห์คอนกรีตเสริมเหล็กโดยใช้เทคนิคนี้กับเหล็กเสริมที่มีการเสริมเหล็กแบบโค้ง หรือเหล็กเสริมรับแรงในงานคอนกรีตอัดแรง (Prestress concrete) โดยใช้การคิดในแบบสองมิติ โดยดูผลกระทบทั้งการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) แบบสม่ำเสมอและแบบไม่สม่ำเสมอ

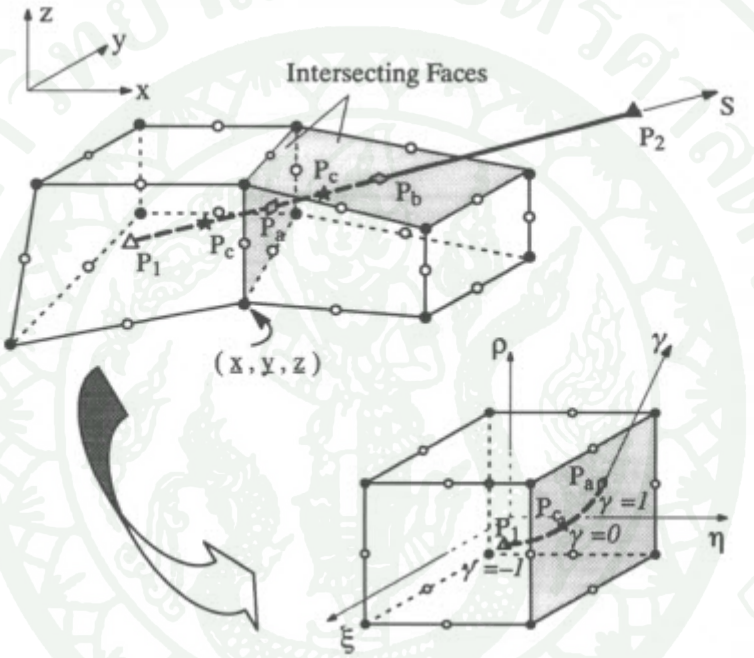


ภาพที่ 19 Embedded Reinforcement along Local Coordinate Lines

ที่มา: Alaa and Terry (1991)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Fariborz Barzegar and Srinivas maddipudi (1994) ได้เสนอแนวความคิดในการใช้เทคนิคการฝัง (embedded technique) ในการวิเคราะห์โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กในแบบจำลอง 3 มิติ โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อลดความยุ่งยากในการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) โดยการใช้เทคนิคการฝัง ฝังเหล็กเสริมเข้าไปในเอลิเมนต์คอนกรีตในขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) โดยการใช้วิธีการ inverse-mapping ในการอินทิเกรตไปตามความยาวของเหล็กเสริมโดยสามารถใช้วิธีนี้ได้กับเหล็กเสริมทั้งตรงและโค้ง

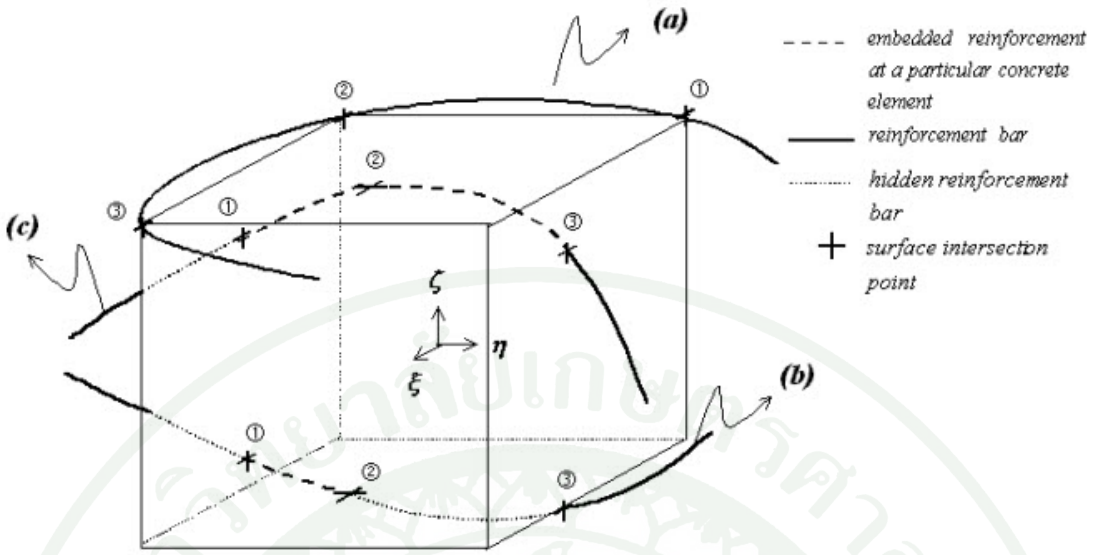


ภาพที่ 20 Embedded Reinforcement in 3D Mesh of Concrete Element

ที่มา: Fariborz Barzegar and Srinivas Maddipudi (1994)

Gomes and Awruch (2000) ได้เสนองานวิจัยเกี่ยวกับการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็กในแบบจำลอง 3 มิติ การวิเคราะห์เป็นการวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้นและใช้เทคนิคการฝังในการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) คอนกรีตและเหล็กเสริม โดยใช้การกำหนดการเคลื่อนที่เป็นตัวแปรต้น (Displacement Control Method) ในการหาการตอบสนองของคอนกรีตเสริมเหล็ก ได้ให้ข้อสรุปว่าการสร้างแบบจำลอง 3 มิติด้วยเทคนิคการฝังในการวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้นสามารถทำได้อย่างสมเหตุผล และสามารถทำนายพฤติกรรมของคอนกรีตเสริมเหล็กได้

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 21 Some reinforcement bar patterns in element natural co-ordinate system

ที่มา: Gomes and Awruch (2000)

Phuvoravan and Elisa (2003) ได้เสนอเอลิเมนต์ใหม่ที่ใช้ในการวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแผ่นพื้นคอนกรีตเสริมเหล็ก โดยเอลิเมนต์ใหม่นี้เกิดจากการรวม four-node Kichhoff shell element ซึ่งใช้สำหรับคอนกรีต รวมเข้ากับ two-node Euler beam element สำหรับเหล็กเสริมเข้าด้วยกัน โดยจะเชื่อต่อสองเอลิเมนต์นี้เข้าด้วยกันด้วยการเชื่อมต่อแบบแข็งเกร็ง (Rigid links) โดยการกำจัดจุดต่อ(node) ของ beam element ออกในขั้นสุดท้ายของการแบ่งเอลิเมนต์ (mesh) เอลิเมนต์ใหม่นี้ได้นำมาเปรียบเทียบกับผลการทดสอบในห้องทดลอง และได้ผลลัพธ์ว่าสามารถใช้งานเอลิเมนต์นี้ได้อย่างมีประสิทธิภาพและมีความถูกต้องสูง

Libor and Jan (2006) ได้เสนองานวิจัยการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์การตอบสนองของแรงยึดเหนี่ยวในเหล็กเสริมของคอนกรีต ได้ทำการวิเคราะห์โดยยึดรูปแบบการวิเคราะห์ใน 1 มิติ เป็นหลัก ในงานวิจัยนี้ได้เสนอตัวอย่าง 4 ตัวอย่างด้วยกันคือ การวิเคราะห์การทดสอบแบบ pull-out, การพังทลายของคานคอนกรีตเสริมเหล็กด้วยจากแรงเฉือน, การวิเคราะห์ความสามารถในการต้านแรงเฉือน (shear strength) ในแผ่นพื้นคอนกรีตอัดแรงแบบ hollow core และการประเมินความสามารถในการใช้งานของสนามฮอกกี้ที่สร้างใหม่ในสาธารณรัฐเช็ก

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

อุปกรณ์และวิธีการ

อุปกรณ์

1. เครื่องคอมพิวเตอร์
2. โปรแกรมแอนซิส (ANSYS)
3. โปรแกรม Microsoft Visual C# 2008 Express Edition

วิธีการ

การดำเนินการวิจัยเพื่อพัฒนาเอลิเมนต์คอนกรีตเสริมเหล็กโดยใช้เทคนิคการฝังเหล็กเสริม (embedded reinforcement technique) เพื่อใช้สำหรับการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แบ่งออกเป็นสามหัวข้อหลัก ๆ คือ การศึกษาทฤษฎี การพัฒนาโปรแกรม การตรวจสอบความถูกต้องของเอลิเมนต์ โดยมีขั้นตอนของการวิจัยเป็นหัวข้อต่าง ๆ ดังนี้

1. ศึกษาทฤษฎีวิธีการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เพื่อเข้าใจถึงวิธีการขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกต้อง ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการพัฒนาโปรแกรมต่อไป รวมถึงศึกษาวิธีการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการสร้างแบบจำลองด้วยการฝังเหล็กเสริม เพื่อให้การพัฒนาเอลิเมนต์ในโปรแกรมเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ

2. ศึกษารายละเอียดและขั้นตอนของการเขียนโปรแกรมด้วยภาษา C#

ศึกษาถึงวิธีการพัฒนาโปรแกรม และโครงสร้างภาษา C# เพื่อให้การพัฒนาโปรแกรมเป็นไปอย่างราบรื่นและมีประสิทธิภาพ กล่าวคือ ภาษา C# (ซี ชาร์ป) คือภาษาโปรแกรม (Programming Language) ที่พัฒนาขึ้นมาจาก Microsoft โดยมี Anders Hejlsberg เป็นหัวหน้าทีมพัฒนา มีต้นแบบมาจาก C++ และ Java มีลักษณะเป็นภาษาที่ใช้รูปแบบเชิงวัตถุ (OOP) เต็มรูปแบบ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

3. เขียนแผนผัง (Flow Chart) การทำงานของโปรแกรมที่จะพัฒนา

เขียนแผนผังในการทำงานของโปรแกรมที่ต้องการจะพัฒนา เพื่อความสะดวกในการพัฒนา เนื่องจากการเขียนแผนผัง (Flow Chart) จะทำให้เข้าใจขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม และยังสะดวกในการตรวจสอบความถูกต้องในขั้นตอนการทำงานต่าง ๆ ของโปรแกรมด้วย

4. พัฒนาโปรแกรมในส่วนของการคำนวณ

เริ่มพัฒนาโปรแกรมในส่วนของการคำนวณการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยแบ่งการทำงานออกเป็นส่วน ๆ เพื่อง่ายต่อการพัฒนาต่อ และการตรวจสอบความถูกต้องของการพัฒนาโปรแกรม ไม่ต้องตรวจสอบโปรแกรมใหม่ทั้งหมดซึ่งใช้เวลามากและยากต่อการตรวจสอบ อีกทั้งยังง่ายต่อการเพิ่มความสามารถต่าง ๆ เข้าไปในโปรแกรมอีกด้วย

5. ตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณ

การตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณ ทำได้โดย ใช้กรณีศึกษาในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมและเอลิเมนต์ที่พัฒนาขึ้น กับโปรแกรมคำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์อื่น ๆ ที่ได้รับความเชื่อถือในปัจจุบัน ซึ่งในงานวิจัยนี้โปรแกรมที่ถูกนำมาใช้ในการตรวจสอบคือ โปรแกรมแอนซิส (ANSYS)

6. พัฒนาโปรแกรมในส่วนของการติดต่อกับผู้ใช้งาน (user interface)

ทำการพัฒนาเพิ่มเติมในส่วนของการติดต่อกับผู้ใช้งาน ส่วนการป้อนข้อมูล และส่วนการแสดงผล เพื่อให้เกิดความสะดวกและง่ายต่อการเข้าใจของผู้ใช้งานที่เพียงพอ

7. แก้ไขปรับปรุงโปรแกรม

ผลที่ได้จากการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมทำให้ทราบถึงความผิดพลาดที่เกิดขึ้น เมื่อทราบข้อผิดพลาดของการคำนวณ และการใช้งานแล้ว จึงทำการแก้ไขโปรแกรมตามข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้น ตามความเหมาะสม

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

8. จัดทำรายงานข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

จัดทำรายงานข้อมูลการทำงานของโปรแกรมและการตรวจสอบการทำงาน ตามกรณีศึกษาต่าง ๆ เพื่อสรุปผลถึงการทำงานของเอลิเมนต์และโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น ว่าให้ผลลัพธ์เป็นเช่นไร และทำไมถึงให้ผลลัพธ์เป็นเช่นนั้น

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ผลและวิจารณ์

โปรแกรมที่นำเสนอ

ในงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์หลักอยู่ประการหนึ่งคือการนำเทคนิคการสร้างแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (embedded model) มาทำให้สามารถใช้งานได้จริง ด้วยการพัฒนาโปรแกรมขึ้นเพื่อวิเคราะห์โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยให้โปรแกรมใช้เทคนิคการฝังเหล็กเสริมในการสร้างแบบจำลองโปรแกรมที่นำเสนอนั้นได้พัฒนาโดยใช้ภาษาคอมพิวเตอร์ C# ในการพัฒนาโดยโปรแกรมจะประกอบด้วยส่วนหลัก ๆ 4 ส่วนด้วยกัน ดังนี้

1. ส่วนต่อประสานกับผู้ใช้ (user interface, UI)
2. ส่วนของการแสดงผล 3 มิติ (3D Graphics)
3. ส่วนของการคำนวณ (calculation function)
4. ส่วนของการเก็บข้อมูล (data read and write)

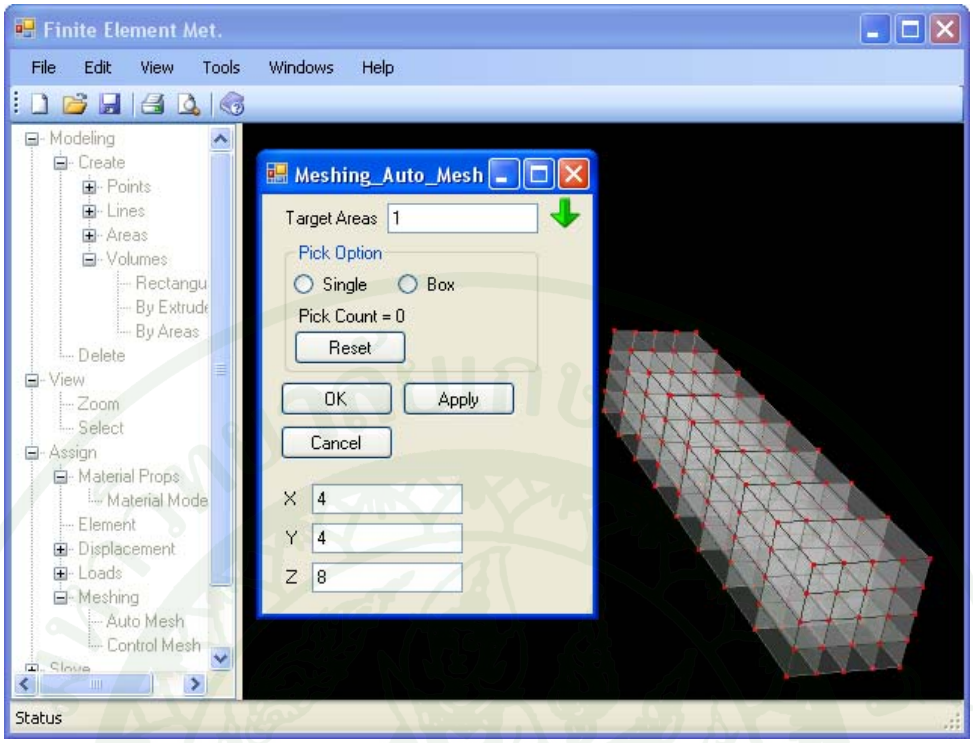
ส่วนประกอบหลัก ๆ ของโปรแกรมทั้ง 4 ส่วนจะทำงานประสานกันเพื่อให้โปรแกรมทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยมีรายละเอียดดังนี้

ส่วนต่อประสานกับผู้ใช้ (user interface, UI)

ส่วนต่อประสานกับผู้ใช้ หมายถึงสิ่งที่มีไว้เพื่อใช้สื่อสารกับผู้ใช้งานไม่ว่าจะเป็นระบบสิ่งของหรือในที่นี้คือ การติดต่อสื่อสาร โต้ตอบระหว่างคอมพิวเตอร์โปรแกรมและผู้ใช้โปรแกรม ประโยชน์ของการมีส่วนต่อประสานนี้คือ ผู้ใช้งานไม่จำเป็นต้องทราบหลักการหรือฟังชันก์ (function) และขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมทั้งหมด เพียงผู้ใช้งานเข้าใจส่วนต่อประสานกับผู้ใช้ก็สามารถใช้งานโปรแกรมได้

โดยมีหลักการที่ต้องคำนึงถึงในการออกแบบส่วนต่อประสานกับผู้ใช้ มีดังนี้ ความเรียบง่าย : มีรูปแบบที่เรียบง่าย ไม่ซับซ้อน และใช้งานได้สะดวก, ความสม่ำเสมอ : คือมีรูปแบบเดียวกันทั้งโปรแกรมหรือมีรูปแบบไม่แตกต่างกันมากนัก, การใช้งาน : สามารถใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพรองรับทุกการทำงานที่ผู้พัฒนาโปรแกรมได้ออกแบบไว้ เป็นต้น

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 22 ตัวอย่าง ส่วนต่อประสานกับผู้ใช้ (user interface, UI) ของโปรแกรมที่นำเสนอ

ส่วนของการแสดงผล 3 มิติ (3D Graphics)

ส่วนของการแสดงผล 3 มิติ ในโปรแกรมนี้ได้พัฒนาส่วนของการแสดงผล 3 มิติขึ้นเพื่อให้ผู้ใช้งานเกิดความเข้าใจในแบบจำลองที่สร้างจากโปรแกรม โดยส่วนแสดงผล 3 มิติจะทำงานโดยใช้ เครื่องมือ (tool) ซึ่งมีความสามารถในการแสดงผล 3 มิติ ในโปรแกรมนี้ได้เลือกใช้งาน openGL เป็นเครื่องมือหลักในการแสดงผล

openGL (open graphics library) คือ กลุ่มของคำสั่งที่ใช้ในการเชื่อมต่อการทำงานของโปรแกรม (software) เชื่อมต่อกับอุปกรณ์คอมพิวเตอร์ที่ใช้แสดงผล (hardware) สามารถใช้แสดงผลกราฟิก 2 มิติ และ 3 มิติ โดยที่ openGL สามารถทำงานได้ในหลาย ๆ ระบบปฏิบัติการ เช่น ระบบวินโดร์ (windows) และ Mac OS X เป็นต้น

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ส่วนของการคำนวณ (calculation function)

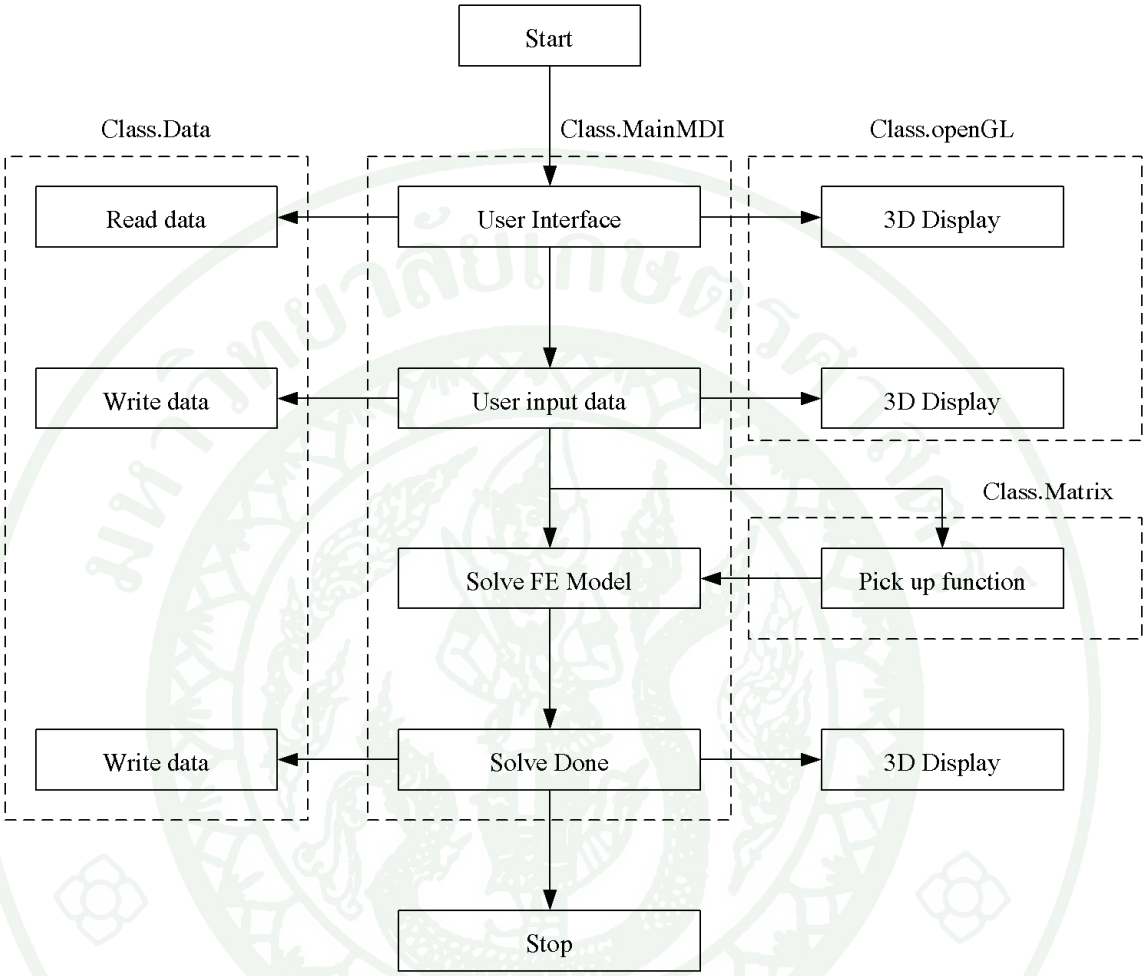
ในโปรแกรมนี้ส่วนของการคำนวณส่วนใหญ่จะอยู่ใน คลาส (class) Matrix ซึ่งประกอบด้วยฟังชันก์ (function) ต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณ โดยเมื่อส่วนต่อประสานกับผู้ใช้รับข้อมูลจากผู้ใช้งานก็จะเรียกฟังชันก์เหล่านี้จากคลาส Matrix ไปทำการคำนวณเพื่อแสดงผลกลับไปหาผู้ใช้งานอีกครั้ง

ส่วนของการเก็บข้อมูล (data read and write)

เมื่อส่วนต่อประสานกับผู้ใช้รับข้อมูลจากผู้ใช้งานแล้ว ทุกครั้งโปรแกรมที่นำเสนอจะนำข้อมูลไปเก็บที่คลาส Data ซึ่งคลาสนี้จะทำหน้าที่เก็บข้อมูลทุกอย่างของโปรแกรมเช่น ข้อมูลตำแหน่งและรูปร่างของแบบจำลอง, ข้อมูลตำแหน่งของจุดต่อของเอลิเมนต์, ข้อมูลแรงที่กระทำกับจุดต่อต่าง ๆ และข้อมูลสถานะของการแสดงผล 3 มิติเป็นต้น โดยทุกครั้งที่มีการรับข้อมูลใหม่จากผู้ใช้ข้อมูลเหล่านั้นจะถูกจัดเก็บใหม่ (update) เสมอ รวมถึงเมื่อทำการคำนวณเสร็จแล้วข้อมูลเหล่านั้นจะถูกทำการจัดเก็บก่อนแสดงผลให้ผู้ใช้งานทุกครั้ง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จากที่กล่าวมาโปรแกรมที่นำเสนอจะมีขั้นตอนการทำงานอย่างง่ายดังต่อไปนี้



ภาพที่ 23 แผนผัง (Flow Chart) การทำงานของโปรแกรม

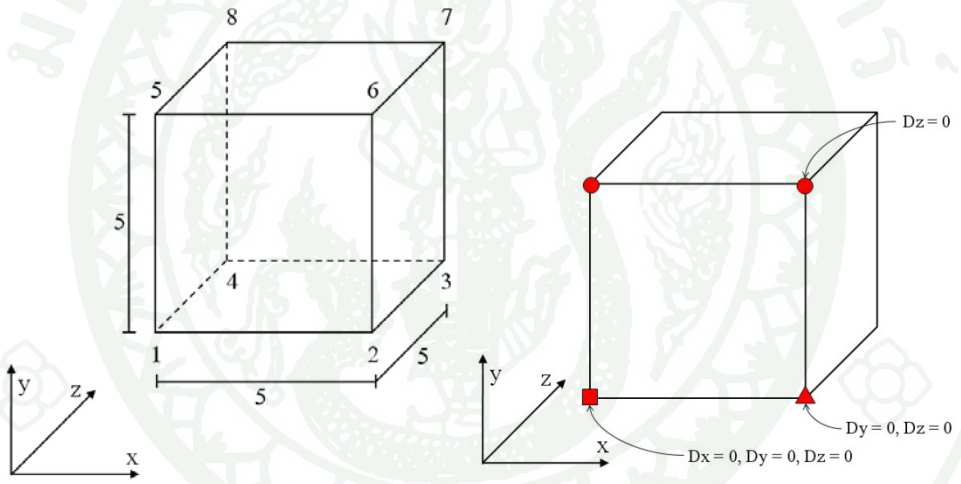
จากภาพทำให้เห็นขั้นตอนการทำงานประสานกันของคลาสในโปรแกรมที่นำเสนอโดยเมื่อเริ่มโปรแกรม โปรแกรมจะทำการอ่านค่าจากคลาส data จากนั้นนำไปแสดงผล 3 มิติ และเมื่อผู้ใช้งานให้ค่ากับโปรแกรม โปรแกรมจะทำการเก็บค่าไว้ในคลาส data จากนั้นทำการคำนวณโดยเลือกใช้ฟังชันก์จากคลาส Matrix เมื่อคำนวณเสร็จ โปรแกรมจะเก็บค่าที่คำนวณได้ไว้ที่คลาส data จากนั้นทำการแสดงผล 3 มิติให้ผู้ใช้งานต่อไป

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เมื่อทำการพัฒนาโปรแกรมในส่วนของการคำนวณเสร็จแล้ว ก็จะเริ่มทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมและเอลิเมนต์ที่พัฒนาขึ้น ตรวจสอบโดยใช้กรณีศึกษาในการเปรียบเทียบการคำนวณ ผลลัพธ์ของโปรแกรมและเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้น เทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้โปรแกรมแอนซิส (ANSYS) ที่กรณีศึกษาเดียวกัน

กรณีศึกษาที่ 1

กรณีศึกษาที่ 1 จะตรวจสอบเกี่ยวกับความถูกต้องของเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นเทียบกับเอลิเมนต์ของโปรแกรมแอนซิส ซึ่งเอลิเมนต์ที่ใช้ในการตรวจสอบนี้คือเอลิเมนต์ solid45 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้



ภาพที่ 24 ขนาดรูปร่างและการใส่จุดยึดรั้งของกรณีศึกษาที่ 1

จากภาพแบบจำลองในกรณีศึกษาที่ 1 นี้จะเป็นการสร้างแบบจำลอง 1 เอลิเมนต์ซึ่งไม่มีการเสริมเหล็ก มีขนาดตามแกนรวม X, Y, Z เท่ากับ 5 ซม. มีเลขจุดต่อ (node) และการใส่จุดยึดรั้งดังภาพที่ 24 เพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่อิสระในแนวแกนที่ไม่ทำให้เกิดการหมุน การใส่แรงให้กับแบบจำลองนี้จะแบ่งออกเป็นสองรูปแบบ ดังแสดงในตาราง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตารางที่ 1 รูปแบบการให้แรงกับแบบจำลองในกรณีศึกษาที่ 1

รูปแบบที่	จุดต่อที่แรงกระทำ	ขนาดของแรง (กก.)	ทิศทางของแรง
1	3	100	Z
	4	100	Z
	7	100	Z
	8	100	Z
2	3	100	Z

โดยในการสร้างแบบจำลองนี้กำหนดให้ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (E) เท่ากับ 250,000 กก./ซม^2. และค่าอัตราส่วนปัวซอง (ν) เท่ากับ 0.17 จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

ตารางที่ 2 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 1 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
1	1	0	0	0
	2	-5.44E-05	0	0
	3	-5.44E-05	0	0.00032
	4	0	0	0.00032
	5	0	-5.44E-05	0
	6	-5.44E-05	-5.44E-05	0
	7	-5.44E-05	-5.44E-05	0.00032
	8	0	-5.44E-05	0.00032

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตารางที่ 3 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 1 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
1	1	0	0	0
	2	-5.440E-05	0	0
	3	-5.440E-05	-0.27105E-19	0.00032
	4	0.26427E-18	0.94868E-19	0.00032
	5	0.15882E-18	-5.440E-05	0
	6	-5.440E-05	-5.440E-05	0
	7	-5.440E-05	-5.440E-05	0.00032
	8	0.29816E-18	-5.440E-05	0.00032

ตารางที่ 4 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 1 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
2	1	0	0	0
	2	-3.75E-05	0	0
	3	-0.00027	0.00023	0.000604
	4	-0.00023	9.73E-05	-0.00012
	5	-0.00013	1.03E-05	0
	6	-0.00012	-3.75E-05	0
	7	-0.00022	0.00019	-0.00012
	8	-0.00023	0.00011	-4.87E-05

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตารางที่ 5 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 1 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
2	1	0	0	0
	2	-3.75E-05	0	0
	3	-0.00027	0.00023	0.000604
	4	-0.00023	9.73E-05	-0.00012
	5	-0.00013	1.03E-05	0
	6	-0.00012	-3.75E-05	0
	7	-0.00022	0.00019	-0.00012
	8	-0.00023	0.00011	-4.87E-05

วิเคราะห์ผลการตรวจสอบกรณีศึกษาที่ 1

รูปแบบที่ 1

จากผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมทั้งสองโปรแกรม จะเห็นว่ามีค่าตรงกันโดยการเคลื่อนที่ ที่จุดต่อที่ให้แรงกระทำให้เกิดการเคลื่อนที่เท่ากัน แสดงว่าการใส่จุดยึดรั้งทำให้การเคลื่อนที่ตามแนวเกิดอิสระ และเมื่อตรวจสอบค่าการเคลื่อนที่จากโปรแกรมทั้งสอง กับการคำนวณด้วยทฤษฎีกลศาสตร์ จะเห็นว่ามีค่าเท่ากัน จากสมการ

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{61}$$

บางจุดต่อผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมแอนซิสจะให้ค่าที่น้อยมาก ๆ (10^{-18}) แต่ไม่เท่ากับศูนย์ แต่ผลที่ได้จากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น จะเท่ากับศูนย์ ในส่วนนี้ผู้วิจัยมีความเห็นว่าน่าจะเกิดจากวิธีการที่ใช้ในการคำนวณของโปรแกรมแอนซิส ซึ่งน่าจะใช้วิธี Penalty Approach ซึ่งจะให้ค่าไม่เท่ากับศูนย์แต่จะให้ค่าที่น้อยมาก ๆ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

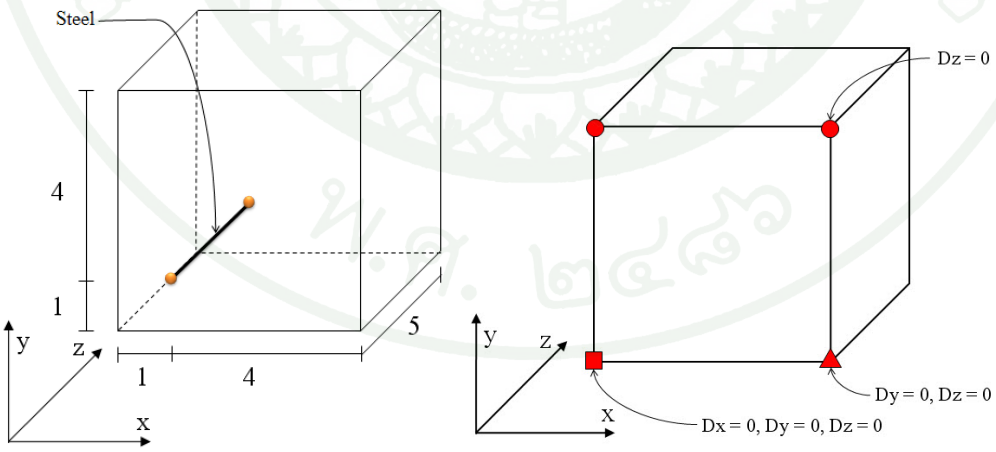
รูปแบบที่ 2

จากผลลัพธ์ในการให้แรงกระทำรูปแบบที่ 2 ผลลัพธ์จากโปรแกรมแอนซิสและโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีค่าเท่ากัน รูปแบบการให้แรงนี้จะทำให้แรงไม่สมดุลในหน้าตัด กล่าวคือ จุดต่อในหน้าตัด X-Y ไม่ได้เคลื่อนที่เท่ากัน จึงเป็นการตรวจสอบโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นได้ดี อีกทั้งยังต้องตรวจสอบกับจุดต่ออื่น ๆ ทั้ง 8 จุดต่อ และแรงที่กระทำก็จะต้องเปลี่ยนทิศทางให้ครบทั้ง 3 ทิศทาง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของเอลิเมนต์

จากผลการตรวจสอบทั้ง 2 รูปแบบการให้แรง แสดงถึงความถูกต้องของเอลิเมนต์ที่พัฒนาขึ้นเมื่อไม่มีการจำลองเหล็กเสริมในแบบจำลอง และค่าจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นและโปรแกรมแอนซิสให้ค่าที่เท่ากัน

กรณีศึกษาที่ 2

กรณีศึกษาที่ 2 จะเปรียบเทียบการสร้างแบบจำลองแบบกระจายตัวกับแบบจำลองแบบใช้เทคนิคการฝัง เปรียบเทียบกับเอลิเมนต์ของโปรแกรมแอนซิส ซึ่งเอลิเมนต์ที่ใช้ในการตรวจสอบนี้คือเอลิเมนต์ solid65 ซึ่งมีรายละเอียดดังภาพที่ 25

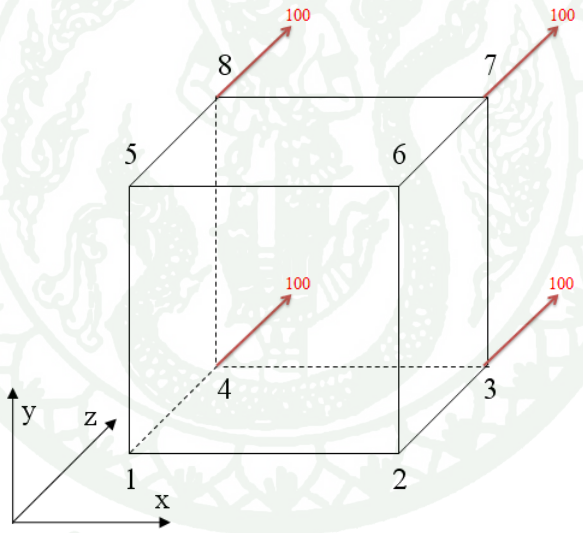


ภาพที่ 25 ขนาดรูปร่างและการใส่จุดยึดรั้งของกรณีศึกษาที่ 2

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จากภาพที่ 25 แสดงขนาดของแบบจำลองขนาด กว้าง ยาวและลึก 5 ซม. มีเหล็กเสริมที่ตำแหน่ง 1 ซม. จากแกน X และ Y ดังแสดงในภาพที่ 25 การสร้างแบบจำลองแยกเป็นสองรูปแบบ คือ สร้างด้วยแบบจำลองแบบกระจายตัว (Smeared Model) และแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded model)

การสร้างแบบจำลองโดยใช้โปรแกรมแอนซิส แบบจำลองที่สร้างขึ้นจะเป็นแบบจำลองแบบกระจายตัว (Smeared Model) มีเอลิเมนต์เดียวซึ่งจะกระจายเหล็กเสริมไว้ในคุณสมบัติของเอลิเมนต์ เช่นเดียวกับการสร้างแบบจำลองด้วยโปรแกรมที่นำเสนอ จะสร้างขึ้นด้วยวิธีสร้างจำลองแบบใช้เทคนิคการฝัง (Embedded model) ด้วยการสร้างแบบจำลองแบบนี้ทำให้คำนึงถึงตำแหน่งของเหล็กเสริมด้วย การยึดรั้งให้ยึดรั้งที่จุดต่อ 4 จุดต่อ ดังแสดงในภาพที่ 25 เพื่อให้สามารถยืดหดตัวได้ในแนวแกน X และ Y โดยที่เอลิเมนต์ไม่เกิดการหมุน



ภาพที่ 26 ภาพตำแหน่งแรงที่กระทำกับเอลิเมนต์ของการศึกษากรณีที่ 2

การให้แรงกับเอลิเมนต์แสดงดังภาพที่ 26 กล่าวคือให้แรง 100 กก. กระทำให้ทิศทางแกน Z ที่จุดต่อ 4, 3, 8 และ 7 โดยกำหนดให้ค่าคุณสมบัติของวัสดุแสดงดังตารางที่ 6 การนั้นทำการคำนวณหาค่าการเคลื่อนที่ของจุดต่อต่าง ๆ เปรียบเทียบกัน โดยในกรณีศึกษาที่ จะมุ่งประเด็นสนใจไปที่การเคลื่อนที่แกน Z ซึ่งเป็นแกนที่แรงกระทำที่จุดต่อที่รับแรงเท่านั้นโดยจะเปรียบเทียบแบบจำลองทั้งสองรูปแบบ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตารางที่ 6 คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 2

ค่าคุณสมบัติ	หน่วย	ค่าที่ใช้ในแบบจำลอง
อัตราส่วนบัวซองของคอนกรีต; ν_c	-	0.17
อัตราส่วนบัวซองของเหล็กเสริม; ν_s	-	0.33
โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต ; E_c	กก./ซม^2.	250,000
โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริม ; E_s	กก./ซม^2.	2,100,000
ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเหล็กเสริม	มม.	16

ตารางที่ 7 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 2

จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน Z Smeared Model (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z Embedded model (ซม.)
3	1.943E-4	3.118E-04
4	1.943E-4	-5.153E-06
7	1.943E-4	3.619 E-04
8	1.943E-4	3.118E-04

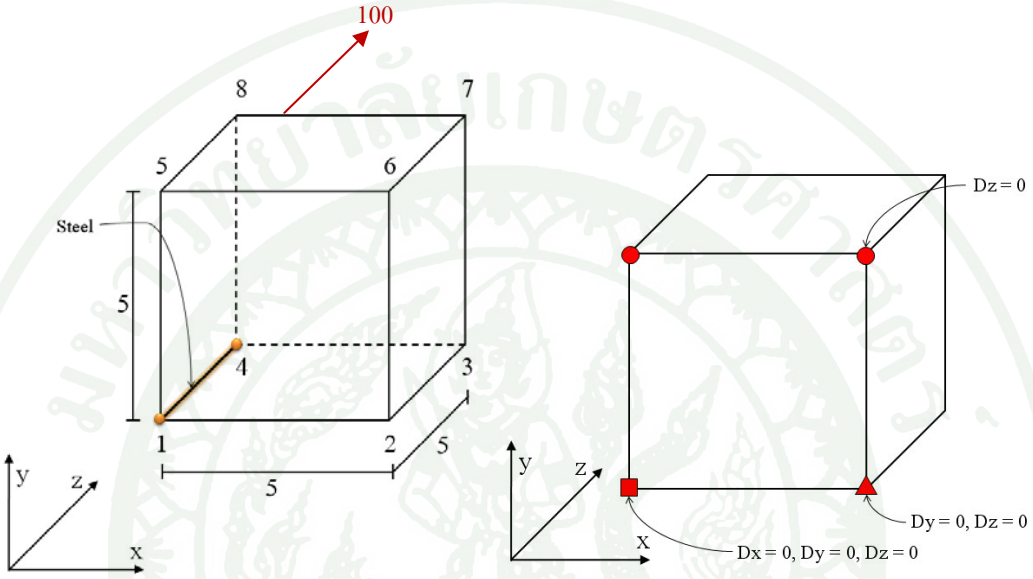
วิเคราะห์ผลการตรวจสอบกรณีศึกษาที่ 2

จากตารางที่ 7 จะเห็นว่าการเคลื่อนที่ของแบบจำลองทั้งสองให้ค่าการเคลื่อนที่ไม่เท่ากัน โดยจะเห็นว่าค่าการเคลื่อนที่ ที่ได้จากวิธีสร้างแบบจำลองแบบกระจายตัวให้ค่าที่จุดต่อที่ให้แรงกระทำเท่ากันทั้ง 4 จุดต่อ แสดงว่าวิธีการสร้างแบบจำลองด้วยวิธีนี้ไม่สนใจว่าตำแหน่งของเหล็กเสริมอยู่ที่ตำแหน่งใด แบบจำลองจะกระจายค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมเข้าที่จุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีตเท่ากันทุกจุด ต่างกันกับการสร้างแบบจำลองด้วยการใช้เทคนิคการฝังเหล็กเสริมค่าที่ได้จากแบบจำลองด้วยการใช้เทคนิคการฝังจะให้ค่าการเคลื่อนตัวน้อยมาก ๆ ที่ตำแหน่งจุดต่อที่อยู่ใกล้กับเหล็กเสริมและที่จุดต่ออื่น ๆ จะให้ค่าการเคลื่อนตัวมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับระยะห่างจากตำแหน่งของเหล็กเสริมนั้นเอง แสดงว่าในแบบจำลองนี้การสร้างแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded model) ให้ค่าที่เหมาสมใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากกว่าการสร้างแบบจำลองแบบกระจายตัว (Smeared Model)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

กรณีศึกษาที่ 3

กรณีศึกษาที่ 3 จะตรวจสอบเกี่ยวกับความถูกต้องของเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นเทียบกับเอลิเมนต์ของโปรแกรมแอนซิส ซึ่งเอลิเมนต์ที่ใช้ในการตรวจสอบนี้คือเอลิเมนต์ solid45 และ Link8 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้



ภาพที่ 27 ขนาดรูปร่างและการใส่จุดยึดรั้งของกรณีศึกษาที่ 3

ในกรณีศึกษาที่ 3 นี้จะแตกต่างกับกรณีศึกษาที่ 1 และ 2 กรณีศึกษานี้จะมีการจำลองเหล็กเสริมในแบบจำลองด้วย โดยเหล็กเสริมจะอยู่ที่ขอบของก้อนคอนกรีต เมื่อเป็นเช่นนี้การสร้างแบบจำลองของโปรแกรมแอนซิสและโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจะต่างกันดังนี้

การสร้างแบบจำลองโดยใช้โปรแกรมแอนซิส แบบจำลองที่สร้างขึ้นจะเป็นแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) มีเอลิเมนต์สองเอลิเมนต์คือเอลิมเมนต์คอนกรีตและเอลิเมนต์เหล็กเสริม โดยเอลิเมนต์คอนกรีตมีขนาด กว้าง ยาวและลึก 5 ซม. และมีเอลิเมนต์เหล็กเสริมใช้จุดต่อร่วมกันเอลิเมนต์คอนกรีต คือที่จุดต่อ 1 และ 4 ดังภาพที่ 27

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

การสร้างแบบจำลองด้วยเอลิเมนต์และโปรแกรมที่เสนอ แบบจำลองจะถูกสร้างขึ้นด้วยเทคนิคการฝังเหล็กเสริม (embedded reinforcement technique) จะมีเอลิเมนต์เกิดขึ้นแค่เอลิเมนต์เดียวคือเอลิเมนต์ทรงหกหน้าในการศึกษานี้เรียกว่าเอลิเมนต์คอนกรีตเสริมเหล็กโดยมีขนาดเท่ากับแบบจำลองของโปรแกรมแอนซิส

โดยทั้งสองแบบจำลองมีรูปแบบแรงที่กระทำ และค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ ดังนี้

ตารางที่ 8 รูปแบบการให้แรงของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 3

รูปแบบที่	จุดต่อที่แรงกระทำ	ขนาดของแรง (กก.)	ทิศทางของแรง
1	4	100	Z
2	8	100	Z

ตารางที่ 9 คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 3

ค่าคุณสมบัติ	หน่วย	ค่าที่ใช้ในแบบจำลอง
อัตราส่วนบัวซองของคอนกรีต; ν_C	-	0.17
อัตราส่วนบัวซองของเหล็กเสริม; ν_S	-	0.33
โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต ; E_c	กก./ซม^2.	250,000
โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริม ; E_s	กก./ซม^2.	2,100,000
ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเหล็กเสริม	มม.	16

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จากค่าต่าง ๆ ที่กำหนดให้กับโปรแกรมจะได้ผลลัพธ์จากโปรแกรมทั้งสอง ดังนี้

ตารางที่ 10 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 3 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
1	1	0	0	0
	2	-6.15E-06	0	0
	3	3.14E-05	1.59E-05	-1.93E-05
	4	3.76E-05	3.76E-05	9.90E-05
	5	1.38E-05	-6.15E-06	0
	6	1.55E-05	1.69E-06	0
	7	3.14E-05	1.76E-05	-7.98E-06
	8	2.97E-05	3.14E-05	-1.93E-05

ตารางที่ 11 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 3 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
1	1	0	0	0
	2	-6.15E-06	0	0
	3	3.14E-05	1.59E-05	-1.93E-05
	4	3.76E-05	3.76E-05	9.90E-05
	5	1.38E-05	-6.15E-06	0
	6	1.55E-05	0	0
	7	3.14E-05	1.76E-05	-7.98E-06
	8	2.97E-05	3.14E-05	-1.93E-05

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตารางที่ 12 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 3 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
2	1	0	0	0
	2	4.21E-06	0	0
	3	0.000139	-8.15E-05	-6.79E-05
	4	0.000135	-0.00019	-1.93E-05
	5	-0.00012	-4.36E-05	0
	6	-0.00015	1.20E-05	0
	7	9.10E-05	-6.94E-05	-0.00013
	8	0.000127	-0.00024	0.000585

ตารางที่ 13 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 3 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
2	1	0	0	0
	2	4.21E-06	0	0
	3	1.39E-04	-8.15E-05	-6.79E-05
	4	1.35E-04	-1.92E-04	-1.93E-05
	5	-1.18E-04	-4.36E-05	0
	6	-1.54E-04	1.20E-05	0
	7	9.10E-05	-6.94E-05	-1.26E-04
	8	1.27E-04	-2.36E-05	5.85E-04

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิเคราะห์ผลการตรวจสอบกรณีศึกษาที่ 3

รูปแบบที่ 1

รูปแบบการให้แรงที่ 1 ให้แรงที่จุดต่อ 4 ซึ่งเป็นจุดต่อที่มีเหล็กเสริมอยู่ โดยแบบจำลองของโปรแกรมแอนซิสใช้แบบจำลองแบบแยกตัวในที่นี้คอนกรีตและเหล็กเสริมใช้เอลิเมนต์เดียวกัน จึงเป็นแบบจำลองแรงยึดเหนี่ยวแบบสมบรูณ์ เมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้แล้ว ค่าที่ได้จากโปรแกรมทั้งสองมีค่าแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยประมาณร้อยละ 0.002

รูปแบบที่ 2

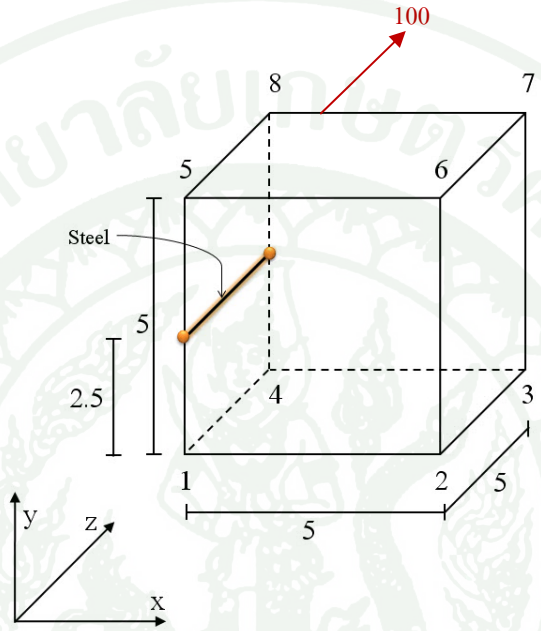
รูปแบบการให้แรงที่ 2 ให้แรงที่จุดต่อ 8 จุดต่อนี้เป็นจุดต่อที่ไม่มีเหล็กเสริมอยู่ เพื่อดูการกระจายของค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมในเอลิเมนต์คอนกรีตที่ตำแหน่งที่ไม่มีเหล็กเสริมอยู่ ผลลัพธ์ที่ได้โปรแกรมทั้งสองโปรแกรม มีค่าแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยคือประมาณร้อยละ 0.003

จากผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบการให้แรงทั้ง 2 รูปแบบ และการเปรียบเทียบกับโปรแกรมแอนซิส จะเห็นว่าค่าการเคลื่อนที่แตกต่างกันน้อยมาก ทั้งจุดต่อที่มีเหล็กเสริมและจุดต่อที่ไม่มีเหล็กเสริม แสดงถึงการกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมเข้าไปเอลิเมนต์ที่มีรูปแบบเหมือนกันทั้งแบบจำลองแบบแยกตัว และแบบจำลองที่ใช้เทคนิคการฝังเหล็กเสริม ในกรณีที่เหล็กจุดต่อของเอลิเมนต์เหล็กเสริมอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับจุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีต นอกจากนี้ได้ทำการทดสอบการให้แรงแบบอื่น ๆ ในจุดต่อทุกจุดได้ผลลัพธ์คือ การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นจากทั้งสองโปรแกรมให้ค่าที่ใกล้เคียงกันและไปในทิศทางเดียวกัน

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

กรณีศึกษาที่ 4

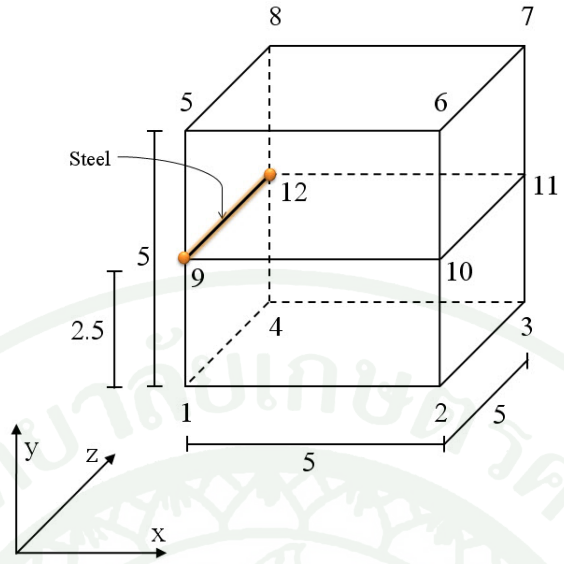
กรณีศึกษาที่ 4 จะตรวจสอบเกี่ยวกับความถูกต้องของเอลิเมนต์ในกรณีที่เหล็กเสริมไม่ได้อยู่ตำแหน่งเดียวกันกับจุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีต ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้



ภาพที่ 28 ขนาดรูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 4

จากรูปร่างแบบจำลองของกรณีศึกษาที่ 4 จะมีความแตกต่างในการสร้างแบบจำลองของโปรแกรมทั้งสอง คือ โปรแกรมและเอลิเมนต์ที่เสนอจะสามารถสร้างแบบจำลองโดยอาศัยเอลิเมนต์เพียงเอลิเมนต์เดียวคือเอลิเมนต์ที่นำเสนอ แต่โปรแกรมแอนซิสที่สร้างแบบจำลองแบบแยกตัวจำเป็นต้องกำหนดให้จุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีตและเหล็กเสริมอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน จึงจำเป็นต้องสร้างแบบจำลองซึ่งมีเอลิเมนต์คอนกรีต 2 เอลิเมนต์เพื่อให้ตำแหน่งของจุดต่ออยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน ดังภาพ 29

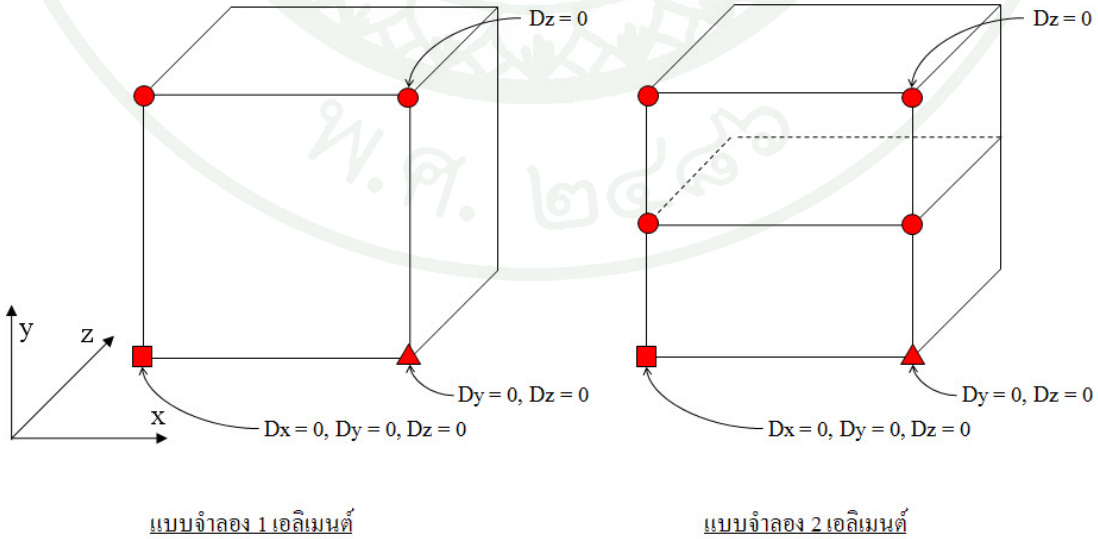
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 29 ขนาดรูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 4 เมื่อสร้างแบบจำลองด้วยโปรแกรมแอนซิส

จากการสร้างแบบจำลองด้วยวิธีสร้างแบบจำลองแบบแยกตัว ของโปรแกรมแอนซิสจะเห็นถึงข้อจำกัดของการสร้างแบบจำลองแบบนี้คือ การแบ่งแบบจำลองออกเป็นเอลิเมนต์จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของเหล็กเสริม ซึ่งต่างกับการสร้างแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝังที่ไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงตำแหน่งของเหล็กเสริมในการแบ่งเอลิเมนต์

การใส่จุดยึดรั้งของแบบจำลองทั้งสองโปรแกรมกำหนดให้การยึดรั้งเป็นดังภาพที่ 30



ภาพที่ 30 การใส่จุดยึดรั้งของแบบจำลองกรณีที่ 4

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เพื่อให้เข้าใจถึงการกระจายของค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริม ในกรณีศึกษานี้ จึงกำหนดให้มีรูปแบบการให้แรง และค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในการสร้างแบบจำลอง ดังนี้

ตารางที่ 14 รูปแบบการให้แรงของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 4

รูปแบบที่	จุดต่อที่แรงกระทำ	ขนาดของแรง (กก.)	ทิศทางของแรง
1	8	100	Z
2	7	100	Z
3 (ANSYS)	3	29.83875	Z
	4	29.83875	Z
	7	29.83875	Z
	8	29.83875	Z
	11	59.6775	Z
	12	220.9675	Z
3 (RC Element)	3	59.6775	Z
	4	140.3225	Z
	7	59.6775	Z
	8	140.3225	Z

ตารางที่ 15 ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 4

ค่าคุณสมบัติ	หน่วย	ค่าที่ใช้ในแบบจำลอง
อัตราส่วนบัวซองของคอนกรีต; ν_C	-	0.17
อัตราส่วนบัวซองของเหล็กเสริม; ν_S	-	0.33
โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต ; E_c	กก./ซม^2.	250,000
โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริม ; E_s	กก./ซม^2.	2,100,000
ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเหล็กเสริม	มม.	16

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จากค่าต่าง ๆ ที่ได้กำหนดให้กับแบบจำลองของโปรแกรมทั้งสองจะได้ค่าผลลัพธ์ดังนี้

ตารางที่ 16 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
1	1	0	0	0
	2	1.95E-05	0	0
	3	6.99E-06	-9.73E-05	7.32E-06
	4	-1.25E-05	-0.00023	-0.00028
	5	-0.00012	-1.23E-05	0
	6	-0.00014	3.38E-06	0
	7	-2.48E-05	-9.39E-05	-6.19E-05
	8	3.61E-06	-0.00024	0.000441

ตารางที่ 17 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 1 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
1	1	0	0	0
	2	1.80E-06	0	0
	3	7.01E-05	-1.24E-04	-8.80E-05
	4	5.69E-05	-1.30E-04	-3.69E-05
	5	-6.14E-05	7.03E-05	0
	6	-1.02E-04	-1.23E-05	0
	7	9.96E-05	-8.71E-05	-1.55E-04
	8	1.28E-04	-2.65E-04	6.94E-04
	9	-2.05E-05	5.18E-05	0
	10	-3.27E-05	-8.00E-06	0
	11	8.60E-05	-1.08E-04	-2.72E-06
	12	8.67E-05	-1.81E-04	3.12E-05

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตารางที่ 18 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
2	1	0	0	0
	2	7.20E-06	0	0
	3	-5.25E-05	-0.00023	-0.00014
	4	-5.97E-05	-9.73E-05	7.32E-06
	5	0.000174	1.69E-06	0
	6	0.000134	-3.52E-05	0
	7	-5.80E-05	-0.00026	0.000585
	8	-1.74E-05	-9.56E-05	-6.19E-05

ตารางที่ 19 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 2 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
2	1	0	0	0
	2	-3.33E-07	0	0
	3	-8.80E-05	-1.50E-04	-6.48E-06
	4	-9.61E-05	-1.26E-04	-8.80E-05
	5	1.19E-04	-1.24E-05	0
	6	7.61E-05	4.00E-05	0
	7	-1.45E-04	-2.76E-04	7.25E-04
	8	-1.10E-04	-8.60E-05	-1.55E-04
	9	4.28E-05	-8.05E-06	0
	10	2.65E-05	3.67E-05	0
	11	-1.14E-04	-1.96E-04	1.16E-04
	12	-1.06E-04	-1.08E-04	-9.18E-06

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตารางที่ 20 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 3 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
3	1	0	0	0
	2	-3.25E-05	0	0
	3	-3.24E-05	0	0.000191
	4	0	0	0.000191
	5	0	-3.25E-05	0
	6	-3.25E-05	-3.25E-05	0
	7	-3.24E-05	-3.25E-05	0.000191
	8	0	-3.25E-05	0.000191

ตารางที่ 21 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 4 รูปแบบที่ 3 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส

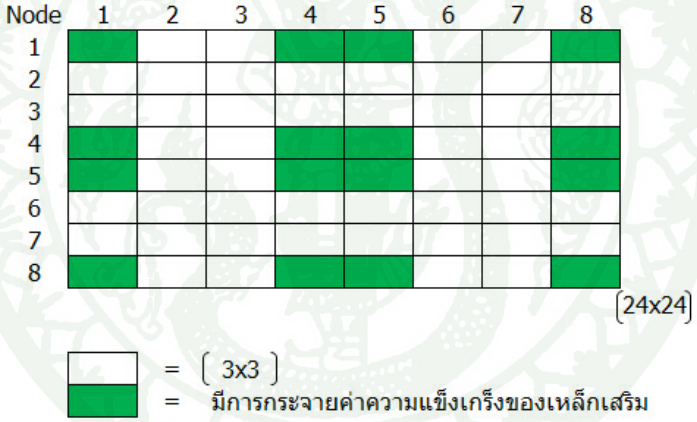
รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
3	1	0	0	0
	2	-3.25E-05	0	0
	3	-3.24E-05	3.62E-09	1.91E-04
	4	3.00E-08	-1.5E-08	1.91E-04
	5	-1.5E-08	-3.25E-05	0
	6	-3.25E-05	-3.25E-05	0
	7	-3.25E-05	-3.25E-05	1.91E-04
	8	1.5E-08	-3.25E-05	1.91E-04
	9	-6.73E-09	-1.62E-05	0
	10	-3.25E-05	-1.62E-05	0
	11	-3.24E-05	-1.62E-05	1.91E-04
	12	2.56E-08	-1.62E-05	1.91E-04

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิเคราะห์ผลการตรวจสอบกรณีศึกษาที่ 4

รูปแบบที่ 1

จากรูปแบบการให้แรงที่ 1 ให้แรงกระทำที่จุดต่อ 8 ผลลัพธ์จากโปรแกรมทั้งสองให้ค่าไม่เท่ากัน การเคลื่อนตัวแนวแกน Z ที่จุดต่อที่ 8 ของโปรแกรมแอนซิสซึ่งใช้แบบจำลองแบบแยกตัวให้ค่า 6.94E-04 ซม. ส่วนการเคลื่อนที่เดียวกันโดยใช้โปรแกรมและเอลิเมนต์ที่นำเสนอให้ค่า 0.000441 ซม. เห็นได้ว่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในแบบจำลองแบบแยกตัวให้ค่ามากกว่า เนื่องจากจำนวนเอลิเมนต์ที่ไม่เท่ากันของสองแบบจำลอง และรูปแบบการกระจายความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมที่ไม่เหมือนกันคือ การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมในแบบจำลองทั้งสองจะเป็นดังภาพที่ 31 และภาพที่ 32



ภาพที่ 31 การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมในเอลิเมนต์ที่นำเสนอ ในกรณีศึกษาที่ 4

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ภาพที่ 32 การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมแบบจำลองแบบแยกตัว ในกรณีศึกษาที่ 4

จากภาพการกระจายตัวของค่าความแข็งเกร็งของแบบจำลองแบบแยกตัวจะกระจายค่าเข้าที่จุดต่อที่เอลิเมนต์ของเหล็กเสริมอยู่เท่านั้น แต่เนื่องจากแบบจำลองที่ใช้เทคนิคการฝังเหล็กเสริม เหล็กเสริมไม่ได้อยู่ที่ตำแหน่งจุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีต การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมจะกระจายเข้าที่จุดต่อที่อยู่ใกล้กับเหล็กเสริม โดยอัตราการกระจายจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของเหล็กเสริมและตำแหน่งของจุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีตนั้นเอง

รูปแบบที่ 2

การให้แรงรูปแบบที่ 2 ให้แรงที่จุดต่อ 7 โปรแกรมให้ค่าการเคลื่อนที่ที่จุดต่อ 7 ในทิศแกน Z เท่ากับ -1.55E-04 ซม. และค่าที่ได้จากเอลิเมนต์ที่นำเสนอคือ 0.000585 ซม. ค่าทั้งสองที่ได้มีค่าไม่เท่ากัน และมีทิศทางตรงกันข้าม นั้นเพราะเกิดจากการที่จำนวนเอลิเมนต์ในการสร้างแบบจำลองไม่เท่ากัน

รูปแบบที่ 3

การให้แรงรูปแบบ 3 เป็นการให้แรงโดยกำหนดให้พื้นที่หน้าตัดของแบบจำลองรับแรงรวม 400 ก.ก. จากนั้นกระจายแรงเข้าที่จุดต่อของแบบจำลองโดยคิดจากพื้นที่รับแรงของจุดต่อนั้น ๆ และเปรียบเทียบการเคลื่อนตัวของแบบจำลองทั้งสอง กับการคำนวณด้วยทฤษฎีกลศาสตร์

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$P = P_C + P_S = 400 \tag{62}$$

จาก

$$\Delta = \frac{PL}{AE} \tag{63}$$

$$\Delta_C = \Delta_S \tag{64}$$

$$\frac{P_C L}{AE} = \frac{P_S L}{AE} \tag{65}$$

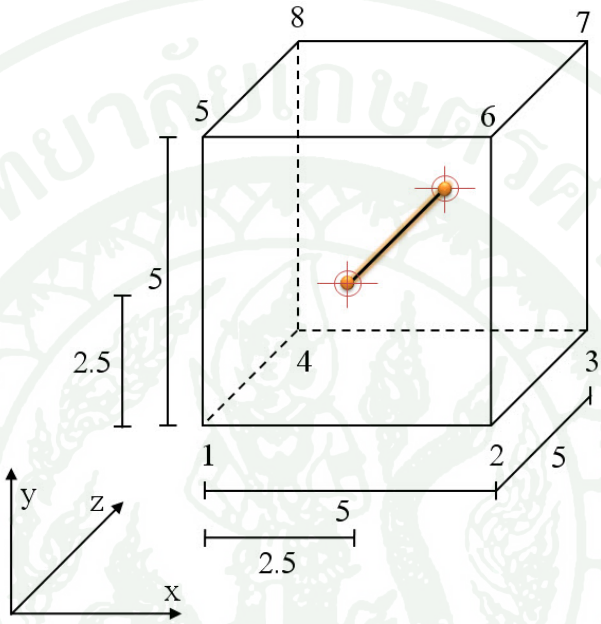
เมื่อ P_C คือ แรงที่กระทำต่อคอนกรีต, P_S คือ แรงที่กระทำต่อเหล็กเสริม, Δ_C คือการเคลื่อนที่ของคอนกรีต, Δ_S คือการเคลื่อนที่ของเหล็กเสริม เมื่อกำหนดให้การเคลื่อนที่ของคอนกรีตและเหล็กเสริมเท่ากันจะสามารถแก้สมการหาค่าการเคลื่อนที่ได้เท่ากับ 0.000191 ซม. จากผลการคำนวณที่ได้จากโปรแกรมทั้งสองโปรแกรมได้ค่าเท่ากับการคำนวณด้วยทฤษฎีกลศาสตร์

จากผลการคำนวณและผลการเปรียบเทียบกรณีศึกษาที่ 2 และกรณีศึกษาที่ 3 การกระจายค่าความแข็งเกร็งเมื่อตำแหน่งของเหล็กเสริมอยู่ที่ตำแหน่งจุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีตแบบจำลองทั้งสองแบบจะกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมเข้าที่จุดต่อของคอนกรีตที่ตำแหน่งเหล็กเสริมนั้นอยู่ ในอีกกรณีหนึ่งเมื่อตำแหน่งเหล็กเสริมไม่อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกับจุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีต กรณีนี้แบบจำลองแบบแยกตัวจะไม่สามารถสร้างแบบจำลองได้ แต่แบบจำลองที่สร้างด้วยเทคนิคการฝังเหล็กเสริมจะสร้างแบบจำลองโดยการกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมเข้ากับจุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีตที่อยู่ใกล้กับจุดต่อโดยอัตราการกระจายจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของเหล็กเสริมและตำแหน่งของจุดต่อเอลิเมนต์คอนกรีต

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

กรณีศึกษาที่ 5

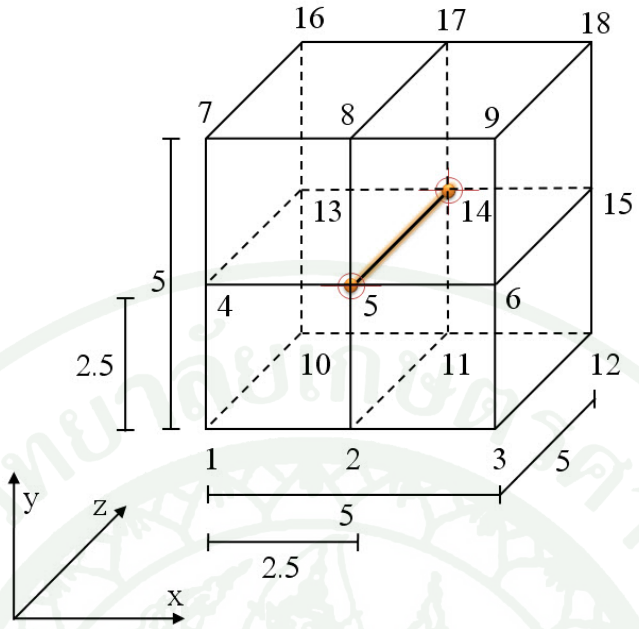
กรณีศึกษาที่ 5 กำหนดรูปร่างของแบบจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กโดยให้เหล็กเสริมอยู่ที่กึ่งกลางเอลิเมนต์ของคอนกรีตดังแสดงในภาพที่ 33



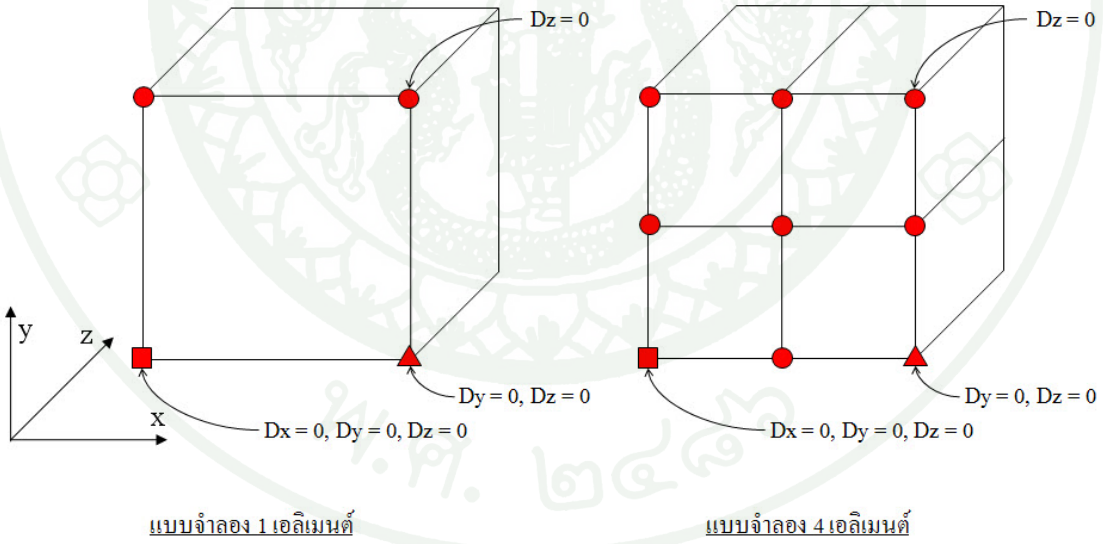
ภาพที่ 33 รูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 5

จากรูปร่างของแบบจำลองกรณีที่ 5 ตำแหน่งของเหล็กเสริมอยู่ตรงกลางของเอลิเมนต์คอนกรีต แบบจำลองที่สร้างด้วยเอลิเมนต์ที่เสนอจะใช้จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดในการสร้างแบบจำลองเพียง 1 เอลิเมนต์ ในขณะเดียวกันแบบจำลองที่สร้างจากโปรแกรมแอนซิสซึ่งใช้แบบจำลองแบบแยกตัวจำเป็นจะต้องสร้างจุดต่อเพื่อรองรับตำแหน่งของเหล็กเสริม ดังนั้นจึงต้องมีเอลิเมนต์ทั้งหมด 4 เอลิเมนต์ดังแสดงในภาพที่ 34 และมีการใส่จุดยึดรั้งดังแสดงในภาพที่ 35

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 34 รูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 5 หลังจากที่แบ่งเอลิเมนต์แล้ว



ภาพที่ 35 แสดงจุดยึดรั้งของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 5

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ในกรณีศึกษานี้แบ่งรูปแบบการให้แรงออกเป็น 2 รูปแบบ และค่าคุณสมบัติของวัสดุต่าง ๆ ที่ใช้ดังแสดงในตาราง

ตารางที่ 22 รูปแบบการให้แรงของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 5

รูปแบบที่	จุดต่อที่แรงกระทำ	ขนาดของแรง	ทิศทางของแรง
(ANSYS)	10, 12, 16, 18	14.919375	Z
	11, 13, 15, 17	29.83875	Z
	14	220.9675	Z
(RC Element)	3, 4, 7, 8	100	Z

ตารางที่ 23 ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 5

ค่าคุณสมบัติ	หน่วย	ค่าที่ใช้ในแบบจำลอง
อัตราส่วนบัวซองของคอนกรีต; ν_C	-	0.17
อัตราส่วนบัวซองของเหล็กเสริม; ν_S	-	0.33
โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต ; E_c	กก./ซม^2.	250,000
โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริม ; E_s	กก./ซม^2.	2,100,000
ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเหล็กเสริม	มม.	16

จากค่าต่าง ๆ ที่ได้กำหนดให้กับแบบจำลองของโปรแกรมทั้งสองจะได้ค่าผลลัพธ์ดังนี้

ตารางที่ 24 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 5 วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่นำเสนอ

รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
1	1	0	0	0
	2	-3.25E-05	0	0
	3	-3.25E-05	0	0.000191
	4	0	0	0.000191

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตารางที่ 24 (ต่อ)

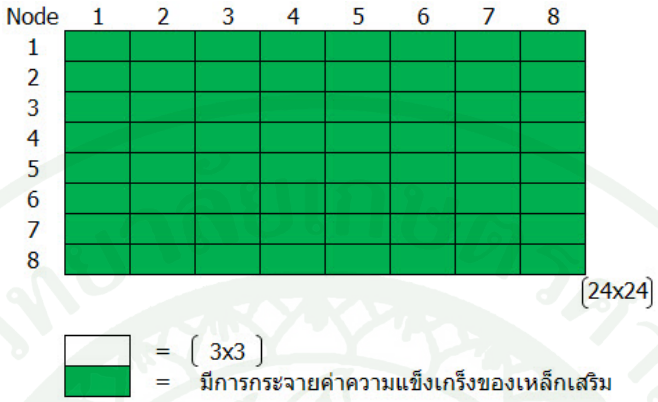
รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
	5	0	-3.25E-05	0
	6	-3.25E-05	-3.25E-05	0
	7	-3.25E-05	-3.25E-05	0.000191
	8	0	-3.25E-05	0.000191

ตารางที่ 25 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในกรณีศึกษาที่ 5 วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแอนซิส

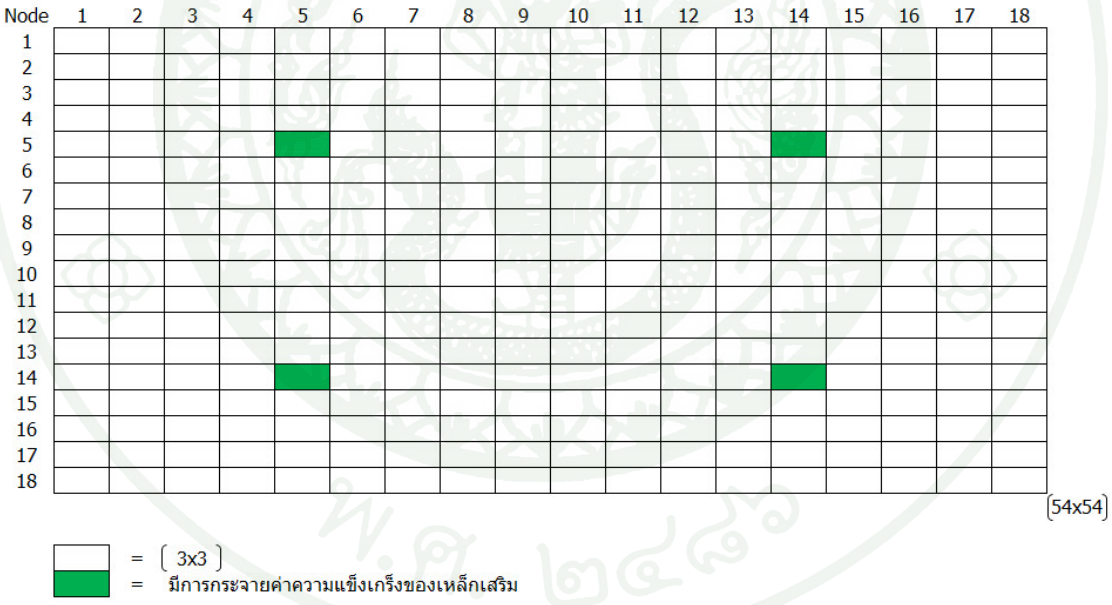
รูปแบบที่	จุดต่อ (node)	เคลื่อนที่แกน X (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Y (ซม.)	เคลื่อนที่แกน Z (ซม.)
1	1	0	0	0
	2	-1.62E-05	4.59E-09	0
	3	-3.25E-05	0	0
	4	4.59E-09	-1.62E-05	0
	5	-1.62E-05	-1.62E-05	0
	6	-3.25E-05	-1.62E-05	0
	7	6.78E-20	-3.25E-05	0
	8	-1.62E-05	-3.25E-05	0
	9	-3.25E-05	-3.25E-05	0
	10	-3.07E-09	-3.07E-09	1.91E-04
	11	-1.62E-05	-6.63E-09	1.91E-04
	12	-3.25E-05	-3.07E-09	1.91E-04
	13	-6.63E-09	-1.62E-05	1.91E-04
	14	-1.62E-05	-1.62E-05	1.91E-04
	15	-3.25E-05	-1.62E-05	1.91E-04
	16	-3.07E-09	-3.25E-05	1.91E-04
	17	-1.62E-05	-3.25E-05	1.91E-04
	18	-3.25E-05	-3.25E-05	1.91E-04

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิเคราะห์ผลการตรวจสอบกรณีศึกษาที่ 5



ภาพที่ 36 การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมในเอลิเมนต์ที่นำเสนอ ในกรณีศึกษาที่ 5



ภาพที่ 37 การกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมแบบจำลองแบบแยกตัว ในกรณีศึกษาที่ 5

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

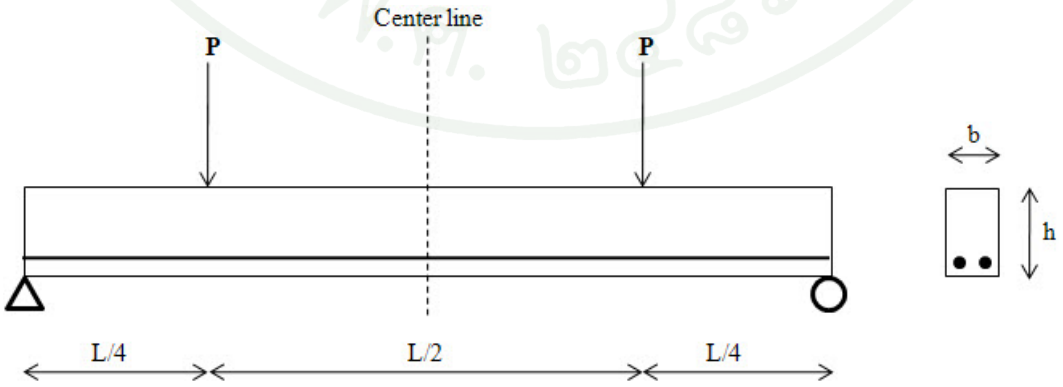
รูปแบบที่ 2

การให้แรงรูปแบบ 2 เป็นการให้แรงโดยกำหนดให้พื้นที่หน้าตัดของแบบจำลองรับแรงรวม 400 กก. จากนั้นกระจายแรงเข้าที่จุดต่อของแบบจำลองโดยคิดจากพื้นที่รับแรงของจุดต่อนั้น ๆ และเปรียบเทียบการเคลื่อนตัวของแบบจำลองทั้งสอง กับการคำนวณด้วยทฤษฎีกลศาสตร์ จากผลการคำนวณจะเห็นว่าค่าจากทั้งสองโปรแกรมให้ค่าเท่ากับค่าจากทฤษฎีกลศาสตร์ คือ 0.000191 ซม. จึงเป็นการกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมที่ถูกต้องในทั้งสองแบบจำลอง ดังแสดงการกระจายตัวของค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมดังภาพที่ 36 และภาพที่ 37

ผลการทดสอบจากกรณีที่ 5 เป็นการสนับสนุนผลการทดสอบจากกรณีที่ 4 ซึ่งสามารถสรุปได้ถึงเงื่อนไขของการสร้างแบบจำลองทั้งสองรูปแบบคือ การสร้างแบบจำลองแบบแยกตัวจำเป็นต้องกำหนดให้จุดต่อของคอนกรีตและเหล็กเสริมอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน ต่างกับแบบจำลองที่สร้างด้วยเทคนิคการฝังซึ่งไม่มีเงื่อนไขในข้อนี้ และในกรณีที่จุดต่อของคอนกรีตอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับตำแหน่งเหล็กเสริมแบบจำลองทั้งสองแบบจะกระจายค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมเหมือนกันหากแต่เมื่อ ตำแหน่งของเหล็กเสริมไม่ตรงกับตำแหน่งจุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีต กระจายค่าความแข็งเกร็งของแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝังจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของเหล็กเสริมและจุดต่อเอลิเมนต์คอนกรีตนั้นเอง

กรณีศึกษาที่ 6

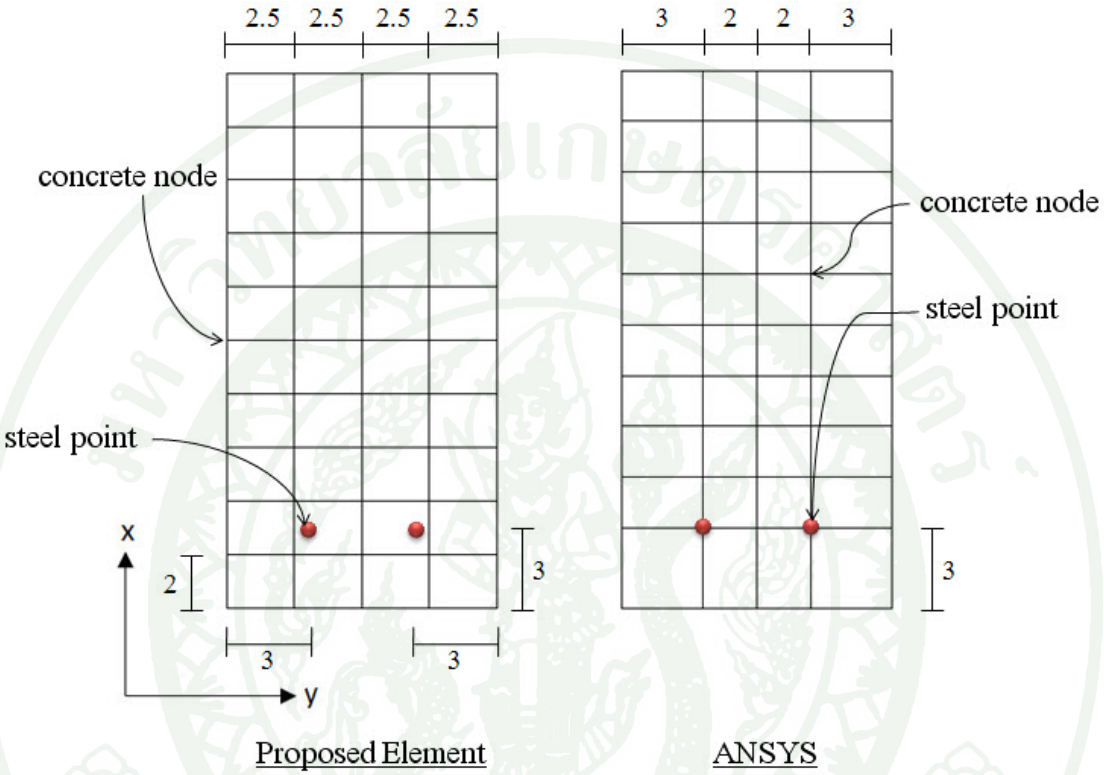
กรณีศึกษาที่ 6 กำหนดการสร้างแบบจำลองในรูปร่างของชิ้นส่วนคานคอนกรีตเสริมเหล็กเพื่อทดสอบความถูกต้องของเอลิเมนต์มีรูปร่างแบบจำลองและรูปแบบการใส่แรงดังนี้



ภาพที่ 38 รูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 6

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

คานมีขนาดยาว L = 2 เมตร และหน้าตัดคานมีขนาดกว้าง 10 ซม. และลึก 20 ซม. เหล็กเสริมที่ใช้มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 16 มิลลิเมตร โดยจะทำการเปรียบเทียบกับโปรแกรมแอนซิส (ANSYS) กำหนดตำแหน่งของเหล็กเสริมและ การแบ่งเอลิเมนต์ดังแสดงในภาพที่ 39



ภาพที่ 39 ตำแหน่งของเหล็กเสริมและรูปแบบการแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 6

เมื่อขนาดของแบบจำลองเท่ากันและตำแหน่งเหล็กเสริมอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันในทั้งสองโปรแกรม การแบ่งเอลิเมนต์และการจัดขนาดของเอลิเมนต์ของคอนกรีตเสริมเหล็กของแบบจำลองทั้งสองโปรแกรมจะแตกต่าง

โปรแกรมที่เสนอจะใช้การแบ่งเอลิเมนต์ให้เท่ากันทุกเอลิเมนต์ในระนาบ X-Y แต่ในโปรแกรมแอนซิส จะแบ่งเอลิเมนต์ให้จุดต่อของคอนกรีตและจุดต่อของเหล็กเสริมอยู่ที่จุดต่อเดียวกัน การแบ่งขนาดของเอลิเมนต์ในทิศทาง Z เท่ากันคือแบ่งความยาวคานออกเป็น 20 ช่วงเอลิเมนต์ โดยจำนวนเอลิเมนต์ของแบบจำลองทั้งสองจะเท่ากันคือ 800 เอลิเมนต์ โดยที่ตำแหน่งของเหล็กเสริมอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันคือในระนาบของ X-Y ที่พิกัด (3,3) และ พิกัด (7,3) โดยเหล็กเสริมที่ตำแหน่งทั้งสองจะมีความยาวตลอดแนวความยาวของคานในแบบจำลองทั้งสอง

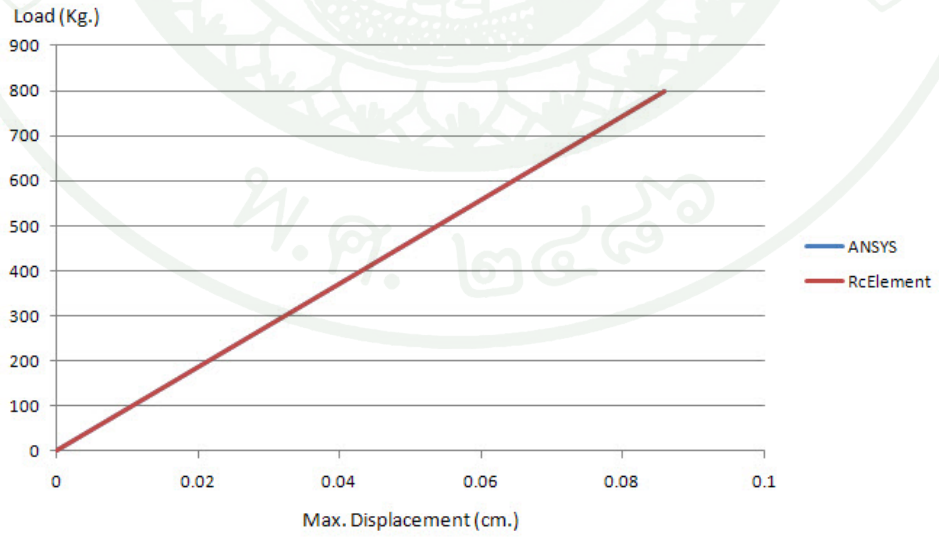
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตำแหน่งการให้แรงถูกกำหนดให้กระทำที่ตำแหน่งดังภาพที่ 38 โดยแรงจะถูกเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ในทั้งสองแบบจำลองเพื่อดูผลกระทบของการเพิ่มแรงกระทำและความถูกต้องของเอลิเมนต์โดยมีค่าคุณสมบัติวัสดุที่ใช้ดังนี้

ตารางที่ 26 ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 6

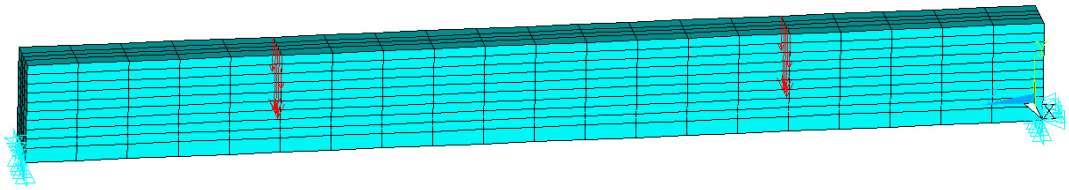
ค่าคุณสมบัติ	หน่วย	ค่าที่ใช้ในแบบจำลอง
อัตราส่วนบัวซองของคอนกรีต; ν_C	-	0.17
อัตราส่วนบัวซองของเหล็กเสริม; ν_S	-	0.33
โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต ; E_c	กก./ซม^2.	250,000
โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริม ; E_s	กก./ซม^2.	2,100,000
ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเหล็กเสริม	มม.	16

จากค่าคุณสมบัติของวัสดุ รูปร่างของแบบจำลองและตำแหน่งการให้แรงสามารถหาค่าการเคลื่อนที่ของแบบจำลองได้ ดังแสดงในกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่ของแบบจำลอง

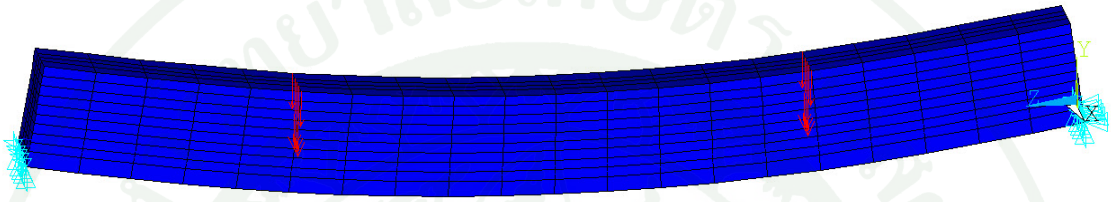


ภาพที่ 40 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในทิศทางแนวแกน Y

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 41 ลักษณะการให้แรงกับแบบจำลองในกรณีศึกษาที่ 6



ภาพที่ 42 การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 6

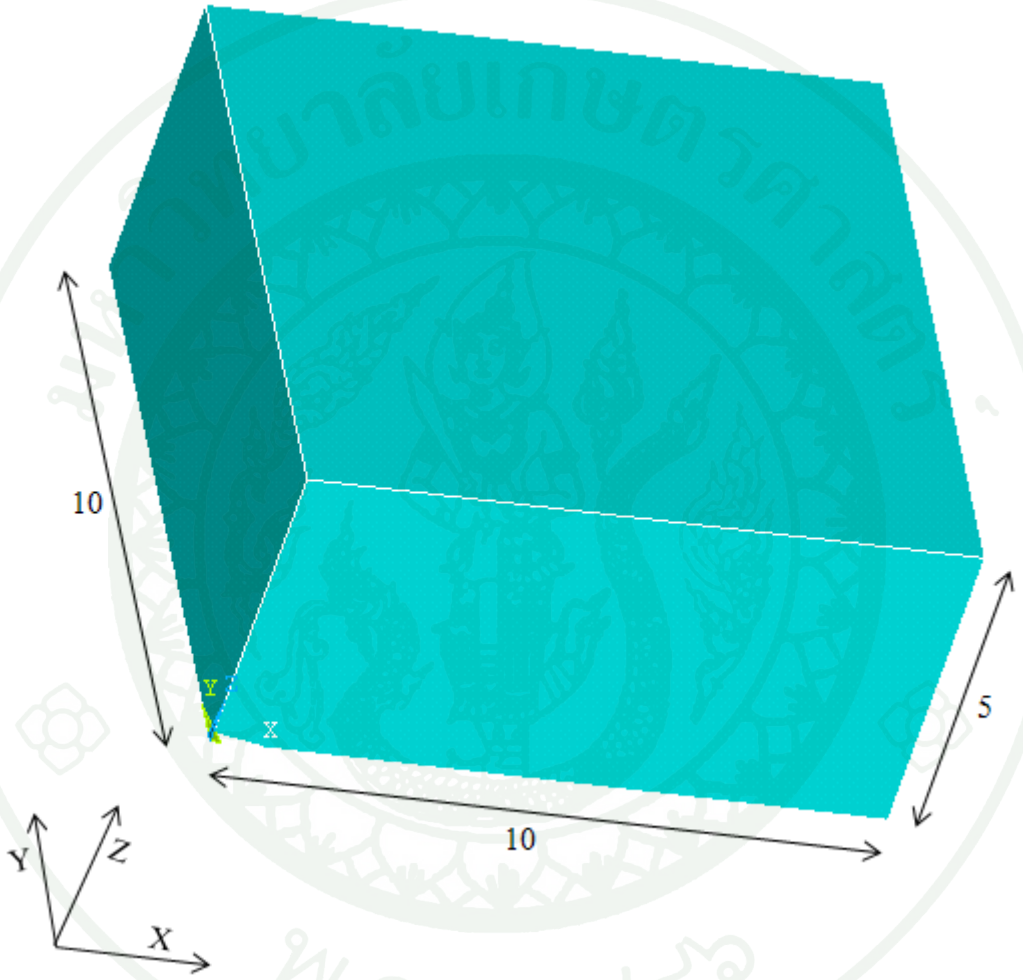
วิเคราะห์ผลการตรวจสอบกรณีศึกษาที่ 6

จากภาพที่ ผลการทดสอบจะเห็นได้ว่าค่าที่ได้จากทั้งสองโปรแกรมมีค่าใกล้เคียงกันมาก โดยมีความแตกต่างสูงสุดเพียงร้อยละ 0.022 เท่านั้น เนื่องจากตำแหน่งของเหล็กอยู่ตำแหน่งเดียวกันแต่การแบ่งเอลิเมนต์ต่างกันผลลัพธ์จึงต่างกันด้วย หากแต่ด้วยผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกันอาจกล่าวได้ว่า การสร้างแบบจำลองแบบแยกตัวและการสร้างแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝังสามารถเป็นตัวแทนซึ่งกันและกันในการสร้างแบบจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กได้ ข้อแตกต่างที่เห็นได้อย่างชัดเจนคือข้อจำกัดในการแบ่งเอลิเมนต์ ในกรณีศึกษาที่ 6 ข้อจำกัดนี้อาจแสดงผลได้ไม่ชัดเจน เนื่องจากตำแหน่งของเหล็กเสริมไม่ยุ่งยาก แต่เมื่อแบบจำลองมีตำแหน่งของเหล็กเสริมที่ยุ่งยากการแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองแบบแยกตัวจะกระทำได้ยากยุ่งยากสับสนเนื่องจากต้องวางตำแหน่งของการแบ่งเอลิเมนต์คอนกรีตให้จุดต่ออยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับตำแหน่งเหล็กเสริม

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

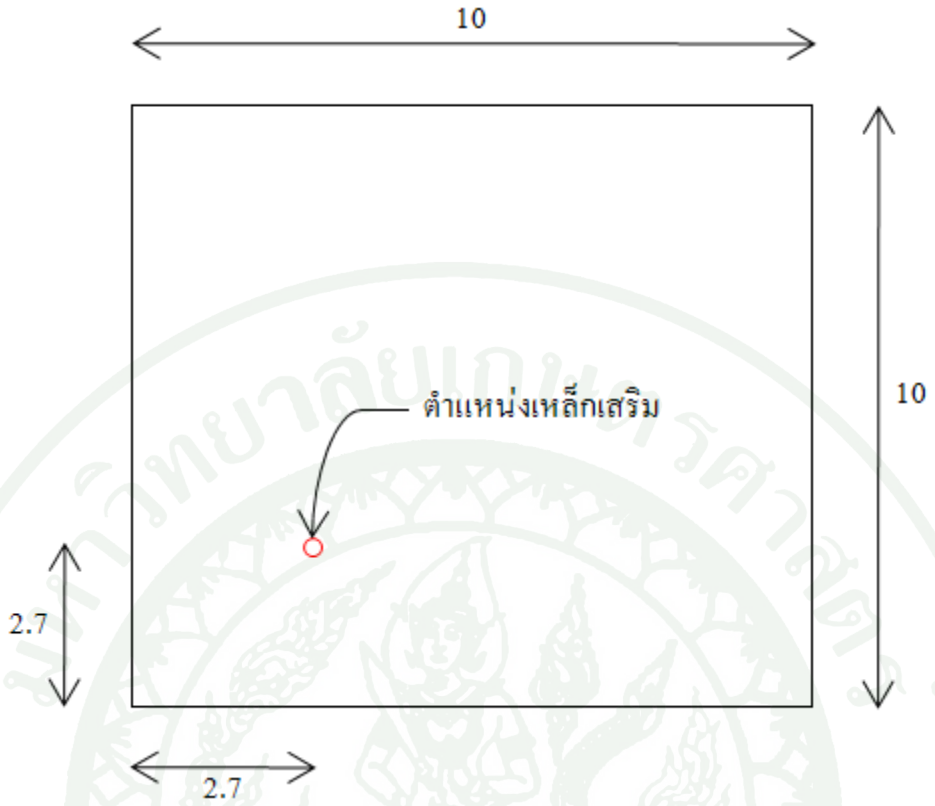
กรณีศึกษาที่ 7

กรณีศึกษาที่ 7 กำหนดการสร้างแบบจำลองในรูปร่างของชิ้นส่วนคานคอนกรีตเสริมเหล็ก เพื่อทดสอบความถูกต้องของเอลิเมนต์มีรูปร่างแบบจำลองและรูปแบบการใส่แรงดังนี้



ภาพที่ 43 รูปร่างของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 7

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



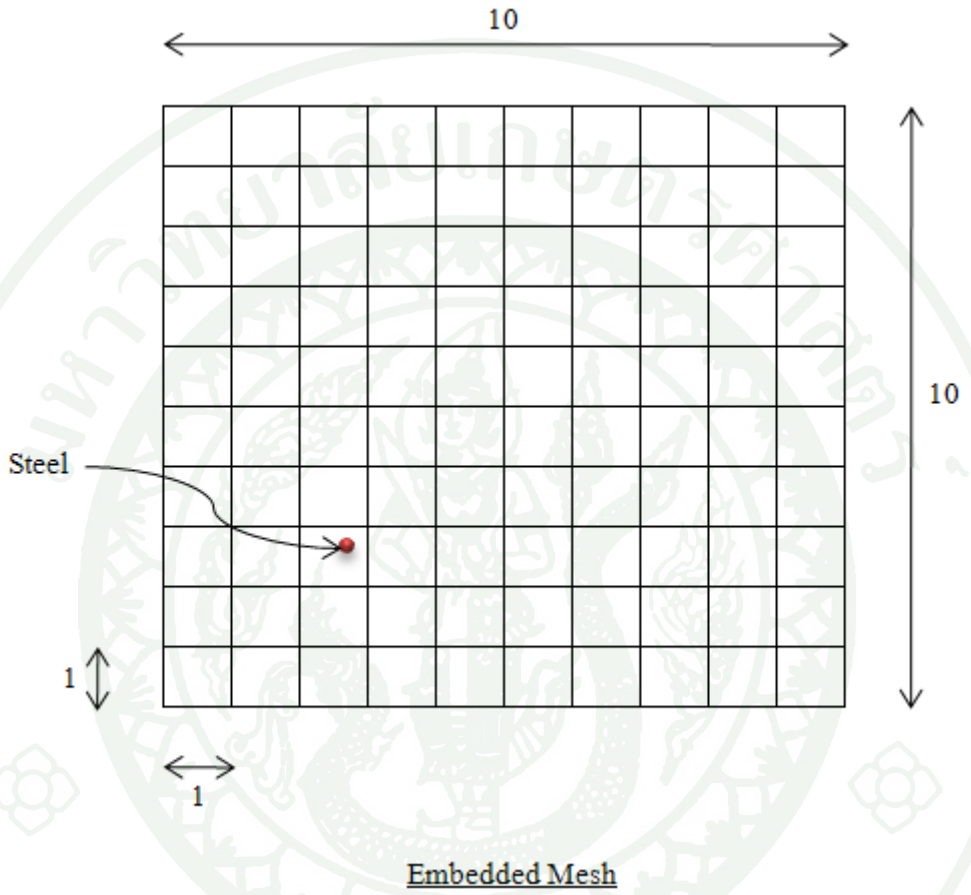
ภาพที่ 44 รูปร่างของแบบจำลองและตำแหน่งเหล็กเสริมกรณีศึกษาที่ 7

จากรูปร่างของแบบจำลองกรณีที่ 7 จากภาพที่ 43 และภาพที่ 44 จะเห็นว่าแบบจำลองนี้มีขนาด 10 x 10 x 5 ซม. ตำแหน่งของเหล็กเสริมอยู่ที่ตำแหน่งห่างจากขอบแบบจำลอง 2.70 ซม. ในแนวระนาบ X-Y โดยเหล็กเสริมมีความยาวทั้งสิ้น 5 ซม. ตามความยาวแนวแกน Z ของแบบจำลอง

การแบ่งเอลิเมนต์จะแบ่งเป็นสองกรณี กรณีแรก จะแบ่งเอลิเมนต์แบบ Discrete Model ซึ่งจะแบ่งเอลิเมนต์โดยให้ขนาดของเอลิเมนต์ไม่เท่ากันโดยจะให้จุดต่อของเอลิเมนต์อยู่ที่ตำแหน่งของเหล็กเสริมเพื่อให้สามารถคำนวณด้วยวิธีการของ Discrete Model ได้นั้นเอง กรณีที่สอง แบ่งเอลิเมนต์โดยไม่คำนึงถึงตำแหน่งของเหล็กเสริมดังนั้นจะแบ่งเอลิเมนต์ให้ขนาดของเอลิเมนต์เท่ากับ 1 x 1 x 1 ซม. ทั้งสองกรณีจะมีขนาดของเอลิเมนต์ในทิศทาง Z เท่ากัน คือเท่ากับ 1 ซม.

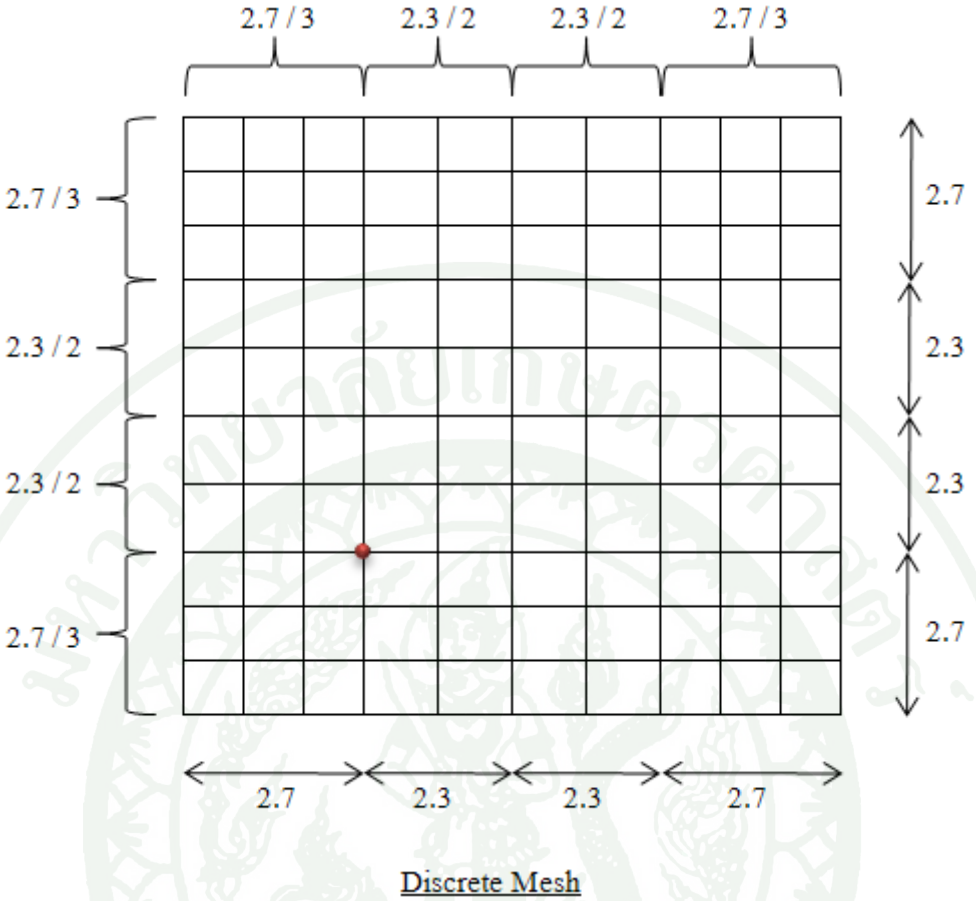
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

การกำหนดแรงกระทำกับแบบจำลอง ได้กำหนดให้แรงกระทำกับแบบจำลองทั้งสองกรณีมีลักษณะคล้ายกันคือพยายามจะกระจายแรงที่กระทำเท่า ๆ กัน ในระบาย X-Y เพราะฉนั้นแรงที่กระทำจะกระทำให้ทิศทาง Z กับแบบจำลอง



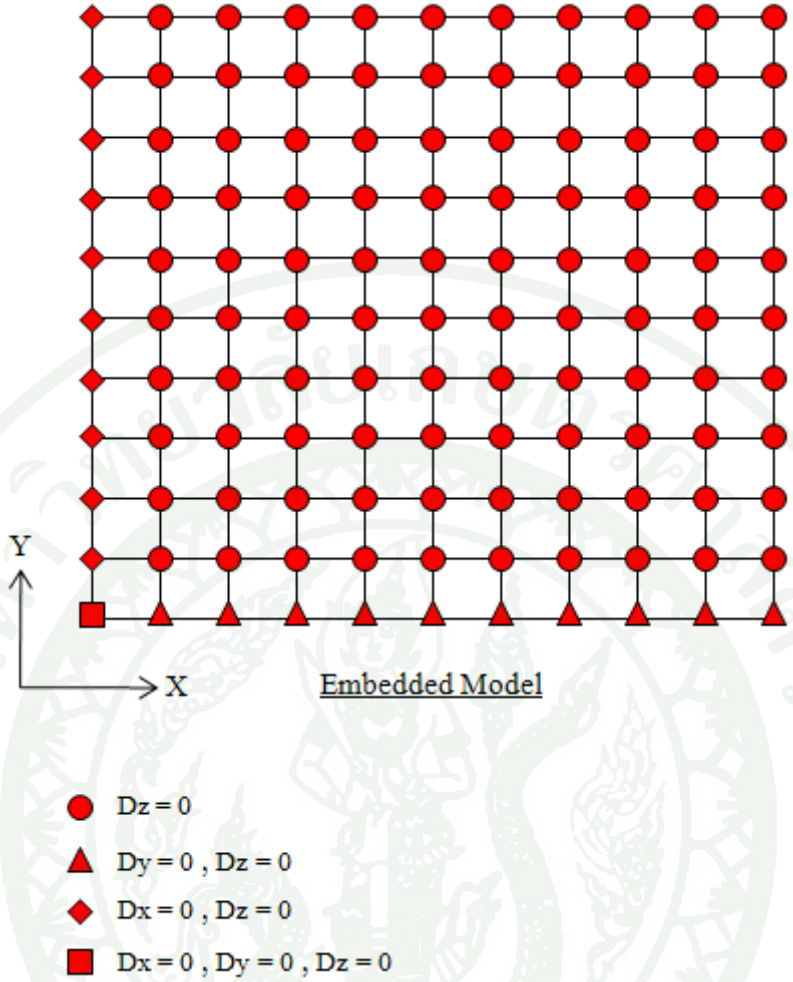
ภาพที่ 45 การแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded model) กรณีศึกษาที่ 7

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



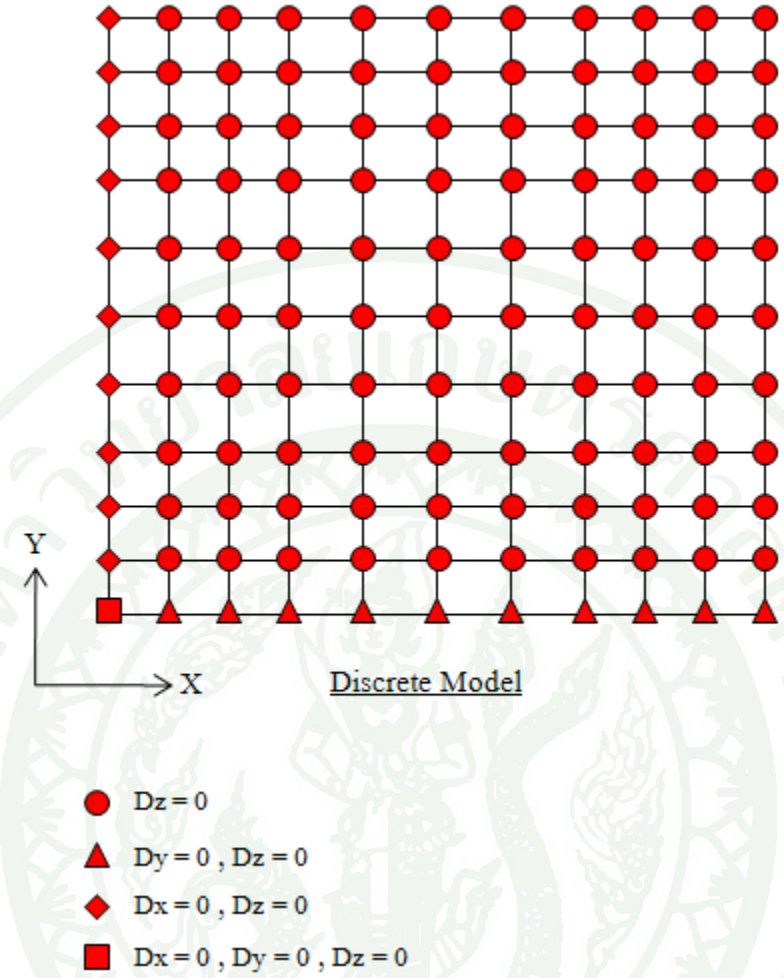
ภาพที่ 46 การแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) กรณีศึกษาที่ 7

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



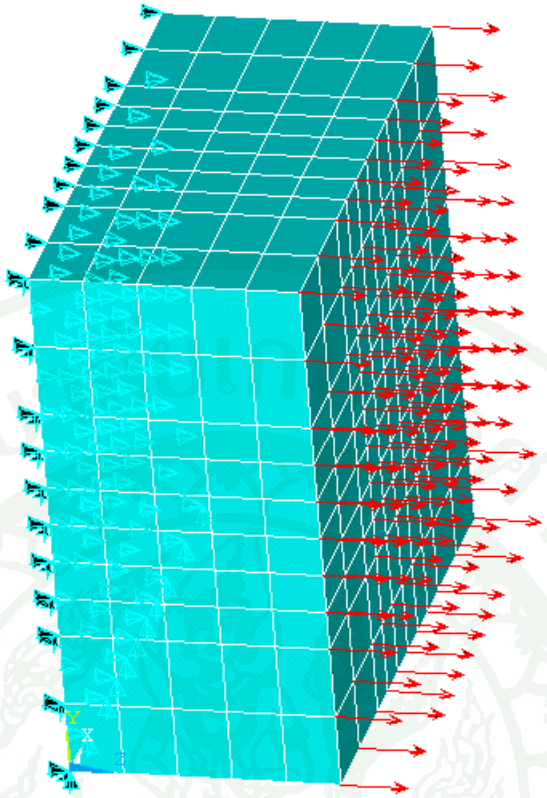
ภาพที่ 47 การกำหนดจุดยึดรั้งของแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 48 การกำหนดจุดยึดรั้งของแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 49 การกำหนดแรงกระทำของแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 7

สำหรับการยึดรั้งของแบบจำลองทั้งสอบกรณีกำหนดให้แบบจำลองถูกยึดรั้งที่ระนาบ X-Y ที่ตำแหน่ง Z = 0 โดยการยึดรั้งจะกำหนดให้แบบจำลองสามารถยึดและหดตัวในทิศทาง X และ Y ได้อย่างอิสระ ดังแสดงในภาพ โดยมีค่าคุณสมบัติวัสดุที่ใช้ดังนี้

ตารางที่ 27 ค่าคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในแบบจำลองกรณีศึกษาที่ 7

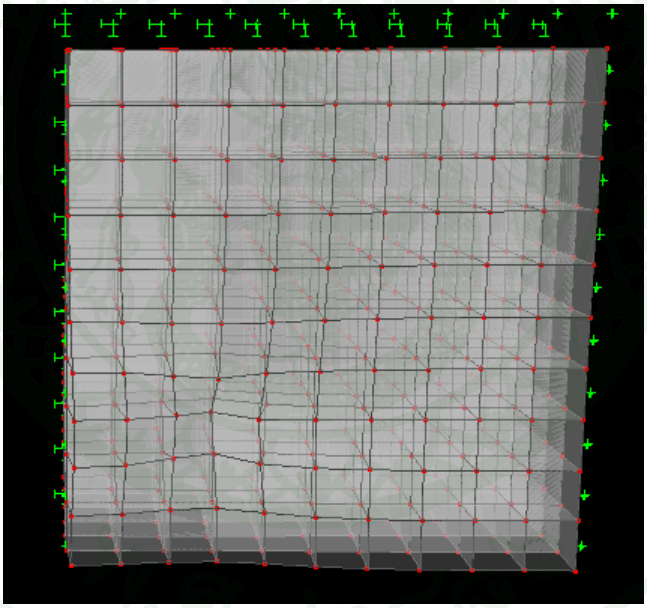
ค่าคุณสมบัติ	หน่วย	ค่าที่ใช้ในแบบจำลอง
อัตราส่วนบัวซองของคอนกรีต; ν_c	-	0.17
อัตราส่วนบัวซองของเหล็กเสริม; ν_s	-	0.33
โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต ; E_c	กก./ซม^2.	250,000
โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริม ; E_s	กก./ซม^2.	2,100,000
ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเหล็กเสริม	มม.	16

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตารางที่ 28 สรุปแบบจำลองทั้งสองกรณีที่ใช้ในกรณีศึกษาที่ 7

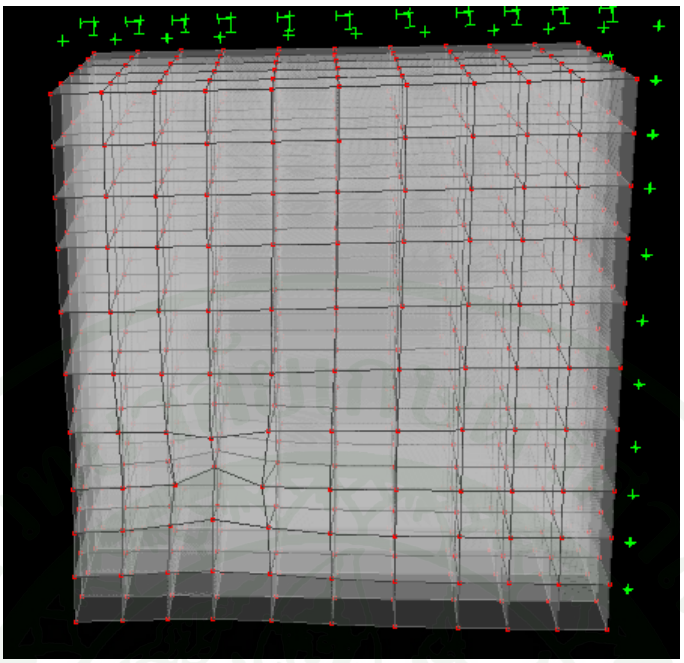
รูปแบบ	จำนวน เอลิเมนต์	จำนวน จุดต่อ	แรงกระทำรวม (กก.)	ขนาดเส้นผ่าน ศูนย์กลางเสริม (มม.)
Discrete Model	500	726	1000	16
Embedded Model	500	726	1000	16

วิเคราะห์ผลการตรวจสอบกรณีศึกษาที่ 7

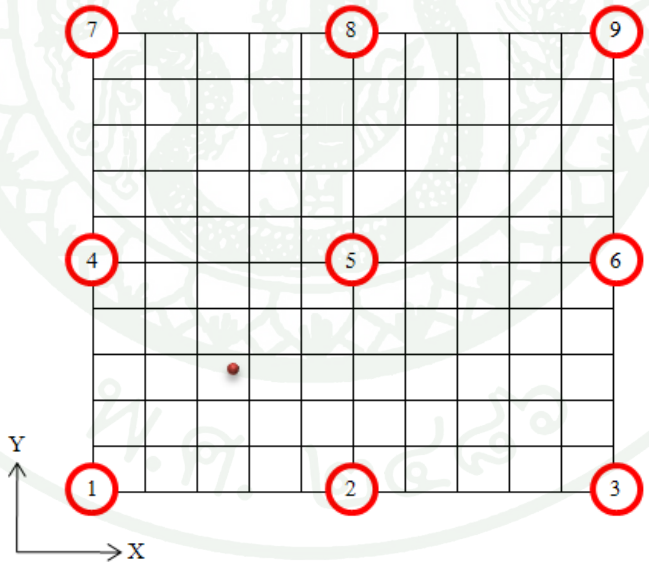


ภาพที่ 50 แบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model) หลังจากทำการวิเคราะห์ผล

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 51 แบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) หลังจากทำการวิเคราะห์ผล



ภาพที่ 52 ตำแหน่งที่ทำการเปรียบเทียบข้อมูลการเคลื่อนที่

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จากภาพจะเห็นได้ว่าในกรณีศึกษาที่ 6 นี้เราจะทำการเปรียบเทียบแบบจำลองทั้งสองแบบที่จุด 1-9 โดยที่จุดเหล่านี้จะเป็นจุดรับแรงที่เกิดการเคลื่อนที่โดยที่พิกัดของจุดต่อของแบบจำลองทั้งสองที่จุดต่อเหล่านี้จะอยู่ที่พิกัดเดียวกันในทั้งสองแบบจำลอง จึงสามารถเปรียบเทียบข้อมูลได้อย่างถูกต้องที่สุด จุดต่าง ๆ ตั้งแต่จุด ที่ 1 ถึงจุดที่ 9 อยู่ในระนาบ X-Y ตำแหน่งที่ Z = 5 ซม.

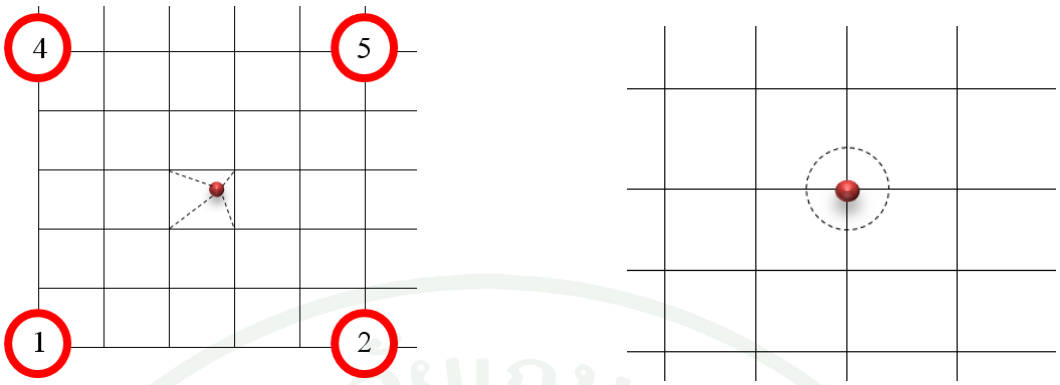
ตารางที่ 29 เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ในทิศทาง Z ของแบบจำลองทั้งสองกรณี

ตำแหน่งที่ใช้เปรียบเทียบ	การเคลื่อนที่แกน Z Embedded Model	การเคลื่อนที่แกน Z Discrete Model	% เปรียบเทียบความแตกต่าง
1	0.000182	0.000189	3.57
2	0.000185	0.000190	2.60
3	0.000205	0.000204	0.66
4	0.000185	0.000190	2.60
5	0.000187	0.000191	1.84
6	0.000203	0.000202	0.44
7	0.000205	0.000204	0.66
8	0.000203	0.000202	0.44
9	0.000203	0.000202	0.50

จากผลการวิเคราะห์ของแบบจำลองทั้งสองเมื่อเราเปรียบเทียบตำแหน่งที่จุดต่ออยู่พิกัดเดียวกันแล้วจะเห็นได้ว่าผลการเคลื่อนที่ในทิศทางแกน Z ของแบบจำลองมีความแตกต่างกันมากที่สุดที่ตำแหน่งที่ 1 และน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 9 นั้นเกิดขึ้นเพราะ เหล็กเสริมที่คิดด้วยวิธีที่แตกต่างกันอยู่ในกับตำแหน่งที่ 1, 2, 4 และ 5 มากกว่าตำแหน่งที่เหลือ จึงทำให้อิทธิพลของค่า stiffness ของเหล็กเสริมส่งผลกับตำแหน่งเหล่านี้มากกว่าตำแหน่งที่เหลือ

อีกทั้งจะเห็นได้ว่าตำแหน่งที่ 1, 2, 4 และ 5 ที่ตำแหน่งเหล่านี้การเคลื่อนที่ของแบบจำลองที่ใช้เทคนิคการฝังจะได้ผลการเคลื่อนที่น้อยกว่าแบบจำลองแบบแยกตัว นั้นเพราะการถ่ายโอนค่า stiffness ของแบบจำลองทั้งสองแบบไม่เหมือนกันดังแสดงในภาพ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพที่ 53 เปรียบเทียบการถ่ายโอนค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็ง ของแบบจำลอง

ในแบบจำลองที่ใช้เทคนิคการฝังจะให้ค่าที่น้อยกว่าเพราะว่าเมื่อเหล็กเสริมไม่ได้อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกับจุดต่อทำให้เหล็กเสริมถ่ายโอนค่าความแข็งเกร็งให้กับจุดต่อทั้ง 4 จุด ที่อยู่ในเอลิเมนต์ที่เหล็กเสริมฝังอยู่ แตกต่างกับวิธีแบบจำลองแยกตัว เหล็กเสริมจะให้ค่าความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมกับจุดต่อที่เอลิเมนต์ของเหล็กเสริมอยู่เท่านั้น ดังนั้น แบบจำลองที่ใช้เทคนิคการฝังจึงให้ค่าที่น้อยกว่า อีกทั้งค่าการเคลื่อนที่ที่แตกต่างกันอาจขึ้นอยู่กับผลของขนาดเอลิเมนต์ได้ด้วยเช่นกัน

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

วิทยานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์ในการศึกษาและพัฒนาการคำนวณด้วยวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ในระบบ 3 มิติโดยมุ่งเน้นการใช้งานสำหรับวัสดุคอนกรีตเสริมเหล็ก และพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ได้อย่างถูกต้อง สำหรับในงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบวิธีการสร้างแบบจำลองสำหรับโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กในรูปแบบต่าง ๆ 3 รูปแบบ คือ แบบจำลองแบบกระจายตัว (Smeared Model), แบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) และแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง (Embedded Model) ซึ่งมีข้อดีและเสียแตกต่างกันมีความเหมาะสมสำหรับการใช้งานที่แตกต่างกัน ซึ่งผู้วิจัยได้เลือกใช้วิธีการสร้างแบบจำลองที่ใช้เทคนิคการฝัง (Embedded Model) มาพัฒนาเป็นโปรแกรมซึ่งใช้สำหรับวิเคราะห์ผลโดยเห็นว่าการสร้างแบบจำลองด้วยวิธีนี้มีข้อดีที่น่าสนใจและสามารถวิเคราะห์ผลได้อย่างมีประสิทธิภาพ ในแต่ละขั้นตอนของการวิจัยสามารถสรุปผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ดังนี้

1. การสร้างแบบจำลองของโครงสร้างคอนกรีตใด ๆ โดยปราศจากเหล็กเสริม เอลิเมนต์ของโปรแกรม ANSYS (Solid 45) จะให้ค่าเท่ากับค่าที่ได้จากเอลิเมนต์ที่นำเสนอในโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้น นั้นแสดงถึงความถูกต้องของเอลิเมนต์ของแข็ง 3 มิติที่นำเสนอ เมื่อวิเคราะห์โดยปราศจากเหล็กเสริม

2. เมื่อสร้างแบบจำลองของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กใด ๆ ที่มีเหล็กเสริมเป็นองค์ประกอบจะเห็นว่าเอลิเมนต์ของโปรแกรม ANSYS (Solid 45) ซึ่งเป็นตัวแทนของแบบจำลองแยกตัว (Discrete Model) จะต้องแบ่งเอลิเมนต์ให้จุดต่อของคอนกรีตอยู่จุดที่ตำแหน่งเดียวกันกับจุดต่อของเอลิเมนต์เหล็กเสริมเสมอ หากแต่แบบจำลองที่เสนอโดยใช้เทคนิคการฝัง (Embedded Model) ไม่มีข้อจำกัดนี้ กล่าวคือสามารถสร้างแบบจำลองและแบ่งเอลิเมนต์โดยไม่ต้องคำนึงถึงตำแหน่งของเหล็กเสริมนั้นเอง จะเห็นว่าสามารถลดความยุ่งยากในขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์ได้ดี โดยเฉพาะเมื่อแบบจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กมีรายละเอียดของเหล็กเสริมที่ซับซ้อน

3. การวิเคราะห์แบบจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กที่มีการแบ่งเอลิเมนต์โดยให้จุดต่อของเอลิเมนต์คอนกรีตและตำแหน่งของเหล็กเสริมอยู่ตำแหน่งเดียวกัน จะให้ผลการวิเคราะห์ที่เท่ากันทั้งในการวิเคราะห์ของโปรแกรม ANSYS และโปรแกรมที่นำเสนอ หมายความว่าเมื่อแบ่ง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เอลิเมนต์โดยยึดหลักการแบ่งแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) จะให้ผลลัพธ์เท่ากัน นั้นคือเอลิเมนต์ในโปรแกรมที่นำเสนอสามารถการวิเคราะห์ได้ทั้งการวิเคราะห์แบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) และแบบจำลองโดยใช้เทคนิคการฝัง (Embedded Model) โดยจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของเหล็กเสริมที่กำหนดให้กับโปรแกรม

4. เมื่อทำการวิเคราะห์เปรียบเทียบโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กโดยใช้การสร้างแบบแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) และแบบจำลองโดยใช้เทคนิคการฝัง (Embedded Model) เปรียบเทียบกัน อ้างอิงจากกรณีศึกษาต่าง ๆ ในงานวิจัยนี้จะเห็นว่า ร้อยละความแตกต่างสูงสุดที่เกิดขึ้นเมื่อเปรียบเทียบการเคลื่อนตัว คือประมาณ 3.57 เท่านั้น และมีแนวโน้มการเคลื่อนที่ไปในทิศทางเดียวกัน อาจกล่าวได้ว่าร้อยละความแตกต่างเกิดขึ้นน้อยและยอมรับได้ จึงสามารถใช้เอลิเมนต์ที่เสนอในการวิเคราะห์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ และสามารถใช้แทนแบบจำลองแบบแยกตัว (Discrete Model) ได้

ในการพัฒนาโปรแกรมโดยใช้วิธีสร้างแบบจำลองโดยใช้เทคนิคการฝัง (Embedded Model) ทำให้ทราบถึงข้อดีและข้อเสียของวิธีการสร้างแบบจำลองด้วยเทคนิคนี้ และโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนี้สามารถใช้วิเคราะห์แบบจำลองคอนกรีตเสริมเหล็กได้ ในช่วงที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุมีค่าคงที่ อีกทั้งโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นอาจเป็นอีกหนึ่งแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมวิเคราะห์แบบจำลองด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไปในอนาคต

ข้อเสนอแนะ

1. โปรแกรมที่ได้นำเสนอมาในงานวิจัยนี้พัฒนาขึ้นโดยใช้ภาษาคอมพิวเตอร์ C# ซึ่งมีความง่ายในการพัฒนาของภาษา หากแต่ความเหมาะสมสำหรับการพัฒนาเพื่อเป็นโปรแกรมในการคำนวณที่ซับซ้อนอาจขึ้นอยู่กับความเร็วในการคำนวณเป็นหลักโดยโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนี้เมื่อเปรียบเทียบกับโปรแกรม ANSYS แล้วถือว่าทำงานได้ช้า ดังนั้นหากเปรียบเป็นภาษาที่ทำงานได้เร็วกว่าอาจจะเหมาะสมมากกว่าในการพัฒนา

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

2. จะเห็นได้ว่าผู้วิจัยได้ใช้ OpenGL เป็นเครื่องมือในการแสดงผล 3 มิติ แต่ยังมีเครื่องมืออื่น ๆ ที่ใช้สำหรับแสดงผล 3 มิติอีกมาก เช่น Direct X หากมีการทำการเปรียบเทียบเครื่องมือต่างๆ ในลักษณะของความยากง่ายในการทำงาน ความเร็วในการขึ้นรูป และความเข้ากันเมื่อใช้กับคอมพิวเตอร์ต่าง ๆ ในการพัฒนา อาจทำให้มีความเหมาะสมในการพัฒนามากขึ้น

3. โปรแกรมที่ได้นำเสนอนี้วิเคราะห์ผลด้วยวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์โดยค่าคุณสมบัติของวัสดุ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นจะใช้เป็นค่าคงที่ หากแต่ในความเป็นจริงแล้วค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุจะไม่เป็นค่าคงที่ เช่นการวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้นในโปรแกรม ANSYS ดังนั้นหากมีการพัฒนาโปรแกรมต่อไปเพื่อให้สามารถรับค่าโมดูลัสยืดหยุ่นแบบไม่เป็นค่าคงที่ได้ จะทำให้การวิเคราะห์แบบจำลองเข้าใกล้กับความเป็นจริงมากขึ้น

4. จะเห็นได้ว่าโปรแกรมวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์เชิงพาณิชย์ต่าง ๆ เช่น ANSYS และ ABACUS จะมีเอลิเมนต์ในโปรแกรมหลายเอลิเมนต์ เพื่อให้สามารถใช้โปรแกรมสร้างแบบจำลองได้อย่างเหมาะสมและครอบคลุมแบบจำลองหลาย ๆ ประเภท หากแต่ในงานวิจัยนี้สนใจในแบบจำลองของคอนกรีตเสริมเหล็กเท่านั้น ดังนั้นโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจึงไม่ครอบคลุมและการสร้างแบบจำลองประเภทอื่น ๆ จึงควรมีการพัฒนาเพิ่มเอลิเมนต์ต่าง ๆให้กับโปรแกรมเพื่อให้สามารถสร้างแบบจำลองได้อย่างครอบคลุมและเหมาะสมยิ่งขึ้น

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

Ngo, S. 1967. **Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams**. ACI JOURNAL / MARCH 1967.

Kwak H. G. and F. C. Filippou. 1990. **Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads**. Report No. UCB/SEMM-90/14, University of California, Berkeley.

Alaa E. Elwi and Terry M. Hrudey. 1989. **Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement.** J. Engrg. Mech. Volume 115, Issue 4, pp. 740-754 (April 1989)

Fariborz Barzegar. 1994. **Generating Reinforcement in FE Modeling of Concrete Structures.** Journal of Structural Engineering, Vol. 120, No. 5, May 1994, pp. 1656-1662

H.M. Gomes, A.M. Awruch. 2000. **Some aspects on three-dimensional numerical modelling of reinforced concrete structures using the finite element method**. Graduate Program in Civil Engineering, Federal University of Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha, 99, 38 andar-90035-190, Porto Alegre, RS, Brazil

Kitjapat Phuvoravan and Elisa D. Sotelino. 2003**. Nonlinear Finite Element for Reinforced Concrete Slabs**. Journal of Structural Engineering, Vol. 131, No. 4, April 2005, pp. 643-649

Libor Jendele, Jan Cervenka. 2006. **Finite element modelling of reinforcement with bond.** Cervenka Consulting, Predvoje 22, 162 00 Prague, Czech Republic

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. 2550. **ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม**. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. 2546. **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม.** สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

J.L.Meek. 1991. **Computer Methods in Structural Analysis**. Fong & Sons Printers Pte. Ltd., Singapore.

Tirupathi R. Chandrupatla, Ashok D. Belegundu. 2002. **Introduction to Finite Elements in Engineering**. Prentice Hall,Upper Saddle River, New Jersey.

Erik G. Thompson. 2005. **Introduction to the Finite Elements Method Theory, Programming, and Applications**. Hamilton Printing and Phoenix Color Corp, United States of America.

M. Y. H. Bangash. 1989. **Concrete and Concrete Structures: Numerical Modelling and Applications**. Elsevier Science Publishers, London.

Helmut Hartl, Christoph Handel. 1998. **3D Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures**. Graz University of Technology, Institute for Structural Concrete, AUSTRIA.

Clauve, J.D., Campos Filho. 1995. **A 3D Analysis of Reinforced Concrete Structures by the Finite Element Method**. 13th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Escola de Engenharia – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto, Alegre, Barzil.

A. Nogueira, X.R. Nóvoa, M. Keddam et al. 2005. **Impedance Measurements in Reinforced Concrete and 3D FEM Simulations.** the COMSOL Multiphysics User's Conference 2005, Paris.

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

G. R. Liu, S. S. Quek. 2003. **The Finite Element Method A Practical Course**. Elsevier Science Ltd., Oxford.

Hill, F.S. (Francis S.). 2001. **Computer graphics : using OpenGL.** Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall, New Jersey.

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ภาคผนวก

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

องค์ประกอบส่วนต่างๆ ของโปรแกรม

โปรแกรมที่นำเสนอนั้นได้พัฒนาโดยใช้ภาษาคอมพิวเตอร์ C# ในการพัฒนาโดยโปรแกรมจะประกอบด้วยส่วนหลัก ๆ 4 ส่วนด้วยกัน ดังนี้

(1) ส่วนต่อประสานกับผู้ใช้ (user interface, UI)
(2) ส่วนของการแสดงผล 3 มิติ (3D Graphics)
(3) ส่วนของการคำนวณ (calculation function)
(4) ส่วนของการเก็บข้อมูล (data read and write)

ส่วนประกอบหลัก ๆ ของโปรแกรมทั้ง 4 ส่วนจะทำงานประสานกันเพื่อให้โปรแกรมทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยมีรายละเอียดสำคัญในโปรแกรมดังนี้

Class.Data ใช้สำหรับเก็บข้อมูลโดยประกอบไปตัวแปรสำคัญ ดังนี้

PointData : ใช้สำหรับเก็บข้อมูลของจุดที่สร้างขึ้นในแบบจำลอง
LineData : ใช้สำหรับเก็บข้อมูลของเส้นที่สร้างขึ้นในแบบจำลอง
AreaData : ใช้สำหรับเก็บข้อมูลพื้นที่ในแบบจำลอง
VolumeData : ใช้สำหรับเก็บข้อมูลรูปทรง 3 มิติ ที่สร้างขึ้นในแบบจำลอง
NodeData : ใช้สำหรับเก็บข้อมูลของจุดต่อหลังจากแบ่งเอลิเมนต์
ElementData : ใช้สำหรับเก็บข้อมูลของเอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นหลังการแบ่งแบบจำลอง
SteelPointData : ใช้สำหรับเก็บข้อมูลจุดของเหล็กเสริมที่สร้างขึ้น
SteelLineData : ใช้สำหรับเก็บข้อมูลของเส้นเหล็กเสริมที่สร้างในแบบจำลอง
ForceData : ใช้สำหรับเก็บข้อมูลแรงที่กระทำที่จุดต่อต่าง ๆ ของแบบจำลอง
DisplacementData : ใช้สำหรับเก็บข้อมูลการยึดรั้งก่อนการคำนวณและข้อมูลผลการเคลื่อนที่หลังการคำนวณเสร็จ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Class.Matrix ใช้สำหรับสร้าง function ในการคำนวณประกอบด้วย function สำคัญ ดังนี้

Invert : ใช้สำหรับหาอินเวอร์สของเมทริกซ์

add : ใช้สำหรับบวกเมทริกซ์

sub : ใช้สำหรับลบเมทริกซ์

copy : ใช้สำหรับการคัดลอกเมทริกซ์

Transpose : ใช้สำหรับหาทรานสโพสเมทริกซ์

Multi : ใช้สำหรับการคูณกันของเมทริกซ์

scal : ใช้สำหรับการคูณปริมาณสเกลาร์กับเมทริกซ์

LU_Decom : ใช้สำหรับแก้สมการเมทริกซ์โดยใช้หลักการของ LU Decomposition

Gauss : ใช้สำหรับแก้สมการเมทริกซ์โดยใช้หลักการของ Gauss elimination

Class.MainView ใช้สำหรับสร้างการแสดงผล 3 มิติ function สำคัญ ดังนี้

glDraw : ใช้สำหรับการแสดงผล 3 มิติโดยการวาดภาพต่าง ๆ ในระบบ 3 มิติ

Goforward/Gobackward : ใช้สำหรับการย่อขยายภาพ

GoLeft/GoRight/GoUp/GoDown : ใช้สำหรับการหมุนภาพ

Redraw : ใช้สำหรับการแสดงผลซ้ำไปซ้ำมาเพื่อให้ภาพเคลื่อนไหวหรือเปลี่ยนแปลงตามคำสั่งต่าง ๆ อยู่เสมอ

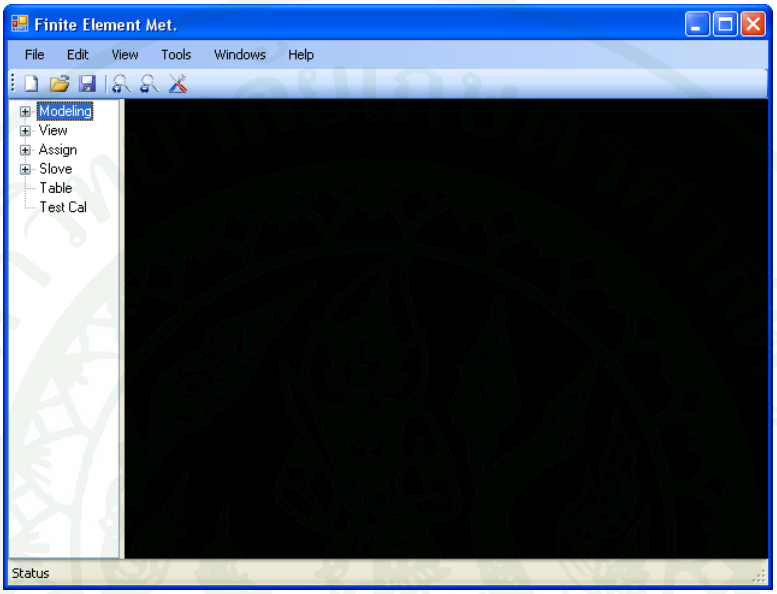
อย่างไรก็ตามยังมีข้อจำกัดที่โปรแกรมที่ได้เสนอไม่สามารถทำได้ เพื่อให้โปรแกรมสมบรูณ์ยิ่งขึ้น หรือก็คือสิ่งที่ควรปรับปรุงในโปรแกรมนั้นเอง มีข้อสำคัญหลัก ๆ ดังนี้

- การใช้ลูกศรในการเลือกจุดต่อหรือเอลิเมนต์ ในโปรแกรมไม่สามารถทำได้ จึงทำให้ความสะดวกในการใช้ลดลง
- การจัดเก็บข้อมูลระหว่างการคำนวณ เนื่องด้วยผู้วิจัยต้องการความถูกต้องตามทฤษฎีที่ได้นำมาใช้ เมื่อพัฒนาโปรแกรมจึงไม่ได้ใช้วิธีในการจัดเก็บในรูปแบบที่สามารถลดหน่วยความจำในการจัดเก็บ ดังนั้นโปรแกรมนี้จึงใช้ค่าหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์เก็บเมทริกซ์ทั้งหมด
- การคำนวณ หลักการคำนวณก็เช่นเดียวกับหลักการเก็บข้อมูลจึงทำให้เมทริกซ์ที่มาคำนวณมีขนาดใหญ่จึงทำให้การคำนวณต้องการเวลาที่มาก

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ขั้นตอนการใช้งานโปรแกรมอย่างง่ายมีอยู่ 9 ขั้นตอนดังนี้

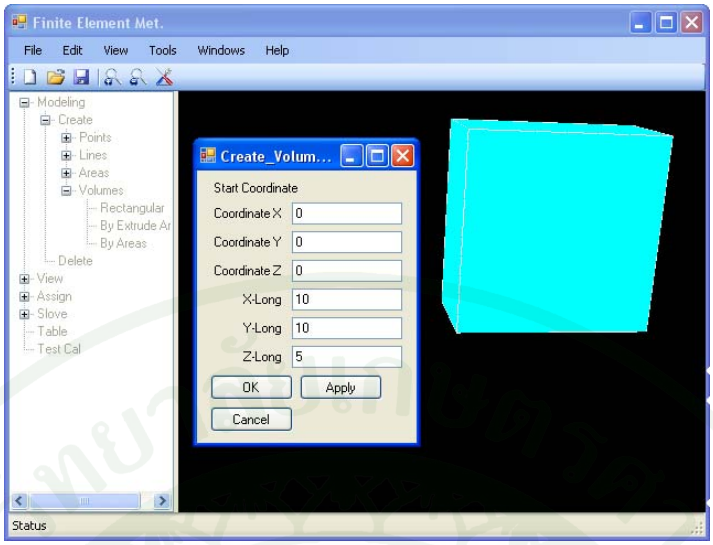
ขั้นตอนแรก เริ่มจากการเปิดโปรแกรม จะเห็นว่ามีหน้าต่างทางด้านซ้ายมือเป็นแถบเครื่องมือสำหรับในการใช้สร้างแบบจำลองและคำนวณผล ดังภาพผนวกที่ 1



ภาพผนวกที่ 1 หน้าต่างหนักของโปรแกรม (main user interface)

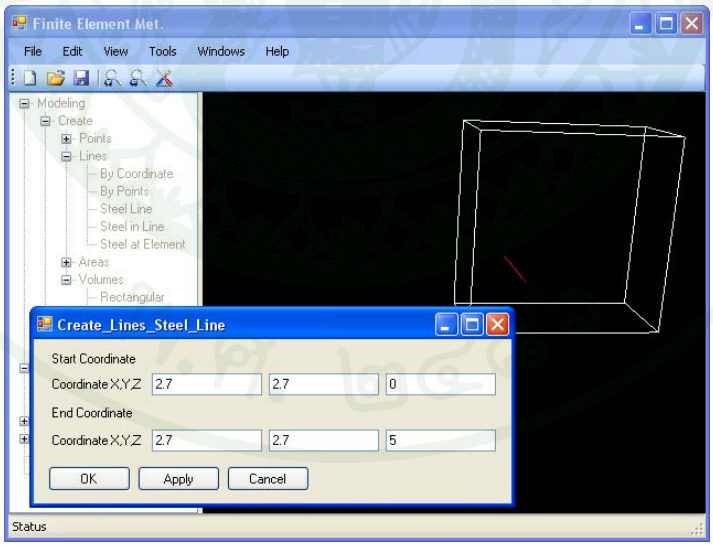
ขั้นตอนที่สอง เลือกเครื่องมือที่แถบด้านซ้ายเพื่อสร้างรูปร่างของแบบจำลองโดยเลือก Modeling>Create>Volumes>Rectangular จะปรากฏหน้าต่างสำหรับสร้างแบบจำลองที่มีรูปร่างความกว้าง ยาวและลึกในระบบ X, Y และ Z ให้ใส่ขนาดของแบบจำลอง ดังแสดงในภาพผนวกที่ 2

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ภาพผนวกที่ 2 การสร้างรูปร่างของแบบจำลอง

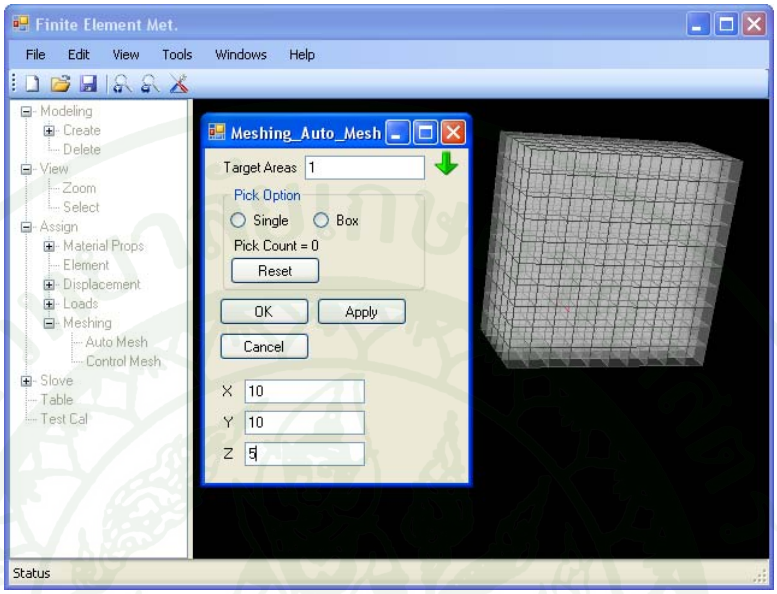
ขั้นตอนที่สาม ในขั้นตอนนี้จะทำการสร้างแบบจำลองเหล็กเสริมโดยเลือกที่ Modeling>Create >Lines>Steel Line ในหน้าต่างที่เปิดขึ้นมาให้กำหนดพิกัดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเหล็กเสริมดังแสดงในภาพผนวกที่ 3



ภาพผนวกที่ 3 การใส่เหล็กเสริมให้กับแบบจำลอง

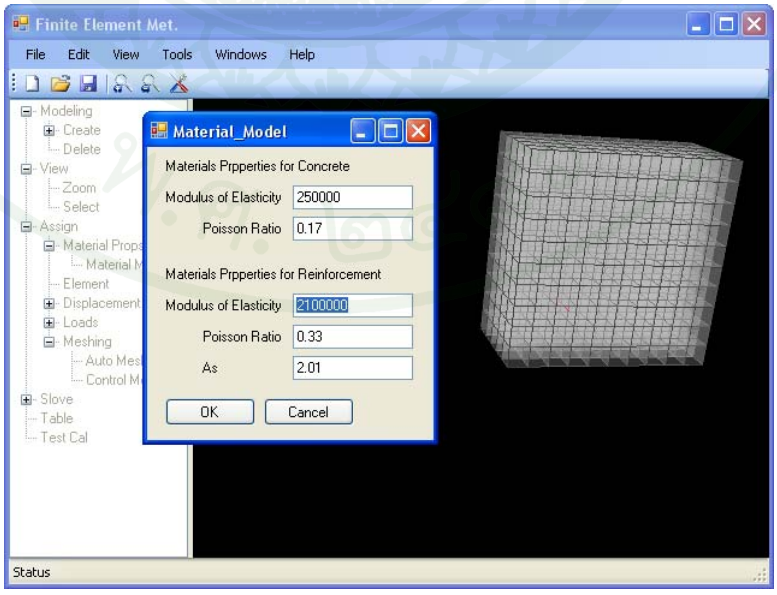
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ขั้นตอนที่สี่ ทำการแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลองโดยเลือกที่ Assign>Meshing>Auto Mesh จากนั้นใส่ขนาดของการแบ่งเอลิเมนต์ในแนวแกน X, Y และ Z เพื่อแบ่งเอลิเมนต์ ดังภาพผนวกที่ 4



ภาพผนวกที่ 4 การแบ่งเอลิเมนต์ของแบบจำลอง

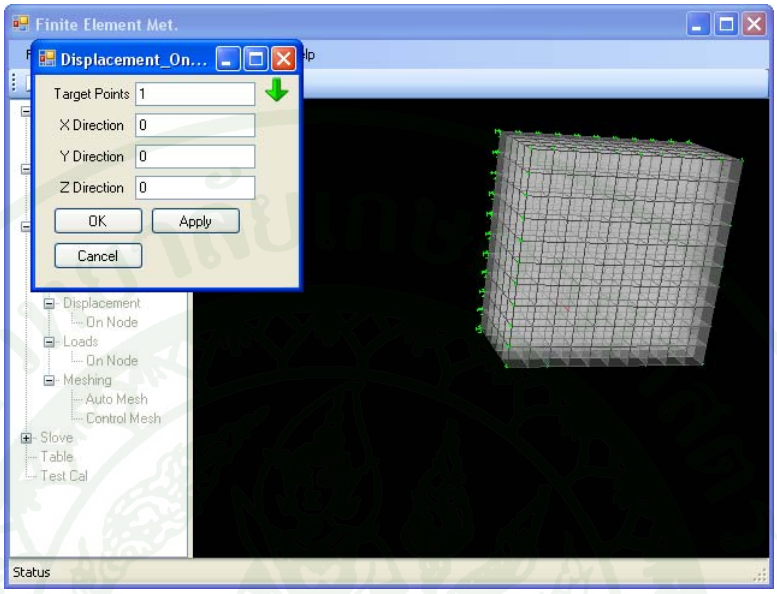
ขั้นตอนที่ห้า กำหนดค่าคุณสมบัติของวัสดุให้กับแบบจำลองโดยเลือกที่ Assign>Material Props>Material Model ใส่ค่าต่าง ๆ ที่กำหนดคุณสมบัติของวัสดุ ดังภาพผนวกที่ 5



ภาพผนวกที่ 5 การกำหนดคุณสมบัติของวัสดุใจแบบจำลอง

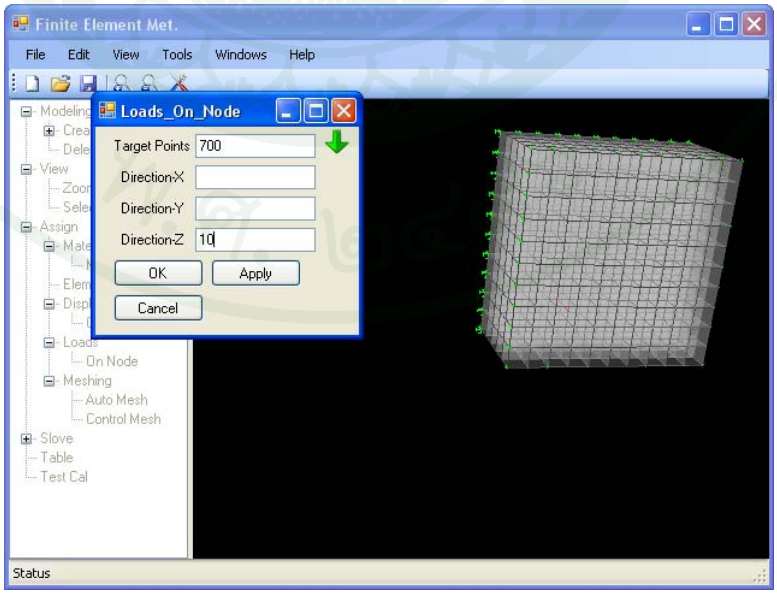
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ขั้นตอนที่หก กำหนดจุดยึดรั้งให้กับแบบจำลองโดยเลือกที่ Assign>Displacement>On Node เลือกจุดต่อที่ต้องการยึดรั้งและใส่ค่าการยึดรั้งเท่ากับ 0 ที่จุดต่อนั้น ๆ ดังภาพผนวกที่ 6



ภาพผนวกที่ 6 การใส่จุดยึดรั้งให้กับแบบจำลอง

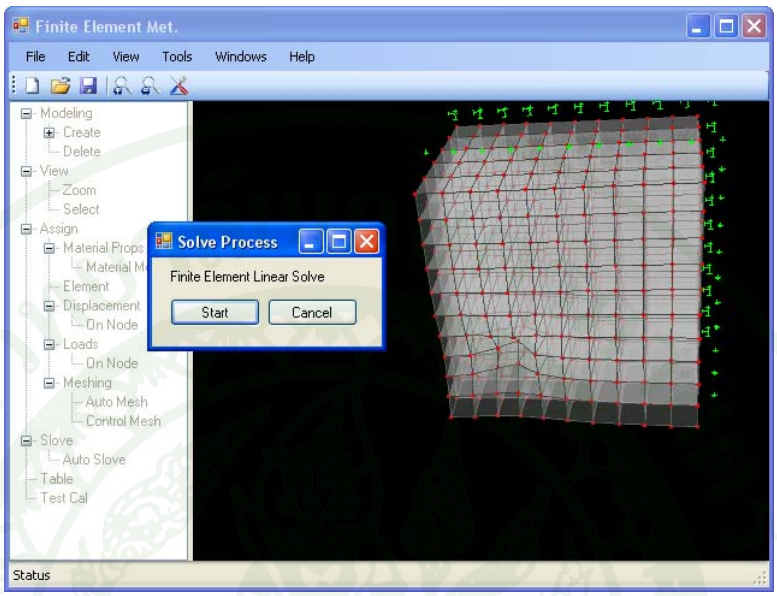
ขั้นตอนที่เจ็ด กำหนดแรงที่กระทำกับแบบจำลองโดยเลือกที่ Assign>Loads>On Node เลือกจุดต่อที่ต้องการใส่แรงกระทำ จากนั้นใส่ปริมาณแรงตามทิศทางดังแสดงในภาพผนวกที่ 7



ภาพผนวกที่ 7 การกำหนดแรงให้กับแบบจำลอง

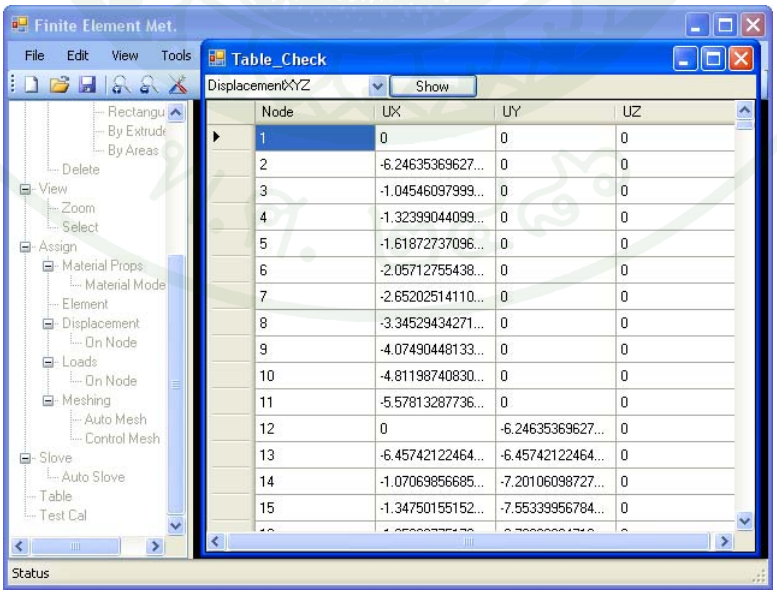
ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ขั้นตอนที่แปด ทำการคำนวณเพื่อหาค่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นจากแรงที่กระทำของแบบจำลองโดยเลือกเครื่องมือ Solve>Auto Slove ดังแสดงในภาพผนวกที่ 8



ภาพผนวกที่ 8 วิธีการคำนวณของโปรแกรม

ขั้นตอนที่เก้า ดูผลการคำนวณจากเครื่องมือ Table ซึ่งจะสามารถแสดงผลของการคำนวณออกมาเป็นตารางดังแสดงในภาพผนวกที่ 9



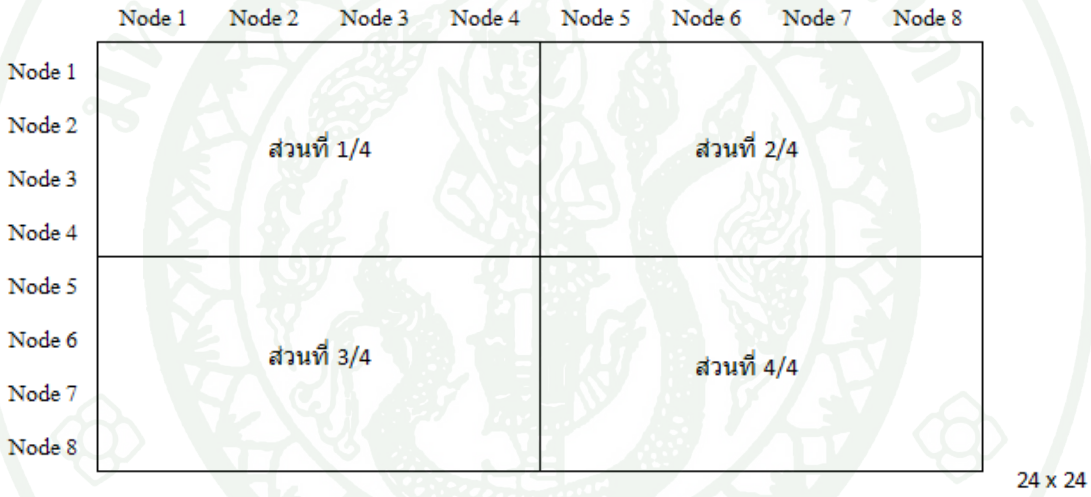
ภาพผนวกที่ 9 การดูผลการเคลื่อนที่ ที่เกิดขึ้นกับแบบจำลองหลังการคำนวณ

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Stiffness Matrix ของกรณีศึกษาที่ 2

ในกรณีศึกษานี้เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์จะประกอบไปด้วยคุณสมบัติของคอนกรีตและเหล็กเสริมโดยในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นถึงเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์โดยจะแสดงแยกให้เห็นคุณสมบติของคอนกรีตและเหล็กเสริมโดยจะกำหนดการแสดงผลดังนี้

เมทริกซ์ของเอลิเมนต์ในกรณีศึกษาที่ 3 มีขนาด 24x24 จะแสดงแยกโดยแบ่งการแสดงเมทริกซ์ของความแข็งเกร็งออกเป็น 4 ส่วนดังแสดงในภาพผนวกที่ 10 โดยเมทริกซ์ที่นำมาแสดงนี้จะถูกสร้างขึ้นจากวิธีการสร้างแบบจำลองด้วยเทคนิคการฝัง



ภาพผนวกที่ 10 การแบ่งการแสดงค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็ง

เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของคุณสมบัติคอนกรีตมีค่าดังแสดงในภาพผนวกที่ 11 - 14

	Node 1			Node 2			Node 3			Node 4		
Node 1	2.68E+05	6.74E+04	6.74E+04	-8.99E+04	-2.16E+04	-2.16E+04	-8.95E+04	-1.08E+04	-6.74E+04	4.50E+04	3.37E+04	2.16E+04
	6.74E+04	2.68E+05	6.74E+04	2.16E+04	4.50E+04	3.37E+04	1.08E+04	-2.20E+04	1.08E+04	3.37E+04	4.50E+04	2.16E+04
	6.74E+04	6.74E+04	2.68E+05	2.16E+04	3.37E+04	4.50E+04	-6.74E+04	-1.08E+04	-8.95E+04	-2.16E+04	-2.16E+04	-8.99E+04
Node 2	-8.99E+04	2.16E+04	2.16E+04	2.68E+05	-6.74E+04	-6.74E+04	4.50E+04	-3.37E+04	-2.16E+04	-8.95E+04	1.08E+04	6.74E+04
	-2.16E+04	4.50E+04	3.37E+04	-6.74E+04	2.68E+05	6.74E+04	-3.37E+04	4.50E+04	2.16E+04	-1.08E+04	-2.20E+04	1.08E+04
	-2.16E+04	3.37E+04	4.50E+04	-6.74E+04	6.74E+04	2.68E+05	2.16E+04	-2.16E+04	-8.99E+04	6.74E+04	-1.08E+04	-8.95E+04
Node 3	-8.95E+04	1.08E+04	-6.74E+04	4.50E+04	-3.37E+04	2.16E+04	2.68E+05	-6.74E+04	6.74E+04	-8.99E+04	2.16E+04	-2.16E+04
	-1.08E+04	-2.20E+04	-1.08E+04	-3.37E+04	4.50E+04	-2.16E+04	-6.74E+04	2.68E+05	-6.74E+04	-2.16E+04	4.50E+04	-3.37E+04
	-6.74E+04	1.08E+04	-8.95E+04	-2.16E+04	2.16E+04	-8.99E+04	6.74E+04	-6.74E+04	2.68E+05	2.16E+04	-3.37E+04	4.50E+04
Node 4	4.50E+04	3.37E+04	-2.16E+04	-8.95E+04	-1.08E+04	6.74E+04	-8.99E+04	-2.16E+04	2.16E+04	2.68E+05	6.74E+04	-6.74E+04
	3.37E+04	4.50E+04	-2.16E+04	1.08E+04	-2.20E+04	-1.08E+04	2.16E+04	4.50E+04	-3.37E+04	6.74E+04	2.68E+05	-6.74E+04
	2.16E+04	2.16E+04	-8.99E+04	6.74E+04	1.08E+04	-8.95E+04	-2.16E+04	-3.37E+04	4.50E+04	-6.74E+04	-6.74E+04	2.68E+05

ภาพผนวกที่ 11 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีต ส่วนที่ 1/4

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

	Node 5			Node 6			Node 7			Node 8		
Node 1	4.50E+04	2.16E+04	3.37E+04	-8.95E+04	-6.74E+04	-1.08E+04	-6.70E+04	-3.37E+04	-3.37E+04	-2.20E+04	1.08E+04	1.08E+04
	-2.16E+04	-8.99E+04	-2.16E+04	-6.74E+04	-8.95E+04	-1.08E+04	-3.37E+04	-6.70E+04	-3.37E+04	-1.08E+04	-8.95E+04	-6.74E+04
	3.37E+04	2.16E+04	4.50E+04	1.08E+04	1.08E+04	-2.20E+04	-3.37E+04	-3.37E+04	-6.70E+04	-1.08E+04	-6.74E+04	-8.95E+04
Node 2	-8.95E+04	6.74E+04	1.08E+04	4.50E+04	-2.16E+04	-3.37E+04	-2.20E+04	-1.08E+04	-1.08E+04	-6.70E+04	3.37E+04	3.37E+04
	6.74E+04	-8.95E+04	-1.08E+04	2.16E+04	-8.99E+04	-2.16E+04	1.08E+04	-8.95E+04	-6.74E+04	3.37E+04	-6.70E+04	-3.37E+04
	-1.08E+04	1.08E+04	-2.20E+04	-3.37E+04	2.16E+04	4.50E+04	1.08E+04	-6.74E+04	-8.95E+04	3.37E+04	-3.37E+04	-6.70E+04
Node 3	-6.70E+04	3.37E+04	-3.37E+04	-2.20E+04	-1.08E+04	1.08E+04	4.50E+04	-2.16E+04	3.37E+04	-8.95E+04	6.74E+04	-1.08E+04
	3.37E+04	-6.70E+04	3.37E+04	1.08E+04	-8.95E+04	6.74E+04	2.16E+04	-8.99E+04	2.16E+04	6.74E+04	-8.95E+04	1.08E+04
	-3.37E+04	3.37E+04	-6.70E+04	-1.08E+04	6.74E+04	-8.95E+04	3.37E+04	-2.16E+04	4.50E+04	1.08E+04	-1.08E+04	-2.20E+04
Node 4	-2.20E+04	1.08E+04	-1.08E+04	-6.70E+04	-3.37E+04	3.37E+04	-8.95E+04	-6.74E+04	1.08E+04	4.50E+04	2.16E+04	-3.37E+04
	-1.08E+04	-8.95E+04	6.74E+04	-3.37E+04	-6.70E+04	3.37E+04	-6.74E+04	-8.95E+04	1.08E+04	-2.16E+04	-8.99E+04	2.16E+04
	1.08E+04	6.74E+04	-8.95E+04	3.37E+04	3.37E+04	-6.70E+04	-1.08E+04	-1.08E+04	-2.20E+04	-3.37E+04	-2.16E+04	4.50E+04

ภาพผนวกที่ 12 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีต ส่วนที่ 2/4

	Node 1			Node 2			Node 3			Node 4		
Node 5	4.50E+04	-2.16E+04	3.37E+04	-8.95E+04	6.74E+04	-1.08E+04	-6.70E+04	3.37E+04	-3.37E+04	-2.20E+04	-1.08E+04	1.08E+04
	2.16E+04	-8.99E+04	2.16E+04	6.74E+04	-8.95E+04	1.08E+04	3.37E+04	-6.70E+04	3.37E+04	1.08E+04	-8.95E+04	6.74E+04
	3.37E+04	-2.16E+04	4.50E+04	1.08E+04	-1.08E+04	-2.20E+04	-3.37E+04	3.37E+04	-6.70E+04	-1.08E+04	6.74E+04	-8.95E+04
Node 6	-8.95E+04	-6.74E+04	1.08E+04	4.50E+04	2.16E+04	-3.37E+04	-2.20E+04	1.08E+04	-1.08E+04	-6.70E+04	-3.37E+04	3.37E+04
	-6.74E+04	-8.95E+04	1.08E+04	-2.16E+04	-8.99E+04	2.16E+04	-1.08E+04	-8.95E+04	6.74E+04	-3.37E+04	-6.70E+04	3.37E+04
	-1.08E+04	-1.08E+04	-2.20E+04	-3.37E+04	-2.16E+04	4.50E+04	1.08E+04	6.74E+04	-8.95E+04	3.37E+04	3.37E+04	-6.70E+04
Node 7	-6.70E+04	-3.37E+04	-3.37E+04	-2.20E+04	1.08E+04	1.08E+04	4.50E+04	2.16E+04	3.37E+04	-8.95E+04	-6.74E+04	-1.08E+04
	-3.37E+04	-6.70E+04	-3.37E+04	-1.08E+04	-8.95E+04	-6.74E+04	-2.16E+04	-8.99E+04	-2.16E+04	-6.74E+04	-8.95E+04	-1.08E+04
	-3.37E+04	-3.37E+04	-6.70E+04	-1.08E+04	-6.74E+04	-8.95E+04	3.37E+04	2.16E+04	4.50E+04	1.08E+04	1.08E+04	-2.20E+04
Node 8	-2.20E+04	-1.08E+04	-1.08E+04	-6.70E+04	3.37E+04	3.37E+04	-8.95E+04	6.74E+04	1.08E+04	4.50E+04	-2.16E+04	-3.37E+04
	1.08E+04	-8.95E+04	-6.74E+04	3.37E+04	-6.70E+04	-3.37E+04	6.74E+04	-8.95E+04	-1.08E+04	2.16E+04	-8.99E+04	-2.16E+04
	1.08E+04	-6.74E+04	-8.95E+04	3.37E+04	-3.37E+04	-6.70E+04	-1.08E+04	1.08E+04	-2.20E+04	-3.37E+04	2.16E+04	4.50E+04

ภาพผนวกที่ 13 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีต ส่วนที่ 3/4

	Node 5			Node 6			Node 7			Node 8		
Node 5	2.68E+05	-6.74E+04	6.74E+04	-8.99E+04	2.16E+04	-2.16E+04	-8.95E+04	1.08E+04	-6.74E+04	4.50E+04	-3.37E+04	2.16E+04
	-6.74E+04	2.68E+05	-6.74E+04	-2.16E+04	4.50E+04	-3.37E+04	-1.08E+04	-2.20E+04	-1.08E+04	-3.37E+04	4.50E+04	-2.16E+04
	6.74E+04	-6.74E+04	2.68E+05	2.16E+04	-3.37E+04	4.50E+04	-6.74E+04	1.08E+04	-8.95E+04	-2.16E+04	2.16E+04	-8.99E+04
Node 6	-8.99E+04	-2.16E+04	2.16E+04	2.68E+05	6.74E+04	-6.74E+04	4.50E+04	3.37E+04	-2.16E+04	-8.95E+04	-1.08E+04	6.74E+04
	2.16E+04	4.50E+04	-3.37E+04	6.74E+04	2.68E+05	-6.74E+04	3.37E+04	4.50E+04	-2.16E+04	1.08E+04	-2.20E+04	-1.08E+04
	-2.16E+04	-3.37E+04	4.50E+04	-6.74E+04	-6.74E+04	2.68E+05	2.16E+04	2.16E+04	-8.99E+04	6.74E+04	1.08E+04	-8.95E+04
Node 7	-8.95E+04	-1.08E+04	-6.74E+04	4.50E+04	3.37E+04	2.16E+04	2.68E+05	6.74E+04	6.74E+04	-8.99E+04	-2.16E+04	-2.16E+04
	1.08E+04	-2.20E+04	1.08E+04	3.37E+04	4.50E+04	2.16E+04	6.74E+04	2.68E+05	6.74E+04	2.16E+04	4.50E+04	3.37E+04
	-6.74E+04	-1.08E+04	-8.95E+04	-2.16E+04	-2.16E+04	-8.99E+04	6.74E+04	6.74E+04	2.68E+05	2.16E+04	3.37E+04	4.50E+04
Node 8	4.50E+04	-3.37E+04	-2.16E+04	-8.95E+04	1.08E+04	6.74E+04	-8.99E+04	2.16E+04	2.16E+04	2.68E+05	-6.74E+04	-6.74E+04
	-3.37E+04	4.50E+04	2.16E+04	-1.08E+04	-2.20E+04	1.08E+04	-2.16E+04	4.50E+04	3.37E+04	-6.74E+04	2.68E+05	6.74E+04
	2.16E+04	-2.16E+04	-8.99E+04	6.74E+04	-1.08E+04	-8.95E+04	-2.16E+04	3.37E+04	4.50E+04	-6.74E+04	6.74E+04	2.68E+05

ภาพผนวกที่ 14 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีต ส่วนที่ 4/4

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของคุณสมบัติเหล็กเสริมมีค่าดังแสดงในภาพผนวกที่ 15 – 18

	Node 1			Node 2			Node 3			Node 4		
Node 1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	345,784.32	0.00	0.00	86,446.08	0.00	0.00	-86,446.08	0.00	0.00	-345,784.32
Node 2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	86,446.08	0.00	0.00	21,611.52	0.00	0.00	-21,611.52	0.00	0.00	-86,446.08
Node 3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	-86,446.08	0.00	0.00	-21,611.52	0.00	0.00	21,611.52	0.00	0.00	86,446.08
Node 4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	-345,784.32	0.00	0.00	-86,446.08	0.00	0.00	86,446.08	0.00	0.00	345,784.32

ภาพผนวกที่ 15 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติเหล็กเสริม ส่วนที่ 1/4

	Node 5			Node 6			Node 7			Node 8		
Node 1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	86,446.08	0.00	0.00	21,611.52	0.00	0.00	-21,611.52	0.00	0.00	-86,446.08
Node 2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	21,611.52	0.00	0.00	5,402.88	0.00	0.00	-5,402.88	0.00	0.00	-21,611.52
Node 3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	-21,611.52	0.00	0.00	-5,402.88	0.00	0.00	5,402.88	0.00	0.00	21,611.52
Node 4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	-86,446.08	0.00	0.00	-21,611.52	0.00	0.00	21,611.52	0.00	0.00	86,446.08

ภาพผนวกที่ 16 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติเหล็กเสริม ส่วนที่ 2/4

	Node 1			Node 2			Node 3			Node 4		
Node 5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	86,446.08	0.00	0.00	21,611.52	0.00	0.00	-21,611.52	0.00	0.00	-86,446.08
Node 6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	21,611.52	0.00	0.00	5,402.88	0.00	0.00	-5,402.88	0.00	0.00	-21,611.52
Node 7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	-21,611.52	0.00	0.00	-5,402.88	0.00	0.00	5,402.88	0.00	0.00	21,611.52
Node 8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	-86,446.08	0.00	0.00	-21,611.52	0.00	0.00	21,611.52	0.00	0.00	86,446.08

ภาพผนวกที่ 17 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติเหล็กเสริม ส่วนที่ 3/4

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

	Node 5			Node 6			Node 7			Node 8		
Node 5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	21,611.52	0.00	0.00	5,402.88	0.00	0.00	-5,402.88	0.00	0.00	-21,611.52
Node 6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	5,402.88	0.00	0.00	1,350.72	0.00	0.00	-1,350.72	0.00	0.00	-5,402.88
Node 7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	-5,402.88	0.00	0.00	-1,350.72	0.00	0.00	1,350.72	0.00	0.00	5,402.88
Node 8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	-21,611.52	0.00	0.00	-5,402.88	0.00	0.00	5,402.88	0.00	0.00	21,611.52

ภาพผนวกที่ 18 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติเหล็กเสริม ส่วนที่ 4/4

เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของคุณสมบัติคอนกรีตเสริมเหล็กมีค่าดังแสดงในภาพผนวกที่ 19 – 22

	Node 1			Node 2			Node 3			Node 4		
Node 1	267993.32	67447.98	67447.98	-89930.65	-21583.35	-21583.35	-89480.99	-10791.68	-67447.98	44965.32	33723.99	21583.35
	67447.98	267993.32	67447.98	21583.35	44965.32	33723.99	10791.68	-22033.01	10791.68	33723.99	44965.32	21583.35
	67447.98	67447.98	613777.64	21583.35	33723.99	131411.40	-67447.98	-10791.68	-175927.07	-21583.35	-21583.35	-435714.97
Node 2	-89930.65	21583.35	21583.35	267993.32	-67447.98	-67447.98	44965.32	-33723.99	-21583.35	-89480.99	10791.68	67447.98
	-21583.35	44965.32	33723.99	-67447.98	267993.32	67447.98	-33723.99	44965.32	21583.35	-10791.68	-22033.01	10791.68
	-21583.35	33723.99	131411.40	-67447.98	67447.98	289604.84	21583.35	-21583.35	-111542.17	67447.98	-10791.68	-175927.07
Node 3	-89480.99	10791.68	-67447.98	44965.32	-33723.99	21583.35	267993.32	-67447.98	67447.98	-89930.65	21583.35	-21583.35
	-10791.68	-22033.01	-10791.68	-33723.99	44965.32	-21583.35	-67447.98	267993.32	-67447.98	-21583.35	44965.32	-33723.99
	-67447.98	10791.68	-175927.07	-21583.35	21583.35	-111542.17	67447.98	-67447.98	289604.84	21583.35	-33723.99	131411.40
Node 4	44965.32	33723.99	-21583.35	-89480.99	-10791.68	67447.98	-89930.65	-21583.35	21583.35	267993.32	67447.98	-67447.98
	33723.99	44965.32	-21583.35	10791.68	-22033.01	-10791.68	21583.35	44965.32	-33723.99	67447.98	267993.32	-67447.98
	21583.35	21583.35	-435714.97	67447.98	10791.68	-175927.07	-21583.35	-33723.99	131411.40	-67447.98	-67447.98	613777.64

ภาพผนวกที่ 19 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีตเสริมเหล็ก ส่วนที่ 1/4

	Node 5			Node 6			Node 7			Node 8		
Node 1	44965.32	21583.35	33723.99	-89480.99	-67447.98	-10791.68	-66998.33	-33723.99	-33723.99	-22033.01	10791.68	10791.68
	-21583.35	-89930.65	-21583.35	-67447.98	-89480.99	-10791.68	-33723.99	-66998.33	-33723.99	-10791.68	-89480.99	-67447.98
	33723.99	21583.35	131411.40	10791.68	10791.68	-421.49	-33723.99	-33723.99	-88609.85	-10791.68	-67447.98	-175927.07
Node 2	-89480.99	67447.98	10791.68	44965.32	-21583.35	-33723.99	-22033.01	-10791.68	-10791.68	-66998.33	33723.99	33723.99
	67447.98	-89480.99	-10791.68	21583.35	-89930.65	-21583.35	10791.68	-89480.99	-67447.98	33723.99	-66998.33	-33723.99
	-10791.68	10791.68	-421.49	-33723.99	21583.35	50368.20	10791.68	-67447.98	-94883.87	33723.99	-33723.99	-88609.85
Node 3	-66998.33	33723.99	-33723.99	-22033.01	-10791.68	10791.68	44965.32	-21583.35	33723.99	-89480.99	67447.98	-10791.68
	33723.99	-66998.33	33723.99	10791.68	-89480.99	67447.98	21583.35	-89930.65	21583.35	67447.98	-89480.99	10791.68
	-33723.99	33723.99	-88609.85	-10791.68	67447.98	-94883.87	33723.99	-21583.35	50368.20	10791.68	-10791.68	-421.49
Node 4	-22033.01	10791.68	-10791.68	-66998.33	-33723.99	33723.99	-89480.99	-67447.98	10791.68	44965.32	21583.35	-33723.99
	-10791.68	-89480.99	67447.98	-33723.99	-66998.33	33723.99	-67447.98	-89480.99	10791.68	-21583.35	-89930.65	21583.35
	10791.68	67447.98	-175927.07	33723.99	33723.99	-88609.85	-10791.68	-10791.68	-421.49	-33723.99	-21583.35	131411.40

ภาพผนวกที่ 20 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีตเสริมเหล็ก ส่วนที่ 2/4

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

	Node 1			Node 2			Node 3			Node 4		
Node 5	44965.32	-21583.35	33723.99	-89480.99	67447.98	-10791.68	-66998.33	33723.99	-33723.99	-22033.01	-10791.68	10791.68
	21583.35	-89930.65	21583.35	67447.98	-89480.99	10791.68	33723.99	-66998.33	33723.99	10791.68	-89480.99	67447.98
	33723.99	-21583.35	131411.40	10791.68	-10791.68	-421.49	-33723.99	33723.99	-88609.85	-10791.68	67447.98	-175927.07
Node 6	-89480.99	-67447.98	10791.68	44965.32	21583.35	-33723.99	-22033.01	10791.68	-10791.68	-66998.33	-33723.99	33723.99
	-67447.98	-89480.99	10791.68	-21583.35	-89930.65	21583.35	-10791.68	-89480.99	67447.98	-33723.99	-66998.33	33723.99
	-10791.68	-10791.68	-421.49	-33723.99	-21583.35	50368.20	10791.68	67447.98	-94883.87	33723.99	33723.99	-88609.85
Node 7	-66998.33	-33723.99	-33723.99	-22033.01	10791.68	10791.68	44965.32	21583.35	33723.99	-89480.99	-67447.98	-10791.68
	-33723.99	-66998.33	-33723.99	-10791.68	-89480.99	-67447.98	-21583.35	-89930.65	-21583.35	-67447.98	-89480.99	-10791.68
	-33723.99	-33723.99	-88609.85	-10791.68	-67447.98	-94883.87	33723.99	21583.35	50368.20	10791.68	10791.68	-421.49
Node 8	-22033.01	-10791.68	-10791.68	-66998.33	33723.99	33723.99	-89480.99	67447.98	10791.68	44965.32	-21583.35	-33723.99
	10791.68	-89480.99	-67447.98	33723.99	-66998.33	-33723.99	67447.98	-89480.99	-10791.68	21583.35	-89930.65	-21583.35
	10791.68	-67447.98	-175927.07	33723.99	-33723.99	-88609.85	-10791.68	10791.68	-421.49	-33723.99	21583.35	131411.40

ภาพผนวกที่ 21 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีตเสริมเหล็ก ส่วนที่ 3/4

	Node 5			Node 6			Node 7			Node 8		
Node 5	267993.32	-67447.98	67447.98	-89930.65	21583.35	-21583.35	-89480.99	10791.68	-67447.98	44965.32	-33723.99	21583.35
	-67447.98	267993.32	-67447.98	-21583.35	44965.32	-33723.99	-10791.68	-22033.01	-10791.68	-33723.99	44965.32	-21583.35
	67447.98	-67447.98	289604.84	21583.35	-33723.99	50368.20	-67447.98	10791.68	-94883.87	-21583.35	21583.35	-111542.17
Node 6	-89930.65	-21583.35	21583.35	267993.32	67447.98	-67447.98	44965.32	33723.99	-21583.35	-89480.99	-10791.68	67447.98
	21583.35	44965.32	-33723.99	67447.98	267993.32	-67447.98	33723.99	44965.32	-21583.35	10791.68	-22033.01	-10791.68
	-21583.35	-33723.99	50368.20	-67447.98	-67447.98	269344.04	21583.35	21583.35	-91281.37	67447.98	10791.68	-94883.87
Node 7	-89480.99	-10791.68	-67447.98	44965.32	33723.99	21583.35	267993.32	67447.98	67447.98	-89930.65	-21583.35	-21583.35
	10791.68	-22033.01	10791.68	33723.99	44965.32	21583.35	67447.98	267993.32	67447.98	21583.35	44965.32	33723.99
	-67447.98	-10791.68	-94883.87	-21583.35	-21583.35	-91281.37	67447.98	67447.98	269344.04	21583.35	33723.99	50368.20
Node 8	44965.32	-33723.99	-21583.35	-89480.99	10791.68	67447.98	-89930.65	21583.35	21583.35	267993.32	-67447.98	-67447.98
	-33723.99	44965.32	21583.35	-10791.68	-22033.01	10791.68	-21583.35	44965.32	33723.99	-67447.98	267993.32	67447.98
	21583.35	-21583.35	-111542.17	67447.98	-10791.68	-94883.87	-21583.35	33723.99	50368.20	-67447.98	67447.98	289604.84

ภาพผนวกที่ 22 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์คุณสมบัติคอนกรีตเสริมเหล็ก ส่วนที่ 4/4

จากภาพข้างต้นได้แสดงค่าของเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ ซึ่งเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของคอนกรีตเสริมเหล็กจะมีค่าเท่ากับผลรวมของเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของคอนกรีตและเหล็กเสริม จากรูปร่างของแบบจำลองในกรณีศึกษาที่ 2 จะเห็นว่าตำแหน่งของเหล็กเสริมจะอยู่ใกล้กับจุดต่อที่ 1 และ 4 มากที่สุด จึงทำให้ค่าของเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมและคอนกรีตเสริมเหล็กจะมีค่ามากที่สุดที่ตำแหน่งจุดต่อ ที่ 1 และ 4 ในขณะเดียวกันจุดต่อที่อยู่ห่างจากตำแหน่งเหล็กเสริมมากที่สุดคือ จุดต่อที่ 6 และ 7 ทำให้ค่าของเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมและคอนกรีตเสริมเหล็กมีค่าน้อยที่สุดตำแหน่งจุดต่อที่ 6 และ 7 ซึ่งค่าเมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมก่อนที่จะใช้เทคนิคการฝังนั้นจะมีขนาดเพียง 6 x 6 เท่านั้น ดังภาพผนวกที่ 23 แต่เมื่อเข้าสู่กระบวนการฝังจะทำให้เมทริกซ์ความแข็งเกร็งนี้กระจายไปตามจุดต่อของคอนกรีตโดยจะมีขนาดเมทริกซ์เป็น 24 x 24 และจะยึดตำแหน่งของเหล็กเสริมเป็นตัวแปรสำคัญในการกระจายค่าความแข็งเกร็ง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

	Steel Node 1			Steel Node 2		
Steel Node 1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	844,200.00	0	0	-844,200.00
Steel Node 2	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	-844,200.00	0	0	844,200.00

ภาพผนวกที่ 23 เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเหล็กเสริมก่อนการกระจายด้วยเทคนิคการฝัง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อสกุล	นายยุทธการ มณีจันทร์
เกิดวันที่	วันศุกร์ที่ 19 กันยายน พ.ศ.2524
สถานที่เกิด	จังหวัดกรุงเทพมหานคร
ประวัติการศึกษา	ปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต วิศวกรรมทรัพยากรน้ำ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ พ.ศ. 2548
ตำแหน่งปัจจุบัน	-
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	-
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	-

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์