

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 พลังงานรังสีอาทิตย์

พลังงานรังสีอาทิตย์ [2] เป็นพลังงานที่สะอาด ปราศจากมลพิษ และเป็นพลังงานที่มีศักยภาพสูง ดวงอาทิตย์เป็นดาวฤกษ์ที่ให้ทั้งแสงสว่าง ความร้อนและพลังงานแก่โลก องค์ประกอบส่วนใหญ่เป็นก๊าซ และเป็นก๊าซที่ไวต่ออำนาจแม่เหล็ก ซึ่งนักวิทยาศาสตร์ให้ชื่อก๊าซที่มีลักษณะพิเศษนี้ว่า “พลาสมา” (Plasma) เมื่อเทียบกับโลกแล้วมีรัศมีเป็น 109 เท่าของรัศมีโลก คือประมาณ 695,500 กิโลเมตร อุณหภูมิเฉลี่ยของผิวอยู่ที่ $5,500^{\circ}\text{C}$ แต่อุณหภูมิที่ใจกลางสูงถึง $15,000,000^{\circ}\text{C}$ รังสีอาทิตย์ที่ตกลงบนพื้นโลกเป็นรังสีรวมที่มาจาก 2 ส่วนคือส่วนหนึ่งเป็นส่วนที่รังสีจากดวงอาทิตย์มาถึงโลกโดยตรง เรียกว่า "รังสีตรง" (Beam Component) อีกส่วนหนึ่งเป็นส่วนที่กระจัดกระจายและสะท้อนจากก้อนเมฆหรือชั้นบรรยากาศต่างๆมาสู่ผิวโลกเรียกว่ารังสีกระจาย (Diffuse Component)

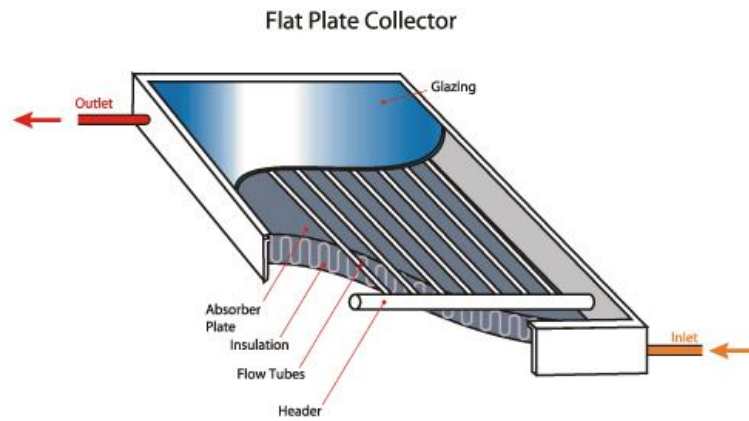
2.2 ส่วนประกอบหลักของระบบผลิตน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์ [3]

เครื่องทำน้ำร้อนด้วยพลังงานรังสีอาทิตย์โดยหลักการทางวิชาการมีส่วนประกอบหลักอยู่ 3 ส่วน คือ ตัวเก็บรังสีอาทิตย์ ถังเก็บน้ำร้อน และระบบท่อของไหลซึ่งแต่ละส่วนมีองค์ประกอบย่อยต่างๆ โดยรายละเอียดดังนี้

2.2.1 ตัวเก็บรังสีอาทิตย์ (Solar Collector)

1. ตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบแผ่นราบ (Flat-Plate Solar Collector)

ตัวเก็บรังสีแบบแผ่นราบเป็นรูปแบบใช้งานในระยะแรกของการสร้างระบบผลิตน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์ ประกอบด้วยแผ่นดูดกลืนรังสีวางอยู่บนฉนวนกันความร้อนภายในกล่องปิด โดยมีแผ่นปิดใต้อครอบปิดด้านบนเพื่อป้องกันการสูญเสียความร้อนจากการสะท้อนความร้อนและการพาความร้อนโดยกระแสน้ำที่ไหลผ่าน รูปที่ 2.1 แสดงลักษณะ โครงสร้างและส่วนประกอบหลักของตัวเก็บรังสีแบบแผ่นราบ โดยรายละเอียดแต่ละส่วนประกอบมีดังนี้



รูปที่ 2.1 ส่วนประกอบตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบแผ่นราบ [3]

ก. แผ่นดูดกลืนรังสี (Solar Absorber) รูปที่ 2.2 แสดงลักษณะของแผ่นดูดกลืนรังสี ทำหน้าที่เปลี่ยนพลังงานรังสีอาทิตย์เป็นความร้อนแล้วถ่ายโอนให้กับของไหลทำงานที่ไหลอยู่ในท่อที่ประกอบติดกับแผ่นดูดกลืนรังสีซึ่งมีรูปแบบแตกต่างกันไปตามการออกแบบ แผ่นดูดกลืนรังสีจะเป็นแผ่นราบที่มีสมบัติดูดกลืนรังสีอาทิตย์และนำความร้อนได้ดี ทนต่อการกัดกร่อนจากปฏิกิริยาเคมี และไม่สูญเสียสมบัติที่สำคัญเมื่อทำงานที่อุณหภูมิสูง การพัฒนาเทคโนโลยีและเพิ่มประสิทธิภาพของแผ่นดูดกลืนรังสีมักดำเนินการในสองแนวทางควบคู่กันไปคือ (1) การเพิ่มความสามารถในการดูดกลืนรังสี และ (2) ลดการแผ่รังสี ด้วยวิธีการต่างๆ เช่น การเคลือบด้วยสีที่มีการดูดกลืนความร้อน การเคลือบด้วยสารเคมีต่างๆ การปรับสภาพผิวของแผ่นดูดกลืนรังสี เป็นต้น วัสดุที่นิยมใช้ทำแผ่นดูดกลืนได้แก่ ทองแดง อะลูมิเนียม และเหล็ก



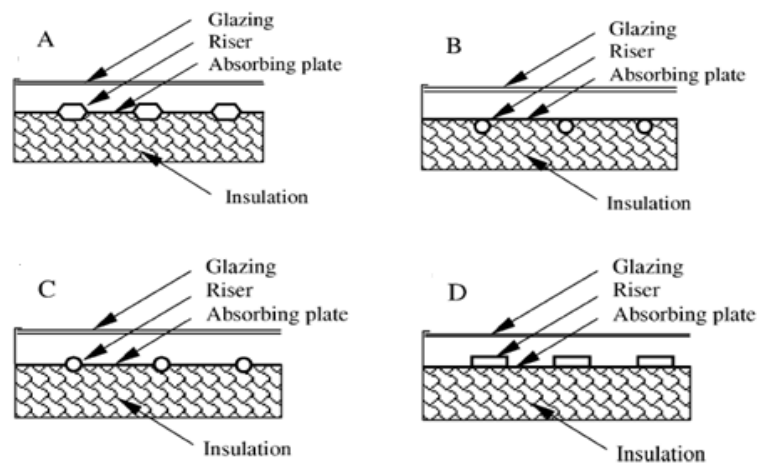
รูปที่ 2.2 แผ่นดูดกลืนรังสีพร้อมท่อของไหล [3]

ข. แผ่นปิดใส (Glazing Materials) ทำหน้าที่ป้องกันการสูญเสียความร้อนจากการสะท้อนความร้อน การแผ่รังสี และการพาความร้อน โดยกระแสอากาศที่ไหลผ่าน มีสมบัติในการส่งผ่านรังสีคลื่นสั้นได้ดี

และป้องกันรังสีคลื่นยาวสะท้อนกลับออกไปจากแผ่นดูดกลืนรังสี วัสดุที่นิยมใช้งาน เช่น กระจกอบร้อนที่มีส่วนประกอบเหล็กต่ำ หรือพลาสติกใส

ค. ฉนวนความร้อน (Insulation) ทำหน้าที่ป้องกันและลดการสูญเสียจากด้านข้างและด้านหลังของตัวเก็บรังสีแบบแผ่นราบ ฉนวนที่ดีต้องมีสมบัติที่สำคัญคือ มีค่าการนำความร้อนต่ำ ทนความร้อนสูง และทนความชื้นได้ดี ไม่ติดไฟ ไม่ทำปฏิกิริยาเคมี ไม่สะสมความร้อนและดูดกลืนรังสี โดยทั่วไปจะใช้วัสดุเช่น โยใยแก้ว โฟมโพลียูรีเทน และวัสดุธรรมชาติ (กรณีระบบราคาประหยัด)

ง. ท่อของไหล ทำหน้าที่ในการนำความร้อนจากแผ่นดูดกลืนรังสีที่ถ่ายโอนความร้อนสู่ของเหลวในท่อ ทิศทางการไหลของของเหลวในท่อมีหลายรูปแบบขึ้นกับการออกแบบ เช่น แบบขนาน แบบขดไป-กลับ (Serpentine) ตัวอย่างลักษณะของการติดตั้งท่อน้ำซึ่งสัมผัสอยู่กับแผ่นดูดกลืนที่ได้มีการสร้างใช้งานมาดังรูปที่ 2.3 สำหรับวัสดุที่ใช้ส่วนใหญ่ได้แก่ ทองแดง/ชุบสีกา



รูปที่ 2.3 การติดตั้งท่อน้ำในตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบต่างๆ [4]

จ. กล่องตัวรับรังสี (Casing) ทำหน้าที่ในการเพิ่มความแข็งแรงและช่วยลดการสูญเสียความร้อนของแผ่นดูดกลืน ระบบท่อของไหลร้อน และฉนวนภายในตัวเก็บรังสี วัสดุที่นิยมใช้งานคือ อะลูมิเนียม ไม้ พลาสติก เป็นต้น

ฉ. ประเก็นและซีลกันรั่ว (Gasket and Seal) ใช้เพื่อป้องกันการรั่วซึมของน้ำและความชื้นจากภายนอกเข้าสู่ตัวรับรังสี โดยทั่วไปผู้ผลิตใช้กาวซิลิโคนเนื่องจากทนอุณหภูมิสูงและมีความยืดหยุ่นที่ดีรองรับการขยายตัวของวัสดุที่มีอุณหภูมิสูง เหมาะสำหรับการใช้งานในระบบที่มีโลหะเป็นส่วนประกอบ

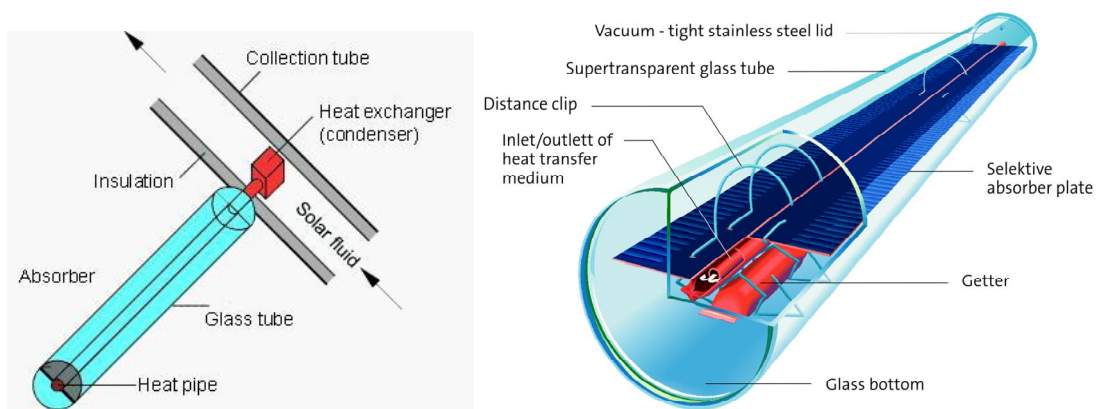
2. ตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบหลอดแก้วสุญญากาศ (Evacuated Tube Collectors)

ตัวเก็บรังสีอาทิตย์ชนิดนี้มีการติดตั้งแผ่นดูดกลืนรังสีบรรจุอยู่ในหลอดแก้วสุญญากาศ ทำให้มีการสูญเสียความร้อน โดยการพาความร้อนต่ำกว่าตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบแผ่นราบ เนื่องจากความร้อนไม่สามารถถ่ายโอนผ่านสุญญากาศได้ แผ่นดูดกลืนรังสีสำหรับตัวเก็บรังสีแบบหลอดแก้วสุญญากาศมีทั้งแบบแผ่นและแบบทรงกระบอกตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบหลอดแก้วสุญญากาศนี้อาจจัดแบ่งออกเป็น 4 กลุ่มขึ้นกับวิธีการถ่ายโอนความร้อนดังนี้

3. ตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบหลอดแก้วสุญญากาศที่ใช้เทคโนโลยีท่อความร้อน(Heat Pipe)

Evacuated Tube Heat Pipe Collectors หรือแผงรับรังสีอาทิตย์แบบหลอดสุญญากาศที่ใช้เทคโนโลยี Heat Pipe เข้ามาช่วยเป็นแผงที่มีประสิทธิภาพมากขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับแผงรับพลังงานรังสีอาทิตย์ โดยทั่วไปในแต่ละหลอดสุญญากาศประกอบด้วยท่อทองแดงลักษณะปิดหัวปิดท้าย ดังรูปที่ 2.4 โดยส่วนหัวของ Heat Pipe จะต่อเข้ากับ Copper Header ใน Heat Pipe จะประกอบด้วยสารเหลวพิเศษซึ่งสามารถกลายเป็นไอได้แม้ในอุณหภูมิต่ำ เมื่อหลอดสุญญากาศดูดรับพลังงานจากรังสีอาทิตย์ สารตัวนี้จะขึ้นไปอุ่นสารเหลวตัวนำในท่อหลัก เมื่อของเหลวรวมตัวกันก็จะส่งกลับมาที่ Heat Pipe ในลักษณะของการแลกเปลี่ยนความร้อน นอกจากนี้ ฮีทไปป์เป็นระบบที่มีการส่งผ่านความร้อนเพียงทางเดียว ดังนั้น ถึงแม้ว่าไม่มีรังสีอาทิตย์ การสูญเสียความร้อนก็จะน้อยมาก เพราะความร้อนจะสูญเสียจากตรงส่วนหัวเท่านั้น ไม่ใช่จากตรงส่วนที่ดูดรับพลังงานจากรังสีอาทิตย์

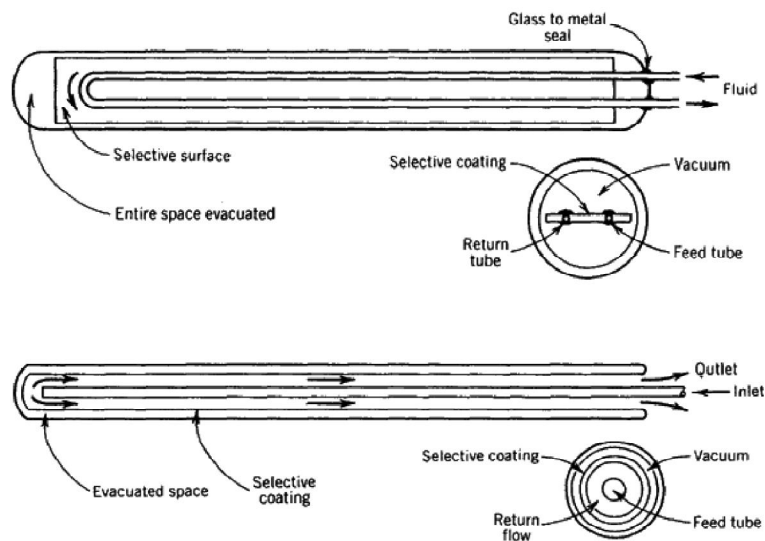
การพัฒนาตัวเก็บรังสีชนิด Heat Pipe เป็นไปในสองทิศทางหลักได้แก่ (1) การพัฒนาด้านการถ่ายโอนความร้อนจากสารทำงานไปสู่ครีบริบความร้อนของท่อรูปร่าง (2) การพัฒนาสารทำงานใน Heat Pipe และวัสดุที่ใช้ทำท่อ ณ ปัจจุบัน สารทำงานในท่อ Heat Pipe และวัสดุที่เหมาะสมสำหรับการใช้งานในช่วงอุณหภูมิต่างๆ



รูปที่ 2.4 ตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบหลอดแก้วสุญญากาศที่ใช้เทคโนโลยี Heat Pipe [3]

4. ตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบหลอดแก้วสุญญากาศที่ใช้หลักการ Flow Through Absorber

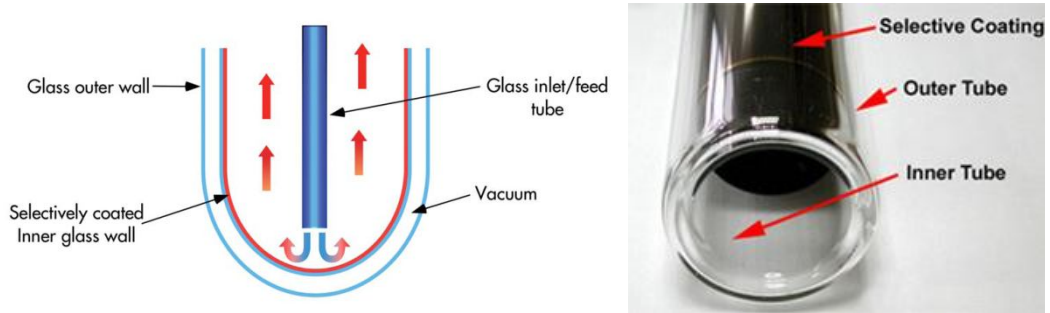
ในหลอดสุญญากาศแบบนี้จะมีท่อใหญ่ปลายปิดที่มีแผ่นดูดกลืนติดอยู่ การถ่ายโอนความร้อนโดยของเหลวที่เป็นสารทำงานไหลในท่อเล็กตรงกลางลงไปยังส่วนล่างของท่อใหญ่ เพื่อรับความร้อนจากนั้นจะไหลกลับขึ้นมาทางช่องระหว่างท่อ หรืออีกลักษณะหนึ่งมีท่อรูป U แนบติดกับแผ่นดูดกลืนรังสี วางอยู่ในหลอดสุญญากาศ ของเหลวจะไหลผ่านท่อจากด้านบนข้างหนึ่งแล้วไหลกลับขึ้นมาอีกข้างหนึ่ง ลักษณะโครงสร้างและการทำงานของตัวเก็บรังสีชนิดนี้แสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบหลอดแก้วสุญญากาศที่ใช้หลักการ Flow Through Absorber [3]

5. ตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบหลอดแก้วสุญญากาศที่ใช้หลักการ All-Glass Tube

การถ่ายโอนความร้อนในแบบนี้เกิดขึ้นในหลอดสุญญากาศสองชั้น โดยผิวนอกของแก้วชั้นในหุ้มด้วยแผ่นดูดกลืนรังสี ความร้อนถ่ายโอนจากแผ่นดูดกลืนรังสีไปยังของไหลที่สัมผัสผนังของหลอดแก้วชั้นใน ในปัจจุบันมีสินค้าจากผู้ผลิตบางรายใช้หลักการทำงานดังกล่าว โดยติดตั้งท่อของไหลซึ่งสัมผัสกับแผ่นดูดกลืนที่อยู่ด้านในของหลอดแก้วชั้นใน อัตราการส่งผ่านความร้อนสูงและมีประสิทธิภาพ สามารถทำน้ำร้อนได้ที่อุณหภูมิสูงถึง 90°C หรือเกินกว่านั้น



รูปที่ 2.6 ตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบหลอดแก้วสุญญากาศที่ใช้หลักการ All-glass Tubes [3]

6. ตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบหลอดแก้วสุญญากาศที่ใช้หลักการ Storage Absorber

จาก 3 แบบของแผงรับรังสีแบบหลอดสุญญากาศที่กล่าวมาข้างต้นใน บางครั้งมีการออกแบบให้หลอดแก้วสุญญากาศซึ่งฉนวนที่ดีมีขนาดใหญ่ขึ้น (10-20 ลิตรต่อหลอด)



รูปที่ 2.7 ตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบหลอดแก้วสุญญากาศที่ใช้หลักการ Storage Absorber [3]

สามารถใช้เป็นถังเก็บน้ำร้อนได้ในตัว ลดต้นทุนของระบบเนื่องจากไม่ต้องมีถังเก็บน้ำร้อนแยกต่างหาก และลดพื้นที่ในการติดตั้ง

การเลือกตัวเก็บรังสีอาทิตย์ชนิดต่างๆ ให้เหมาะสมกับการใช้งานเป็นสิ่ง值得พิจารณาเพื่อให้ได้ประสิทธิภาพที่สูงตามสภาพแวดล้อมใช้งาน โดยการเก็บเพื่ออุณหภูมิของน้ำที่สูงขึ้นสามารถทำได้ โดยการต่ออนุกรมของท่อของเหลวทำให้มีอุณหภูมิสูงกว่า 150°C ได้

พิจารณาตัวเก็บรังสีอาทิตย์ที่สถานะคงตัว (Steady State) ที่ขณะใดๆ ค่ารังสีที่ถูกดูดกลืน เท่ากับ ค่าอัตราการความร้อนที่นำไปใช้ประโยชน์ รวมกับค่าอัตราการความร้อนที่สูญเสียจากผิวดูดกลืนรังสี ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้ [6]

$$(\tau\alpha)_e I_T A_c = \dot{Q}_{coll} + U_L A_c (T_p - T_a) \quad (2.1)$$

$$\dot{Q}_{coll} = \dot{m}_f C_p (T_{fo} - T_{fi}) \quad (2.2)$$

อัตราการถ่ายโอนความร้อนที่ได้รับจากตัวเก็บรังสี อาจเขียนได้เป็น

$$\dot{Q}_{coll} = A_c [(\tau\alpha)_e I_T - U_L (T_p - T_a)] \quad (2.3)$$

เมื่อ	A_c	คือพื้นที่ของตัวเก็บรังสีอาทิตย์, m^2
	C_p	คือความจุความร้อนจำเพาะของน้ำ, $MJ/kg^\circ C$
	I_T	คือรังสีอาทิตย์รวมรายชั่วโมงที่ตกกระทบตั้งฉากบนระนาบเอียง, $MJ/m^2 hr$
	\dot{m}_f	คืออัตราการไหลของน้ำผ่านตัวเก็บรังสีอาทิตย์, kg/hr
	η_{coll}	คือประสิทธิภาพตัวเก็บรังสีอาทิตย์
	\dot{Q}_{coll}	คืออัตราความร้อนที่ได้จากตัวเก็บรังสีอาทิตย์, MJ/hr
	$(\tau\alpha)_e$	คือประสิทธิภาพเชิงแสงของตัวเก็บรังสีอาทิตย์
	T_a	คืออุณหภูมิสิ่งแวดล้อม, $^\circ C$
	T_{fi}	คืออุณหภูมิของน้ำเข้าตัวเก็บรังสีอาทิตย์, $^\circ C$
	T_{fo}	คืออุณหภูมิของน้ำออกจากตัวเก็บรังสีอาทิตย์, $^\circ C$
	T_p	คืออุณหภูมิผิวตัวเก็บรังสีอาทิตย์, $^\circ C$
	U_L	คือสัมประสิทธิ์การสูญเสียความร้อนรวมจากผิวคูครึ่งอาทิตย์, $MJ/m^2 hr^\circ C$

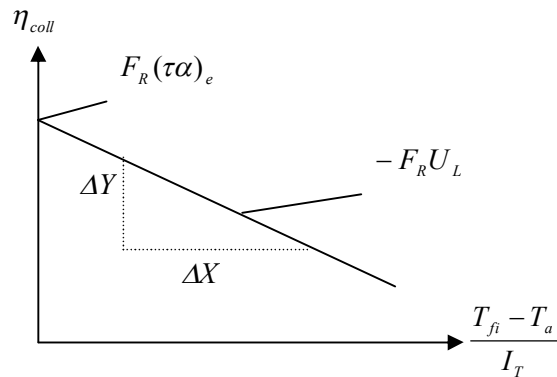
ในทางปฏิบัติอุณหภูมิผิวตัวเก็บรังสีอาทิตย์ (T_p) วัดให้ถูกต้องได้ยาก จึงมีการปรับค่าสมการดังกล่าว โดยกำหนดค่า Heat Removal Factor (F_R) ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของอุณหภูมิของของไหลเข้าตัวเก็บรังสีอาทิตย์

$$\dot{Q}_{coll} = A_c [F_R (\tau\alpha)_e I_T - F_R U_L (T_{fi} - T_a)] \quad (2.4)$$

เมื่อ F_R คือแฟกเตอร์การดึงความร้อน (Heat Removal Factor) เป็นสัดส่วนของความร้อนที่ได้จริงจากตัวเก็บรังสีอาทิตย์ต่อพลังงานความร้อนถ่ายโอน ที่ถูกดึงโดยของไหลใช้งานในตัวเก็บรังสีอาทิตย์ ค่า F_R มีลักษณะคล้ายกับค่าประสิทธิภาพของตัวเก็บรังสีอาทิตย์ เนื่องจากเป็นค่าอัตราส่วนของพลังงานความร้อนจริงต่อพลังงานความร้อนสูงสุดที่เป็นไปได้จากตัวเก็บรังสีอาทิตย์ ประสิทธิภาพในการนำความร้อนไปใช้ประโยชน์ (Collector Efficiency, η_{coll}) กำหนดมาจาก

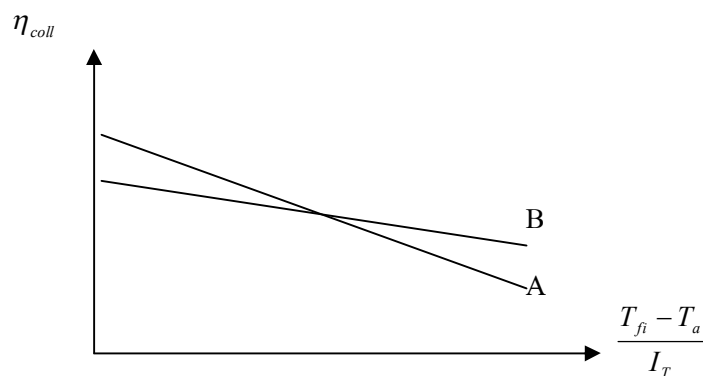
$$\eta_{coll} = \frac{\dot{Q}_{coll}}{I_T A_c} = \frac{\dot{m}_f C_p (T_{fo} - T_{fi})}{I_T A_c} = F_R (\tau\alpha)_e - F_R U_L \frac{(T_{fi} - T_a)}{I_T} \quad (2.5)$$

ถ้าพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างค่า η_{coll} และ $(T_{fi} - T_a)/I_T$ จะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวอยู่ในรูปสมการเส้นตรงโดยที่ค่า $-F_R U_L$ คือ ความชัน และ $F_R (\tau\alpha)_e$ คือ ค่าจุดตัดแกน ดังแสดงในรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 เส้นแสดงสมรรถนะของตัวเก็บรังสีอาทิตย์ [7]

ตัวเก็บรังสีที่มีค่า $F_R (\tau\alpha)_e$ สูง แสดงว่าการส่งผ่านค่าอุณหภูมิจากตัวเก็บรังสีอาทิตย์ของตัวเก็บรังสีมีค่าสูง ส่วนเทอม $-F_R U_L$ แสดงค่าการสูญเสียความร้อน ถ้ามีค่าสูงแสดงว่าตัวเก็บรังสีดังกล่าวป้องกันความร้อนสูญเสียไม่ดีพอ ทั้ง 2 เทอมนี้ เป็นพารามิเตอร์สำคัญในการเปรียบเทียบสมรรถนะตัวเก็บรังสี ดังแสดงในรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 การเปรียบเทียบสมรรถนะตัวเก็บรังสีอาทิตย์ [7]

จากรูปตัวเก็บรังสีอาทิตย์แบบ A เหมาะกับการผลิตน้ำร้อนที่อุณหภูมิ น้ำร้อนที่ต่ำ ขณะที่แบบ B เหมาะสำหรับผลิตน้ำร้อนที่อุณหภูมิ น้ำร้อนที่สูง

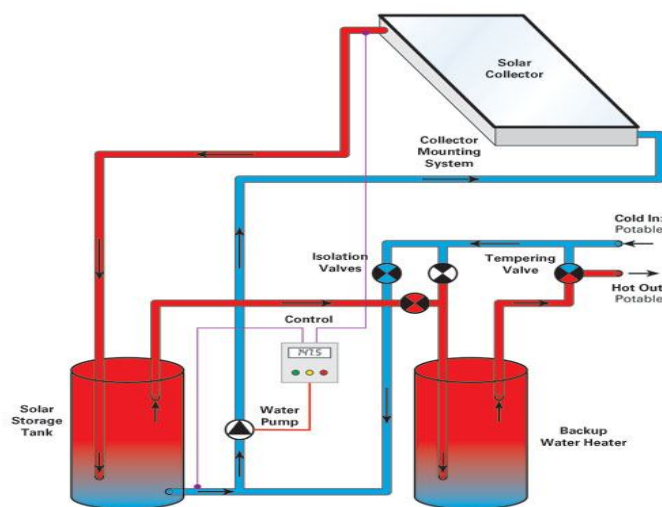
2.3 ประเภทของระบบการทำงานของเครื่องทำน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์ [3]

นอกจากการจัดแบ่งประเภทของระบบผลิตน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์ด้วยเทคโนโลยีของตัวเก็บรังสีแล้ว รูปแบบการทำงานของเครื่องทำน้ำร้อนจากแผ่นดูดกลืนรังสีไปใช้งานในรูปแบบของน้ำร้อนยังมีความแตกต่างกันไปขึ้นกับความต้องการของระบบผลิตน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์ซึ่งโดยหลักการจะขึ้นกับ (1) ปริมาณน้ำร้อนที่ต้องการใช้งาน (2) ขนาดของระบบ (3) ลักษณะทางกายภาพของการติดตั้งระบบ ในปัจจุบันเราอาจจัดแบ่งระบบการทำงานของระบบผลิตน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์ออกเป็น 2 ระบบคือ ระบบที่ใช้ปั๊ม (Active System) และระบบการไหลธรรมชาติ (Passive System) โดยมีรายละเอียดของระบบการทำงานทั้งสองดังนี้

2.3.1 ระบบที่ใช้ปั๊มหรือระบบแอคทีฟ (Active System)

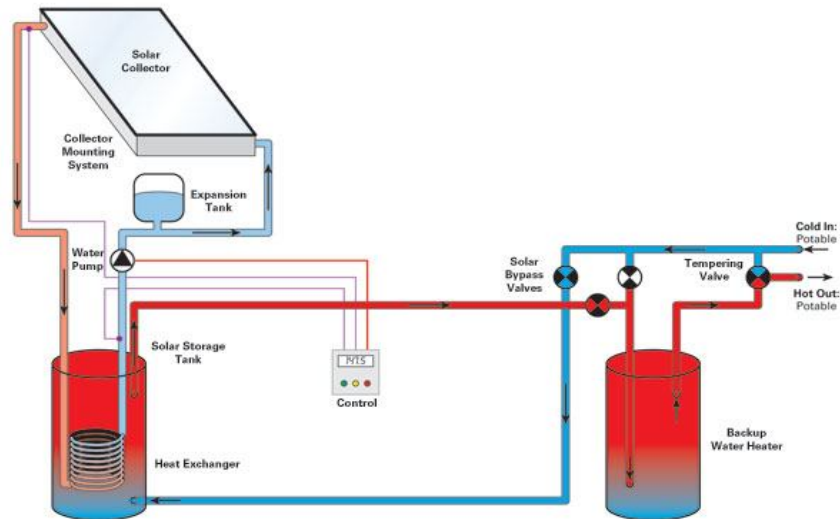
ระบบแอคทีฟจะมีปั๊มน้ำ วาล์วและตัวควบคุมประกอบอยู่เพื่อบังคับให้น้ำไหลเวียนในระบบ ทำให้ลดข้อจำกัดในเรื่องการติดตั้งโดยเฉพาะระดับความสูงของถังเก็บน้ำร้อน ระบบแอคทีฟแยกได้เป็นระบบวงจรเปิด และระบบวงจรปิด ขึ้นกับระบบของการนำความร้อนไปใช้งานดังนี้

ก. ระบบวงจรเปิด (Open-Loop Active System หรือ Direct Circulation System) ระบบนี้ใช้ปั๊มในการหมุนเวียนน้ำที่ต้องการนำไปใช้งานผ่านแผงรับรังสีแล้วนำไปเก็บไว้ในถังเก็บน้ำร้อนดังรูปที่ 2.1 เป็นระบบที่มีประสิทธิภาพสูงเนื่องจากน้ำร้อนที่ผลิตได้สามารถนำไปใช้งานได้โดยตรงและมีค่าใช้จ่ายในการทำน้ำร้อนต่ำ อย่างไรก็ตามหากน้ำดิบที่ป้อนเข้าระบบมีความกระด้างหรือมีความเป็นกรดจะทำให้เกิดตะกรันหรือสนิมขึ้นภายในตัวเก็บรังสีและถังเก็บน้ำร้อน ทำให้อายุการใช้งานสั้นลง



รูปที่ 2.10 ระบบแอคทีฟแบบวงจรเปิด [4]

ข. ระบบวงจรถัด (Closed-Loop Active System หรือ Indirect Circulation System) ระบบนี้ใช้ปั๊มในการหมุนเวียนสารทำงานซึ่งโดยทั่วไปจะใช้ Ethylene Glycol ($C_2H_6O_2$) ผ่านอุปกรณ์ถ่ายโอนความร้อนให้กับน้ำในถังเก็บน้ำร้อนและวนกลับมาผ่านแผงรับรังสีในลักษณะวงจรถัด การนำน้ำร้อนไปใช้งานจะผ่านระบบท่อน้ำที่ไหลผ่านถังเก็บน้ำร้อนอีกวงจรหนึ่ง โดยทั่วไปอาจมีการติดตั้งชุดทำความร้อนเพื่อให้ได้อุณหภูมิของน้ำที่ต้องการติดตั้งไว้ในถังแยกต่างหาก ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.11 ระบบแอคทีฟแบบวงจรถัด [4]

2.3.2 ระบบการไหลตามธรรมชาติหรือระบบแพสซีฟ (Passive System)

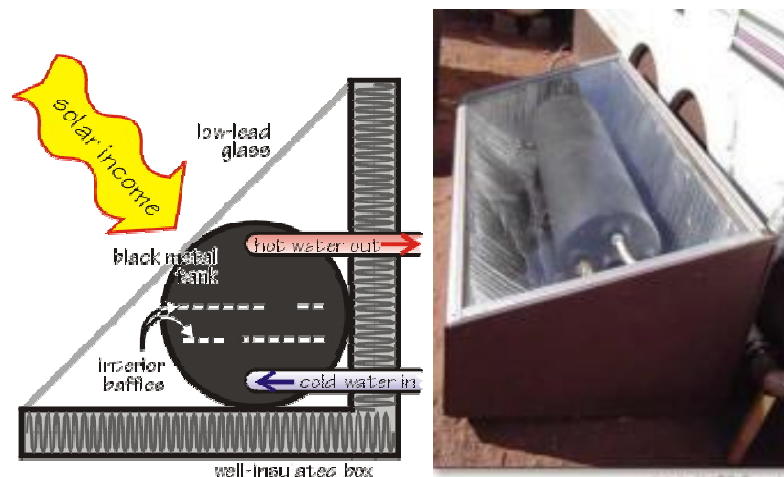
ในระบบแพสซีฟไม่มีปั๊มน้ำและตัวควบคุมประกอบอยู่ทำให้ลดต้นทุนของระบบลงได้ส่วนหนึ่ง การไหลเวียนของน้ำผ่านแผงรับรังสีและถังเก็บน้ำร้อนอาศัยแรงโน้มถ่วงและความแตกต่างของความหนาแน่นของน้ำที่ลดลงเมื่อมีอุณหภูมิสูงขึ้น เนื่องจากระบบแพสซีฟไม่ต้องใช้ปั๊มน้ำในการทำงานจึงง่ายต่อการบำรุงรักษาและมีอายุการใช้งานนานขึ้น ทั้งนี้อาจแยกได้เป็นสองลักษณะคือระบบหมุนเวียนของไหลแบบเทอร์โมไซฟอน และระบบที่มีถังน้ำร้อนในตัว รายละเอียดลักษณะการทำงานของแต่ละระบบมีดังนี้

ก. ระบบหมุนเวียนของไหลแบบเทอร์โมไซฟอน (Thermosyphon System) ระบบลักษณะนี้จะมีถังเก็บน้ำร้อนติดตั้งให้สูงกว่าแผงรับรังสีและน้ำในระบบไหลโดยการเคลื่อนที่ตามหลักธรรมชาติที่เรียกว่า Thermosyphon คือ เมื่อน้ำผ่านแผงรับรังสีออกมาจะมีอุณหภูมิสูงขึ้นและความหนาแน่นลดลงขณะที่น้ำเย็นในถังจะไหลออกมาด้วยแรงโน้มถ่วงเข้าสู่แผงรับรังสี ทำให้เกิดการไหลเวียนของน้ำในระบบ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.12 ระบบหมุนเวียนของไหลแบบเทอร์โมไซฟอน [4]

ข. ระบบที่มีถังน้ำร้อนในตัว (Integrated Collector Storage, ICS) ระบบ ICS มีถังเก็บน้ำร้อนติดตั้งอยู่ภายในกล่องที่มีแผ่นปิดใสเช่นกระจกปิดคลุมอยู่ด้านบน ถังเก็บน้ำร้อนอาจมีรูปทรงเป็นทรงกระบอกหรือกล่องเหลี่ยม ทั้งนี้การออกแบบอาจมีแผ่นดูดคลื่นรังสี หรือแผ่นสะท้อนรังสีลงสู่ผิวของถังเก็บน้ำร้อนเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของระบบ ระบบนี้จัดรวมอยู่ในประเภทของระบบทำงานแบบแพสซีฟ เนื่องจากไม่มีปั๊มน้ำและตัวควบคุม ทำให้ลดต้นทุนของระบบลงได้ส่วนหนึ่ง และมีการไหลเวียนของน้ำผ่านแผงรับรังสีและถังเก็บน้ำร้อนโดยอาศัยแรงโน้มถ่วงและความแตกต่างของความหนาแน่นของน้ำที่ลดลงเมื่อมีอุณหภูมิสูงขึ้นเช่นเดียวกับระบบ Thermosyphon หลักการทำงานและตัวอย่างรูปแบบของระบบ ICS ดังรูปที่ 2.4



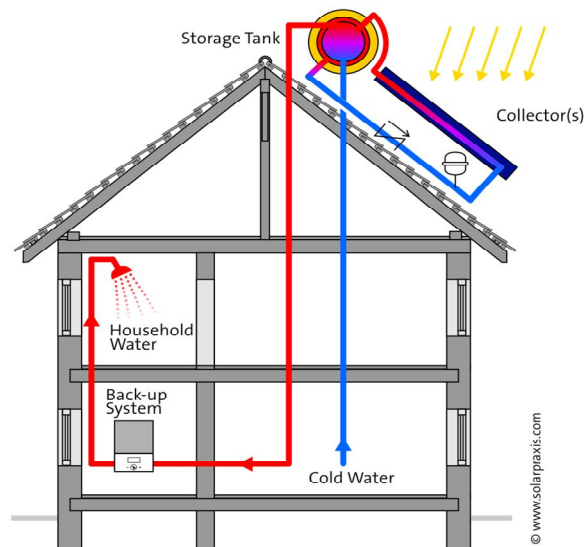
รูปที่ 2.13 หลักการทำงานและตัวอย่างของระบบที่มีถังน้ำร้อนในตัว [4]

2.4 การเลือกขนาดเครื่องทำน้ำร้อนสำหรับใช้ในบ้าน [5]

เพื่อให้เป็นการประหยัดงบประมาณและก่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด การกำหนดขนาดของเครื่องทำน้ำร้อนด้วยพลังงานรังสีอาทิตย์เป็นเรื่องหนึ่งที่ต้องคำนึงถึง สำหรับขนาดของตัวเก็บรังสีอาทิตย์ (Collectors) นั้นต้องมีขนาดที่สามารถรองรับอัตราการใช้น้ำร้อนที่มีค่ามากที่สุดของบ้าน ซึ่งหากจะได้อัตราที่ถูกต้องแล้ว จะต้องใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ของบริษัท ผู้จำหน่ายในการคำนวณขนาดของตัวเก็บเก็บความร้อน แต่โดยทั่วไปแล้ว จะมีข้อกำหนดง่ายๆ ว่าควรใช้ตัวเก็บเก็บความร้อนขนาด 20 ตารางฟุต (ประมาณ 2 ตารางเมตร) ต่อคน สำหรับสมาชิกในครอบครัว 2 คนแรก และหากมีสมาชิกมากกว่า 2 คน ให้เพิ่มขนาดตัวเก็บรังสีอาทิตย์อีก 8 ตารางฟุต (0.7 ตารางเมตร) ต่อคนและสำหรับขนาดของถังเก็บน้ำร้อน (Storage Tank) ในประเทศเขตร้อนควรมีขนาดของถังอย่างน้อย 2 แกลลอน (7.6 ลิตร) ต่อพื้นที่ของตัวเก็บรังสีอาทิตย์ 1 ตารางฟุต (0.1 ตารางเมตร) ทั้งนี้เพราะเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความร้อนสูง ในกรณีที่มีความต้องการใช้น้ำร้อนต่ำ แต่รังสีอาทิตย์ยังคงทำความร้อนให้น้ำอยู่ ยกตัวอย่างการคำนวณขนาดของตัวเก็บรังสีอาทิตย์และถังเก็บน้ำร้อนได้ดังนี้ หากครอบครัวมีสมาชิก 4 คน จะต้องการพื้นที่ของตัวเก็บรังสีอาทิตย์ 56 ตารางฟุต (สมาชิก 2 คนแรก ต้องการคนละ 20 ตารางฟุต ส่วนอีก 2 คน ต้องการอีกคนละ 8 ตารางฟุต) และต้องมีขนาดของถังเก็บน้ำร้อนอย่างน้อย 112 แกลลอน (คำนวณจากการนำ 56 คูณด้วย 2) อย่างไรก็ตามขนาดของถังและขนาดพื้นที่ตัวเก็บรังสีอาทิตย์ ต้องพิจารณาตามขนาดที่มีขายจริงตามท้องตลาด และขนาดอาจเพิ่มหรือลดจากที่คำนวณไว้ เนื่องจากลักษณะการติดตั้งและสภาพอากาศของแต่ละพื้นที่ไม่เท่ากัน

2.5 ตำแหน่งการติดตั้งตัวเก็บรังสีอาทิตย์ [6]

ในการติดตั้งตัวเก็บรังสีอาทิตย์นั้น ตำแหน่งที่ควรที่จะติดตั้ง คือ ตำแหน่งที่จะมีโอกาสได้รับรังสีอาทิตย์ได้มากที่สุดนั่นคือ จะต้องอยู่สูงพอที่จะไม่ถูกเงาของอาคารข้างเคียง หรือต้นไม้บัง และควรทำให้เป็นมุมเอียงเพื่อให้มีการระบายน้ำที่ดี และสามารถใช้น้ำฝนในการชะล้างสิ่งสกปรก ฟุ้งที่อาจทำให้ประสิทธิภาพของระบบต่ำลงไป และหากลักษณะของอาคารเอื้ออำนวยควรติดตั้งที่ทิศใต้ เนื่องจากว่าประเทศไทยเป็นประเทศที่อยู่ทางซีกโลกเหนือ ทำให้แสงแดดส่องโดนหลังคาทางด้านทิศใต้ตลอดทั้งปี ดังแสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.14 ระบบหมุนเวียนของไหลแบบเทอร์โมไซฟอน [6]

2.6 ประเภทของก๊อกน้ำ [7]

ก๊อกน้ำเป็นอุปกรณ์ที่ทุกบ้านต้องมี ซึ่งจะอำนวยความสะดวกในการใช้สอยแตกต่างกันไปโดยทั่วไปได้แบ่งประเภทก๊อกตามการใช้สอยไว้ 6 ประเภทคือ

1. ก๊อกเดี่ยว ใช้ทั่วไป เช่น ล้างรถ รดน้ำต้นไม้
2. ก๊อกสำหรับอ่างล้างหน้า มี 3 ชนิดคือ ก๊อกเดี่ยว ก๊อกผสมรูเดี่ยว และก๊อกผสมเซ็นเตอร์
3. ก๊อกซิงค์ เป็นก๊อกสำหรับอ่างล้างจานในครัวหรือตามเคาน์เตอร์บาร์ มีให้เลือกแบบน้ำเย็นอย่างเดียวและแบบที่ใช้ทั้งน้ำร้อนและน้ำเย็น
4. ก๊อกอาบน้ำ และก๊อกน้ำที่ใช้กับอ่างอาบน้ำ ประกอบด้วย ฝักบัว วาล์วเปิดปิด ซึ่งแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด ได้แก่ ฝักบัวสายอ่อน ตัวก๊อกน้ำจะหมุนได้รอบตัว เพื่อไม่ให้สายฝักบัวบิดงอ
5. ก๊อกน้ำชำระ
6. ฟลัชวาล์ว เป็นก๊อกน้ำที่ใช้ประกอบกับโถส้วม และโถปัสสาวะ เป็นก๊อกที่ทำงานเกือบกึ่งอัตโนมัติ เมื่อเปิดน้ำโดยการเปิดฟลัช น้ำจะหยุดไหลเองโดยอัตโนมัติ

คุณสมบัติทั่วไปของก๊อกน้ำที่มีคุณภาพ

1. ก๊อกน้ำทำจากทองเหลือง ทนทานต่อการกัดกร่อนได้ดี
2. ผิวเคลือบโครเมียม มีลักษณะเป็นมันวาว ทนต่อสารเคมีและรอยขีดข่วนได้ดี
3. ซิลยางและแหวนยางในตัวก๊อก จะต้องมีความสูง ทนต่อการใช้งาน ง่าย ไม่รั่วซึมง่าย

4. หัวก๊อกลงของฝักบัว จะต้องหมุนได้รอบตัว เพื่อไม่ให้สายยางของฝักบัวบิดงอ
5. ก๊อกน้ำที่ดีมีระบบปิด-เปิดเพียงรอบเดียว เพื่อการประหยัดน้ำในตัว

ก๊อกน้ำที่มีคุณสมบัติผสมน้ำร้อนกับน้ำเย็นเข้าด้วยกันนั้น ไม่ว่าจะเป็ ก๊อกที่สามารถผสมภายในก๊อ กเดียวหรือก๊อกที่ต้องเปิดทั้งน้ำร้อนและน้ำเย็น ควรเป็นก๊อกประเภทที่มีวาล์วภายในเป็นเซรามิกวาล์ว เพราะสามารถใช้งานได้ยาวนาน และสามารถเปิดและปิดน้ำได้สนิท ถ้าต้องการควบคุมอุณหภูมิของ น้ำให้ได้ตามที่ต้องการอย่างรวดเร็ว และไม่เปลืองน้ำ ก็ควรใช้แบบที่ผสมภายในก๊อ กเดียว

2.6.1 ทฤษฎีการไหลในท่อ [8]

ก. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

คุณสมบัติของของไหล

คุณสมบัติทางฟิสิกส์บางประการของของไหลได้แก่ความดันความหนาแน่นความเร็วจำนวนเลขเรย์ โนลด์ (Reynolds' Number) ค่าเหล่านี้จะมีความสัมพันธ์ต่อการไหลซึ่งจะกล่าวต่อไป

1. ความดันเนื่องจากความดันมีความสัมพันธ์กับแรงต่อพื้นที่หน้าตัดตั้งนั้นเมื่อมีการเปลี่ยนแปลง พื้นที่หน้าตัดจะทำให้ค่าความดันเปลี่ยนแปลงไปด้วยเราสามารถนำหลักการนี้ไปใช้เพื่อคำนวณหา ความเร็วการไหลของของไหลได้จากสมการของ Bernoulli ซึ่งเป็นสมการสำหรับการไหลของ Steady, Incompressible, In Viscid และใช้ได้ตามเฉพาะการไหล
2. ความหนาแน่นใช้ในการคำนวณหาค่าความดันของของไหล ณ จุดใดๆ โดยความหนาแน่นบ่งบอก ถึงมวลต่อปริมาตร
3. ความเร็วจะเป็นค่าตัวแปรที่กำหนดพฤติกรรมการไหลของของไหลว่าจะเป็นไปในลักษณะใด กล่าวคือเมื่อความเร็วเฉลี่ยของของไหลเป็นไปอย่างช้าๆเราจะเรียกการไหลแบบนี้ว่าการไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) จะเห็นได้ว่าในบริเวณใกล้กับเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อความเร็วของ การไหลจะมีค่ามากกว่าบริเวณที่ห่างออกไปและหากความเร็วมีค่ามากขึ้นถึงระดับหนึ่งจะทำให้ เกิดการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) ซึ่งการไหลแบบนี้จะพบเห็นกันเป็นส่วนมากอนึ่ง การไหลแบบปั่นป่วนนี้จะเป็นการไหลที่มีรูปแบบไม่แน่นอน
4. จำนวนเลขเรย์โนลด์ (Reynolds Number) เป็นเลขดัชนีที่ชี้บอกสภาพปรากฏการณ์การไหลของ ของไหลซึ่งเป็นสัดส่วนของ Inertia Viscous จำนวนเลขเรย์โนลด์จะมีค่าขึ้นอยู่กับความเร็วการ ไหลความหนืดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางท่อและความหนาแน่นของของไหลเราอาจเขียน ความสัมพันธ์ดังกล่าวได้เป็น

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (2.6)$$

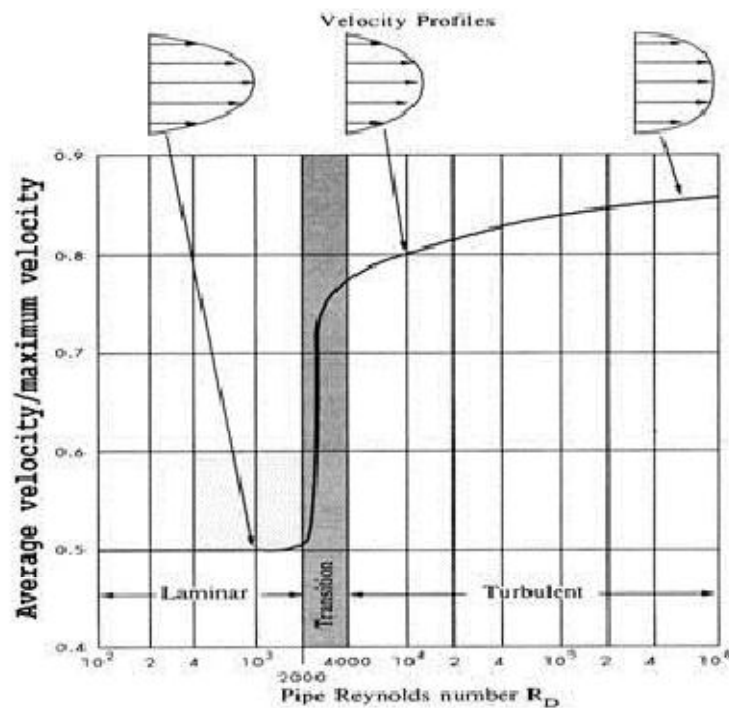
เมื่อ	Re	คือ จำนวนเลขเรย์โนลด์(Reynolds Numbers)
	V	คือ ความเร็วการไหล(m / s)
	D	คือ เส้นผ่านศูนย์กลางภายในท่อ (m)
	ρ	คือ ความหนาแน่นของของไหล (kg / m^3)
	μ	คือ ความหนืดของของไหล ($kg / m \cdot s$)

จำนวนเลขเรย์โนลด์ไม่มีหน่วยและมีความสำคัญอย่างมากกล่าวคือจำนวนเลขนี้ใช้เป็นตัวกำหนดรูปแบบการไหลของของไหลว่าเป็นแบบใดเช่น

Re อยู่ในช่วง 0 -2000 สภาพการไหลเป็นแบบ Laminar Flow

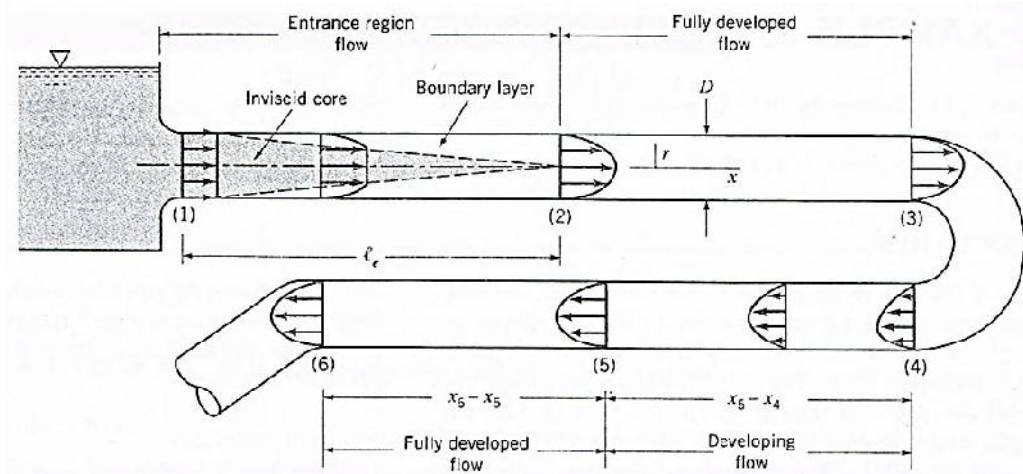
Re อยู่ในช่วง 2001 -4000 สภาพการไหลเป็นแบบ Transition Zone คือมีการไหล 2 แบบคือ Laminar + Turbulent

Re มากกว่า 4000 สภาพการไหลเป็นแบบ Turbulent Flow



รูปที่ 2.15 Velocity Profile ของการไหล [8]

ในกรณีที่ของไหลไหลเข้าท่อโดยให้การไหลเป็นแบบ Uniform Flow ดังรูปเมื่อพิจารณาถึงผลกระทบของความหนืดพบว่าในกรณีของไหลหนืดนั้นจะมีผลกระทบจากแรงเสียดทานซึ่งทำให้เกิดชั้น Boundary Layers ขึ้นการไหลในช่วงนี้จะมีแบ่งออกเป็น 2 ส่วนชัดเจนเราเรียกระยะทางที่ของไหลไหลเข้าว่าเป็นช่วง Entrance Length, L_e หลังจากช่วงนี้การไหลจะเปลี่ยนเป็นแบบ Fully Developed ซึ่งการไหลในช่วงนี้ความเร็วจะไม่เปลี่ยนแปลงกับระยะทางตามแนวการไหล (x)



รูปที่ 2.16 Entrance Region, Developing Flow and Fully Developed Flow in a Pipe [7]

การคำนวณหาระยะที่เกิด Fully Developed Flow สามารถคำนวณได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{le}{D} = 0.06 Re \quad ; \text{Laminar Flow} \quad (2.7)$$

$$\frac{le}{D} = 4.4(Re)^{1/6} \quad ; \text{Turbulent Flow} \quad (2.8)$$

ซึ่งการที่จะเกิด Fully Developed Flow นั้น

$$X_3 - X_2 > le \text{ or } X_5 - X_4 > X_6 - X_5 [1] \quad (2.9)$$

เมื่อ le คือ ระยะ Entrance Length หน่วย m

D คือ Diameter ของท่อ หน่วย m

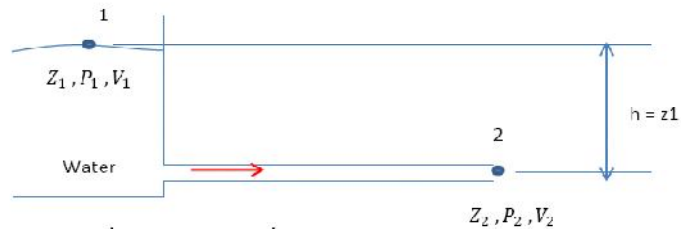
ข. การวิเคราะห์อัตราการไหลของระบบโดยวิธีการคำนวณ

ขั้นตอนในการคำนวณ

1. ตรวจสอบข้อกำหนดหรือขอบเขตของชุดทดลอง
 - ความสูงจากท่อทางออกถึงระดับน้ำใน Head Tank(h) เท่ากับ 2 m
 - ในระบบมีการสูญเสียจาก Major Loss and Minor Loss ที่จุด
2. ตั้งข้อสมมติฐาน
 - การไหลแบบ Steady
 - ของไหลอัดตัวไม่ได้ (Incompressible)

3. ความหนืดส่งผลต่อลักษณะการไหลคำนวณความเร็วที่ท่อทางออกจากสมการพลังงานการไหล
ต่อเนื่องดังแสดงต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์



รูปที่ 2.17 แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์ความเร็วของของไหล [8]

จากสมการพลังงานการไหลต่อเนื่องตามแนวการไหล

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + h_L \quad (2.10)$$

โดยที่ h_L คือ การสูญเสียรวมในระบบเท่ากับผลรวมของ การสูญเสียพลังงานหลักเนื่องจากผิวท่อ (h_M) กับการสูญเสียรองเนื่องจากข้อต่อต่างๆ (h_m) จะได้

$$h_L = h_M + h_m = \frac{fLv_2^2}{D2g} + K \frac{v_2^2}{2g} \quad (2.11)$$

จาก
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + \left(\frac{fLv_2^2}{D2g} + K \frac{v_2^2}{2g} \right) \quad (2.12)$$

เมื่อวิเคราะห์จากแบบจำลองในรูปที่ 2.17 $p_1 = p_2 = p_{atm}, v_1 \cong 0, Z_2 = 0$ (2.13)

จะได้
$$Z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \left(\frac{fLv_2^2}{D2g} + K \frac{v_2^2}{2g} \right) \quad (2.14)$$

$$Z_1 = \frac{v_2^2}{2g} \left(1 + \frac{fl}{D} + K \right) \quad (2.15)$$

$$\therefore v_2 = \sqrt{\frac{2gZ_1}{\left(1 + \frac{fl}{D} + K\right)}} \quad (2.16)$$

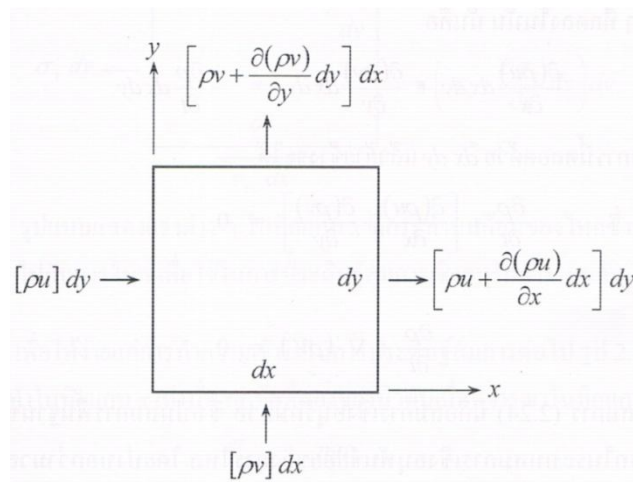
เมื่อ f, K คือ Loss Coefficient

เมื่อเราได้ความเร็วของของไหล เราจะสามารถหาอัตราการไหลของของไหลในระบบได้ โดย $Q = AV$ จะเป็นอัตราการไหลที่ได้จากการคำนวณ เพื่อนำไปเปรียบเทียบกับอัตราการไหลที่เครื่องมือวัดอัตราการไหล Venturi, Orifice วัดได้

2.7 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

2.7.1 สมการเชิงอนุพันธ์มวล [9]

สมการต่างๆในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลต้องแสดงถึงความเป็นจริงที่มีความหมายทางกายภาพและสามารถทำความเข้าใจได้ง่าย ซึ่งสมการแรกคือสมการของการอนุรักษ์มวล (Conservation of Mass) ซึ่งมีความหมายเข้าใจง่ายๆ ว่า มวลนั้นไม่สูญหายไป สมการเชิงอนุพันธ์นี้สามารถเข้าใจได้โดยการพิจารณาการไหลผ่านกรอบเล็กๆ ขนาดกว้าง dx และ dy ซึ่งมีความลึกหนึ่งหน่วยดังแสดงในรูปที่ 2.18



รูปที่ 2.18 รูปแบบแสดงฟลักซ์ของมวลผ่านกรอบขนาดเล็กที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหลเพื่อใช้ในการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์มวล [9]

ด้านซ้ายของกรอบ dy มีปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลเข้าเท่ากับ $[\rho u] dy$ เนื่องจากความหนาแน่น ρ และความเร็ว u นั้นเปลี่ยนแปลงตลอด ดังนั้นฟลักซ์ของมวลที่ไหลออกทางด้านขวาของกรอบคือ $[\rho u + (\partial(\rho u) / \partial x) dx] dy$ นั่นคือมวลในทิศแกน x เพิ่มขึ้นผ่าน dy ของกรอบนี้คือ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy - [\rho u] dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy \quad (2.17)$$

ในทำนองเดียวกันถ้าปาดทางด้าน dx ลงไปบนคือ

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx - [\rho v] dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy \quad (2.18)$$

และเนื่องจากปริมาณมวลในกรอบนี้คือ $\rho dx dy$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลที่ลดลงไปคือ

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy \quad (2.19)$$

แต่เนื่องจากมวลในกรอบนี้ต้องไม่เกิดการสูญหาย ดังนั้น จึงหมายความว่าปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ dx และ dy จำเป็นต้องเท่ากับปริมาณฟลักซ์ของมวลในกรอบที่ลดลง นั่นคือ

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy \quad (2.20)$$

ทำการหารสมการนี้ตลอดด้วย $dx dy$ แล้วย้ายข้างจะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.21)$$

หรือ

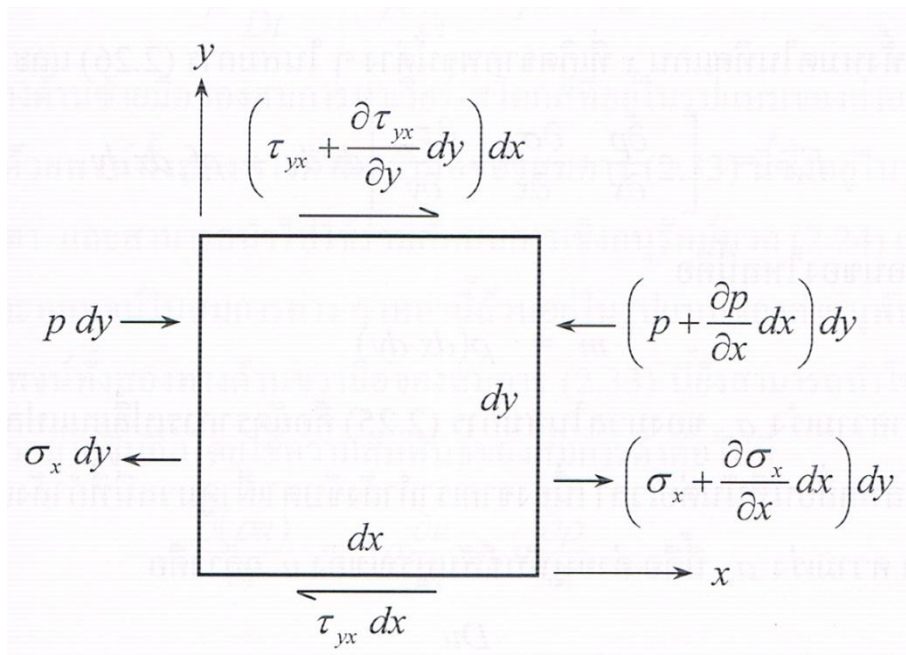
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.22)$$

สมการ 2.22 นี้คือสมการเชิงอนุพันธ์มวล ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานของความเป็นจริงสมการแรกในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล โดยบ่งบอกว่ามวลนั้นไม่มีการสูญหายไปไหน สมการ

ดังกล่าวนี้อยู่ในรูปแบบของพจน์อันดับหนึ่ง อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า ถึง 3 ค่า คือ ρ , u และ v ซึ่งต่างเปลี่ยนแปลงได้ตลอดโดเมนของการไหล

2.7.2 สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม [9]

ความเป็นจริงชนิดที่สองของการไหลโดยทั่วไปที่สามารถนำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพิ่มเติมได้นั้นมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน คือแรงเท่ากับมวลคูณด้วยอัตราเร็ว จะพิจารณามวลซึ่งมีขนาดกว้าง dx และ dy โดยมีขนาดหนึ่งหน่วยในรูปที่ 2.19



รูปที่ 2.19 รูปแบบแสดงแรงต่างๆ ในทิศ x ที่กระทำบนก้อนของไหล [9]

จากรูปที่ 2.19 แสดงแรงต่างๆ ที่กระทำในทิศทางแกน x เท่านั้น กฎข้อที่สองของนิวตันเมื่อพิจารณาในทิศทางแกน x คือ

$$F_x = ma_x \tag{2.23}$$

โดย F_x คือแรงรวมในแนวแกน x , m คือมวลของก้อนของไหลนี้ และ a_x คือความเร่งของมวลในแนวแกน x

แรงรวมในทิศทางแกน x ประกอบด้วยแรงที่กระทำที่ผิวต่างๆ (Surface Forces) และแรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวเอง (Body Force) สำหรับแรงที่กระทำที่ผิวนั้นยังประกอบด้วยแรงอันเนื่องมาจากความดัน p , ความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) σ_x และความเค้นเฉือน (Shear Stress) τ_{yx} สำหรับ

ความเค้นเฉือนนี้ตัวห้อย y คือมีแรงตั้งฉากกับแรงเฉือนกระทำที่ด้านแกน y ตัวห้อยแรก x คือมีแรงเค้นเฉือนกระทำอยู่ ดังนั้นแรงรวมที่กระทำต่อผิวในทิศแกน x ของก้อนมวลนี้คือ

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy + \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right] dy + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx \quad (2.24)$$

ส่วนแรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักของตัวทิศแกน x คือ

$$\rho f_x (dx dy) \quad (2.25)$$

ดังนั้นแรงรวมทั้งหมดในทิศแกน x ที่เกิดจากพจน์ต่างๆ ในสมการ (2.24) และ (2.25) คือ

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right] dx dy + \rho f_x dx dy \quad (2.26)$$

ส่วนมวลของก้อนของไหลนี้คือ

$$m = \rho (dx dy) \quad (2.27)$$

ค่าความเร่ง a_x ของมวลสมการ (2.23) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว u ของมวลที่กำลังเคลื่อนที่นั้นต่อเวลา เนื่องจากเรากำลังจับตาฝ้าดูมวลนี้ที่กำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล ดังนั้น ความเร่ง a_x นี้คือ ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ ของ u กล่าวคือ

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (2.28)$$

แทนสมการ (2.26)-(2.28) ลงในกฎข้อที่สองของนิวตันสมการ (2.23) แล้วหารตลอดด้วย $dx dy$ จะได้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.29 \text{ ก})$$

ในการทำงานเดียวกัน กฎข้อที่สองของนิวตันในทิศแกน y ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกัน ดังนี้

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.29 \text{ ข})$$

สมการ (2.29 ก-ข) เรียกว่าสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equations) เพื่อเป็นเกียรติแก่ชาวฝรั่งเศสชื่อ M. Navier และชาวอังกฤษชื่อ G. Stokes ซึ่งต่างประดิษฐ์สมการนี้ขึ้นมาได้เช่นเดียวกัน สมการนาเวียร์-สโตกส์ (2.29 ก-ข) ต่างอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ อันเนื่องมาจากการประดิษฐ์สมการโดยการจับตามองก้อนมวลของไหลที่เคลื่อนตัวไป ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์นี้สามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาซึ่งเปรียบเสมือนผู้สังเกตจับตาดำเนินอยู่ที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งแล้วเฝ้ามองการเปลี่ยนแปลงของของไหลที่เคลื่อนผ่านไปโดยใช้ความสัมพัทธ์ในสมการ $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)$ ประยุกต์เข้ากับความเร็ว u ดังนี้

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u \quad (2.30)$$

ดังนั้น
$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla u \quad (2.31)$$

นั่นคือ พจน์ทางด้านซ้ายมือของสมการนาเวียร์-สโตกส์ที่อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์สามารถแทนด้วยพจน์ทั้งสองทางด้านขวามือของสมการ (2.31) นี้ซึ่งอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดา และสามารถนำไปใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุรักษ์มวล (2.22) เพื่อวิเคราะห์ปัญหาได้เพราะทุกพจน์ในสมการต่างๆ เหล่านี้ล้วนอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาแล้วอย่างใดก็ตาม พจน์ทั้งสองทางด้านขวามือของสมการ (2.31) นี้ยังสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายและสะดวกมากขึ้นอีกโดยใช้ความสัมพัทธ์ของสมการดังต่อไปนี้

เนื่องจาก
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ดังนั้น
$$p \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(pu)}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.32)$$

และเนื่องจาก

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) = u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) + (\rho \vec{V}) \cdot \vec{\nabla} u$$

ดังนั้น

$$\rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u = \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) - u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \quad (2.33)$$

แทนสมการ (2.32) และ (2.33) ลงในสมการ (2.31) จะได้

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) - u \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

แต่เนื่องจากผลรวมของ 2 พจน์ในวงเล็บสี่เหลี่ยมนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ตามสมการเชิงอนุพันธ์มวล (2.22) ดังนั้น สมการ (2.34) จึงกลายมาเป็น

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) \quad (2.35)$$

แทนสมการ (2.35) นี้ลงในสมการ (2.29 ก) จะได้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.36 ก)$$

ในทำนองเดียวกัน สมการ (2.29 ข) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.36 ข)$$

สมการ (2.36 ก-ข) นี้เรียกว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ที่อยู่ในรูปแบบอนุพันธ์ (Conservation Form)

พจน์ทางด้านขวามือของสมการนาเวียร์-สโตกส์นี้ ประกอบด้วยค่าความเค้นตึงจากและความเค้นเฉือน ซึ่งจำเป็นต้องถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเร็วในแกนต่างๆ ค่าความเค้นเหล่านี้แปรผันโดยตรงกับการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (Velocity Gradient) ข้อเสนอที่พบที่ใช้ได้กับของไหลทั่วไปในทางปฏิบัติ ทำให้เป็นที่ยอมรับและเรียกของไหลที่มีคุณสมบัติเช่นนี้ว่า ของไหลแบบนิวโตเนียน (Newtonian Fluid) ข้อเสนอดังกล่าว ก่อให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและความเร็ว ดังนี้

$$\sigma_x = \lambda(\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.37 \text{ ก})$$

$$\sigma_y = \lambda(\nabla \cdot \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.37 \text{ ข})$$

และ

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2.37 \text{ ค})$$

โดย μ แทนค่าความหนืดพลศาสตร์ (Dynamic Viscosity) หรือบางครั้งก็ถูกเรียกว่าค่าความหนืดที่หนึ่ง (First Viscosity) และ λ คือค่าความหนืดที่สอง (Second Viscosity) ซึ่งสโตกส์ได้ตั้งสมมุติฐาน (Stokes's Hypothesis) ไว้ว่า

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.38)$$

และพบว่าสมมุติฐานดังกล่าวนี้ใช้ได้ดีหากของไหลนั้นเป็นแก๊ส (Gas) แต่หากของไหลนั้นเป็นของเหลว (Liquid) ซึ่งโดยมากการไหลสำหรับปัญหาต่างๆ ไปนั้นจะไม่เกิดการอัดตัว (Incompressible) กล่าวคือ ค่าความหนาแน่น ρ นั้นคงที่ สมการอนุรักษ์มวล (2.22) จึงลดรูปลงเป็น $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ หรือ $div \vec{V} = 0$ ทำให้ค่าความหนืดที่สอง λ นี้ไม่ได้ถูกนำมาใช้ในการคำนวณ และความเค้นตึงจากในสมการ (2.37 ก-ข) จึงมีค่าเป็น 2 เท่าของค่าความหนืดพลศาสตร์คูณกับค่าการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้เอง ทำให้การค้นคว้าหาความจริงของค่าความหนืดที่สอง λ จึงไม่ค่อยได้รับความสนใจทำให้ไม่มีความชัดเจนและยังไม่ได้รับการยืนยันโดยแน่ชัดกระทั่งทุกวันนี้

เมื่อแทนค่าความเค้นต่างๆ ที่อยู่ในรูปของความเร็วจากสมการ (2.37 ก-ค) ลงในสมการ (2.36 ก-ข) ก่อให้เกิดสมการนาเวียร์-สโตกส์ที่อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาได้ดังนี้

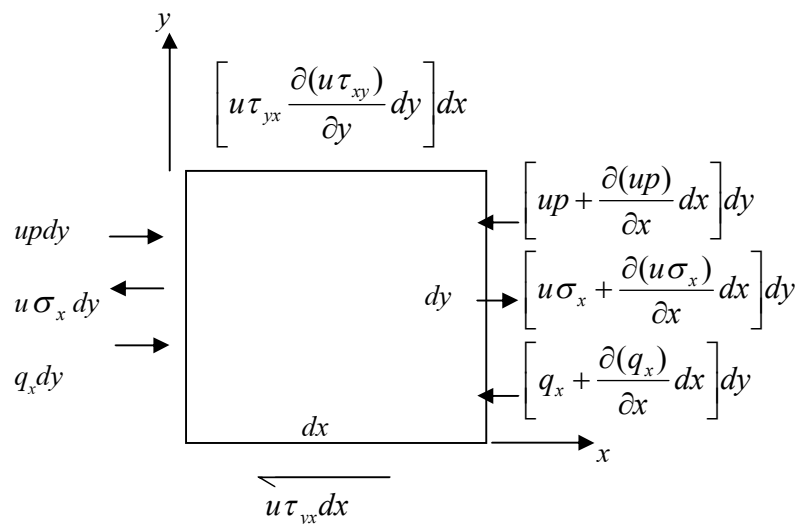
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \bar{\nabla} \cdot \bar{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \rho f_x \quad (2.39 \text{ ก})$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \bar{\nabla} \cdot \bar{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \rho f_y \quad (2.39 \text{ ข})$$

สมการ (2.39 ก-ข) นี้ แสดงถึงความซับซ้อนของสมการนาเวียร์-สโตกส์ซึ่งพจน์ต่างๆ นั้นอยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ของตัวไม่รู้ค่า ยิ่งไปกว่านั้น พจน์ที่สองและสามทางด้านซ้ายมือของสมการทั้งสองนี้ต่างเป็นพจน์แบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Terms) ซึ่งก่อให้เกิดความซับซ้อนต่อเนื่องในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนี้ ไม่ว่าจะด้วยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบใดๆ ก็ตาม

2.7.3 สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน [9]

การไหลหลายชนิด เช่น การไหลผ่านยานอวกาศที่ขับเคลื่อนด้วยความเร็วสูงหลายเท่าของเสียง หรือการไหลของอากาศร้อนใต้หลังคานั้น ความเร็วของการไหลและอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปในของไหลนั้นต่างขึ้นอยู่กับกันและกัน ดังนั้น ความจริงชนิดที่สามของการไหลใดๆ ที่สามารถนำมาใช้ประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพิ่มเติมได้อีกนั่นคือ กฎที่ว่าพลังงานนั้นไม่สูญหายไป (Conservation of Energy) รูปที่ 2.20 แสดงมวลที่มีขนาดกว้าง dx และ dy โดยมีความลึกหนึ่งหน่วยซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล



รูปที่ 2.20 รูปแบบแสดงงานที่เกิดขึ้นและปริมาณพลังค์ในทิศแกน x ที่ไหลผ่านก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลเพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน [9]

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงานสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยใช้กฎข้อแรกของเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจะเท่ากับปริมาณ พลังค์ความร้อนที่ให้แก่มวลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ ที่กระทำบนก้อนมวลนั้น

$$\begin{array}{rcccl} \text{อัตราการเปลี่ยนแปลง} & & \text{ปริมาณพลังค์} & & \text{อัตราของงานที่เกิดขึ้น} \\ \text{ของพลังงานใน} & = & \text{ความร้อนที่ให้} & + & \text{เนื่องจากแรงต่าง ๆ} \\ \text{ก้อนมวล} & & \text{แก่มวล} & & \text{บนก้อนมวลนั้น} \\ \text{หรือ} & A & = & B & + & C & (2.40) \end{array}$$

โดย A , B และ C แทนความหมายต่างๆ ดังแสดงในสมการ (2.40) นี้ หากเริ่มต้นพิจารณาที่พจน์ C ซึ่งแทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ ที่กระทำบนก้อนมวลนี้ แรงชนิดแรกคือแรงจากน้ำหนักของก้อนมวลเอง ซึ่งเมื่อคูณกับความเร็วของการไหลในทิศทางนั้นก่อให้เกิดอัตราของงานคือ

$$p\vec{f} \cdot \vec{V}(dxdy)$$

จากรูป 2.20 อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความดัน p ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[up - \left(up + \frac{\partial(up)}{\partial x} dx \right) \right] dy = - \frac{\partial(up)}{\partial x} dx dy$$

อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นตั้งฉาก σ_x ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศแกน x คือ

$$\left[u\sigma_x + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx \right] dy - u\sigma_x dy = \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx dy$$

และอัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นเฉือน τ_{yx} ที่กระทำบนด้าน dx ในทิศแกน x คือ

$$\left[u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right] dx - u\tau_{yx} dx = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dx dy$$

ในการทำงานเดียวกัน อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ ที่กระทำบนก้อนมวลในทิศแกน y ก็สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้เช่นกัน ก่อให้เกิดอัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ บนก้อนมวลนี้คือ

$$C = \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} \right) + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} \right] dx dy + p\vec{f} \cdot \vec{V} dx dy \quad (2.41)$$

สำหรับพจน์ B ซึ่งแทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลนั้นประกอบด้วย 2 ส่วนแรก คือ ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นบนปริมาตรของก้อนมวล ยกตัวอย่างเช่น ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ผลิตขึ้นได้เองภายในก้อนมวลนั้น (Internal Heat Generation) หากกำหนดให้ \bar{Q} แทนปริมาณ ฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นเองต่อมวลหนึ่งหน่วย ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์ที่เกิดขึ้นเองสำหรับก้อนมวลนี้คือ

$$\rho \bar{Q} (dx dy)$$

และจากรูปที่ 2.20 ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน x ผ่านขอบ dy ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาของก้อนมวลคือ

$$\left[q_x - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) \right] dy = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy$$

ในการทำงานเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน y ผ่านขอบ dx ทั้งด้านล่างและด้านบนของก้อนมวลคือ

$$\left[q_y - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) \right] dx = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy$$

ดังนั้น ปริมาณฟลักซ์ความร้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นบนก้อนมวลนี้คือ

$$B = \left[\rho \bar{Q} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.42)$$

แต่จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's Law) ปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_x และ q_y นั้นแปรผันขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (Temperature Gradient) ดังนี้

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \text{ และ } q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.43)$$

โดย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal Conductivity) ของของไหล ดังนั้น พจน์ B จึงกลายเป็น

$$B = \left[\rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (2.44)$$

ส่วนพจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลอันประกอบด้วยพลังงานภายใน (Internal Energy) ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนไหวของโมเลกุลภายในของไหลนั้น และพลังงานจลน์ (Kinetic Energy) ซึ่งเกิดขึ้นเนื่อง จากของไหลนั้นเกิดการไหล หาก e แทนพลังงานภายในและ $V^2/2$ คือพลังงานจลน์ที่ก้อนมวลนั้น ไหลด้วยความเร็ว V ดังนั้นพลังงานรวม (Total Energy) คือ $e + V^2/2$ ซึ่งมีหน่วยต่อหนึ่งหน่วยมวล เนื่องจากปริมาณมวลทั้งหมดของก้อนมวลนี้คือ $\rho dx dy$ ดังนั้น พจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลนี้คือ

$$A = \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy \quad (2.45)$$

ทำการแทนพจน์ A ซึ่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจากสมการ (2.45) นี้ และพจน์ B ซึ่งคือปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลจากสมการ (2.44) รวมทั้งพจน์ C ซึ่งคืออัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ บนก้อนมวลนั้นจากสมการ (2.40) ลงในสมการ (2.41) แล้วหารตลอดด้วย $dx dy$ ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์พลังงานดังนี้

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) &= \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial (u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\sigma_y)}{\partial y} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (2.46)$$

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน (2.46) ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาได้นี้ อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ (Substantial Derivative) ซึ่งจำเป็นต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ธรรมดาจึงสามารถใช้

ร่วมกับสมการเชิงอนุพันธ์มวล (2.22) และสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม (2.39) ได้ ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ในสมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน (2.46) นี้กระทำบนทั้งพจน์ของพลังงานภายใน e และพจน์ของพลังงานจลน์ $V^2/2$ ดังนั้น เพื่อให้ง่ายแก่ความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการต่อไป จึงขอแสดงขั้นตอนการแปลงรูปแบบของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียวก่อน ดังต่อไปนี้ ขั้นตอนในการแปลงรูปแบบค่าอนุพันธ์เริ่มจากการคูณสมการ (2.29 ก) และ (2.29 ข) ด้วยความเร็ว u และ v ตามลำดับ จะได้

$$\rho \frac{D(u^2/2)}{Dt} = -u \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho u f_x \quad (2.47 \text{ ก})$$

$$\rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} = -v \frac{\partial p}{\partial y} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho v f_y \quad (2.47 \text{ ข})$$

นำทั้งสองสมการนี้มารวมกัน และเนื่องจาก $u^2 + v^2 = V^2$ ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} \rho \frac{D(V^2/2)}{Dt} &= -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} + u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \\ &\quad + \rho (u f_x + v f_y) \end{aligned} \quad (2.48)$$

นำสมการ (2.48) ที่ได้ขึ้นไปลบออกจากสมการ (2.46) โดยใช้ $p\vec{f} \cdot \vec{V} = \rho(u f_x + v f_y)$ จะได้

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} &= \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.49)$$

ซึ่งพจน์ทางด้านซ้ายมือประกอบด้วยค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ที่กระทำบนพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียว พจน์หลายพจน์ทางด้านขวาของสมการ (2.49) นี้ยังมีความซับซ้อนน้อยกว่าสมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน (2.46) ซึ่งพจน์เชิงอนุพันธ์ประกอบด้วยค่าความเร็วและความเค้นคูณกันอยู่ภายใน รวมทั้งมีพจน์น้ำหนักของก้อนมวล (Body Force) รวมอยู่ด้วยสมการ (2.49) นี้ยังสามารถเขียนให้สั้นลงได้อีกเนื่องจากในความเป็นจริง τ_{xy} นั้นจำเป็นต้องเท่ากับ τ_{yx} เพราะไม่เช่นนั้นแล้วก้อนมวลเล็กๆ ในรูปที่ 2.20 นี้จะเกิดการหมุนรอบตัวเองหากขนาดของก้อนมวล dx และ dy นี้เข้าสู่ศูนย์ ดังนั้น สมการ (2.49) จึงกลายเป็น

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yx} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

จากนั้น แทนค่าความเค้นต่างๆ ในสมการ (2.50) นี้ในรูปแบบของความเร็วโดยใช้สมการ (2.37 ก-ค) จะได้

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\ + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

พจน์ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ของพลังงานภายในสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของอนุพันธ์ธรรมดาได้ โดยเริ่มจากการใช้คำจำกัดความของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ในสมการ $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)$ ประยุกต์เข้ากับค่าพลังงานภายใน e แล้วคูณตลอดด้วยค่าความหนาแน่น ρ จะได้

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla e \quad (2.52)$$

แต่จาก $\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t}$

ดังนั้น $\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} - e \frac{\partial \rho}{\partial t}$ (2.53)

และจากความสัมพันธ์ของการประยุกต์ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence) ลงบนผลคูณของปริมาณสเกลาร์ (Scalar) และเวกเตอร์ (Vector)

$$\nabla \cdot (\rho e \vec{V}) = e \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + (\rho \vec{V}) \cdot \nabla e$$

ดังนั้น $\rho \vec{V} \cdot \nabla e = \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) - e \nabla \cdot (\rho \vec{V})$ (2.54)

แทนสมการ (2.53) และ (2.54) ลงในสมการ (2.52) แล้วจัดพจน์จะได้

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} - e \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \nabla \cdot (\rho e \vec{V})$$

และผลรวมของพจน์ในวงเล็บสี่เหลี่ยมในสมการข้างบนนี้มีค่าเท่ากับศูนย์ตามสมการเชิงอนุพันธ์มวล (2.22) ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) \quad (2.55)$$

แทนสมการ (2.55) นี้ลงด้านซ้ายมือของสมการ (2.51) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) = & \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์พลังงานที่เขียนให้อยู่ในรูปของพลังงานภายใน e แต่เพียงอย่างเดียว

แต่เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานทั้งหมดภายในก้อนมวลนั้นประกอบด้วยพลังงานภายใน e และพลังงานจลน์ $V^2/2$ ดังนั้น พจน์เชิงอนุพันธ์สัมบูรณ์ทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.46) สามารถเขียนรูปแบบของพจน์เชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้เช่นกัน โดยทำตามขั้นตอนจากสมการ (2.52) จนถึงสมการ (2.55) ด้วยการเปลี่ยนพจน์พลังงานภายใน e ไปเป็นพจน์พลังงานรวม $e + V^2/2$ จะได้

$$\rho \frac{D(e + V^2/2)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] \quad (2.57)$$

แทนสมการ (2.57) ลงในสมการ (2.46) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] = & \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ & - \frac{\partial(\rho p)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho p)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \sigma_y)}{\partial y} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (2.58)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์พลังงานที่เขียนในรูปของพลังงานรวม $e + V^2/2$ หากพิจารณาสมการนี้ โดยละเอียดจะเห็นได้ว่าแต่ละพจน์นั้นมีความซับซ้อนเชิงคณิตศาสตร์ในตัวเอง พจน์ส่วนใหญ่เป็นพจน์แบบไม่เชิงเส้นซึ่งจะเป็นผลต่อเนื่องต่อความซับซ้อนในการประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยเฉพาะหลายพจน์ทางด้านขวามือเป็นพจน์เชิงอนุพันธ์ของผลคูณระหว่างความเร็วและความเค้นในทิศทางต่างๆ กัน

2.7.4 ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ [9]

สมการเชิงอนุพันธ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน ซึ่งได้ประคิษฐ์ขึ้นจากความจริงที่ว่า มวลนั้น ไม่มีการสูญหาย การใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน และพลังงานนั้น ไม่มีการสูญหายตามลำดับ ดังแสดงอย่างป็นขั้นตอนโดยละเอียดในหัวข้อ 2.2.3-2.2.5 ก่อให้เกิดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์มวล

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.59)$$

สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม

$$\text{แกน } x: \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho f_x \quad (2.60 \text{ ก})$$

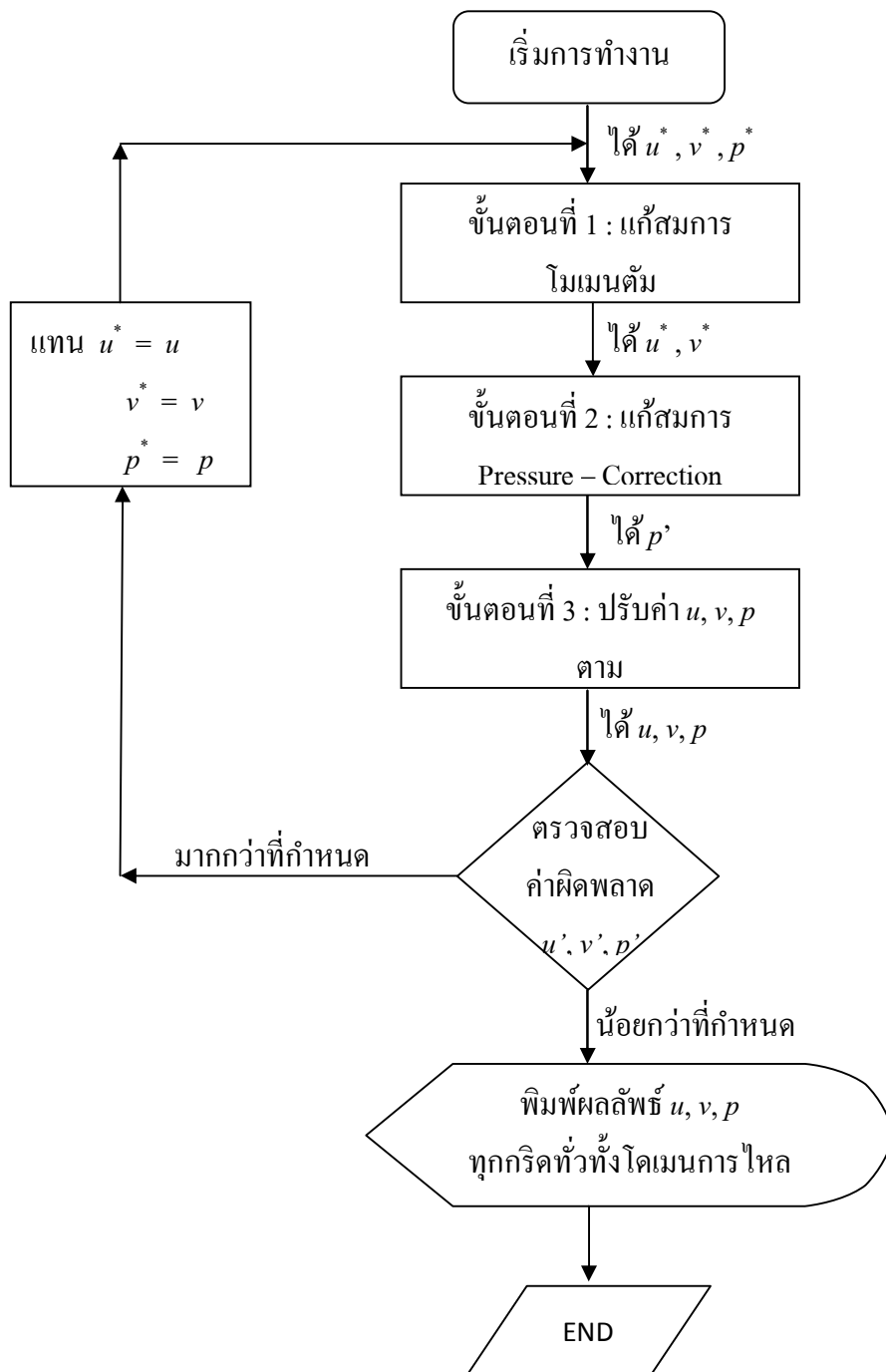
$$\text{แกน } y: \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho f_y \quad (2.60 \text{ ข})$$

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial(up)}{\partial x} \\ - \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.7.5 แผนภูมิการทำงานของวิธี SIMPLE [9]

เพื่อแสดงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มที่สามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยการแก้ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งตั้งอยู่บนกระบวนการคำนวณด้วยวิธี SIMPLE ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.21 แผนภูมิการทำงานของวิธี SIMPLE

วิธีทำซ้ำที่ได้รับความนิยมมากที่สุดวิธีหนึ่งคือวิธี SIMPLE ซึ่งย่อมาจากคำว่า Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation เป็นคำอธิบายวิธีการแก้ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ชุดนี้ถึงปริยาย (Implicit) กล่าวคือ ในช่วงของกระบวนการทำซ้ำอยู่นั้นจำเป็นต้องแก้ระบบสมการเชิง

พีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับตัวไม่รู้ค่าของความดันไปพร้อมกันด้วยวิธี SIMPLE นี้ประกอบด้วยกระบวนการคำนวณเพียง 3 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1: เริ่มจากการสมมติค่าความเร็ว u^* และ v^* รวมทั้งค่าความดัน p^* ทั่วทั้งโดเมนของการไหล เพื่อคำนวณหาค่า u^* และ v^* ใหม่จากสมการไฟไนต์วอลุ่ม ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัมในทิศแกน x และ y ดังนี้

$$a_p^u u_p^* = \sum a_{nb}^u u_{nb}^* + \frac{\partial p^*}{\partial x} A^u \quad (2.62 \text{ ก})$$

$$a_p^v v_p^* = \sum a_{nb}^v v_{nb}^* + \frac{\partial p^*}{\partial y} A^v \quad (2.62 \text{ ข})$$

ขั้นตอนที่ 2: หากกำหนดให้ p' แทนตัวแก้ซึ่งเป็นค่าความแตกต่างระหว่างค่าความดันที่ถูกต้อง p และค่าความดัน p^* ที่สมมติขึ้นในขั้นตอนที่ 1 ดังนั้น

$$p = p^* + p' \quad (2.63)$$

ในทำนองเดียวกัน หากกำหนดให้ u' และ v' แทนค่าความต่างระหว่างค่าความเร็วที่ถูกต้อง u และ v กับค่าความเร็ว u^* และ v^* ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 1 ดังนั้น

$$u = u^* + u' \quad (2.64 \text{ ก})$$

$$v = v^* + v' \quad (2.64 \text{ ข})$$

อนึ่ง หากเราแทนค่าความเร็ว u , v และค่าความดัน p ที่ถูกต้องลงในสมการไฟไนต์วอลุ่ม ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัมในทิศแกน x และ y จะได้

$$a_p^u u_p = \sum a_{nb}^u u_{nb} + \frac{\partial p}{\partial x} A^u \quad (2.65 \text{ ก})$$

$$a_p^v v_p = \sum a_{nb}^v v_{nb} + \frac{\partial p}{\partial y} A^v \quad (2.65 \text{ ข})$$

หากนำสมการ (2.62 ก – ข) ลบออกจากสมการ (2.65 ก – ข) ตามลำดับ จะได้

$$a_p^u (u_p - u_p^*) = \sum a_{nb}^u (u_{nb} - u_{nb}^*) + \frac{\partial (p - p^*)}{\partial x} A^u \quad (2.66 \text{ ก})$$

$$a_p^v(v_p - v_p^*) = \sum a_{nb}^v(v_{nb} - v_{nb}^*) + \frac{\partial(p - p^*)}{\partial y} A^v \quad (2.66 \text{ ข})$$

นั่นคือ

$$a_p^u u_p' = \sum a_{nb}^u u_{nb}' + \frac{\partial p'}{\partial x} A^u \quad (2.67 \text{ ก})$$

$$a_p^v u_p' = \sum a_{nb}^v v_{nb}' + \frac{\partial p'}{\partial y} A^v \quad (2.67 \text{ ข})$$

เพื่อให้กระบวนการคำนวณเป็นไปได้โดยสะดวกยิ่งขึ้น วิธี SIMPLE ได้ละพจน์แรกทางด้านขวาของสมการ (2.67 ก - ข) ทิ้งไป อนึ่ง การละทิ้งพจน์แรกทางด้านขวาของทั้งสองสมการเพื่อคำนวณหาค่าความเร็ว u และ v ซึ่งเป็นตัวแก้มันไม่ส่งผลต่อความผิดพลาดของผลลัพธ์ท้ายสุด ทั้งนี้ก็เพราะวิธี SIMPLE ใช้กระบวนการคำนวณแบบทำซ้ำ ผลลัพธ์สุดท้ายที่ถูกต้อนั้นต้องเป็นผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนต์ม (2.65 ก - ข) และสมการเชิงอนุพันธ์มวลซึ่งเราจะได้พบเห็นกันต่อไป ดังนั้นสมการ (2.67 ก - ข) จึงกลายมาเป็น

$$a_p^u u_p' = \frac{\partial p'}{\partial x} A^u \quad \text{นั่นคือ} \quad u_p' = \frac{A^u}{a_p^u} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2.68 \text{ ก})$$

$$a_p^v u_p' = \frac{\partial p'}{\partial y} A^v \quad \text{นั่นคือ} \quad v_p' = \frac{A^v}{a_p^v} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (2.68 \text{ ข})$$

ทำให้ค่าความเร็ว u และ v ตามสมการ (2.64 ก - ข) คือ

$$u_p = u_p^* + \left(\frac{A^u}{a_p^u} \right) \frac{\partial p'}{\partial x} = u_p^* + d^u \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2.69 \text{ ก})$$

และ

$$v_p = v_p^* + \left(\frac{A^v}{a_p^v} \right) \frac{\partial p'}{\partial y} = v_p^* + d^v \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (2.69 \text{ ข})$$

โดย $d^u = A^u / a_p^u$ และ $d^v = A^v / a_p^v$

เนื่องจากสมการต่างๆ ที่เราประดิษฐ์ขึ้นมาในขั้นตอนที่ 2 นี้ใช้ได้กับทุกๆ กริด P ใดๆ จึงขอละตัวห้อย P เพื่อให้การนำเสนอมีความกระชับขึ้น สมการ (2.69 ก - ข) จึงเขียนสั้นๆ ได้เป็น

$$u = u^* + d^u \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2.70 \text{ ก})$$

$$v = v^* + d^v \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (2.70 \text{ ข})$$

หากเราหาค่าอนุพันธ์ของสมการ (2.70 ก – ข) ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ แล้วนำมารวมกันจะ
ได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(d^u \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d^v \frac{\partial p'}{\partial y} \right) \quad (2.71)$$

แต่ผลรวมของพจน์ทั้งสองทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.71) นั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ตามสมการของการ
อนุรักษ์มวล ดังนั้นสมการ (2.71) จึงกลายมาเป็นสมการ Pressure – Correction

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(d^u \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(d^v \frac{\partial p'}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) \quad (2.72)$$

ขั้นตอนที่ 3: เมื่อได้แก้ค่าตัวแก้ p' ของความดันจากขั้นตอนที่ 2 แล้ว จึงสามารถหาค่าความดัน p
ที่มีค่าถูกต้องมากยิ่งขึ้นตามสมการ (2.63) รวมทั้งค่าความเร็ว u และ v ที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น
จากสมการ (2.70 ก – ข)

จากนั้นจึงตรวจสอบผลลัพธ์ u , v และ p ว่าได้เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้องแล้วหรือยังโดยตรวจสอบได้
จากค่า u' , v' และ p' ที่ควรเข้าสู่ศูนย์ทำให้ $u = u^*$, $v = v^*$ และ $p = p^*$ ตามสมการ (2.64ก – ข)
และ (2.63)ตามลำดับ หากค่า u' , v' และ p' ใดยังไม่เข้าสู่ค่าผิดพลาดที่ยอมรับได้ (Specified
Tolerance) ก็ให้แทนค่า $u^* = u$, $v^* = v$ และ $p^* = p$ แล้วย้อนกลับไปเริ่มการคำนวณในขั้นตอนที่ 1
ใหม่ กระบวนการทำซ้ำนี้จึงดำเนินเรื่อยไปจนกว่าค่า u , v และ p ของทุกๆ กริดทั่วทั้งโดเมนการ
ไหลนั้นเข้าสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

2.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ฉัฐนิ วรรษศ และคณะ [6] ได้ศึกษารวบรวมข้อมูลแนวทางในการพัฒนาระบบทำน้ำร้อนพลังงานรังสี
อาทิตย์ ของหน่วยงานต่างๆ ในประเทศไทย โดยมีการปรับปรุงตัวเก็บรังสีอาทิตย์ ซึ่งส่วนใหญ่เน้น
แบบแผ่นราบและแบบท่อสุญญากาศ, ระบบเก็บรักษาความร้อนในรูปความร้อนสัมผัส ความร้อนแฝง
และในรูปเคมี, การเลือกชนิดของไหลในตัวเก็บรังสีอาทิตย์ ทั้งที่เป็นน้ำ น้ำมันหรือของไหลนาโน

รวมไปถึง การประยุกต์การทำงานร่วมกับเทคโนโลยีอื่น เพื่อเพิ่มสมรรถนะในการผลิตน้ำร้อนใช้งาน ได้แก่ การอุ่นน้ำในบ่อสระ การอุ่นน้ำป้อนหม้อไอน้ำ การอุ่นน้ำสำในโรงกลั่นสุราชุมชน และการอบแห้งไม้เฟอร์นิเจอร์ เป็นต้น ซึ่งพบว่าสามารถทดแทนการใช้เชื้อเพลิงฟอสซิล ได้อย่างคุ้มค่าในเชิงพาณิชย์

จงจิตร หิรัญธาดา และคณะ [2] ได้ทำการศึกษาเครื่องทำน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์ที่มีการใช้กันอย่างแพร่หลายในต่างประเทศ แต่สำหรับในประเทศไทย การทำน้ำร้อนด้วยพลังงานรังสีอาทิตย์ยังมีการใช้งานไม่แพร่หลายนัก เนื่องจากมีราคาแพง เพื่อเป็นการส่งเสริมให้มีการใช้มากขึ้นจึงได้ทำการศึกษาเครื่องทำน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์ที่มีราคาต่ำ และสามารถสร้างใช้เองได้ เช่น วัสดุที่ทำจากพลาสติก (ท่อ PVC) ท่อน้ำที่มีขายตามท้องตลาดทั่วไป เพื่อประหยัดค่าใช้จ่าย และช่วยลดการขาดดุลการค้ากับต่างประเทศ ที่จะต้องนำเข้าเครื่องทำน้ำร้อนพลังงานไฟฟ้าและก๊าซ ซึ่งมีราคาแพงมีปัญหาด้านความปลอดภัยและสิ่งแวดล้อม การประยุกต์สร้างเครื่องทำน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์อย่างง่ายสำหรับประเทศไทย (Low Cost - Solar Water Heater for Thailand, LC-SWHT) เพื่อใช้ในบ้านเรือนทั่วไป ที่ทุกคนสามารถสร้างขึ้นเอง ให้อุณหภูมิน้ำร้อนพอเหมาะ มีราคาประหยัด อีกทั้งยังช่วยประหยัดพลังงานไฟฟ้าหรือก๊าซอีกด้วย หลักการ พื้นฐานคือนำท่อพลาสติก (PVC) ทำหน้าที่เป็นท่อน้ำร้อน และตัวเก็บรังสีอาทิตย์โดยตรง ทาสีทึบเพื่อให้มีค่าการดูดกลืนรังสีสูงขึ้น โดยเป็นการรวมแผงรับรังสีอาทิตย์โดยตรง ทาสีทึบเพื่อให้มีค่าการดูดกลืนรังสีสูงขึ้น โดยเป็นการรวมแผงรับรังสีอาทิตย์และถังสะสมความร้อนเอาไว้เป็นชุดเดียวกัน มีค่าก่อสร้างประมาณ 4,500 บาท และอายุการใช้งานประมาณ 3 ปี

Collin et al. [10] ได้ทำการศึกษาในเด็กที่โดนน้ำร้อนลวกที่เกิดจากการอาบน้ำร้อนในประเทศที่ได้รับ การกำจัดหัวผสมควบคุมอุณหภูมิ (TMV) ที่ได้รับการแนะนำ มีวัตถุประสงค์เพื่อกำหนดความถี่ และความรุนแรงของการบาดเจ็บเหล่านี้ในภูมิภาคและการลดประมาณการในภาระงานและค่าใช้จ่าย ถ้า TMVs เป็นที่รู้จักในอนาคต โดยมีวิธีในการดำเนินงานคือศึกษาข้อมูลบันทึกย้อนหลังผู้ป่วยกรณี ถูกน้ำร้อนลวกที่อายุต่ำกว่า 16 ปี ที่เข้ารับการรักษาที่ศูนย์การเผาไหม้จากภาคเหนือตั้งแต่ช่วงวันที่ 1 มกราคม 1997 จนถึง 1 มกราคม 2005 จากผลการศึกษาพบว่าผู้ป่วยจำนวน 125 คน ที่เข้ารับการรักษา ในช่วงนี้ อายุเฉลี่ยของพวกเขาอยู่ที่ช่วง 35.7 ± 27.23 เดือน ถูกน้ำร้อนลวกตั้งแต่ 0.5-45% ของพื้นที่ ผิวทั้งหมดที่ถูกน้ำร้อนลวก (หมายถึง $9.3 \pm 9.15\%$) ผู้ป่วยเหล่านี้อยู่ในโรงพยาบาลเฉลี่ย 6.3-5.58 วัน และผู้ป่วยที่ต้องพักรักษาตัว 18 วัน (คิดเป็น 14.4%) จำเป็นต้องได้รับการรักษาโดยการปลูกถ่าย ผิวหนัง สรุปได้ว่าการรักษาเด็กเหล่านี้มีผลกระทบต่อค่าใช้จ่ายอย่างมีนัยสำคัญซึ่งค่าใช้จ่ายเหล่านี้ อาจจะลดลงด้วยการเสนอกฎหมายที่จะบังคับใช้การติดตั้งหัวผสมควบคุมอุณหภูมิ (TMVs) เข้าไปในบ้านที่สร้างขึ้นใหม่ทั้งหมด เราต้องการให้มีกฎหมายดังกล่าวเพื่อเป็นการป้องกันไม่ให้เกิด อุบัติเหตุเหล่านี้

Spur et al. [11] ได้ทำการศึกษาการออกแบบที่หลากหลายของการจัดเก็บน้ำร้อนในประเทศ (DHW) รวมทั้งผู้ที่มีเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบถูกฝังอยู่ (HxS) เพื่อใช้ในเชิงพาณิชย์จึงมีความต้องการในการประเมินความแม่นยำของประสิทธิภาพของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบฝังในการศึกษานี้เป็นการศึกษาการทำงานการแบ่งชั้นของเครื่องนี้และการวิเคราะห์มาตรฐานของระบบ โปรแกรมการจำลอง TRNSYS ถูกเพิ่มเพื่อจำลองการทำงานของระบบเหล่านั้น แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการใช้ตรวจสอบโดยใช้การวัดที่ได้จากการทดลองซึ่งต้องมีผลการทำงานของDHW ทุกวัน จึงต้องทำการออกแบบระบบที่ใช้สำหรับการทดสอบระบบ DHW มีการประเมินประสิทธิภาพกับผู้ที่เกี่ยวข้องกับ (URE) เราใช้ทั้งหมด 3 ใบในการทดสอบระบบ แสดงให้เห็นว่าการกำหนดค่าภายในของ ถังและเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบถูกฝังอย่างมีนัยสำคัญอาจมีผลต่อประสิทธิภาพการทำงานของระบบแบบแบ่งชั้นมีประสิทธิภาพเพิ่มขึ้นถึง 32% ซึ่งมีประสิทธิภาพมากกว่าระบบในเชิงพาณิชย์ทั่วไป

Costa et al. [12] บทความนี้นำเสนอ การสร้างแบบจำลองที่มีรายละเอียดของเครื่องควบคุมอุณหภูมิ น้ำผสมสำหรับการใช้งานในประเทศที่มีอุปกรณ์ป้องกันน้ำร้อนลวกหรือป้องกันความเย็นซึ่งจะดำเนินการโดยใช้อุณหภูมิและความดันของไอร้อนและไอน้ำในการผสม เวลาในการตอบสนองของอุปกรณ์ป้องกันน้ำร้อนลวกหรืออุปกรณ์ป้องกันความเย็นจะสั้นกว่าเวลาตอบสนองของระบบปรับอุณหภูมิซึ่งจะขึ้นอยู่กับเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเวลาตอบสนองของระบบป้องกันน้ำร้อนลวกหรือป้องกันความเย็นจะใช้เวลาสั้นกว่าระบบปรับอุณหภูมิ ในขณะที่หลอดไฟจะตัดที่อุณหภูมิมีการเปลี่ยนแปลง ระบบจะปิดทันทีถ้าไม่มีไอร้อนและไอน้ำ ซึ่งจะเกิดขึ้นได้ขณะที่ใช้หม้อต้มในระยะเวลานาน แบบจำลองอธิบายถึงส่วนต่างของการผสม การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิโดยใช้การคำนวณแบบ Runge-Kutta ในแบบปริยาย ผลลัพธ์ที่ได้เป็นแบบเปลี่ยนแปลงตามเวลาในสถานะคงที่ โดยแสดงถึงอุณหภูมิของน้ำผสมที่ทางออก และพฤติกรรมของการผสม

เพชัญ จันทร์สา, บัณฑิต ลิมมีโชคชัย และจางง สรพิพัฒน์ [13] งานวิจัยนี้ได้แนะนำเสนอการคำนวณเพื่อคาดเดาสมรรถนะรายปีของเครื่องทำน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์ในประเทศไทย ซึ่งในการศึกษาได้ทำการทดลองกับเครื่องทำน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์สำหรับครัวเรือนแบบที่ไม่ใช้ปั๊มในการหมุนเวียนน้ำ โดยได้ทำการทดลองเก็บข้อมูล ณ สถาบันเทคโนโลยีนานาชาติสิรินธร มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต จังหวัดปทุมธานี ผลการทดลองที่ได้จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น เมื่อพิสูจน์แล้วว่าผลที่ได้จากการคำนวณถูกต้องตรงกับผลที่ได้จากการทดลอง ก็จะนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ไปคำนวณหาสมรรถนะการทำน้ำร้อนรายปีต่อไป โดยใช้ข้อมูลความเข้มรังสีอาทิตย์กับอุณหภูมิบรรยากาศที่ได้จากการวัดเป็นข้อมูลหลักของการคำนวณ จากการศึกษาพบว่าเครื่องทำน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์แบบไม่ใช้ปั๊มหมุนเวียนน้ำ ขนาด

พื้นที่รับแสง 2.16 ตารางเมตร, ความจุถังสะสม 150 ลิตร สามารถผลิตน้ำร้อนได้ที่อุณหภูมิสูงสุดเฉลี่ย 60°C ณ เวลาประมาณ 16.00 น. เมื่ออุณหภูมิของน้ำในระบบเริ่มต้นที่ 25°C และประสิทธิภาพเฉลี่ยทั้งปีของเครื่องทำน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์จะอยู่ที่ประมาณ 46.7% นอกจากนี้ในบทความนี้ยังได้นำเสนอผลการคาดเดาสมรรถนะการทำน้ำร้อนรายปี, ประสิทธิภาพโดยรวม และค่าพลังงานโดยประมาณที่ผลิตได้ทั้งปีของเครื่องทำน้ำร้อนพลังงานรังสีอาทิตย์ไว้ด้วย