

บทที่ 3

กระบวนการประกอบหัวอ่าน/เขียนสำเร็จ โดยการเชื่อมติด และทฤษฎี

1. การเชื่อมติด

เป็นขบวนการที่ใช้สำหรับต่อวัสดุให้ติดกัน วัสดุส่วนใหญ่เป็นโลหะ และพลาสติก โดยให้ชิ้นส่วนของวัสดุรวมตัวเข้าด้วยกัน ปกติใช้วิธีทำให้ชิ้นงานหลอมละลายจนติดกันหรือการเพิ่มเนื้อโลหะเติมลงในแอ่งหลอมละลายของวัสดุที่หลอมเหลว เมื่อเย็นตัวรอยต่อจะมีความแข็งแรง บางครั้งใช้แรงดันร่วมกับความร้อน หรืออย่างใดอย่างหนึ่งเพื่อให้เกิดรอยเชื่อม ซึ่งตรงข้ามกับการบัดกรีอ่อน และการบัดกรีแข็งซึ่งไม่มีการหลอมละลายของชิ้นงานชิ้นงาน มีแหล่งพลังงานหลายอย่างสำหรับนำมาใช้ในการเชื่อม เช่น การใช้ความร้อนจากเปลวแก๊ส การอาร์คโดยใช้กระแสไฟฟ้า ลำแสงเลเซอร์ การเสียดสี การใช้คลื่นอัลตราโซนิก เป็นต้น ในอุตสาหกรรมมีการนำมาใช้ในสภาพแวดล้อมที่แตกต่างกัน เช่นการเชื่อมในพื้นที่โล่ง พื้นที่อับอากาศ การเชื่อมใต้น้ำ การเชื่อมมีอันตรายเกิดขึ้นได้ง่าย จึงควรมีความระมัดระวังเพื่อป้องกันอันตรายที่เกิดจาก กระแสไฟฟ้า ความร้อน สะเก็ดไฟ กว้นเชื่อม แก๊สพิษ รังสีอาร์ค ฝุ่นละออง และอื่นๆ อีกมากมาย สำหรับอุตสาหกรรมอิเล็กทรอนิกส์ มีข้อจำกัดในเรื่องพื้นที่เป็นอย่างมากฉะนั้นจึงมีการประยุกต์นำลักษณะการเชื่อมต่างๆ ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้นมาใช้ในการเชื่อมชิ้นงานขนาดเล็กให้มีประสิทธิภาพ และเหมาะสมมากที่สุด ดังนั้นการใช้คลื่นอัลตราโซนิกในการเชื่อมชิ้นงาน จึงเป็นทางเลือกหนึ่งของอุตสาหกรรมประเภทอิเล็กทรอนิกส์

อัลตราโซนิก เป็นคลื่นเสียงที่มีความถี่อยู่ในช่วงที่หูมนุษย์ไม่สามารถได้ยินคลื่นนี้มีความถี่ประมาณ 20 KHz และสามารถเพิ่มความถี่ได้มากกว่า 100 KHz โดยไม่เป็นอันตรายต่อมนุษย์ จึงมีการนำมาใช้กันอย่างแพร่หลาย เช่น ในอุตสาหกรรมทางการแพทย์ การทำความสะอาด การเชื่อม เป็นต้น และเครื่องเชื่อมที่ผลิตออกขายตามท้องตลาดทั่วไปที่ใช้วิธีเชื่อมแบบอัลตราโซนิก ส่วนมากจะเป็นลักษณะเครื่องเชื่อมเฉพาะทาง ที่ใช้เชื่อมชิ้นงานที่มีขนาดไม่ใหญ่นัก การเชื่อมด้วยอัลตราโซนิกมีข้อดีหลายประการเช่น สามารถเชื่อมวัสดุที่มีจุดหลอมเหลวต่างกันมากๆ ได้ ใช้เวลาในการเชื่อมน้อย ใช้พลังงานน้อย และสามารถเชื่อมวัสดุที่วิธีการเชื่อมแบบอื่นๆ ไม่สามารถเชื่อมได้เช่น เซรามิกไม่ว่าจะเป็นการเชื่อมในแนวตั้งหรือแนวนอน โดยใช้การสั่นที่แอมพลิจูดจุดต่ำๆ และความถี่สูง แต่วิธีการเชื่อมแบบนี้ยังจำกัดการเชื่อมในชิ้นงานขนาดเล็กหรือแผ่นฟิล์มที่มีขนาดบางๆ ในทางวิศวกรรมการเชื่อมโดยใช้อัลตราโซนิกนั้นได้มีการศึกษาและพัฒนาอย่างต่อเนื่องสามารถใช้ได้ ในอุตสาหกรรมหลายประเภท



2. กระบวนการ Wire Bond

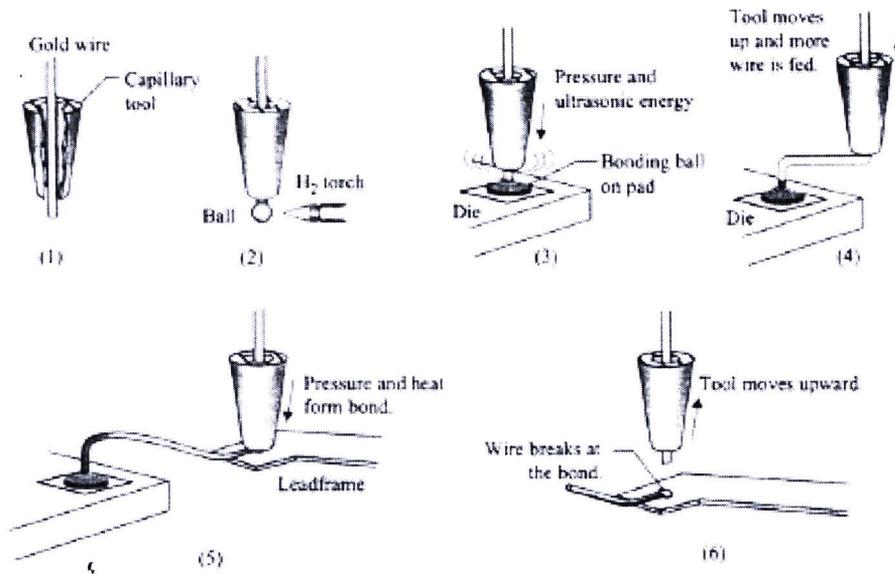
วิธีการเชื่อมที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน คือ วิธีเชื่อมแบบ Wire Bond กระบวนการ Wire Bond นั้นเป็นกระบวนการที่เชื่อมผิวชิ้นงาน 2 ชิ้นเข้าด้วยกัน มีทั้งแบบใช้ความร้อน และไม่ใช้ความร้อนในการเชื่อม เป็นการเชื่อมแบบสะอาด คือหลังจากเชื่อมแล้วชิ้นงานที่ได้จะปราศจากฟลักซ์ โลหะที่นิยมใช้ได้แก่ ทองคำ ทองแดง เงิน อลูมิเนียม หรือโลหะอื่นๆ ซึ่งกระบวนการ Wire Bond สามารถแบ่งออกได้ 3 วิธี ดังต่อไปนี้

2.1 การเชื่อมโดยวิธีการเทอร์โมคอมเพรสชัน (Thermocompression) เป็นวิธีการเชื่อมโดยอาศัยแรงกด ระยะเวลา และใช้ความร้อนเพื่อเชื่อมชิ้นงานให้ติดกัน กระบวนการของการเชื่อมเทอร์โมคอมเพรสชัน คือ หัวกดจะกดลวดเชื่อมด้วยปริมาณแรงที่มากพอจะทำให้ลวดสัมผัสกับฐาน สำหรับฐานจะถูกให้ความร้อน ที่อุณหภูมิ 150 องศาเซลเซียสหรือมากกว่า แต่ในบางกรณีจะให้ความร้อนกับลวดเชื่อมและฐานไปพร้อมๆ กัน สำหรับการเชื่อมโดยวิธีการ เทอร์โมคอมเพรสชัน ต้องใช้แรงกดมากกว่าวิธีการเชื่อมวิธีอื่น ในส่วนวัสดุนิยมใช้ทองคำเป็นวัสดุเคลือบผิวชิ้นงานทั้ง 2 ชิ้น ก่อนนำมาเชื่อม

2.2 การเชื่อมโดยวิธีการเทอร์โมโซนิค (Thermosonic Bonding) เป็นวิธีการเชื่อมโดยใช้แรงกด ระยะเวลา การสั่นด้วยคลื่นอัลตราโซนิค (Ultrasonic Vibration) และใช้ความร้อนที่อุณหภูมิ 150 องศาเซลเซียสเป็นอย่างน้อยเพื่อเชื่อมชิ้นงานให้ติดกัน อาศัยเทคนิคในการเชื่อมโดยการสั่นด้วยคลื่นอัลตราโซนิค ในการเชื่อม จึงไม่ต้องใช้แรงกดมากเหมือนวิธีเทอร์โมคอมเพรสชัน สำหรับการเชื่อมแบบเทอร์โมโซนิค สามารถแบ่งได้เป็น 3 วิธีดังนี้

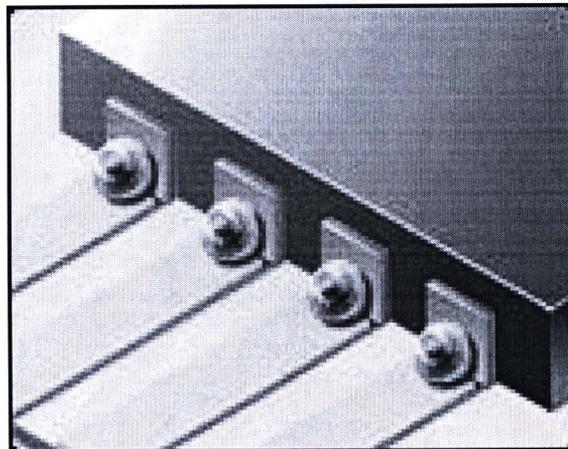
2.2.1 การเชื่อมโดยวิธีการใช้ลูกบอลทอง (Gold Ball Bonding) อาศัยเทคนิคในการเชื่อมด้วยคลื่นอัลตราโซนิค เป็นการเชื่อมด้วยลวดทองคำ โดยความร้อนเป่าที่ปลายลวดให้ลวดทองหลอมละลายจนเป็นลูกบอลทองแล้วใช้แรงกด กดลงไปยังตำแหน่งที่ต้องการ และใช้การสั่นของคลื่นอัลตราโซนิคเพื่อให้ลวดทองคำติดกับฐาน เมื่อลวดเชื่อมติดกับฐานแล้ว จากนั้นหัวกดจะถูกยกขึ้นเพื่อดึงให้ลวดขาด เพื่อนำไปเชื่อมยังตำแหน่งต่อไป ดังภาพที่ 5

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ	
ห้องสมุดงานวิจัย	
วันที่.....	25 ก.ค. 2555
เลขทะเบียน.....	247915
เลขเรียกหนังสือ.....	



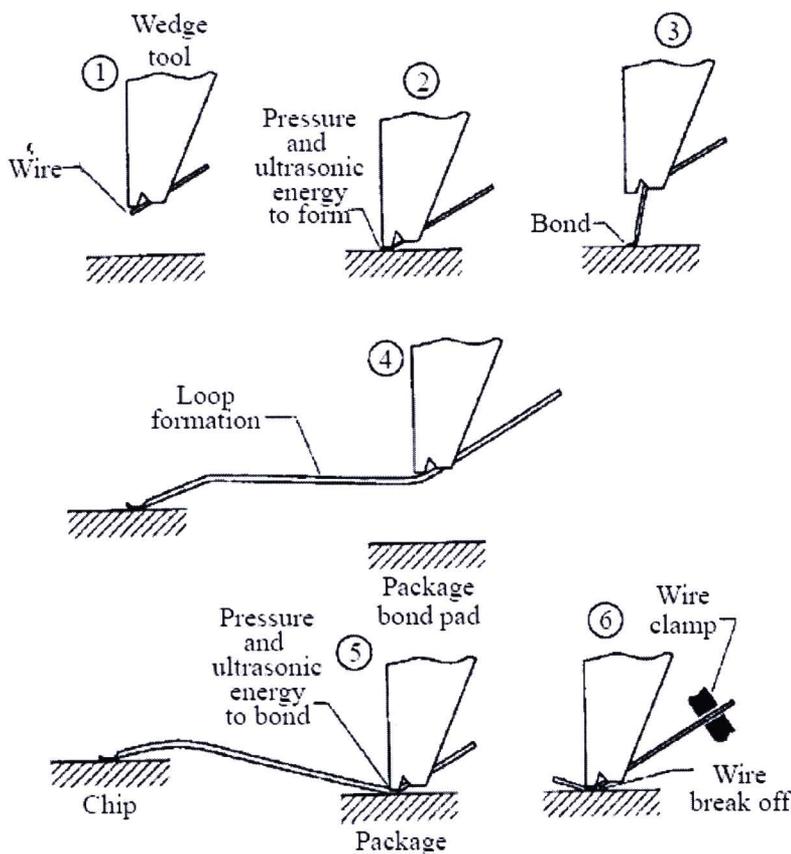
ภาพที่ 5 กระบวนการในการเชื่อมชิ้นงานโดยวิธีการ Gold Ball Bonding [19]

2.2.2 การเชื่อมโดยวิธีการ Bump Bonding or Stud Bumping ได้มีการพัฒนาจากวิธีการเชื่อมแบบใช้ลูกบอลทอง เพื่อเชื่อมชิ้นงานในพื้นที่ขนาดเล็ก และในพื้นที่ที่ทำมุม 90 องศาได้ ดังภาพที่ 6



ภาพที่ 6 ชิ้นงานในการเชื่อมโดยวิธีการ Bump Bonding [12]

2.2.3 การเชื่อมโดยวิธีการ Wedge Bonding ในอดีตจะนำอลูมิเนียมมาใช้ในการเชื่อม โดยไม่ได้ให้ความร้อนกับชิ้นงาน แต่ในปัจจุบัน ได้มีการพัฒนาด้วยการนำทองคำมาเป็นตัวเชื่อมแทนอลูมิเนียมและให้ความร้อนกับชิ้นงานอีกด้วย ดังนั้นวิธีการ Wedge Bonding จึงมีทั้งแบบใช้ความร้อนแล้วไม่ใช้ความร้อนในการเชื่อม สำหรับวิธีการ Wedge Bonding เริ่มจากหัวกดจะกดลวดลงไปยังตำแหน่งที่ต้องการเชื่อม และใช้การสั่นของคลื่นอัลตราโซนิกเพื่อให้ลวดติดกับฐาน เมื่อทำการเชื่อมเสร็จ ตัวป้อนลวดจะจับลวดไว้ แล้วหัวกดจะตัดลวดโดยใช้แรงเฉือน ดังภาพที่ 7



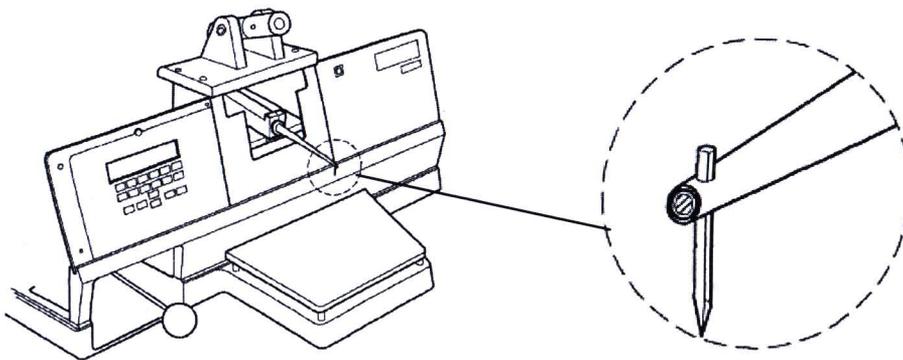
ภาพที่ 7 กระบวนการในการเชื่อมชิ้นงานโดยวิธีการ Wedge Bonding [19]

2.3 การเชื่อมโดยวิธีการอัลตราโซนิก (Ultrasonic Bonding) เป็นวิธีการเชื่อมโดยใช้แรงกด ระยะเวลา และการสั่นด้วยคลื่นอัลตราโซนิก กระบวนการนี้กระทำที่อุณหภูมิห้อง สามารถแบ่งออกได้ 2 วิธีดังนี้

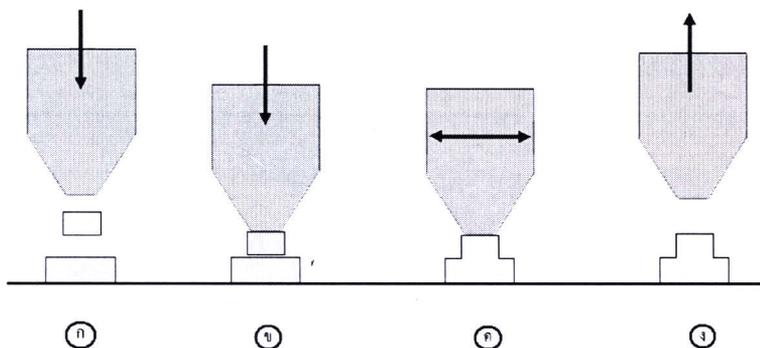
2.3.1 การเชื่อมโดยวิธีการ Wedge Bonding ดังที่กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 2.2.3 มีความแตกต่างของในเรื่องของการนำความร้อนมาช่วยในการเชื่อมเท่านั้นโดยการ Wedge

Bonding ของกระบวนการเชื่อมโดยวิธีการอัลตราโซนิก จะกระทำที่อุณหภูมิห้อง ส่วนวิธีการเทอร์โมโซนิคมีการให้ความร้อนกับชิ้นงานด้วย

2.3.2 กระบวนการอัลตราโซนิกแท็บบอนด์ (Ultrasonic TAB Bonding) กระบวนการอัลตราโซนิกแท็บบอนด์ เป็นกระบวนการกึ่งอัตโนมัติโดยมีเครื่องมือที่ใช้สำหรับการเชื่อม ดังภาพที่ 8 แสดงเครื่อง Hybond และหัวกด อัลตราโซนิกแท็บบอนด์เป็นการเชื่อมติดโลหะโดยใช้ความถี่สูง ซึ่งส่วนใหญ่ชิ้นงานที่ทำการเชื่อมนี้จะมีขนาดเล็ก ส่วนหัวกด (Tip) จะเป็นตัวเชื่อมชิ้นงาน โดยการส่งถ่ายแรงจากตัวเครื่องไปยังชิ้นงานด้วยความถี่ และแรงกด หัวกดทำจากเซรามิก ซึ่งที่ปลายหัวกดนี้มีลายแตกต่างกันไปตามลักษณะงาน ขั้นตอนการทำงาน หัวกดจะสั่นในทิศทางขนานกับชิ้นงานด้วยความถี่ของทรานสดิวเซอร์ภายในเครื่อง ในขณะเดียวกันก็จะกดลงมาสัมผัสชิ้นงานที่ต้องการเชื่อมติดด้วยระยะเวลาเพียงเล็กน้อย เมื่อครบระยะเวลาหัวกดจะกลับสู่ตำแหน่งเริ่มต้นอีกครั้งหนึ่ง จากนั้นชิ้นงานจะถูกเชื่อมติดกันดังภาพที่ 9 (ง) ทั้งนี้ทั้งกระบวนการจะกระทำที่อุณหภูมิห้องตลอดทั้งกระบวนการ



ภาพที่ 8 เครื่อง Hybond และตำแหน่งการจับหัวกดของเครื่อง Hybond [18]



ภาพที่ 9 ขั้นตอนกระบวนการอัลตราโซนิกแท็บบอนด์

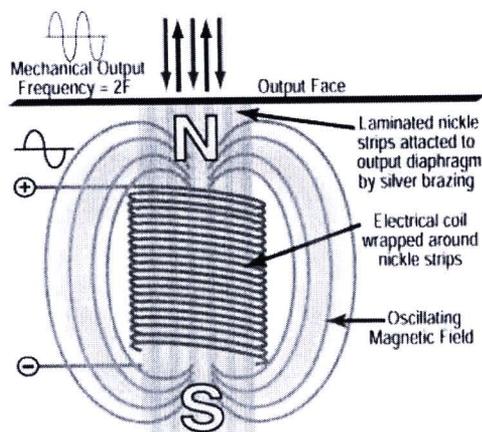
3. อัลตราโซนิกทรานสดิวเซอร์ (Ultrasonic Transducers)

อุปกรณ์ที่สามารถแปลงพลังงานในรูปอื่นให้มาเป็นพลังงานทางกลโดยการสั่นไปมา ซึ่งทำให้เกิดคลื่นเสียงความถี่สูงระดับอัลตราโซนิกกระจายไปในอากาศได้ หรือแปลงพลังงานทางกลให้มาเป็นพลังงานในรูปอื่นได้นั้นมีชื่อเรียกว่า อัลตราโซนิกทรานสดิวเซอร์ (Ultrasonic Transducer) ซึ่งมี 2 แบบ คือ ทรานสดิวเซอร์แบบแมกนีโตสตริกทีฟ (Magnetostrictive Transducer) และแบบทรานสดิวเซอร์แบบเปียโซอิเล็กทริก (Piezoelectric Transducer) ทั้ง 2 แบบมีความแตกต่างกันที่วิธีการที่ใช้เพื่อเปลี่ยนพลังงานไฟฟ้ากระแสสลับไปเป็นพลังงานกล หรือการสั่นสะเทือน

3.1 ทรานสดิวเซอร์แบบแมกนีโตสตริกทีฟ (Magnetostrictive Transducer)

ทรานสดิวเซอร์แบบแมกนีโตสตริกทีฟ แสดงดังภาพที่ 10 ใช้วิธีการที่เรียกว่า Magnetostriction โดยการนำวัสดุบางชนิดไปวางในสนามแม่เหล็กไฟฟ้ากระแสสลับ วัสดุจะขยายและหดตัวทำให้เกิดการสั่นสะเทือนขึ้น พลังงานไฟฟ้ากระแสสลับจากเครื่องกำเนิดคลื่นอัลตราโซนิก (Ultrasonic Generator) จะถูกส่งเข้าสู่ทรานสดิวเซอร์ (Transducer) ผ่านทางขดลวด ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้ากระแสสลับขึ้น และสนามแม่เหล็กนี้จะเหนี่ยวนำให้แท่งนิคเกิล หรือวัสดุประเภทแมกนีโตสตริกทีฟอื่น ๆ ให้เกิดการสั่นสะเทือนที่ความถี่สูงระดับอัลตราโซนิก ความถี่ของพลังงานไฟฟ้าที่เข้าสู่ทรานสดิวเซอร์ เป็น 0.5 เท่าของความถี่ของการสั่นสะเทือน ทรานสดิวเซอร์แบบแมกนีโตสตริกทีฟเป็นตัวเลือกอันดับหนึ่ง สำหรับการใช้งานที่ต้องการพลังงานสูง เช่น การทำความสะอาดด้วยคลื่นอัลตราโซนิก แต่เนื่องจากข้อจำกัดในเรื่องขนาดของอุปกรณ์ รวมทั้งความสลับซับซ้อนในการทำงานของกระแสไฟฟ้าและแม่เหล็กทำให้ทรานสดิวเซอร์แบบแมกนีโตสตริกทีฟ แทบจะไม่ได้ถูกนำไป ใช้ในงาน ที่ต้องการความถี่สูงเกิน 20 kHz เลย แต่ในทางกลับกัน ทรานสดิวเซอร์แบบเปียโซอิเล็กทริก (Piezoelectric Transducer) สามารถใช้งานได้ดี สำหรับงานที่ต้องการความถี่สูงระดับเมกะเฮิรต์ ทรานสดิวเซอร์แบบแมกนีโตสตริกทีฟจะมีประสิทธิภาพต่ำกว่าทรานสดิวเซอร์แบบเปียโซอิเล็กทริก ด้วยเหตุผลจากหลักความจริงที่ว่าทรานสดิวเซอร์แบบแมกนีโตสตริกทีฟ ต้องเปลี่ยนพลังงานถึง 2 ทอด คือ เปลี่ยนพลังงานไฟฟ้าไปเป็นพลังงานแม่เหล็ก และเปลี่ยนพลังงานแม่เหล็กไปเป็นพลังงานกลอีกทีหนึ่ง ดังนั้นจึงเกิดการสูญเสียประสิทธิภาพในแต่ละครั้งที่เกิดการเปลี่ยนแปลงพลังงานนอกจากนั้นปรากฏการณ์บางอย่างที่เกิดจากแม่เหล็กยังลดประสิทธิภาพของทรานสดิวเซอร์แบบแมกนีโตสตริกทีฟลงอีกด้วย

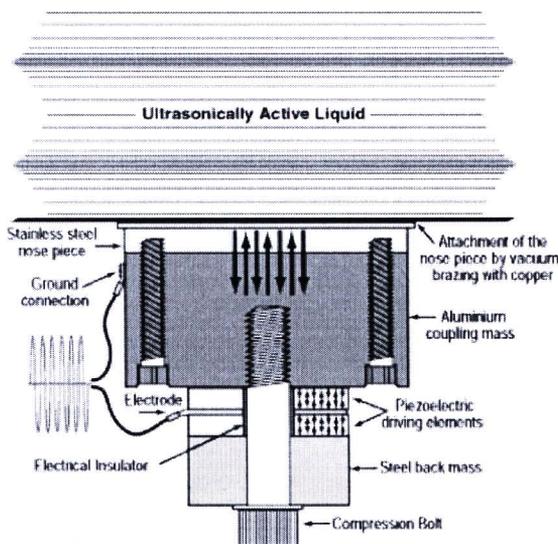




ภาพที่ 10 ทรานสดิวเซอร์แบบแมกนีโตสตริกทีฟ [16]

3.2 ทรานสดิวเซอร์แบบเพียโซอิเล็กทริก (Piezoelectric Transducer)

ทรานสดิวเซอร์แบบเพียโซอิเล็กทริก แสดงดังภาพที่ 11 ทำหน้าที่เปลี่ยนพลังงานไฟฟ้ากระแสสลับให้เป็นพลังงานกลโดยตรง โดยการใช้ Piezoelectric Effect ซึ่งเป็นการทำให้วัสดุบางชนิดเปลี่ยนแปลงขนาด และเกิดการสั่นสะเทือนขึ้น โดยการปล่อยกระแสไฟฟ้าผ่านวัสดุนั้น พลังงานไฟฟ้าความถี่สูงระดับอัลตราโซนิก จะถูกส่งจากเครื่องกำเนิดคลื่นอัลตราโซนิกไปสู่ทรานสดิวเซอร์แบบเพียโซอิเล็กทริก และอุปกรณ์ภายในทรานสดิวเซอร์ จะเปลี่ยนพลังงานไฟฟ้าความถี่สูงที่ได้รับ ไปเป็นการสั่นสะเทือน และขนาดของการสั่นสะเทือนจะถูกขยาย โดยการเคลื่อนที่อย่างเป็นจังหวะของวัสดุ 2 ชนิด คือ Steel Back Mass และ Aluminum Coupling Mass หลังจากนั้น การสั่นสะเทือนจะถูกถ่ายทอดสู่ของเหลวที่เป็นตัวกลาง ในยุคแรก ๆ วัสดุที่ถูกนำมาใช้เพื่อทำให้เกิดปรากฏการณ์เพียโซอิเล็กทริก (Piezoelectric Effect) ภายในทรานสดิวเซอร์ คือ ผลึกควอตซ์ และแบเรียมไททานเต ซึ่งมีความสมบัติเปราะและไม่มีเสถียรภาพ ทำให้ทรานสดิวเซอร์ ชนิดนี้ไม่ได้รับความนิยม แต่ในปัจจุบัน วัสดุที่นำมาใช้เป็นเซรามิก ซึ่งมีความแข็งแรงมากขึ้น มีประสิทธิภาพสูงขึ้นและเสถียรภาพมากขึ้น โดยวัสดุดังกล่าวเป็นผลมาจากความพยายามของกองทัพเรือสหรัฐในการวิจัยเพื่อพัฒนาระบบโซนาร์ ในช่วงปี 1940 ถึง 1949 และปัจจุบันนี้ ทรานสดิวเซอร์แบบเพียโซอิเล็กทริก ได้ถูกนำมาใช้เพื่อวัตถุประสงค์ในการทำควมสะอาดอย่างแพร่หลาย



ภาพที่ 11 ทรานสดิวเซอร์แบบเปียโซอิเล็กทริก [6]

4. ทฤษฎีความเสียหาย (Failure Theories)

4.1 Maximum shear stress theory (Tresca's Yield Theory)

ทฤษฎีนี้เกิดขึ้นก่อน Maximum Distortion Energy Theory ทฤษฎีนี้เป็นผลจากการสังเกตว่าวัสดุเหนียวเกิดการเลื่อนไหลบนระนาบในเนื้อวัสดุขณะเกิดการยืดตัวอย่างถาวร และตัวการสำคัญที่ทำให้เกิดการเลื่อนไหลก็คือ ความเค้นเฉือนจึงได้เกิดการตั้งสมมุติฐานว่าการยืดตัวอย่างถาวร ของวัสดุเหนียวขึ้นอยู่กับ ความเค้นเฉือนเท่านั้น และเมื่อชิ้นงานเกิดความเค้นเฉือนสูงสุดถึงค่าความเค้นเฉือนวิกฤต (τ_{cr}) ค่าหนึ่งซึ่งเป็นที่ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของวัสดุเหนียวแล้ว ชิ้นงานก็จะเกิดการยืดตัวอย่างถาวร ส่วนค่าความเค้นเฉือนวิกฤต ของวัสดุแต่ละชนิดหาได้จากความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในชิ้นงานมาตรฐานที่นำไปทดสอบแรงดึงเมื่อถึงจุดยืดตัวอย่างถาวร ในการทดสอบแรงดึงมีทั้งความเค้นฉากและความเค้นเฉือนเกิดขึ้นในชิ้นงาน โดยที่ความเค้นเฉือนจะเกิดขึ้นบนทุกๆ ระนาบที่ไม่ได้ขนานหรือตั้งฉากกับแนวแรงดึง และความเค้นเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นบนทุกๆ ระนาบ ที่ทำมุม 45 องศา กับแนวแรงดึงและมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของความเค้นฉากในแนวแรงซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ด้วยการแตกแรงธรรมดา จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้วว่าทฤษฎีนี้มองว่าความเค้นเฉือนคือตัวการสำคัญที่ทำให้ชิ้นงานเกิดการยืดตัวอย่างถาวร ฉะนั้นเช่นเดียวกับการทดสอบแรงดึง ถึงแม้จะเป็นการทดสอบแรงดึงแต่สิ่งที่ทำให้เกิดการยืดตัวอย่างถาวร คือความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน ซึ่งมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของ ความเค้นดึงคราก (Yield Tensile Stress, σ_{yt}) ดังนั้นชิ้นงานจะอยู่ในย่านที่ปลอดภัยเมื่อ

$$\tau_{max} < \tau_{cr} = \frac{\sigma_{yt}}{2} \quad (3.1)$$

เมื่อ τ_{max} คือ ความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน

เมื่อ τ_{cr} คือ ความเค้นเฉือนวิกฤตเป็นคุณสมบัติของวัสดุ

เมื่อ σ_{yt} คือ ความเค้นดึงครากเป็นคุณสมบัติของวัสดุ

จาก Mohr's Circle ความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในชิ้นงานจะมีขนาดเท่ากับรัศมีของวงกลม และรัศมีของวงกลมก็สามารถหาได้จาก $\left| \frac{1}{2} \times (\sigma_1 - \sigma_2) \right|$

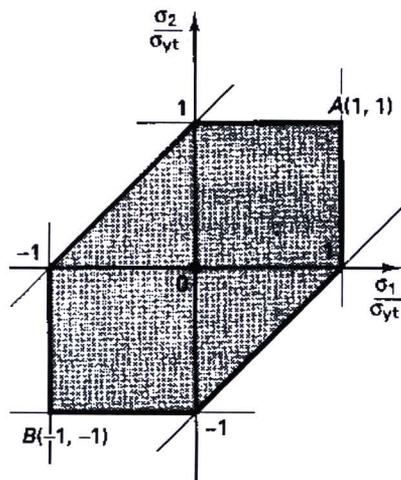
เมื่อ σ_1, σ_2 คือความเค้นตั้งฉากหลัก (Principle Normal Stress) ที่มีค่าต่างกันมากที่สุด โดยค่าบวกหมายถึงความเค้นดึง ค่าลบหมายถึงความเค้นกด ดังนั้นชิ้นงานที่รับความเค้นผสมในสามมิติจะอยู่ในย่านที่ปลอดภัยก็ต่อเมื่อ

$$\left| \frac{1}{2} \times (\sigma_1 - \sigma_2) \right| < \frac{\sigma_{yt}}{2} \quad \text{และ} \quad |\sigma_1|, |\sigma_2| < \sigma_{yt} \quad (3.2)$$

เมื่อจัดรูปใหม่จะได้

$$-1 < \frac{\sigma_1}{\sigma_{yt}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{yt}} < 1 \quad \text{และ} \quad -\sigma_{yt} < \sigma_1, \sigma_2 < \sigma_{yt} \quad (3.3)$$

เมื่อพล็อตกราฟจะได้ดังภาพที่ 12



ภาพที่ 12 แผนภาพแสดงขอบเขตของความปลอดภัยตามทฤษฎี Maximum Shear Stress

Theory [21]

4.2 Maximum Distortion Energy Theory (von Mises Yield Condition)

ทฤษฎี Maximum Distortion Energy ศึกษาอย่างจริงจังโดย von Mises จึงเรียกว่า von Mises Yield Condition ด้วยทฤษฎีนี้พิจารณาความเค้นเฉือนเหมือนกัน และเทียบกับการทดสอบการดึงชิ้นงานเหมือนกัน แต่เมื่อมองลึกลงไป Total Elastic Energy ซึ่งแบ่งเป็นสองส่วน คือส่วนที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร (Dilatational Elastic Energy) และส่วนที่ทำให้เกิดการผิดรูปจากความเค้นเฉือน (Distortional Elastic Energy) ทฤษฎีนี้อ้างว่าชิ้นงานจะเกิดความเสียหายเนื่องจากการยืดตัวอย่างถาวร ก็ต่อเมื่อเกิดการผิดรูปจากความเค้นเฉือนภายในชิ้นงาน ทฤษฎีนี้ใช้หลักการ Superposition ในการพิจารณาความเค้น พิจารณาเอลิเมนต์ที่รับความเค้นหลัก σ_1, σ_2 และ σ_3 ทั้งสามแกน และกำหนดให้

Mean Hydrostatic Stress, $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ พิจารณาความเค้นหลักในรูปเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

เทอมแรกทางด้านขวามือเรียกว่า Dilatational Stress หรือ Hydrostatic Stress เทอมนี้เกิดความเค้นที่เท่ากันทุกทิศทางทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรโดยการขยายตัว แต่ไม่ได้ก่อให้เกิดการเสียรูปทรงไปจากเดิม จึงไม่ทำให้เกิดการยืดตัวอย่างถาวร เนื่องจากสภาพเช่นนี้เหมือนกับของไหลที่อยู่หนึ่งมีความดันเท่ากันทุกทิศทางและไม่มี ความเค้นเฉือน จึงเรียกว่า Hydrostatic Stress แต่เทอมที่สองคือ Distortional or Deviatoric Stress ส่วนนี้ไม่ทำให้วัสดุเกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร แต่ทำให้เกิดการผิดรูปเนื่องจากความเค้นเฉือนและเกิดการยืดตัวอย่างถาวรได้ พิจารณา Elastic Energy ของเอลิเมนต์จะได้

$$dU = Fds = \frac{1}{2} \sigma_x dydz \times \epsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dV \quad (3.5)$$

ดังนั้น Total Elastic Energy Per Unit Volume เท่ากับ $\frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x$

พิจารณา Total Elastic Energy Per Unit Volume ของเอลิเมนต์ โดยวิธี Superposition จะได้

$$U_{total} = \frac{1}{2} \sigma_1 \epsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \epsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \epsilon_3 \quad (3.6)$$

จากความสัมพันธ์ของความเค้น ความเครียด และอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned}\quad (3.7)$$

เมื่อแทนในสมการ Total Elastic Energy สมการที่ (3.6) และจัดรูปใหม่จะได้

$$U_{total} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad (3.8)$$

ต่อไปเราจะหา Dilatational Elastic Energy โดยการแทน σ_1 , σ_2 และ σ_3 ในสมการที่ (3.8) ด้วย $\bar{\sigma}$ จะได้

$$U_{distortional} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \bar{\sigma}^2 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (3.9)$$

และจากความสัมพันธ์ $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ และสมการ(3.9) จะได้

$$U_{distortional} = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3.10)$$

จากการทดสอบแรงดึง σ_2 และ σ_3 เท่ากับศูนย์ ดังนั้น Distortional Elastic Energy ของชิ้นงานที่เกิดการยืดตัวอย่างถาวร จากการทดสอบแรงดึงในหนึ่งมิติเท่ากับ $\frac{2\sigma_{yt}^2}{12G}$ ดังนั้นชิ้นงานจะเกิดการ ยืดตัวอย่างถาวร ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{2\sigma_{yt}^2}{12G} \quad (3.11)$$

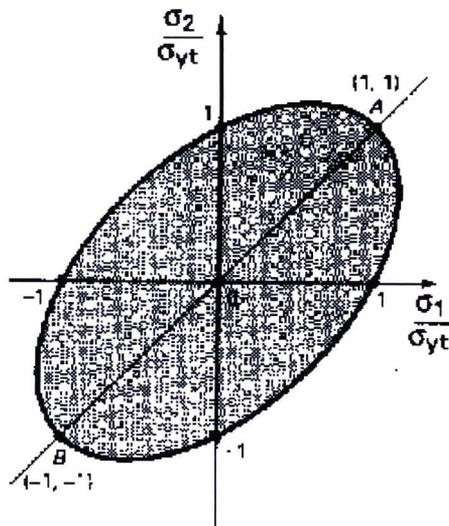
หรือชิ้นงานจะมีความปลอดภัยไม่เกิดการยืดตัวอย่างถาวร ก็ต่อเมื่อ

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] < 2\sigma_{yt}^2 \quad (3.12)$$

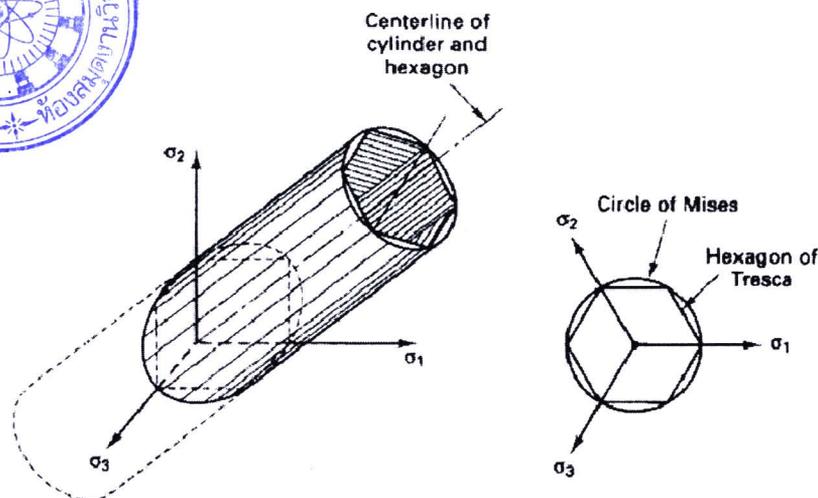
สำหรับ Plane Stress =0 และเมื่อจัดรูปใหม่จะได้

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{yt}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{yt} \sigma_{yt}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{yt}}\right)^2 < 1 \quad (3.13)$$

และเมื่อนำไปพล็อตกราฟจะได้ดังภาพที่ 13 พื้นที่ภายในวงรีแสดงถึงบริเวณที่ปลอดภัยไม่เกิดความเสียหายเนื่องจากยึดตัวอย่างถาวร ส่วนพื้นที่บนวงรีและด้านนอกวงรีแสดงถึงบริเวณที่เกิดการยึดตัวอย่างถาวร และในสามมิติผิวที่เกิดการยึดตัวอย่างถาวร เนื่องจากความเค้นเฉือนหรือ Yield Surface จะทำมุมกับแกนหลักของความเค้น (Principle Stress Axe) เท่าๆ กัน โดยมี Cosine เท่ากัน คือ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ดังแสดงในภาพที่ 14



ภาพที่ 13 แผนภาพแสดงขอบเขตของความปลอดภัยตามทฤษฎี Maximum Distortion Energy [21]



ภาพที่ 14 แผนภาพแสดงขอบเขตของความปลอดภัยตามทฤษฎี Maximum Distortion Energy [21]

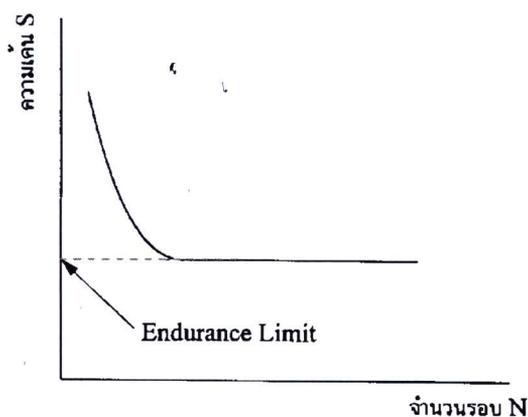
5. ความล้า (Fatigue)

เมื่อวัสดุถูกแรงซึ่งต่ำกว่าค่าความแข็งแรงสูงสุด (Ultimate Strength) มากกระทำกลับไปกลับมาซ้ำ ๆ กันก็อาจจะเกิดการแตกหักขึ้นได้ เนื่องจากเกิดความล้าหรือ Fatigue ขึ้น ความล้าที่เกิดขึ้นในวัสดุนี้ เป็นสาเหตุใหญ่ของการเสียหายของชิ้นส่วนเครื่องจักรต่าง ๆ เพราะตลอดอายุงานของเครื่องจักร เช่น เครื่องยนต์ สวิตช์รีเลย์ ฯลฯ จะต้องเกิดความเค้นสลับไปสลับมาเป็นล้าน ๆ ครั้ง ทำให้เกิดการล้าขึ้นในชิ้นส่วนต่าง ๆ ของมันได้ ขบวนการเกิดความล้าที่แท้จริงยังไม่เป็นที่เข้าใจดีนัก แต่จากการศึกษาพบว่าความล้าจะเกิดเป็น 2 ระยะ คือ ระยะแรกจะเกิดรอยแตกขึ้นเมื่อมีความเค้นรวมศูนย์ (Stress Concentration) ในบริเวณนั้น และในระยะที่สองเมื่อมีความเค้นซ้ำไปซ้ำมารอยแตกนี้ก็จะมีพื้นที่ภาคตัดขวางของวัสดุลดลง จนกระทั่งแรงกระทำต่อหน่วยพื้นที่สูงกว่าค่าความแข็งแรงสูงสุด วัสดุก็จะแตกหักจากกัน

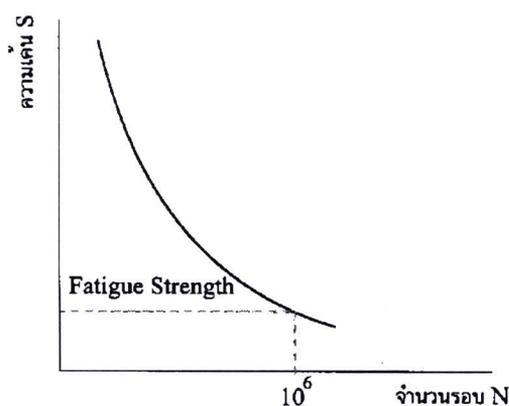
ถ้าเรากำหนดจำนวนรอบของความเค้นที่ทำซ้ำไปซ้ำมาแล้ว (โดยปกติจะใช้ที่ค่า 10^6 รอบ) ค่าความเค้นที่จะทำให้วัสดุแตกหักได้ที่จำนวนรอบของความเค้นรอบนั้น ๆ เราเรียกว่า Fatigue Strength สำหรับโลหะโดยเฉพาะพวกเหล็ก จะมีค่าความเค้นอยู่ค่าหนึ่ง ซึ่งถ้าใช้ความเค้นต่ำกว่านี้แล้ว ไม่ว่าจะจำนวนรอบของแรงกระทำจะเป็นเท่าใด วัสดุจะไม่แตกออก ค่าความเค้นนี้เรียกว่า Endurance Limit

การทดสอบความล้ามีอยู่หลายวิธี แต่โดยหลักการจะเหมือนกันคือ จะให้แรงกระทำเป็นรอยกับชิ้นทดสอบ โดยให้เกิดความเค้นค่าต่าง ๆ แล้วบันทึกจำนวนรอบ (Cycles) ที่วัสดุจะทนได้ไว้ จากนั้นนำมาพลอตเป็นกราฟได้ดังภาพที่ 15 เรียกว่า S-N Curve สำหรับโลหะในกลุ่มเหล็ก

เกือบทั้งหมดและโลหะที่ไม่ใช่เหล็กบางชนิด จะมี Endurance Limit ดังภาพที่ 15 (ก) ส่วนพวก โพลีเมอร์และโลหะที่ไม่ใช่เหล็กหลายชนิดจะไม่มี Endurance Limit ดังภาพที่ 15 (ข) สำหรับ โลหะที่มี Endurance Limit นั้น ค่า Endurance Limit จะมีความสัมพันธ์กับค่าความแข็งแรงสูงสุด กล่าวคือ พวกเหล็กกล้าที่ขึ้นรูปแล้ว จะมีค่า Endurance Limit ที่ครึ่งหนึ่งของค่าความแข็งแรง สูงสุด ส่วนโลหะผสมทองแดงจะอยู่ประมาณ 25 - 50% ของความแข็งแรงสูงสุด สำหรับการ ออกแบบชิ้นส่วนต่าง ๆ ที่ต้องรับแรงสลับ ก็คงต้องคำนึงถึงเรื่องของความล้าด้วย และพยายาม ออกแบบให้รับความเค้นต่ำกว่า Endurance Limit หรือ Fatigue Strength ตามแต่กรณี



(ก) ในวัสดุที่มี Endurance Limit



(ข) ในวัสดุที่ไม่มี Endurance Limit

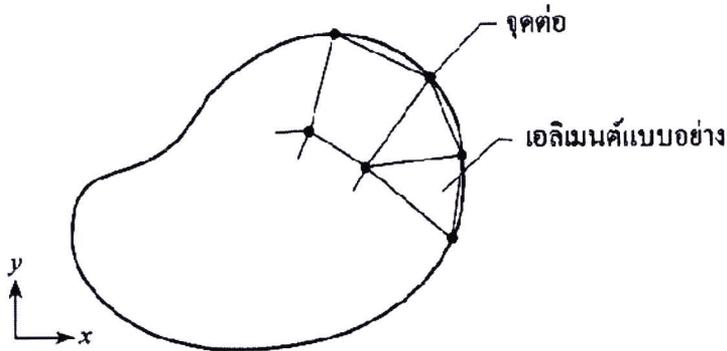
ภาพที่ 15 S-N Curve [15]

6. ไฟไนต์เอลิเมนต์

6.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วย 6 ขั้นตอนหลัก ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังแสดง ในภาพที่ 15 ขอบเขตดังกล่าวอาจเป็นขอบเขตของปัญหาชนิดต่าง ๆ กัน เช่น ปัญหาความยืดหยุ่น ในของแข็ง (Elasticity Problem) รวมทั้งปัญหาของของไหล (Fluid Problem) เป็นต้น



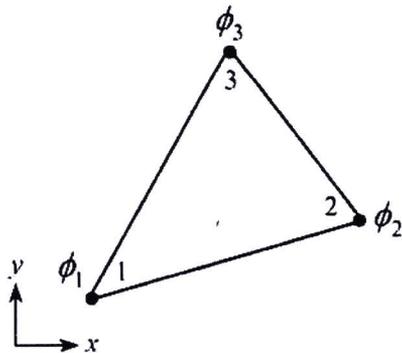


ภาพที่ 16 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ กัน [3]

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation Functions) เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยม (เอลิเมนต์แบบอย่างดังแสดงตัวอย่างในภาพที่ 16 เอลิเมนต์นี้ประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ 3 ดังแสดงในภาพที่ 17 โดยที่จุดต่อเป็นตำแหน่งที่ตั้งของตัวไม่รู้ค่า (Nodal Unknowns) ซึ่งคือ ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ตามลำดับ ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่ออาจเป็นค่าของการเสียรูป (Displacement) หากเราวิเคราะห์ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง หรืออาจเป็นค่าของอุณหภูมิหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นความเร็วของของไหลหากเราวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการไหล เป็นต้น ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายใน และตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ คือ

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 \quad (3.14)$$

โดย $N_i(x, y), i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์



ภาพที่ 17 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบด้วยสามจุดต่อโดยมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ ณ ตำแหน่งที่จุดต่อ[3]

สมการ (3.14) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N]_{(1 \times 3)} \{\phi\}_{(3 \times 1)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

โดย $[N]$ แทนเมทริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ $\{\phi\}$ แทนเวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น ในตำราเล่มนี้ สัญลักษณ์ $[\]$ แสดงถึงเมทริกซ์แถวอน (Row Matrix) และ $\{ \}$ แสดงถึงเมทริกซ์แถวตั้ง (Column Matrix) ที่เรียกกันว่าเวกเตอร์ รายละเอียดของเมทริกซ์และการใช้ได้อธิบายในภาคผนวก ก

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (Element Equations) ดังตัวอย่างเช่นสมการของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่างดังแสดงในภาพที่ 17 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (3.16)$$

ซึ่งเขียนย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (3.17)$$

ขั้นตอนนี้ ถือเป็นหัวใจสำคัญของการศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

6.1.1 การสร้างสมการของเอลิเมนต์ สามารถทำได้ 3 วิธี ได้แก่

(1) วิธีการโดยตรง (Direct Approach) สามารถทำได้โดยง่าย แต่ในขณะเดียวกันก็ใช้ได้แต่เฉพาะปัญหาพื้นฐานเท่านั้น

(2) วิธีการแปรผัน (Variational Approach) สามารถทำได้โดยง่ายเช่นกัน แต่ในขณะเดียวกันจำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นๆ ได้ด้วย ซึ่งโดยทั่วไปในทางปฏิบัติเราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้นมาได้ แต่ไม่สามารถหาฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกันได้

(3) วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method Of Weighted Residuals) สามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาทั่วไปได้

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบรวมกันเข้า
ก่อนให้เกิดระบบสมการรวม (System Of Simultaneous Equations) ในรูปแบบดังนี้

$$\Sigma(\text{element equations}) \rightarrow [K]_{\text{sys}} \{\phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (3.18)$$

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ลงในระบบ
สมการรวม (3.18) แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมนี้เพื่อหา $\{\phi\}_{\text{sys}}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ
(Nodal Unknowns) ซึ่งอาจเป็นค่าของการเคลื่อนตัวตามจุดต่อต่าง ๆ ของโครงสร้าง หรืออาจเป็น
เป็นค่าของความเร็วของของไหลตามจุดต่อหากเป็นปัญหาเกี่ยวกับการไหล เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่างๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถนำมาใช้เพื่อหา
ค่าอื่น ๆ ที่ต้องการต่อไปได้อีก เช่น เมื่อรู้ค่าการเสียดรูป (Displacement) ตามจุดต่อต่างๆ ของ
โครงสร้างก็สามารถนำไปใช้หาค่าความเครียด (Strain) และความเค้น (Stress) ได้ตามลำดับ หรือ
เมื่อรู้ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อก็สามารถคำนวณหาปริมาณการถ่ายความร้อนได้ หรือเมื่อรู้ค่าความเร็วของ
ของไหลที่จุดต่อก็สามารถนำไปคำนวณหาปริมาณอัตราไหลได้ เป็นต้น

จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีที่มีระเบียบวิธีที่มีระเบียบแบบแผน
อย่างเป็นขั้นตอน โดยมีหัวใจสำคัญอยู่ที่การสร้างสมการของเอลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 3 ซึ่งโดยทั่วไป
ทำได้ 3 วิธี ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น แต่เนื่องจากวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตค้ำ สามารถนำไป
ประยุกต์ใช้แก้ปัญหาทั่วไปได้ และยังให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกับวิธีการโดยตรง ซึ่งจะอธิบายในหัวข้อ
ต่อไป

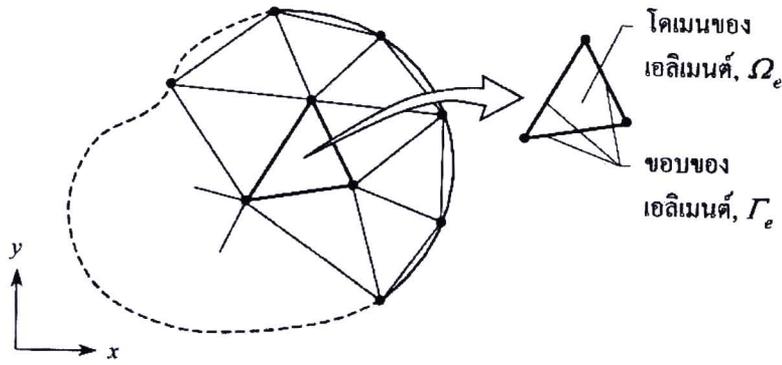
6.2 ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค้ำเพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

6.2.1 ลำดับขั้นตอนทั่วไป

การวิเคราะห์ปัญหาไฟไนต์เอลิเมนต์โดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค้ำ
ตค้ำประกอบด้วยลำดับที่สำคัญ 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่กำหนดมาให้ออกเป็น
เอลิเมนต์ย่อย เช่น แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยๆ สำหรับปัญหาในสองมิติ ดังภาพที่ 18





ภาพที่ 18 การแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ [3]

จากนั้นจึงหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์นั้น สมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบได้ คือ

$$L(\bar{\phi}) = 0 \quad (3.19)$$

โดย L คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (Differential Operator) และ $\bar{\phi}$ คือ ตัวแปรตามแม่นยำ
ขั้นตอนที่ 2 สมมุติลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบน
 เอลิเมนต์ให้อยู่ในรูป

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}(x, y) = \sum_{i=1}^m N_i \phi_i = \underset{(l \times m)}{[N]} \underset{(m \times 1)}{\{\phi\}} \quad (3.20)$$

โดย m คือ จำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์นั้น N_i คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ
 ϕ_i คือ ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนัก
 ของเศษตกค้าง หากเราแทนผลเฉลยโดยประมาณดังแสดงในสมการ (3.20) ลงในสมการ
 เชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.19) เราจะพบว่า

$$L(\bar{\phi}) \text{ จะ } \neq 0 \text{ แต่จะ } = R$$

โดย R คือ ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น หรือเศษตกค้าง (Residual) นั้นหมายถึงว่า

$$R = L(\bar{\phi}) = L([N]\{\phi\}) = L(\sum_{i=1}^m N_i \phi_i) \quad (3.21)$$

เราจะใช้วิธีกาลเออร์คิน (Galerkin) ซึ่งมีขั้นตอนโดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W (Weighting Function) จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์นั้น แล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ เป็นแบบบับโนฟ – กาลเออร์คิน (Bubnov – Galerkin) แต่หากเราเลือก $W_i \neq N_i$ ซึ่งใช้กับปัญหาบางชนิด จะเรียกว่าเป็นแบบเพโทรฟ – กาลเออร์คิน (Petrov – Galerkin)

ขั้นตอนที่ 4 อินทิเกรตทีละส่วน (Integrate By Parts) หากเราแทนสมการ (3.21) ลงในสมการ (3.22) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\int_0^1 W_i R d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.22)$$

และโดยปกติเราจะเลือก $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่า

$$\int_0^1 W_i R d\Omega = \int_{\Omega(e)} W_i L \left(\sum_{i=1}^m N_i \phi_i \right) d\Omega$$

$$\underbrace{\int_{\Omega(e)} (W_i N_i, \phi_i) d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์, } \Omega(e)} + \underbrace{\int_{\Gamma(e)} (W_i N_i, \phi_i) d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, } \Gamma(e)} = 0$$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมน
ของเอลิเมนต์, $\Omega(e)$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขต
ของเอลิเมนต์, $\Gamma(e)$

ขั้นตอนที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ $\Gamma(e)$ ด้วยภาวะขอบเขตอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 6 จากนั้นจึงเขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ นั่นคือ

$$[K] \{\phi\} = \{F\} \quad (3.23)$$

$(m \times m) \quad (m \times 1) \quad (m \times 1)$

โดย $[K]$ คือ เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งแกร่ง (Element Stiffness Matrix), $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ และ $\{F\}$ คือ โหลดเวกเตอร์ของเอลิเมนต์นั้น เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (3.23) แล้ว ขั้นตอนต่อไปคือรวม

สมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นก็กำหนดเงื่อนไขขอบเขต แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ

6.2.2 วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบต่างๆ

วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง สามารถแบ่งเป็น 4 วิธี ดังนี้

(1) วิธีการจัดตำแหน่งจุด (Point Collocation) วิธีการนี้ทำได้โดยใช้หลักการที่ง่าย ๆ คือ กำหนดให้ค่าเศษตกค้างเท่ากับศูนย์ที่บางตำแหน่ง เนื่องจากเราต้องการ 2 สมการ ดังนั้นเราจึงกำหนด

$$R(t_1) = 0$$

$$R(t_2) = 0$$

โดยที่ t_1 และ t_2 เป็นตำแหน่งในช่วงเวลาที่พิจารณา ซึ่งในที่นี้คือ 0 ถึง 1 เช่น

$$t_1 = \frac{1}{3} ; R\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + c_1\left(1 + \frac{1}{3}\right) + c_2\left(2\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = 0$$

$$t_2 = \frac{2}{3} ; R\left(\frac{2}{3}\right) = 1 + c_1\left(1 + \frac{2}{3}\right) + c_2\left(2\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 0$$

และจาก 2 สมการนี้ เราสามารถหาค่าคงที่ค่าที่ได้คือ

$$c_1 = -0.9310 \quad \text{และ} \quad c_2 = 0.3103$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x(t) = 1 - 0.9310 t + 0.3103 t^2 \quad (3.24)$$

(2) วิธีการจัดโดเมนย่อย (Subdomain Collocation) การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยการจัดโดเมนย่อยนั้น ทำโดยแบ่งโดเมนทั้งหมดออกเป็นส่วนย่อยๆ แล้วกำหนดให้ผลจากการอินทิเกรตของฟังก์ชันเศษตกค้าง R ของแต่ละโดเมนย่อยนั้นเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_0^{t_1} R(t) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^1 R(t) dt = 0$$

โดย t_1 อยู่ในช่วงเวลาที่พิจารณา หากเราเลือก $t_1 = \frac{1}{2}$ เราจะได้

$$\int_0^{1/2} R(t) dt; \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{8}c_1 + \frac{7}{24}c_2 = 0$$

$$\int_{1/2}^1 R(t) dt; \quad \frac{1}{2} + \frac{7}{8}c_1 + \frac{25}{24}c_2 = 0$$

และจาก 2 สมการนี้ เราสามารถหาค่าคงที่ได้คือ

$$\begin{aligned} C_1 &= -0.9474 \quad \text{และ} \quad C_2 = 0.3158 \\ \text{ดังนั้น} \quad x(t) &= 1 - 0.9474t + 0.3158t^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

(3) วิธีกัลเลอร์คิน (Galerkin) การถ่วงน้ำหนักเศษตคต่างโดยวิธีกัลเลอร์คิน ทำโดยการคูณฟังก์ชันเศษตคต่าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W (Weighting Function) จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนแล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_0^1 R(t) W_i(t) dt = 0 \quad (3.26)$$

และเนื่องจากเราต้องการ 2 สมการ ดังนั้น ค่า $i = 1, 2$ การเลือกฟังก์ชันน้ำหนัก $W_i(t)$ ทำได้โดยการเลือกจากฟังก์ชันที่สัมพันธ์กับตัวไม่รู้ค่า C_1 และ C_2 ที่ปรากฏอยู่ในสมการของผลเฉลยโดยประมาณนั้น ดังเช่น

$$x(t) = 1 + c_1t + c_2t^2 \quad (3.27)$$

แทน $W_1 = t$ และ $W_2 = t^2$ ลงในสมการ (3.26) จะได้

$$\int_0^1 R(t)t dt = 0; \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{6}c_1 + \frac{11}{12}c_2 = 0$$

$$\int_0^1 R(t)t^2 dt = 0; \quad \frac{1}{3} + \frac{7}{12}c_1 + \frac{7}{10}c_2 = 0$$

และจาก 2 สมการนี้ ก่อให้เกิดค่าคงที่ คือ

$$\begin{aligned} C_1 &= -0.9143 \quad \text{และ} \quad C_2 = 0.2857 \\ \text{ดังนั้น} \quad x(t) &= 1 - 0.9143t + 0.2857t^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

อนึ่งด้วยเหตุผลหลาย ๆ ประการ เราจะใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์แบบต่างๆ ยกตัวอย่างเช่นเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติ ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของเอลิเมนต์นี้คือ

$$\phi = \underbrace{N_1}_{w_1} \phi_1 + \underbrace{N_2}_{w_2} \phi_2 \quad (3.29)$$

โดย ϕ_1 และ ϕ_2 คือตัวไม่รู้ค่าคล้ายกันกับ c_1 และ c_2 ในสมการ (3.27) ดังนั้น N_1 และ N_2 สามารถนำไปใช้เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก w_1 และ w_2 เพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้

(4) วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares) สำหรับการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ทำโดยการยกกำลังสองของเศษตกค้าง จากนั้นอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมน แล้วจึงทำการหาค่าต่ำสุด (Minimization) ซึ่งสอดคล้องกับตัวไม่รู้ค่า นั่นคือ

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^1 R^2(t) dt = 0 \quad (3.30)$$

เนื่องจากเรามีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัว ดังนั้นจึงก่อให้เกิด 2 สมการคือ

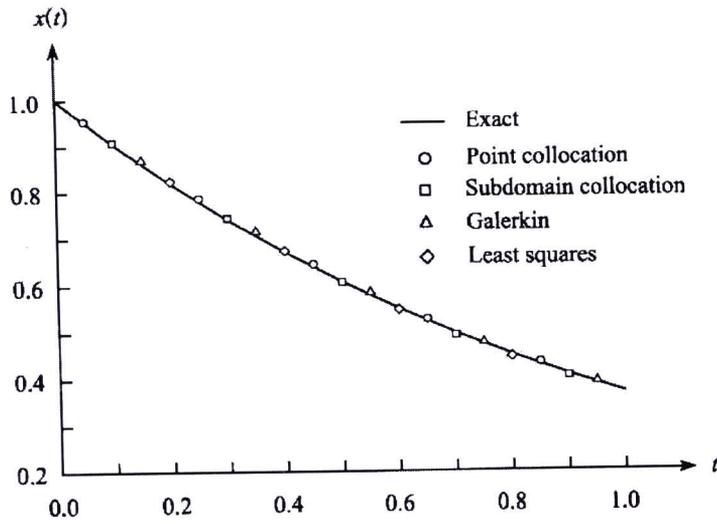
$$\frac{\partial}{\partial c_1} \int_0^1 R^2(t) dt = 0 \quad ; \quad \frac{3}{2} + \frac{7}{3}c_1 + \frac{9}{4}c_2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_2} \int_0^1 R^2(t) dt = 0 \quad ; \quad \frac{4}{3} + \frac{9}{4}c_1 + \frac{38}{15}c_2 = 0$$

ซึ่งให้ค่าคงที่คือ

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.9427 \quad \text{และ} \quad c_2 = 0.3110 \\ \text{ดังนั้น} \quad x(t) &= 1 - 0.9427t + 0.3110t^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

จากผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จาก 4 วิธีการดังแสดงในสมการ (3.24), (3.25), (3.28) และ (3.31) เราพบว่าค่ามีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในภาพที่ 19 มาก ซึ่งเมื่อพล็อต

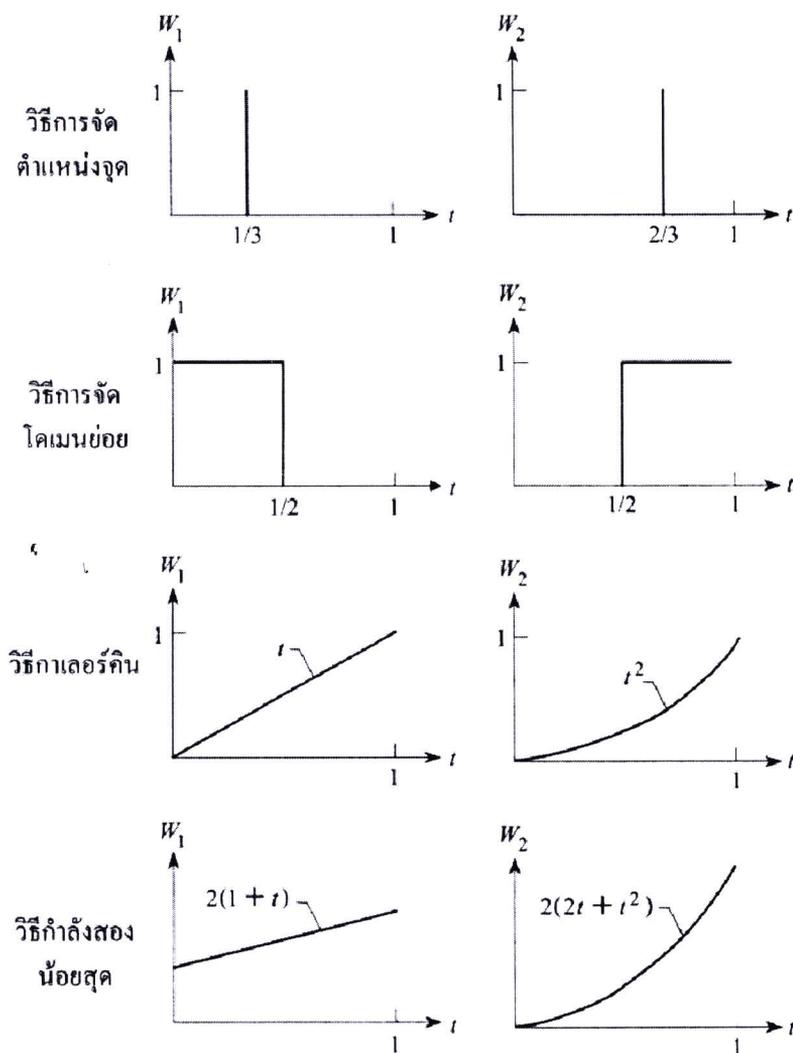


ภาพที่ 19 การเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณซึ่งเกิดจากระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่างแบบต่างๆ [3]

เปรียบเทียบกันจะเกือบเห็นเป็นเส้นเดียวกัน โดยมีความคลาดเคลื่อนไม่ถึง 1 เปอร์เซ็นต์ หนึ่ง ทั้ง 4 ระเบียบวิธีนี้อาจเขียนให้อยู่ในรูปของสมการ

$$\int_0^1 R(t)W_i(t)dt = 0 \quad (3.32)$$

โดยฟังก์ชันน้ำหนัก W_i มีลักษณะต่างๆ กันดังแสดงในภาพที่ 20



ภาพที่ 20 ฟังก์ชันน้ำหนักที่ใช้ในระบบวิธีถ่วงน้ำหนักเสถียรค้ำแบบต่าง ๆ [3]

หากเราพิจารณาข้อดีข้อเสียในแต่ละระเบียบวิธีย่อยของระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเสถียรค้ำ เราจะพบว่าวิธีการเลอร์คิน มีข้อได้เปรียบมากที่สุด กล่าวคือ เราไม่จำเป็นต้องเลือกตำแหน่งดังเช่นที่ใช้ในวิธีการจัดตำแหน่งจุด หรือวิธีการจัดโดเมนย่อย อีกทั้งขั้นตอนการคำนวณที่ใช้ก็น้อยและสะดวกกว่าวิธีการกำลังสองน้อยสุด และที่สำคัญที่สุดซึ่งเราจะได้พบกันต่อไปก็คือ ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่เกิดขึ้นจากการใช้วิธีการเลอร์คิน นั้นปกติจะมีความสมมาตรซึ่งเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาขนาดใหญ่ทำให้วิธีการเลอร์คินนี้ได้รับความนิยมเพื่อใช้สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์