



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต (วิศวกรรมอุตสาหการ)

ปริญญา

วิศวกรรมอุตสาหการ

วิศวกรรมอุตสาหการ

สาขา

ภาควิชา

เรื่อง การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่
มาร์คอฟขนาดใหญ่

Estimating Probability Statistics in Transition Matrices of Large Scales Markov
Chain

นามผู้วิจัย นางสาววนิดา เลิศพิพัฒนานนท์

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์พิรุทธิ์ ชาญเศรษฐิจกุล, Ph.D.)

หัวหน้าภาควิชา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิสุทธิ์ สุพิทักษ์, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญญา ชีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ เดือน พ.ศ.

สืบสังข์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของ
ลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่

Estimating Probability Statistics in Transition Matrices of
Large Scales Markov Chain

โดย

นางสาววนิดา เลิศพิพัฒน์นันท์

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต (วิศวกรรมอุตสาหการ)

พ.ศ. 2557

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วนิดา เลิศพัฒนานนท์ 2557: การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ ปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต (วิศวกรรมอุตสาหการ) สาขาวิชาวิศวกรรมอุตสาหการ ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: รองศาสตราจารย์พิรุทธิ์ ชาญเศรษฐกุล, Ph.D.

106 หน้า

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ นำเสนอวิธีการประมาณค่าหรือเทคนิควิธีที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด สำหรับการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ ซึ่งมีจุดมุ่งหมายที่จะจัดข้อจำกัดของการใช้ฟังก์ชัน quadprog ของโปรแกรม MATLAB ในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดเมื่อใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS) ในการประมาณค่า โดยทำการทดลองใช้วิธีการต่างๆ กับข้อมูลที่จำลองให้เป็นไปตามคุณสมบัติของมาร์คอฟ

ผลการศึกษาและทดลองพบว่า การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ด้วยวิธี RLS โดยการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรงจะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าค่อนข้างมาก เมื่อจำนวนสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ n มีค่ามาก ๆ ในการวิจัยนี้ได้นำเสนอ 2 แนวทางสำหรับการจัดปัญหาดังกล่าว คือ 1) ประมาณค่าด้วยวิธี RLS และใช้เทคนิควิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณช่วยในการประมาณค่า ซึ่งจะให้ค่าเฉลี่ยผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) และใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่าการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรงค่อนข้างมาก ในทุกสถานการณ์ที่ทำการศึกษา 2) ประมาณค่าด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข (RLAD) ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปของปัญหาคำหนดการเชิงเส้นได้ โดยทำการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยฟังก์ชัน linprog ของโปรแกรม MATLAB และการใช้เทคนิควิธีการสร้างสมรรถ (CG) ซึ่งพบว่าสำหรับกรณีที่จำนวนช่วงเวลาที่เก็บรวบรวมข้อมูลไม่เกิน 10 ช่วงเวลา การประมาณค่าด้วยวิธี RLAD โดยการใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรงจะให้ค่า SSE และเวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่าการประมาณค่าด้วยวิธี RLS แล้วหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยฟังก์ชัน quadprog ในทุก ๆ ค่า n ที่ทำการศึกษา แต่เทคนิค CG จะเป็นประโยชน์อย่างมากในกรณีที่เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟมีขนาดใหญ่เกินกว่าการใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรงที่จะสามารถหาคำตอบได้

Wanida Lerspipatthananon 2014: Estimating Probability Statistics in Transition Matrices of Large Scales Markov Chain. Doctor of Engineering (Industrial Engineering), Major Field: Industrial Engineering, Department of Industrial Engineering. Thesis Advisor: Associate Professor Peerayuth Charnsethikul, Ph.D. 106 pages.

The aim of this research is to propose the estimation methods or optimization techniques used for estimating probability statistics in transition matrix of large scale Markov Chain. The proposed techniques eliminate the restriction of the 'quadprog' function of MATLAB which can be using the Restricted Least Squared (RLS) method. The numerical experiments were tested with the simulated data following the Markov Chain properties.

The results of study shows that using the RLS method to estimate probability statistics in transition matrix of large scale Markov Chain with 'quadprog' function has more average time of estimation when the number of states n is large number. This research proposes two directions. The direction one is still using the RLS method and solving the problem by Approximated Decomposition (AD) technique. It has Sum of Square Error (SSE) and average time of estimation less than the 'quadprog' function does. Another one is estimating probability statistics in transition matrix by the Restricted Least Absolute Deviation (RLAD) that can be reformulated as a Linear Programming Problem (LPP). In this study, the 'linprog' function of MATLAB and Column Generation (CG) technique are used to solve the LPP. If the number of periods for data collection S is less than 10, the estimation by RLAD method and directly solved by 'linprog' function will have the SSE and average time of estimation less than the RLS method solved by 'quadprog' function for every n studied. When the transition matrix of Markov Chain is too large to directly solved by 'linprog' function, the CG technique is very useful.

Student's signature

Thesis Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาครั้งนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือของ รศ.ดร.พิรุณ ชาญเศรษฐิกุล ประธาน
กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้ความรู้ คำแนะนำ คำปรึกษา ในการเรียน การค้นคว้าวิจัย
ตลอดจนการตรวจแก้ไขวิทยานิพนธ์จนกระทั่งเสร็จสมบูรณ์ ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่าง
สูงมา ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ รศ. ดร. ประไพศรี สุทัศน์ ณ อยุธยา ประธานกรรมการในการ
สอบปากเปล่าขั้นสุดท้าย ที่ได้ให้ความกรุณาตรวจแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณครู อาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาอันเป็นประโยชน์ต่อ
การศึกษาในครั้งนี้

ขอกราบขอบพระคุณ อ.ดร.พรชัย มงคลวนิช อธิการบดีมหาวิทยาลัยสยามที่ให้การ
สนับสนุนสำหรับการศึกษาในครั้งนี้

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ญาติพี่น้อง และเพื่อนๆ ที่คอยให้กำลังใจตลอดมา

วนิดา เลิศพิพัฒนานนท์

กันยายน 2557

สารบัญ

หน้า

สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(4)
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	(5)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	3
การตรวจเอกสาร	4
อุปกรณ์และวิธีการ	15
อุปกรณ์	15
วิธีการ	15
ผลและวิจารณ์	40
ผล	40
วิจารณ์	70
สรุปและข้อเสนอแนะ	74
สรุป	74
ข้อเสนอแนะ	78
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	80
ภาคผนวก	83
ภาคผนวก ก ตารางเพิ่มเติมในส่วนวิจารณ์	84
ภาคผนวก ข ส่วนของโปรแกรม MATLAB	87
ภาคผนวก ค การกำหนดตัวแปรเริ่มต้นสำหรับเทคนิคการสร้างสมรรถ	101
ภาคผนวก ง การใช้เทคนิควิธีการสร้างสมรรถกับปัญหาควบคู่	103
ประวัติการศึกษาและการทำงาน	106

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1 ข้อมูลตัวอย่างสำหรับอธิบายขั้นตอนของวิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ	23
2 ข้อมูลตัวอย่างสำหรับอธิบายขั้นตอนของเทคนิคการสร้างสมมภ์	33
3 เวกเตอร์ของ x เวกเตอร์ c เวกเตอร์ b_{all} และเมทริกซ์ A_{all}	35
4 เวกเตอร์ของ x เวกเตอร์ c เวกเตอร์ b_{all} และเมทริกซ์ A_{all} ในปัญหาหลัก RMP	36
5 ผลลัพธ์จากการใช้เทคนิคการสร้างสมมภ์	37
6 ค่าเฉลี่ยของผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) และเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า ที่ได้จากการใช้ฟังก์ชัน quadprog	42
7 ค่าเฉลี่ยของผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) และเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า ที่ได้จากการใช้เทคนิควิธี การแบ่งส่วนโดยประมาณ	44
8 ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) และเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าที่ได้จากการใช้ฟังก์ชัน linprog	46
9 ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) เวลาเฉลี่ย และจำนวนตัวแปร โดยเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า เมื่อหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ด้วยเทคนิค CG ที่กำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นแบบที่ 1	49
10 ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) เวลาเฉลี่ย และจำนวนตัวแปร โดยเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า เมื่อหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ด้วยเทคนิค CG ที่กำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นแบบที่ 2	51
11 ค่าเฉลี่ยของผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสองและเวลาเฉลี่ย (วินาที) ที่ใช้ในการประมาณค่า จำแนกตามวิธีการที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด และร้อยละความแตกต่างของค่า SSE กับเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า ระหว่างทั้งสองวิธี	53

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่	หน้า	
12	ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์กำลังสองน้อยที่สุดและเวลาเฉลี่ย (วินาที) ที่ใช้ในการประมาณค่า โดยใช้เทคนิควิธี CG จำแนกตามแบบการกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้น และร้อยละความแตกต่างของจำนวนตัวแปรที่ใช้ทั้งหมดโดยเฉลี่ยกับเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า ระหว่างทั้งสองแบบ	57
13	ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์กำลังสองน้อยที่สุด เวลาเฉลี่ย (วินาที) และจำนวนตัวแปร โดยเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า จำแนกตามวิธีการหาผลลัพธ์ และแสดงค่าร้อยละความแตกต่างของจำนวนตัวแปรที่ใช้ทั้งหมดโดยเฉลี่ยกับเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า ระหว่างทั้งสองวิธี	61
14	ผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสองโดยเฉลี่ย จำแนกตามวิธีการที่ใช้ในการประมาณค่าและวิธีการหาผลลัพธ์ พร้อมแสดงค่าร้อยละความแตกต่างของค่า SSE ระหว่างวิธีต่างๆ	65
15	เวลาเฉลี่ย (วินาที) ที่ใช้ในการประมาณค่า จำแนกตามวิธีการที่ใช้ในการประมาณค่าและวิธีการหาผลลัพธ์ พร้อมแสดงค่าร้อยละความแตกต่างของเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าระหว่างวิธีต่าง ๆ	68
16	สรุปการเปรียบเทียบข้อดี และข้อด้อยของวิธีการต่างๆ	76
17	การเลือกใช้วิธีการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ ในสถานการณ์ต่างๆ สำหรับกรณีที่ต้องการความถูกต้องตามทฤษฎี	79

ตารางผนวกที่

ก1	ค่าเฉลี่ยของผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง จำแนกตามวิธีการที่ใช้ในการประมาณค่า เมื่อข้อมูลขาดคุณสมบัติมาร์คอฟ	85
ก2	ขนาดของเมทริกซ์สำหรับตัวแบบ (16) จำแนกตามสถานการณ์ต่าง ๆ	86

สารบัญภาพ

ภาพที่

หน้า

1 แผนภาพแสดงขั้นตอนของเทคนิควิธีการสร้างสมรรถ

32



คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

$\pi(k)$	=	เวกเตอร์แสดงค่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ ณ ช่วงเวลาที่ k
P	=	เมทริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะ
n	=	จำนวนสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ
S	=	จำนวนช่วงเวลาที่เก็บรวบรวมข้อมูล
RLS	=	วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด
RLAD	=	วิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด
AD	=	วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ
CG	=	เทคนิควิธีการสร้างสดมภ์
SSE	=	ผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง
LAD	=	ค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด
QPP	=	ปัญหากำหนดการกำลังสอง
LPP	=	ปัญหากำหนดการเชิงเส้น
RMP	=	ปัญหาหลักแบบมีข้อจำกัด
rc หรือ $\tilde{C}_j$	=	ต้นทุนที่ลดลง
Out of memory	=	หน่วยความจำไม่เพียงพอต่อการประมวลผล

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของ ลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่

Estimating Probability Statistics in Transition Matrices of Large Scales Markov Chain

คำนำ

ลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain) เป็นปัญหาหนึ่งในกระบวนการสโตแคสติก (Stochastic Process) ซึ่งถูกนำไปใช้ในรูปของตัวแบบมาร์คอฟ (Markov Model) เพื่อประโยชน์ในด้านการพยากรณ์ลักษณะในอนาคตของตัวแปรที่ศึกษาในรูปของความน่าจะเป็นสำหรับช่วยในการตัดสินใจ โดยในการพยากรณ์โอกาสหรือความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ในอนาคตนั้นจะต้องใช้ข้อมูลของเหตุการณ์ในปัจจุบัน และความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะ (Transition Probability) ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้จะศึกษาในรูปของเมทริกซ์

เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะมีความสำคัญอย่างมากต่อการประยุกต์ใช้ตัวแบบมาร์คอฟ โดยขนาดของเมทริกซ์จะขึ้นอยู่กับจำนวนสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ ดังตัวอย่าง การศึกษาเกี่ยวกับการอพยพย้ายถิ่นของประชากร ซึ่งอาจจะพิจารณาการอพยพย้ายถิ่นของประชากรไทยในระดับภาค จากภาคกลางและยังคงอยู่ที่ภาคกลาง ย้ายจากภาคกลางไปภาคเหนือ ย้ายจากภาคกลางไปภาคใต้ ย้ายจากภาคกลางไปภาคตะวันออก ย้ายจากภาคกลางไปภาคตะวันออกเฉียงเหนือ นั่นคือ มีจำนวนสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟเท่ากับ 5 ส่งผลให้เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะมีขนาด 5×5 แต่ถ้าทำการศึกษาการอพยพย้ายถิ่นในระดับจังหวัด อำเภอ ตำบล จากข้อมูลของกรมการปกครองที่ประกาศเมื่อวันที่ 1 เมษายน 2555 ประเทศไทยแบ่งการปกครองออกเป็น 77 จังหวัด 878 อำเภอ 7,255 ตำบล นั่นคือ เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของการอพยพย้ายถิ่นในระดับจังหวัด อำเภอ ตำบล จะมีขนาด 77×77 878×878 และ 7255×7255 ตามลำดับ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเมื่อลูกโซ่มาร์คอฟมีจำนวนสถานะมาก ๆ เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะก็จะมีขนาดใหญ่มาก

ปัจจุบันการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นซึ่งก็คือสมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ที่มีจำนวนสมาชิกหรือตัวแปรมากกว่า 10,000

ตัวแปรสามารถทำได้ด้วยวิธีการประมาณค่าต่าง ๆ ที่นิยมใช้เช่น วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least - Squares) วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood) เป็นต้น โดยอาศัยเครื่องมือในการคำนวณหรือหาผลลัพธ์หลากหลายรูปแบบ ได้แก่ โปรแกรมสำเร็จรูปต่าง ๆ (Software Packages) ทางด้านสถิติ หรือการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด (Optimization) แต่ก็อาจจะประสบปัญหาในด้านของเวลาที่ใช้ในการประมาณค่าซึ่งจะต้องใช้เวลานานเป็นชั่วโมง หลาย ๆ ชั่วโมง หรืออาจจะต้องใช้เวลาเป็นวัน หรือหลาย ๆ วัน นอกจากนี้อาจจะพบกับปัญหาในด้านข้อจำกัดของโปรแกรมหรือหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการประมาณ ซึ่งส่งผลกระทบต่อจำนวนตัวแปรสูงสุดที่สามารถประมาณได้ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงมุ่งที่จะการศึกษาหาวิธีการที่เหมาะสมในการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟที่มีจำนวนตัวแปรที่ต้องการประมาณค่าไม่ต่ำกว่า 1,000 ตัวแปร โดยมีเป้าหมายที่จะขจัดปัญหาเกี่ยวกับข้อจำกัดในด้านจำนวนตัวแปรที่สามารถประมาณได้ หรือลดเวลาในการประมาณค่าให้น้อยลง ซึ่งจะใช้ผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดและหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยฟังก์ชันในกล่องเครื่องมือของโปรแกรม MATLAB เป็นค่าอ้างอิง (reference) ในการเปรียบเทียบกับวิธีการอื่นๆ ที่นำเสนอในการวิจัยนี้

วัตถุประสงค์

1. ศึกษาวิธีการและข้อจำกัดของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด สำหรับการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ เมื่อใช้ฟังก์ชันในกล่องเครื่องมือของโปรแกรม MATLAB ในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด
2. นำเสนอวิธีการประมาณค่าหรือเทคนิควิธีในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด สำหรับการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ เพื่อจัดข้อจำกัดที่เกิดขึ้นในวัตถุประสงค์ข้อที่ 1

การตรวจเอกสาร

ลูกโซ่มาร์คอฟ

ลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain) เป็นกระบวนการหนึ่งของกระบวนการสโตแคสติก (Stochastic Process) ซึ่งเป็นตัวแบบความน่าจะเป็น (Probabilistic Model) ของระบบที่มีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นอย่างสุ่มเมื่อเวลาเปลี่ยนไป โดยลูกโซ่มาร์คอฟ ได้รับการพัฒนาโดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียชื่อ อังเดร เอ มาร์คอฟ (Andrei A. Markov) ในปี ค.ศ.1912 เป็นกระบวนการที่ศึกษาถึงลำดับของการเกิดเหตุการณ์ ซึ่งค่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ในอนาคตขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในปัจจุบัน แต่จะไม่ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ในอดีต ดังแสดงในคุณสมบัติ มาร์คอฟ (Markov property)

$$P(\pi_{n+1}=i_{n+1} | \pi_1=i_1, \pi_2=i_2, \dots, \pi_n=i_n) = P(\pi_{n+1}=i_{n+1} | \pi_n=i_n) \quad (1)$$

การประยุกต์ใช้ลูกโซ่มาร์คอฟ มักจะทำในรูปของตัวแบบมาร์คอฟดังนี้

$$\pi(k+1) = P^T \pi(k) \quad (2)$$

โดยที่ $\pi(k)$ เป็นเวกเตอร์แสดงค่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ ณ ช่วงเวลาที่ k

$$\pi(k) = \begin{bmatrix} \pi_1(k) \\ \pi_2(k) \\ \pi_3(k) \\ \vdots \\ \pi_n(k) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$\pi(k+1)$ เป็นเวกเตอร์แสดงค่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ ณ ช่วงเวลาที่ $k+1$

$$\pi(k+1) = \begin{bmatrix} \pi_1(k+1) \\ \pi_2(k+1) \\ \pi_3(k+1) \\ \vdots \\ \pi_n(k+1) \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{เมื่อ } k=1,2,\dots,S-1$$

P เป็นเมทริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะ

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

สำหรับเมทริกซ์ P จะต้องเงื่อนไข 2 ข้อ คือ

1. ผลรวมของสมาชิกทุกตัวในแถว (row) เดียวกันจะต้องเท่ากับ 1 ดังแสดงใน (3)
2. สมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ P ต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ดังแสดงใน (4)

$$Pe=e \quad (3)$$

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad (4)$$

เมื่อ $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$ และ $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ

การประมาณค่าความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะเป็นที่สนใจศึกษาของนักวิจัยหลายท่าน โดยมีการประมาณค่าความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะสำหรับช่วยในการตัดสินใจในด้านต่าง ๆ ได้แก่ ด้านเศรษฐศาสตร์การเกษตร การเงิน การตลาด สังคมวิทยา จิตวิทยา เกษตรศาสตร์ วิทยาศาสตร์ประกันภัย พฤติกรรมศาสตร์ และประชากรศาสตร์ เป็นต้น ดังการศึกษารวบรวมของ Dent and Ballintine (1971) ในเวลาต่อมาตัวแบบลูกโซ่มาร์คอฟก็ยังได้รับความนิยมจากนักวิจัยในสาขาวิชาต่าง ๆ ดังเช่น การศึกษาความเปลี่ยนแปลงของโรคเรื้อรังด้วยตัวแบบลูกโซ่มาร์คอฟของ Craig and Sendi (2002) การประมาณค่าความน่าจะเป็นในเมทริกซ์ฯ เพื่อการพยากรณ์ความเสี่ยงด้านเครดิต (Credit Risk) ของ Jones (2005) และ Simister (2007) การใช้ลูกโซ่มาร์คอฟในการวิเคราะห์สินเชื่อรายย่อย (retail banking) ของ Thyagarajan and

Mohamed (2005) การสร้างระบบการจัดซื้อจัดจ้างเกี่ยวกับการผลิตโดยใช้ลูกโซ่มาร์คอฟ ของ Lin (2011) การใช้ลูกโซ่มาร์คอฟในการศึกษาการอพยพย้ายถิ่นของประชากรของ Constant and Zimmermann (2012) เป็นต้น สำหรับวิธีการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ P นั้น จากการศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่า มีผู้ที่สนใจศึกษาวิจัยเกี่ยวกับวิธีการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete Time Markov Chain) อยู่จำนวนหนึ่ง โดยทำการประมาณค่าด้วยวิธีการที่แตกต่างกัน เช่น วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood) และวิธีการประมาณค่าของเบย์ (Bayesian Estimation) ดังการศึกษาของ Lee *et al.* (1968) วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least Square) ตามการศึกษาของ Madansky (1959) และ Kalbfleisch and Lawless (1984) สำหรับวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (Least Absolute Deviation) และวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares) ซึ่งเป็น 2 วิธีที่จะใช้เป็นวิธีพื้นฐานในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์ P ด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด

Ashar and Wallace (1963) ได้ทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์ P ด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด ภายใต้ข้อจำกัด (3) และ (4) โดยมีฟังก์ชันเป้าหมายเป็นการหาค่าต่ำสุดของ

$$\sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j=1}^n \left| \pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \right| \quad (5)$$

Ashar and Wallace พบว่าวิธีการนี้จะได้ตัวประมาณที่ไม่มีประสิทธิภาพ คือไม่ได้มีความแปรปรวนต่ำที่สุด แต่วิธีการนี้จะสะดวกในการประมาณเนื่องจากสามารถแปลงตัวแบบข้างต้นให้เป็นปัญหาคำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming) แล้วใช้เทคนิควิธีการแก้ปัญหาคำหนดการเชิงเส้น เช่น วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex method) ในการประมาณค่าได้

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์ P ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

1. กรณีที่ไม่คำนึงถึงเงื่อนไข (3) และ (4) (Unrestricted Least Squares)

Miller (1952) ได้ทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์ P ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด โดยมีฟังก์ชันเป้าหมายเป็นการหาค่าต่ำสุดของ

$$\sum_{k=1}^{S-1} (\pi(k+1) - P^T \pi(k))^T (\pi(k+1) - P^T \pi(k)) \quad (6)$$

เมื่อ $\bar{P}$ เป็นค่าประมาณของ P ได้ตัวประมาณค่าดังนี้

$$\bar{P} = YX^T (XX^T)^{-1}$$

โดยที่ $X = \begin{bmatrix} \pi_1(1) & \pi_1(2) & \cdots & \pi_1(S-1) \\ \pi_2(1) & \pi_2(2) & \cdots & \pi_2(S-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_n(1) & \pi_n(2) & \cdots & \pi_n(S-1) \end{bmatrix}$

และ $Y = \begin{bmatrix} \pi_1(2) & \pi_1(3) & \cdots & \pi_1(S) \\ \pi_2(2) & \pi_2(3) & \cdots & \pi_2(S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_n(2) & \pi_n(3) & \cdots & \pi_n(S) \end{bmatrix}$

วิธีการประมาณค่าของ Miller มีข้อบกพร่องคือ อาจจะทำให้ได้ค่าความน่าจะเป็นที่น้อยกว่า 0 หรือได้ค่าความน่าจะเป็นที่มีค่ามากกว่า 1

Goodman (1953) ทำการแก้ไขข้อบกพร่องหับตัวประมาณค่าของ Miller โดยแนะนำให้มีการปรับค่าความน่าจะเป็นที่น้อยกว่า 0 ให้เป็น 0 และปรับค่าความน่าจะเป็นที่มากกว่า 1 ให้เป็น 1 ส่วนค่าประมาณอื่นๆ ให้ปรับโดยพิจารณาให้ได้กำลังสองของความผิดพลาดในการประมาณค่าน้อยที่สุด

Telser (1963) ทำการแก้ไขข้อบกพร่องของตัวประมาณค่าของ Miller โดยการแปลงความสัมพันธ์ในสมการ(2) ด้วยการปรับสัมประสิทธิ์ให้มีความสอดคล้องกับสมการถดถอยมากขึ้น

2. กรณีที่คำนึงถึงเงื่อนไข (3) และ (4) (Restricted Least Squares)

Lee *et al.* (1965) ได้ทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์ P ในรูปของกำหนดการกำลังสอง (Quadratic Programming) โดยมีฟังก์ชันเป้าหมาย คือ การหาค่าต่ำสุดของ (6) ภายใต้เงื่อนไข (3) ซึ่งมี n ข้อจำกัด และเงื่อนไข (4) ซึ่งมี n^2 ข้อจำกัด ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

Theil and Ray (1966) ได้ทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์ P ในรูปของกำหนดการกำลังสอง เช่นเดียวกัน โดยทำการหาค่าต่ำสุดของ (6) โดยคำนึงถึงเฉพาะเงื่อนไข (3) เพื่อใช้เป็นจุดเริ่มต้นในการพิจารณาถึงเงื่อนไข (4) ด้วยการกำหนดให้ตัวแปรที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขที่ (4) อยู่ในรูปของสมการ (equational form) แล้วทำการหาคำตอบที่เหมาะสมต่อไป โดยจะทำต่อเนื่องจนกว่าจะได้คำตอบที่เป็นไปตามข้อจำกัดทุกข้อ

ในการวิจัยครั้งนี้สนใจที่จะทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์ P ใน 2 รูปแบบดังนี้

1. รูปแบบกำหนดการกำลังสอง เช่นเดียวกับ Lee *et al.* และ Theil and Ray
2. รูปแบบกำหนดการเชิงเส้น ตามการศึกษาของ Ashar and Wallace

ดังนั้นจะกล่าวถึงรูปแบบของปัญหาคำหนดการกำลังสอง วิธีการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหาคำหนดการกำลังสองด้วยการใช้ฟังก์ชันในโปรแกรม MATLAB รูปแบบของปัญหาคำหนดการเชิงเส้น วิธีการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหาคำหนดการเชิงเส้นด้วยการใช้ฟังก์ชันในโปรแกรม MATLAB และเทคนิควิธีการสร้างสมการ ดังนี้

ปัญหาคำหนดการกำลังสอง

Hillier and Lieberman (1991) ให้คำจำกัดความเกี่ยวกับปัญหาคำหนดการกำลังสอง (Quadratic Programming Problem: QPP) ว่าเป็นปัญหาที่สำคัญปัญหาหนึ่งในปัญหาคำหนดการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Programming) โดยปัญหาคำหนดการกำลังสองนั้นจะเป็นการหาค่าที่ดีที่สุด (ค่าต่ำสุด หรือ ค่าสูงสุด) ของฟังก์ชันเป้าหมาย (Objective function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) โดยมีข้อจำกัดเป็นสมการหรืออสมการเชิงเส้น ดังตัวแบบต่อไปนี้

$$\text{Minimize } \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (7)$$

$$\text{Subject to } \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

โดยที่ $\mathbf{x}$ คือ เวกเตอร์แนวตั้งของตัวแปรตัดสินใจ

$\mathbf{c}$ คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังหนึ่งในฟังก์ชัน เป้าหมาย

$\mathbf{D}$ คือ เมทริกซ์สมมาตรที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังสองในฟังก์ชันเป้าหมาย

$\mathbf{A}$ คือ เมทริกซ์ที่แสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในอสมการข้อจำกัด

$\mathbf{A}_{eq}$ คือ เมทริกซ์ที่แสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในสมการข้อจำกัด

$\mathbf{b}$ คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าคงที่ทางขวามือของอสมการข้อจำกัด

$\mathbf{b}_{eq}$ คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าคงที่ทางขวามือของสมการข้อจำกัด

การหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของกำหนดการกำลังสองด้วยการใช้ฟังก์ชันในโปรแกรม MATLAB

MATLAB เป็นโปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ซึ่งมีกล่องเครื่องมือ (Toolbox) สำหรับการวิเคราะห์งานประเภทต่าง ๆ เช่น กล่องเครื่องมือทางสถิติ (Statistical toolbox) กล่องเครื่องมือเกี่ยวกับเครือข่ายเส้นประสาท (Neural Network toolbox) กล่องเครื่องมือสำหรับการหาค่าที่ดีที่สุด (Optimization toolbox) เป็นต้น สำหรับการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของกำหนดการกำลังสองด้วยโปรแกรม MATLAB นั้น จากข้อมูลของ MATLAB Documentation Center (2013) ในส่วนของการเลือกใช้ตัวแก้ปัญห (solver) พบว่าในกล่องเครื่องมือสำหรับการหาค่าที่ดีที่สุด มี 3 ฟังก์ชันที่สามารถนำมาใช้ได้ คือ ฟังก์ชัน fmincon ฟังก์ชัน lsqlin และฟังก์ชัน quadprog

วนิดา และพีรยุทธ์ (2556) ได้ทำการศึกษาการเลือกใช้ฟังก์ชันในกล่องเครื่องมือของโปรแกรม MATLAB สำหรับการประมาณค่าสถิติส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ ซึ่งพบว่าฟังก์ชัน quadprog เป็นฟังก์ชันที่เหมาะสมที่สุด

ดังนั้นในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะ ฟังก์ชัน quadprog ดังรายละเอียดต่อไปนี้

quadprog เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่าที่ดีที่สุดของกำหนดการกำลังสอง โดยมีคำสั่งดังนี้

$[x, fval, exitflag, output, lambda] = \text{quadprog}(D, c, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub, x_0, options)$

โดยที่ ข้อมูลนำเข้า (Input)

D, c, A, b, A_{eq}, b_{eq}	มีความหมายดังแสดงใน (7)
lb	คือเวกเตอร์แนวดิ่งที่แสดงค่าขอบเขตล่างของตัวแปรตัดสินใจ
ub	คือเวกเตอร์แนวดิ่งที่แสดงค่าขอบเขตบนของตัวแปรตัดสินใจ
x₀	คือเวกเตอร์แนวดิ่งที่แสดงค่าเริ่มต้นสำหรับบางวิธี
options	คือตัวเลือกที่กำหนดด้วยฟังก์ชัน optimset ได้แก่ จำนวนรอบสูงสุดที่ใช้ในการวนหาคำตอบ (MaxIter) วิธีการ (Algorithm) ซึ่งมีให้เลือก 3 วิธี คือ active-set , trust-region-reflective และ interior-point-convex เป็นต้น

ข้อมูลออก (Output)

x	คือเวกเตอร์แนวดิ่งที่แสดงค่าที่ดีที่สุดของตัวแปรตัดสินใจ
fval	คือค่าที่ดีที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมาย
exitflag	คือค่าที่แสดงว่าวิธีการนั้นให้ค่าที่เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่ โดยถ้า $exitflag > 0$ แสดงว่าวิธีการนั้นให้ค่าที่เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุด
output	คือส่วนที่แสดงข้อมูลต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับการหาค่าที่ดีที่สุด เช่น จำนวนรอบที่ใช้ในการหาคำตอบ วิธีการที่ใช้ เป็นต้น
lambda	คือส่วนที่แสดงถึงตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange multipliers) ที่สอดคล้องกับข้อจำกัด

ปัญหาคำหนดการเชิงเส้น

Bazaraa *et al* (2010) กล่าวว่าปัญหาคำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming Problem: LPP) เป็นการหาค่าที่ดีที่สุด (ค่าต่ำสุด หรือ ค่าสูงสุด) ของฟังก์ชันเป้าหมายที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงเส้น ภายใต้ข้อจำกัดซึ่งเป็นสมการหรืออสมการเชิงเส้น ดังรูปแบบต่อไปนี้

$$\text{Minimize } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (8)$$

$$\text{subject to } \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

โดยที่ $\mathbf{x}$ คือ เวกเตอร์แนวตั้งของตัวแปรตัดสินใจ

$\mathbf{c}$ คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในฟังก์ชันเป้าหมาย

$\mathbf{A}$ คือ เมทริกซ์ที่แสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในอสมการข้อจำกัด

$\mathbf{A}_{eq}$ คือ เมทริกซ์ที่แสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในสมการข้อจำกัด

$\mathbf{b}$ คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าคงที่ทางขวามือของอสมการข้อจำกัด

$\mathbf{b}_{eq}$ คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าคงที่ทางขวามือของสมการข้อจำกัด

สำหรับวิธีการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของกำหนดการเชิงเส้นนั้นสามารถทำได้หลายวิธี โดยในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีการใช้ฟังก์ชันในโปรแกรม MATLAB และเทคนิคการสร้างสมรรถนะเท่านั้น

การหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของกำหนดการเชิงเส้นด้วยการใช้ฟังก์ชันในโปรแกรม MATLAB

MATLAB Documentation Center (2013) ในส่วนของการเลือกใช้ตัวแก้ปัญหา ซึ่งจะต้องพิจารณารูปแบบของฟังก์ชันเป้าหมาย และรูปแบบของข้อจำกัด โดยจากตัวแบบของปัญหา กำหนดการเชิงเส้น ทั้งฟังก์ชันเป้าหมายและข้อจำกัดเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ดังนั้นตัวแก้ปัญหาที่เหมาะสมคือ ฟังก์ชัน `linprog` ซึ่งอยู่ในกล่องเครื่องมือสำหรับการหาค่าที่ดีที่สุด โดยมีรายละเอียดดังนี้

`linprog` เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของกำหนดการเชิงเส้น โดยมีคำสั่งดังนี้

$$[\mathbf{x}, \mathbf{fval}, \mathbf{exitflag}, \mathbf{output}, \mathbf{lambda}] = \mathbf{linprog}(\mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{A}_{eq}, \mathbf{b}_{eq}, \mathbf{lb}, \mathbf{ub}, \mathbf{x}_0, \mathbf{options})$$

โดยที่ ข้อมูลนำเข้า (Input)

c, A, b, A_{eq}, b_{eq}	มีความหมายดังแสดงใน (8)
lb	คือเวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าขอบเขตล่างของตัวแปรตัดสินใจ
ub	คือเวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าขอบเขตบนของตัวแปรตัดสินใจ
x_0	คือเวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าเริ่มต้นสำหรับบางวิธี
options	คือตัวเลือกที่กำหนดด้วยฟังก์ชัน optimset ได้แก่ จำนวนรอบสูงสุดที่ใช้ในการวนหาคำตอบ (MaxIter) วิธีการ (Algorithm) ซึ่งมีให้เลือก 3 วิธี คือ interior-point, active-set และ simplex เป็นต้น

ข้อมูลออก (Output)

x	คือเวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าที่ดีที่สุดของตัวแปรตัดสินใจ
fval	คือค่าที่ดีที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมาย
exitflag	คือค่าที่แสดงว่าวิธีการนั้นให้ค่าที่เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่ โดยถ้า $exitflag > 0$ แสดงว่าวิธีการนั้นให้ค่าที่เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุด
output	คือส่วนที่แสดงข้อมูลต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับการหาค่าที่ดีที่สุด เช่น จำนวนรอบที่ใช้ในการหาคำตอบ วิธีการที่ใช้ เป็นต้น
lambda	คือส่วนที่แสดงถึงตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange multipliers) ที่สอดคล้องกับข้อจำกัด

การหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของกำหนดการเชิงเส้นด้วยเทคนิคการสร้างสมมติ

Nash and Sofer (1996) เรียกเทคนิควิธีที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหาคำหนดการเชิงเส้นด้วยการพิจารณาเฉพาะเซตย่อย (subset) ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปร แล้วจึงสร้างสัมประสิทธิ์ที่สอดคล้องกับตัวแปรที่ต้องการพิจารณาเพิ่มโดยหลีกเลี่ยงการคำนวณที่ไม่จำเป็นว่าเทคนิคการสร้างสมมติ (Column Generation : CG)

Lasdon (1970) ได้แสดงถึงแนวคิดและวิธีการเกี่ยวกับเทคนิค CG ซึ่งสรุปได้ดังนี้คือเทคนิค CG เป็นวิธีการที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ของปัญหาคำหนดการเชิงเส้นขนาดใหญ่ ซึ่งมีจำนวนตัวแปรตัดสินใจ (decision variables) เป็นจำนวนมาก เมื่อทำการหาผลลัพธ์ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ (simplex method) พบว่าเมทริกซ์แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการหรืออสมการข้อจำกัดจะมีจำนวนสมมติเป็นจำนวนมากเท่ากับจำนวนของตัวแปรตัดสินใจรวมกับตัวแปรที่เกี่ยวข้อง

ได้แก่ ตัวแปรขาด (slack variables) ตัวแปรเกิน (surplus variables) และตัวแปรเทียม (artificial variables) โดยสามารถแบ่งตัวแปรทั้งหมดได้เป็น 2 ส่วน ส่วนหนึ่งคือ ตัวแปรพื้นฐาน (basic variables) ซึ่งเป็นตัวแปรที่จะปรากฏอยู่ในผลลัพธ์ที่ดีที่สุด อีกส่วนหนึ่งซึ่งเป็นตัวแปรส่วนใหญ่คือตัวแปรที่ไม่เป็นพื้นฐาน (non-basic variables)

หลักการของเทคนิค CG คือ จะพิจารณาเฉพาะตัวแปรเพียงบางส่วนซึ่งอาจจะได้จากตัวแปรพื้นฐานที่ได้จากคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้น (Basic Feasible Solution : BFS) แล้วจึงเพิ่มตัวแปรที่มีแนวโน้มที่จะทำให้ฟังก์ชันเป้าหมายมีค่าดีขึ้นครั้งละ 1 ตัวแปรซึ่งก็คือ 1 สดมภ์ในเมทริกซ์ข้อจำกัด (constraint matrix) ที่สอดคล้องกับตัวแปรดังกล่าว จนกระทั่งฟังก์ชันเป้าหมายไม่มีการเปลี่ยนแปลง เรียกตัวแบบที่พิจารณาเฉพาะตัวแปรเพียงบางส่วนว่า ปัญหาหลักแบบมีข้อจำกัด (Restricted Master Problem : RMP) และเรียกตัวแบบที่ใช้ในการพิจารณาเลือกตัวแปรที่ไม่เป็นพื้นฐานซึ่งจะเพิ่มเข้าในตัวแบบ RMP ว่าปัญหาย่อย (sub-problem)

กำหนดตัวแบบของปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่ต้องการหาผลลัพธ์ด้วยเทคนิค CG ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & Z = \sum_{j=1}^N c_j x_j \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^N A_j x_j = b \\ & x_j \geq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

โดยที่ b และ $A_j, j=1,2,\dots,N$ เป็นเวกเตอร์แนวตั้งขนาด m

ขั้นตอนของเทคนิค CG มีดังต่อไปนี้

1. ขั้นตอนเริ่มต้น (Initialization)

หาคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้น เพื่อนำตัวแปรพื้นฐาน สมมติว่ามี r ตัวแปรมาไว้ในตัวแบบของปัญหาหลักแบบมีข้อจำกัด (RMP)

2. ขั้นตอนหลัก (Main step) แบ่งเป็นขั้นตอนย่อยได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 หาผลลัพธ์ของตัวแบบของปัญหาหลักแบบมีข้อจำกัด (RMP) ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

ขั้นที่ 2 นำเวกเตอร์ผลลัพธ์ของตัวแปรควบคู่ (dual variables) ที่ได้จากขั้นที่ 1 สมมติให้เป็นเวกเตอร์ y มาคำนวณหาต้นทุนที่ลดลง (reduced cost : rc หรือ $\bar{c}_j$) ของตัวแปรที่ไม่เป็นพื้นฐาน ดังสูตรต่อไปนี้ $\bar{c}_j = c_j - y^T A_j$ โดยที่ $j = r+1, \dots, N$

ขั้นที่ 3 ถ้า $\bar{c}_j \geq 0$ สำหรับทุก j แล้ว ผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นที่ 1 เป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ถ้า $\bar{c}_j < 0$ ให้เพิ่มสมการ A_t ซึ่ง $\bar{c}_t = \min\{\bar{c}_j | \bar{c}_j < 0\}$ ใน RMP แล้วทำซ้ำขั้นที่ 1

อุปกรณ์และวิธีการ

อุปกรณ์

อุปกรณ์ที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย

1. คอมพิวเตอร์ส่วนตัว (Personal Computer) หน่วยความจำ 4 GB ความจุของ Hard Disk Drive 3.3 GHz จอ LCD 17 นิ้ว และ DVD-RW
2. โปรแกรม MATLAB
3. เครื่องพิมพ์ Laser

วิธีการ

วิธีดำเนินการวิจัยเพื่อการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโช่มาร์คอฟขนาดใหญ่ มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. จำลองข้อมูลสำหรับการประมาณค่าสถิติส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโช่มาร์คอฟ
2. ศึกษาวิธีการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโช่มาร์คอฟ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (Restricted Least Square : RLS) โดยใช้ฟังก์ชัน quadprog ของโปรแกรม MATLAB เป็นเครื่องมือในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด เพื่อหาข้อจำกัดของเครื่องมือดังกล่าว โดยทำการทดลองกับข้อมูลที่จำลองได้ในขั้นตอนที่ 1
3. จากข้อจำกัดของเครื่องมือในขั้นตอนที่ 2 ทำการศึกษาเครื่องมือหรือวิธีการประมาณค่าอื่นๆ ที่สามารถจัดข้อจำกัดดังกล่าว โดยทำการศึกษา 2 แนวทางคือ

3.1. ใช้วิธี RLS ในการประมาณค่าเช่นเดียวกับขั้นตอนที่ 2 แต่ใช้เทคนิคการแบ่งส่วนโดยประมาณ (Approximated Decomposition : AD) ช่วยในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด โดยอาศัยฟังก์ชัน quadprog ของโปรแกรม MATLAB เป็นเครื่องมือในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

3.2. ใช้วิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (Restricted Least Absolute Deviation : RLAD) แทนวิธี RLS และใช้วิธีการในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด 2 วิธี ดังนี้

3.2.1 การใช้ฟังก์ชัน linprog ของโปรแกรม MATLAB เป็นเครื่องมือในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

3.2.2 การใช้เทคนิคการสร้างสดมภ์ (Column Generation : CG) ช่วยในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดกรณีที่เกิดปัญหาที่ใหญ่เกินความสามารถของเครื่องมือในโปรแกรม MATLAB

4. เปรียบเทียบผลลัพธ์

5. วิเคราะห์และสรุปผล

รายละเอียดของขั้นตอนต่าง ๆ แสดงดังต่อไปนี้

จำลองข้อมูลสำหรับการประมาณค่าสถิติส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโช่มาร์คอฟ

เนื่องจากขนาดของเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะซึ่งแสดงถึงจำนวนตัวแปรที่ต้องการประมาณค่า นั้นจะขึ้นอยู่กับจำนวนสถานะ (state) ของลูกโช่มาร์คอฟ ส่วนจำนวนช่วงเวลา (period) ที่เก็บรวบรวมข้อมูลนั้นจะส่งผลต่อการประมาณค่า ดังนั้นในการวิจัยนี้จะทำการจำลองข้อมูลโดยมีรายละเอียดดังนี้

1. จำลองเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ โดยกำหนดจำนวนสถานะ n ของลูกโช่มาร์คอฟ ดังนี้ คือเริ่มต้นที่ 60 เพิ่มขึ้นครั้งละ 20 จนถึง 200 ส่วนที่มากกว่า 200 จะกำหนดแล้วแต่กรณีศึกษา

2. จากเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะที่ได้ในข้อ 1 ใช้ตัวแบบมาร์คอฟใน (2) สำหรับการสร้างข้อมูลที่มีคุณสมบัติมาร์คอฟให้มีจำนวนช่วงเวลาเก็บรวบรวมข้อมูล S ดังนี้ คือ 10 20 และ 30 โดยมีขั้นตอนการสร้างข้อมูลดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างเวกเตอร์ของข้อมูลในช่วงเวลาที่ 1 โดยที่ผลรวมของสมาชิกทุกตัวในเวกเตอร์จะต้องเท่ากับ 1

ขั้นที่ 2 สร้างเวกเตอร์ของข้อมูลในช่วงเวลาที่ 2 โดยใช้ตัวแบบมาร์คอฟใน (2) คือนำทรานสโพสของเมทริกซ์ที่ได้จากข้อ 1 คูณด้วยเวกเตอร์ที่ได้จากขั้นที่ 1 ก็จะได้เวกเตอร์ของข้อมูลในช่วงเวลาที่ 2

ขั้นที่ 3 สร้างเวกเตอร์ของข้อมูลในช่วงเวลาที่ 3 ถึง S เช่นเดียวกับการสร้างเวกเตอร์ของข้อมูลในช่วงเวลาที่ 2 แตกต่างเพียงเวกเตอร์ที่ใช้คูณกับทรานสโพสของเมทริกซ์ที่ได้จากข้อ 1 จะเป็นเวกเตอร์ของข้อมูลในช่วงเวลาก่อน 1 ช่วงเวลา เช่น ต้องการสร้างเวกเตอร์ของช่วงเวลาที่ 3 เวกเตอร์ที่จะใช้เป็นตัวคูณคือเวกเตอร์ของข้อมูลในช่วงเวลาที่ 2 เป็นต้น

เพื่อป้องกันปัญหาการเข้าสู่สภาวะคงตัว (steady state) ของข้อมูลที่สร้างขึ้น ดังนั้นจึงทำการเพิ่มค่ารบกวนให้กับข้อมูลที่สร้างขึ้นตั้งแต่เวกเตอร์ของข้อมูลในช่วงเวลาที่ 2 ถึง S โดยในการวิจัยนี้ใช้สูตรการคำนวณดังต่อไปนี้

$$\text{เวกเตอร์ข้อมูลในช่วงเวลา } k+1 = (\text{เวกเตอร์ข้อมูลในช่วงเวลา } k + \text{ค่ารบกวน}) \times \frac{1}{(\text{ค่ารบกวน} \times (n+1))}$$

$$\text{โดยที่ ค่ารบกวน} = \text{ค่าสุ่มที่สร้างขึ้น} \times 0.1$$

ส่วนของโปรแกรม MATLAB เพื่อการจำลองข้อมูลแสดงในภาคผนวก ข

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS) และหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้ฟังก์ชัน quadprog

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะด้วยวิธี RLS เป็นการหาค่าต่ำสุดของ (6) ภายใต้งื่อนไข (3) และ (4) ดังนี้

$$\text{Minimize } \sum_{k=1}^{S-1} (\pi(k+1) - P^T \pi(k))^T (\pi(k+1) - P^T \pi(k)) \quad (10)$$

$$\text{subject to } Pe = e$$

$$0 \leq p_{ij} \leq 1$$

โดยที่ $\pi(k)$ เป็นเวกเตอร์แสดงค่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ ณ ช่วงเวลาที่ k

$$\pi(k) = \begin{bmatrix} \pi_1(k) \\ \pi_2(k) \\ \pi_3(k) \\ \vdots \\ \pi_n(k) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$\pi(k+1)$ เป็นเวกเตอร์แสดงค่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ ณ ช่วงเวลาที่ $k+1$

$$\pi(k+1) = \begin{bmatrix} \pi_1(k+1) \\ \pi_2(k+1) \\ \pi_3(k+1) \\ \vdots \\ \pi_n(k+1) \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{เมื่อ } k=1, 2, \dots, S-1$$

P เป็นเมทริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะ

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{และ } i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, n$$

หรืออาจจะเขียนในรูปแบบ ดังต่อไปนี้

$$\text{Minimize } f = \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j=1}^n \left(\pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \right)^2 \quad (11)$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i=1,2,\dots,n$$

$$p_{ij} \geq 0, \quad i,j = 1,2,\dots,n$$

ตัวแบบข้างต้นเป็นตัวแทนของปัญหาคำหนดการกำลังสองซึ่งสามารถหาคำตอบของตัวแปร p_{ij} ด้วยฟังก์ชัน quadprog ในกล่องเครื่องมือ (Toolbox) ของโปรแกรม MATLAB โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. จัดรูปฟังก์ชันเป้าหมาย (11) เพื่อให้สอดคล้องกับตัวแบบที่จะใช้ฟังก์ชัน quadprog ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f &= \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j=1}^n \left(\pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j=1}^n \left((\pi_j(k+1))^2 - 2 \pi_j(k+1) \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) + \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \right)^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{S-1} (\pi_j(k+1))^2 \right) - \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (12)$$

โดยที่ $\mathbf{x}$ เป็นเวกเตอร์แนวตั้งของตัวแปรตัดสินใจที่มีขนาด $n^2 \times 1$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ \vdots \\ p_{1n} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } P_i = \begin{bmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{in} \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } i=1,2,\dots,n$$

$\mathbf{c}$ เป็นเวกเตอร์แนวดิ่งที่มีขนาด $n^2 \times 1$ $= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ โดยที่

$$c_i = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{S-1} (2(\pi_i(k))(\pi_1(k+1))) \\ \sum_{k=1}^{S-1} (2(\pi_i(k))(\pi_2(k+1))) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{S-1} (2(\pi_i(k))(\pi_n(k+1))) \end{bmatrix}, i=1,2,\dots,n$$

$\mathbf{D}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีขนาด $n^2 \times n^2$ $= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$ โดยที่

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} 2 \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_i(k))(\pi_j(k)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_i(k))(\pi_j(k)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_i(k))(\pi_j(k)) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_{eq}$ เป็นเมทริกซ์ที่แสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในสมการข้อจำกัดมีขนาด $n \times n^2$

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{e}_n^T \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$\mathbf{b}_{eq}$ เป็นเวกเตอร์แนวดิ่งที่แสดงค่าคงที่ทางขวามือของสมการข้อจำกัดมีขนาด $n \times 1 = \mathbf{e}_i$

$\mathbf{lb}$ เป็นเวกเตอร์แนวดิ่งที่แสดงค่าขอบเขตล่างของตัวแปรตัดสินใจมีขนาด $n^2 \times 1 = [0]_{n^2 \times 1}$

2. เรียกใช้ฟังก์ชัน quadprog ดังนี้

$[\mathbf{x}, \mathbf{fval}, \mathbf{exitflag}, \mathbf{output}, \mathbf{lambda}] = \text{quadprog}(\mathbf{D}, \mathbf{c}, [], [], \mathbf{A}_{eq}, \mathbf{b}_{eq}, \mathbf{lb}, [], [], \mathbf{options})$

ส่วนของโปรแกรม MATLAB เพื่อการประมาณค่าเมทริกซ์ $\mathbf{P}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดและหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้ฟังก์ชัน quadprog แสดงในภาคผนวก ข

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS) และหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้เทคนิควิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ (AD)

เมื่อพิจารณาปัญหาคำหนดการกำลังสองในตัวแบบ (11) ถ้าไม่คำนึงถึงเงื่อนไข (3) แล้วพบว่าปัญหาดังกล่าวจะมีโครงสร้างพิเศษและสามารถแบ่งออกเป็นปัญหาย่อย ๆ ได้ โดยสามารถจัดรูปแบบของฟังก์ชันเป้าหมาย (11) ดังนี้

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j=1}^n \left(\pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \right)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j=1}^n \left(\pi_j(k+1) \right)^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{S-1} 2(\pi_j(k+1))(\pi_i(k)) \right) p_{ij} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (\pi_i(k)) (\pi_l(k)) p_{ij} p_{lj} \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{S-1} \left(\pi_j(k+1) \right)^2 \right) - \mathbf{c}_j^T \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_j^T \mathbf{H} \mathbf{x}_j
 \end{aligned} \tag{13}$$

โดยที่

$$x_j = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix}$$

$$c_j = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{S-1} (2(\pi_1(k))(\pi_j(k+1))) \\ \sum_{k=1}^{S-1} (2(\pi_2(k))(\pi_j(k+1))) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{S-1} (2(\pi_n(k))(\pi_j(k+1))) \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_1(k))(\pi_1(k)) & \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_1(k))(\pi_2(k)) & \cdots & \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_1(k))(\pi_n(k)) \\ \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_2(k))(\pi_1(k)) & \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_2(k))(\pi_2(k)) & \cdots & \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_2(k))(\pi_n(k)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_n(k))(\pi_1(k)) & \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_n(k))(\pi_2(k)) & \cdots & \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_n(k))(\pi_n(k)) \end{bmatrix}$$

นั่นคือจากฟังก์ชัน f สามารถแบ่งเป็นปัญหาการประมาณค่าด้วยวิธี RLS จำนวน n ปัญหาย่อย ($j=1,2,\dots,n$) ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f_j &= \sum_{k=1}^{S-1} (\pi_j(k+1))^2 - c_j^T x_j + x_j^T H x_j \\ \text{subject to } & 0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (14)$$

เมื่อทำการหาค่าผลลัพธ์ของแต่ละปัญหาย่อยด้วยฟังก์ชัน quadprog ของโปรแกรม MATLAB ก็จะได้ค่าของ x_j ซึ่งเมื่อนำเวกเตอร์ x_j มารวมเป็นเมทริกซ์ จะพบว่าเมทริกซ์ที่ได้จะยังไม่เป็นไปตามข้อจำกัดของตัวแบบ (11) หรือเงื่อนไข (3) ดังนั้นจะต้องทำการปรับค่า p_{ij} ในแต่ละแถว i โดยการหารค่า p_{ij} แต่ละตัวด้วย $\sum_{j=1}^n p_{ij}$ ตัวอย่างการประมาณค่าเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยเทคนิควิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ สำหรับข้อมูลในตารางที่ 1 แสดงดังนี้

ตารางที่ 1 ข้อมูลตัวอย่างสำหรับอธิบายขั้นตอนของวิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ
(ข้อมูลส่วนแบ่งทางการตลาดของบุหรี่ 3 ยี่ห้อ)

ปีที่	ยี่ห้อบุหรี่		
	A	B	C
1	0.5056	0.2028	0.2916
2	0.4879	0.1899	0.3222
3	0.4504	0.2236	0.326
4	0.4068	0.3039	0.2893
5	0.3637	0.3616	0.2747
6	0.3365	0.4118	0.2517
7	0.3311	0.4425	0.2264
8	0.2936	0.4498	0.2566
9	0.2794	0.4008	0.3198
10	0.3418	0.3301	0.3281
11	0.3867	0.3013	0.312
12	0.4074	0.2906	0.302
13	0.4084	0.2949	0.2967
14	0.3842	0.3195	0.2963
15	0.3746	0.3358	0.2896
16	0.3708	0.35	0.2792
17	0.3579	0.3653	0.2768
18	0.3527	0.3851	0.2622
19	0.3276	0.3875	0.2849

ที่มา: Theil and Rey (1966)

ตัวแบบสำหรับการประมาณค่า p_{ij}

$$\text{Min } f = \sum_{k=1}^{18} \sum_{j=1}^3 \left(\pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^3 p_{ij} \pi_i(k) \right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^{18} \left(\pi_j(k+1) \right)^2 \right) - c_j^T x_j + x_j^T H x_j$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^3 p_{ij} = 1, \quad i=1,2,\dots,3$$

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j=1,2,\dots,3$$

โดยที่ $x_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix}$

$$c_1 = \begin{bmatrix} 5.1529 \\ 4.2868 \\ 3.8832 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 4.5653 \\ 4.2222 \\ 3.5005 \end{bmatrix}, c_3 = \begin{bmatrix} 3.9608 \\ 3.4096 \\ 3.0186 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 5.3169 & 4.3864 & 3.9756 \\ 4.3864 & 4.1378 & 3.3944 \\ 3.9756 & 3.3944 & 3.0324 \end{bmatrix}$$

แบ่งเป็นปัญหาย่อยจำนวน 3 ปัญหาย่อย ดังนี้

$$\text{Minimize } f_1 = 2.5102 - c_1^T x_1 + x_1^T H x_1$$

$$\text{subject to } 0 \leq p_{i1} \leq 1, \quad i=1,2,3$$

$$\text{Minimize } f_2 = 2.1779 - c_2^T x_2 + x_2^T H x_2$$

$$\text{subject to } 0 \leq p_{i2} \leq 1, \quad i=1,2,3$$

$$\text{Minimize } f_3 = 1.5123 - c_3^T x_3 + x_3^T H x_3$$

$$\text{subject to } 0 \leq p_{i3} \leq 1, \quad i=1,2,3$$

ใช้ฟังก์ชัน quadprog ในโปรแกรม MATLAB ในการแก้ปัญหาย่อยทั้งสาม ได้ค่าประมาณของ x_1, x_2, x_3 ดังนี้

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.5905 \\ 0 \\ 0.5064 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0.1341 \\ 0.8782 \\ 0 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 0.0972 \\ 0.1090 \\ 0.7460 \end{bmatrix}$$

ปรับค่า p_{ij} ในแต่ละแถว i โดยการหารค่า p_{ij} ด้วย $\sum_{j=1}^n p_{ij}$ ซึ่งได้เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} 0.7185 & 0.1632 & 0.1183 \\ 0 & 0.8896 & 0.1104 \\ 0.4043 & 0 & 0.5957 \end{bmatrix}$$

ส่วนของโปรแกรม MATLAB เพื่อการประมาณค่าเมทริกซ์ P ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดและหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ แสดงในภาคผนวก ข

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLAD) และหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้ฟังก์ชัน **linprog**

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะด้วยวิธี RLAD เป็นการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของตัวแบบดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j=1}^n \left| \pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \right| \\ &\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad \forall i \\ &\quad \quad \quad p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \end{aligned} \quad (15)$$

ตัวแบบ (15) เป็นตัวแบบของปัญหาคำหนดการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Non-linear Programming) ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรทั้งหมด n^2 ตัวแปร และมีจำนวนข้อจำกัด n ข้อ ในการหาผลลัพธ์ของปัญหาคำหนดการที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นทำได้หลายวิธี แต่วิธีการหนึ่งที่ทำให้การหาผลลัพธ์ง่ายขึ้น คือการแปลงให้เป็นปัญหาคำหนดการเชิงเส้น แล้วจึงใช้เทคนิควิธีในการแก้ปัญหาคำหนดการเชิงเส้น

กำหนดการเชิงเส้นในการหาผลลัพธ์ ซึ่งจากตัวแบบ (15) สามารถจัดรูปให้เป็นปัญหาคำหนดการเชิงเส้นได้ โดยการจัดรูปของฟังก์ชันเป้าหมายดังนี้

เนื่องจากเป้าหมายคือการหาค่าต่ำที่สุดของฟังก์ชัน จึงกำหนดให้

$$u_{j(k)} \geq \left| \pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \right|, \quad \forall j,k \quad (16)$$

จากทฤษฎีบทสำหรับการแก้สมการที่อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ โดยที่ $u_{j(k)} \geq 0$ อสมการ (16) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$-u_{j(k)} \leq \pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \leq u_{j(k)} \quad (17)$$

ดังนั้นจากฟังก์ชันเป้าหมายของตัวแบบ (15) สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปตัวแบบเชิงเส้นได้ ดังนี้

$$\text{Minimize} \quad \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j=1}^n u_{j(k)} \quad (18)$$

$$\text{subject to} \quad \pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \leq u_{j(k)}, \quad \forall j,k$$

$$\pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \geq -u_{j(k)}, \quad \forall j,k$$

เมื่อจัดรูปของอสมการข้อจำกัดของตัวแบบ (18) และเพิ่มข้อจำกัดของตัวแบบ (15) จะได้ตัวแบบดังแสดงในตัวแบบ (19) ซึ่งเป็นตัวแบบที่ประกอบด้วยตัวแปรทั้งหมด $n(S-1)+n^2$ ตัวแปร และมีข้อจำกัดทั้งหมด $2n(S-1)+n$ ข้อ นั้นแสดงว่าจำนวนตัวแปรและจำนวนข้อจำกัดของปัญหาในตัวแบบ (19) จะไม่ได้ขึ้นอยู่กับจำนวนสถานะ n ของลูกโซ่มาร์คอฟเท่านั้น แต่ยังขึ้นอยู่กับจำนวนช่วงเวลาที่เกี่ยวข้องรวมข้อมูล S ด้วย

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && \sum_{k=1}^{S-1} \sum_{j=1}^n u_{j(k)} \\
& \text{subject to} && -u_{j(k)} - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \leq -\pi_j(k+1), \quad \forall_{j,k} \\
& && -u_{j(k)} + \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \leq \pi_j(k+1), \quad \forall_{j,k} \\
& && \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad \forall_i \\
& && p_{ij} \geq 0, \quad \forall_{i,j} \\
& && u_{j(k)} \geq 0, \quad \forall_{j,k}
\end{aligned} \tag{19}$$

การหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น สามารถทำได้หลายวิธี แต่ในการวิจัยนี้จะทำการหาคำตอบที่ดีที่สุดด้วยฟังก์ชัน linprog ในกล่องเครื่องมือของโปรแกรม MATLAB โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. จัดเตรียมเมทริกซ์และเวกเตอร์ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $\mathbf{x}$ เป็นเวกเตอร์แนวตั้งของตัวแปรตัดสินใจที่มีขนาด $(n(S-1)+n^2) \times 1$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} U_{(1)} \\ U_{(2)} \\ \vdots \\ U_{(S-1)} \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad U_{(k)} = \begin{bmatrix} u_{1(k)} \\ u_{2(k)} \\ \vdots \\ u_{n(k)} \end{bmatrix}; k=1,2,\dots,S-1 \quad \text{และ} \quad P_i = \begin{bmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{in} \end{bmatrix}; i=1,2,\dots,n$$

$\mathbf{c}$ เป็นเวกเตอร์แนวตั้งที่มีขนาด $(n(S-1)+n^2) \times 1$

$$\mathbf{c}^T = [1]_{1 \times n(S-1)} \quad [0]_{1 \times n^2}$$

b เป็นเวกเตอร์แนวดั้งที่แสดงค่าคงที่ทางขวามือของสมการข้อจำกัดมีขนาด $2n(S-1) \times 1$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_{S-1} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad h_k = \begin{bmatrix} -\pi_1(k+1) \\ \pi_1(k+1) \\ \vdots \\ -\pi_n(k+1) \\ \pi_n(k+1) \end{bmatrix}$$

A เป็นเมทริกซ์ที่แสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในสมการข้อจำกัด
มีขนาด $2n(S-1) \times (n(S-1) + n^2)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{(1)} & [0]_{2n \times n} & \cdots & [0]_{2n \times n} & d^{(1)} \\ [0]_{2n \times n} & a_{(2)} & \cdots & [0]_{2n \times n} & d^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{2n \times n} & [0]_{2n \times n} & \cdots & a_{(S-1)} & d^{(S-1)} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad a_{(k)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = \begin{bmatrix} \pi(k) & [0]_{2 \times n} & \cdots & [0]_{2 \times n} \\ [0]_{2 \times n} & \pi(k) & \cdots & [0]_{2 \times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{2 \times n} & [0]_{2 \times n} & \cdots & \pi(k) \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad \pi(k) = \begin{bmatrix} -\pi_1(k) & -\pi_2(k) & \cdots & -\pi_n(k) \\ +\pi_1(k) & +\pi_2(k) & \cdots & +\pi_n(k) \end{bmatrix}$$

A_{eq} เป็นเมทริกซ์ที่แสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในสมการข้อจำกัด
มีขนาด $n \times (n(S-1) + n^2)$

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n(S-1)} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad \mathbf{I} = [I_n | I_n | \cdots | I_n]$$

b_{eq} เป็นเวกเตอร์แนวดั้งที่แสดงค่าคงที่ทางขวามือของสมการข้อจำกัดมีขนาด $n \times 1 = [1]_{n \times 1}$

lb เป็นเวกเตอร์แนวดั้งที่แสดงค่าขอบเขตล่างของตัวแปรตัดสินใจมีขนาด $(n(S-1) + n^2) \times 1$
 $= [0]_{(n(S-1) + n^2) \times 1}$

2. เรียกใช้ฟังก์ชัน linprog ดังนี้

$$[x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog(c,A,b,A_{eq},b_{eq},lb,[],[],options)$$

ส่วนของโปรแกรม MATLAB เพื่อการประมาณค่าเมทริกซ์ P ด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดและหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้ฟังก์ชัน linprog แสดงในภาคผนวก ข

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLAD) หาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้เทคนิควิธีการสร้างสดมภ์ (CG)

เนื่องจากการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็น p_{ij} ด้วยวิธี RLAD ซึ่งจัดรูปให้เป็นปัญหา กำหนดการเชิงเส้นดังตัวแบบ (18) แล้วทำการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยฟังก์ชัน linprog โดยตรงนั้น จำนวนตัวแปรที่ถูกนำเข้าสู่กระบวนการหาผลลัพธ์คือจำนวนตัวแปรทั้งหมดที่มี ซึ่งเมื่อลูกโซ่มาร์คอฟมีจำนวนสถานะ n หรือ จำนวนช่วงเวลาที่เก็บรวบรวมข้อมูล S หรือทั้ง n และ S มีค่ามาก ๆ นั้นย่อมส่งผลต่อจำนวนตัวแปรและจำนวนข้อจำกัดของตัวแบบ (18) ซึ่งทำให้เมทริกซ์ข้อจำกัดมีขนาดใหญ่มาก ๆ ดังนั้นเทคนิค CG จึงเป็นเทคนิควิธีที่ผู้วิจัยให้ความสนใจ เนื่องจากเป็นเทคนิควิธีที่ไม่ต้องใช้ตัวแปรทั้งหมดในการหาผลลัพธ์ โดยจะเริ่มต้นจากตัวแปรเพียงบางส่วนแล้วค่อยๆ เพิ่มตัวแปรเข้าร่วมพิจารณาครั้งละ 1 ตัวแปร โดยตัวแปรที่เพิ่มเข้าร่วมพิจารณานั้นจะต้องทำให้ฟังก์ชันเป้าหมายมีค่าที่ดีขึ้น โดยรายละเอียดของเทคนิค CG สำหรับหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของตัวแบบ (16) ประกอบด้วยเวกเตอร์และเมทริกซ์ต่างๆ ดังนี้

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} U_{(1)} \\ U_{(2)} \\ \vdots \\ U_{(S-1)} \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad U_{(k)} = \begin{bmatrix} u_{1(k)} \\ u_{2(k)} \\ \vdots \\ u_{n(k)} \end{bmatrix}; k=1,2,\dots,S-1 \quad \text{และ} \quad P_i = \begin{bmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{in} \end{bmatrix}; i=1,2,\dots,n$$

$$\mathbf{c}^T = [[1]_{1 \times n(S-1)} \quad [0]_{1 \times n^2}]$$

$$\mathbf{b}_{\text{all}} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{S-1} \\ [1]_{n \times 1} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad \mathbf{h}_k = \begin{bmatrix} -\pi_1(k+1) \\ \pi_1(k+1) \\ \vdots \\ -\pi_n(k+1) \\ \pi_n(k+1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\text{all}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{(1)} & [0]_{2n \times n} & \cdots & [0]_{2n \times n} & \mathbf{d}^{(1)} \\ [0]_{2n \times n} & \mathbf{a}_{(2)} & \cdots & [0]_{2n \times n} & \mathbf{d}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{2n \times n} & [0]_{2n \times n} & \cdots & \mathbf{a}_{(S-1)} & \mathbf{d}^{(S-1)} \\ [0]_{n \times n(S-1)} & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad \mathbf{a}_{(k)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}(k) & [0]_{2 \times n} & \cdots & [0]_{2 \times n} \\ [0]_{2 \times n} & \boldsymbol{\pi}(k) & \cdots & [0]_{2 \times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{2 \times n} & [0]_{2 \times n} & \cdots & \boldsymbol{\pi}(k) \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad \boldsymbol{\pi}(k) = \begin{bmatrix} -\pi_1(k) & -\pi_2(k) & \cdots & -\pi_n(k) \\ +\pi_1(k) & +\pi_2(k) & \cdots & +\pi_n(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = [\mathbf{I}_n | \mathbf{I}_n | \cdots | \mathbf{I}_n]$$

ดำเนินการตามขั้นตอนที่แสดงในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของกำหนดการเชิงเส้นด้วยเทคนิคการสร้างสมมติ ในหัวข้อการตรวจเอกสารดังนี้

1. ขั้นตอนเริ่มต้น หาคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นเพื่อสร้างตัวแบบของปัญหาหลักแบบมีข้อจำกัด (RMP) 2 แบบดังนี้

1.1 แบบที่ 1 กำหนดให้ตัวแปรเริ่มต้นประกอบด้วย ตัวแปร $U_{j(k)}$ ทุกค่า j, k และ p_{ij} ทุกค่า $i=j$ นั่นคือ ตัวแบบ RMP จะเริ่มต้นพิจารณาตัวแปรเพียง $n(S-1)+n$ ตัวแปร

1.2 แบบที่ 2 กำหนดให้ตัวแปรเริ่มต้นประกอบด้วย ตัวแปร p_{ij} ทุกค่า $i=j$ นั่นคือ ตัวแบบ RMP จะเริ่มต้นพิจารณาตัวแปรเพียง n ตัวแปรเท่านั้น

การแสดงว่าการกำหนดตัวแปรเริ่มต้นทั้ง 2 แบบจะให้คำตอบที่เป็นไปได้ (Feasible Solution) ของ RMP แสดงในภาคผนวก ก

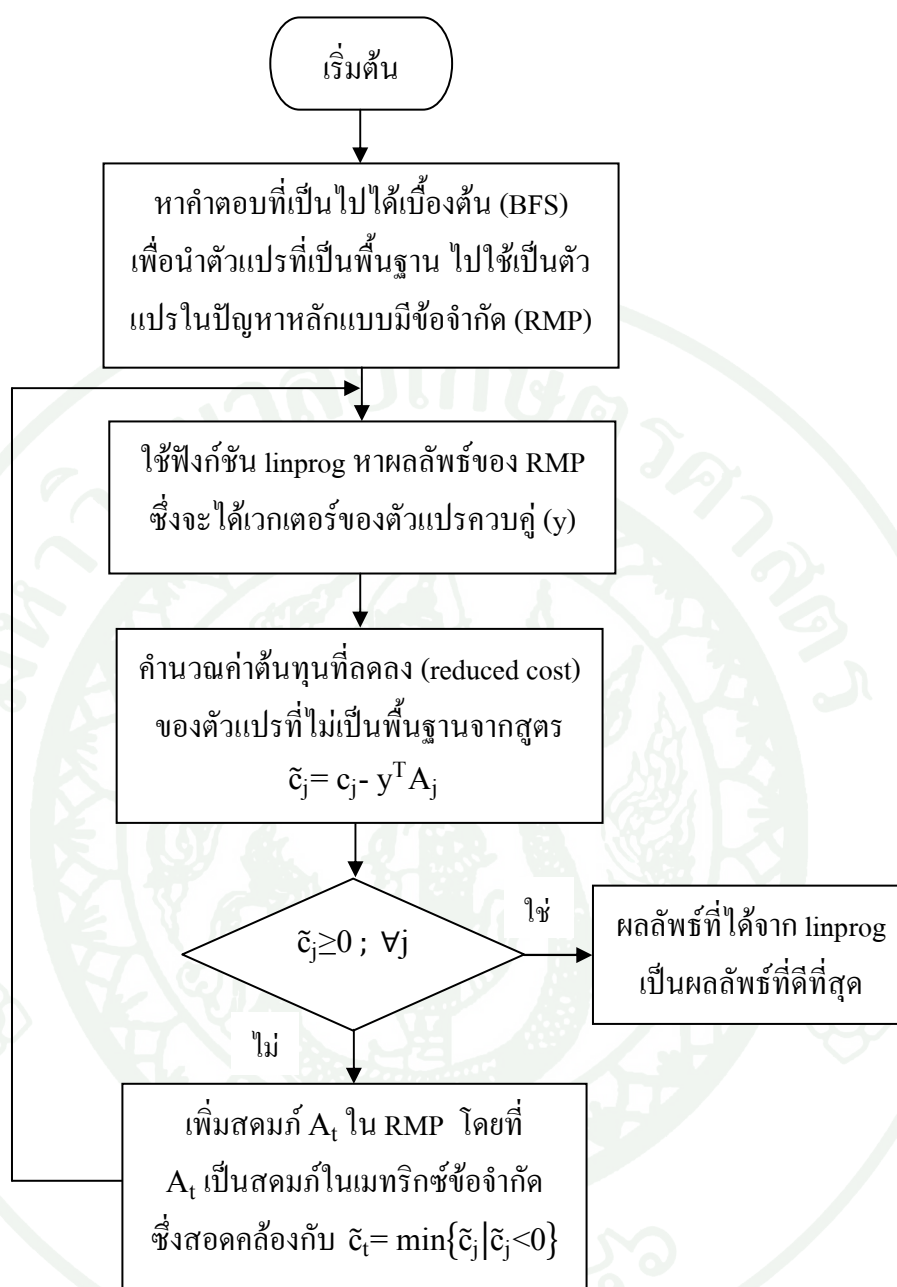
2. ขั้นตอนหลัก สำหรับแต่ละกรณีของขั้นตอนเริ่มต้น ดำเนินการดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 หาผลลัพธ์ของ RMP ด้วยฟังก์ชัน `linprog` ในโปรแกรม MATLAB

ขั้นที่ 2 คำนวณหาต้นทุนที่ลดลงของตัวแปรที่ไม่เป็นพื้นฐานโดยใช้เวกเตอร์ของตัวแปรควบคู่ที่ได้จากขั้นที่ 1

ขั้นที่ 3 ตรวจสอบว่าได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดหรือไม่ ตามที่แสดงในหัวข้อการตรวจเอกสาร

แผนภาพแสดงขั้นตอนการดำเนินการของเทคนิควิธีการสร้างสมรรถ แสดงในภาพที่ 1 และ ส่วนของโปรแกรม MATLAB ของการประมาณค่าเมทริกซ์ P ด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด และหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้เทคนิควิธีการสร้างสมรรถ แสดงในภาคผนวก ข



ภาพที่ 1 ขั้นตอนของเทคนิควิธีการสร้างสดมภ์

ตัวอย่างแสดงการประมาณค่า p_{ij} ด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLAD) และหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้เทคนิคการสร้างสมการ (CG) ซึ่งจะใช้ข้อมูลในปีที่ 17-19 ของตารางที่ 1 ดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ข้อมูลตัวอย่างสำหรับอธิบายขั้นตอนของเทคนิคการสร้างสมการ

ปีที่	ยี่ห้อหรือ		
	A	B	C
17	0.3579	0.3653	0.2768
18	0.3527	0.3851	0.2622
19	0.3276	0.3875	0.2849

จากข้อมูลตัวอย่างพบว่า

จำนวนสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ (n) = 3

จำนวนช่วงเวลาที่เก็บรวบรวมข้อมูล (S) = 3

จำนวนตัวแปรตัดสินใจ (N) = $3(3-1)+3^2=15$

จำนวนข้อจำกัด (M) = $2(3)(3-1)+3=15$

โดยเวกเตอร์ x เวกเตอร์ c เวกเตอร์ b_{all} และเมทริกซ์ A_{all} แสดงในตารางที่ 3

ดำเนินการตามขั้นตอนต่าง ๆ ดังนี้

1. ขั้นตอนเริ่มต้น

หาคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นเพื่อสร้างตัวแบบของปัญหาหลักแบบมีข้อจำกัด (RMP)

โดยกำหนดให้ตัวแปรเริ่มต้นประกอบด้วย ตัวแปร $U_{j(k)}$ ทุกค่า j, k และ p_{ij} ทุกค่า $i=j$ จะได้
เวกเตอร์ x เวกเตอร์ c เวกเตอร์ b_{all} และเมทริกซ์ A_{all} แสดงในตารางที่ 4

2. ขั้นตอนหลัก (รอบที่ 1)

ขั้นที่ 1 หาผลลัพธ์ของ RMP ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรพื้นฐาน 9 ตัวแปร ด้วยฟังก์ชัน

linprog ในโปรแกรม MATLAB ได้ค่า LAD เท่ากับ 0.8989

ขั้นที่ 2 โดยใช้เวกเตอร์ของตัวแปรควบคู่ที่ได้จากขั้นที่ 1 คำนวณหาต้นทุนที่ลดลง (rc) ของตัวแปรที่ไม่เป็นพื้นฐาน ซึ่งได้แก่ ตัวแปร p_{12} p_{32} และ p_{13}

ขั้นที่ 3 ตรวจสอบว่าได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดหรือไม่ โดยพบว่าตัวแปรที่ไม่เป็นพื้นฐานทุกตัวมีค่าน้อยกว่า 0 ซึ่งแสดงว่าค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) เท่ากับ 0.8989 ยังไม่ใช่ค่าที่ต่ำที่สุด และค่า rc ของ p_{12} มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือสมมติในเมทริกซ์ข้อจำกัด A_{all} ที่สอดคล้องกับตัวแปร p_{12} จะถูกเพิ่มเข้าไปใน RMP แล้ววนกลับไปทำขั้นที่ 1 (มีตัวแปรพื้นฐานเป็น 10 ตัวในรอบที่ 2)

ดำเนินการตามขั้นตอนหลักเช่นเดียวกันนี้จนได้ค่า LAD ที่ต่ำที่สุด นั่นคือค่า rc ของตัวแปรที่ไม่เป็นพื้นฐานทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ซึ่งแสดงผลสำหรับแต่ละรอบของการหาผลลัพธ์ในตารางที่ 5

ตารางที่ 3 เวกเตอร์ของ x เวกเตอร์ c เวกเตอร์ b_{all} และเมทริกซ์ A_{all}

	$u_{1(1)}$	$u_{2(1)}$	$u_{3(1)}$	$u_{1(2)}$	$u_{2(2)}$	$u_{3(2)}$	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{12}	p_{22}	p_{32}	p_{13}	p_{23}	p_{33}	b_{all}
$c =$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	-1	0	0	0	0	0	-0.3579	-0.3653	-0.2768	0	0	0	0	0	0	-0.3527
	-1	0	0	0	0	0	0.3579	0.3653	0.2768	0	0	0	0	0	0	0.3527
	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-0.3579	-0.3653	-0.2768	0	0	0	-0.3851
	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0.3579	0.3653	0.2768	0	0	0	0.3851
	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.3579	-0.3653	-0.2768	-0.2622
	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.3579	0.3653	0.2768	0.2622
	0	0	0	-1	0	0	-0.3527	-0.3851	-0.2622	0	0	0	0	0	0	-0.3276
$A_{all} =$	0	0	0	-1	0	0	0.3527	0.3851	0.2622	0	0	0	0	0	0	0.3276
	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-0.3527	-0.3851	-0.2622	0	0	0	-0.3875
	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0.3527	0.3851	0.2622	0	0	0	0.3875
	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-0.3527	-0.3851	-0.2622	-0.2849
	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0.3527	0.3851	0.2622	0.2849
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1

ตารางที่ 4 เวกเตอร์ของ x เวกเตอร์ c เวกเตอร์ b_{all} และเมทริกซ์ A_{all} ในปัญหาหลักแบบมีข้อจำกัด (RMP)

	$u_{1(1)}$	$u_{2(1)}$	$u_{3(1)}$	$u_{1(2)}$	$u_{2(2)}$	$u_{3(2)}$	p_{11}	p_{22}	p_{33}	b
$c_r =$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	
	-1	0	0	0	0	0	-0.3579	0	0	-0.3527
	-1	0	0	0	0	0	0.3579	0	0	0.3527
	0	-1	0	0	0	0	0	-0.3653	0	-0.3851
	0	-1	0	0	0	0	0	0.3653	0	0.3851
	0	0	-1	0	0	0	0	0	-0.2768	-0.2622
	0	0	-1	0	0	0	0	0	0.2768	0.2622
$A_r =$	0	0	0	-1	0	0	-0.3527	0	0	-0.3276
	0	0	0	-1	0	0	0.3527	0	0	0.3276
	0	0	0	0	-1	0	0	-0.3851	0	-0.3875
	0	0	0	0	-1	0	0	0.3851	0	0.3875
	0	0	0	0	0	-1	0	0	-0.2622	-0.2849
	0	0	0	0	0	-1	0	0	0.2622	0.2849
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

ตารางที่ 5 ผลลัพธ์จากการใช้เทคนิคการสร้างสมมติ

รอบที่	จำนวน ตัวแปร	LAD	rc						ตัวแปรที่เพิ่ม เข้าใน RMP
			P ₂₁	P ₃₁	P ₁₂	P ₃₂	P ₁₃	P ₂₃	
1	9	0.0898	1.50	0.52	-1.42*	-0.55	-0.71	0.73	P ₁₂
2	10	0.0746	0	-0.03	0	-0.03	0.01	-0.04*	P ₂₃
3	11	0.0723	0	-0.06*	0	-0.06	0.05	0	P ₃₁
4	12	0.0188	0.05	0	0	0.02	0	0	-

หมายเหตุ * คือค่า rc ที่ต่ำที่สุด

ผลลัพธ์ในรอบสุดท้าย สรุปได้ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} U_{(1)} \\ U_{(2)} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่} \quad U_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0094 \\ 0 \\ 0.0085 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2121 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.7879 \\ 0.2822 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7178 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของข้อมูลตัวอย่างแสดงดังต่อไปนี้

$$P = \begin{bmatrix} 0.2121 & 0.7879 & 0 \\ 0 & 0.2822 & 0.7178 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เปรียบเทียบผลลัพธ์

ทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ โดยแยกพิจารณาดังนี้

1. เปรียบเทียบภายในวิธีการประมาณค่าเดียวกัน แบ่งได้ดังนี้

1.1 การประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS)

ทำการเปรียบเทียบค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Sum of Square Error : SSE) และเวลาที่ใช้ในการประมาณค่าระหว่างวิธีการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรงกับการใช้เทคนิคการแบ่งส่วนโดยประมาณ (AD) ช่วยในการหาผลลัพธ์

1.2 การประมาณค่าด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLAD) แบ่งเป็น

1.2.1 สำหรับการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยเทคนิคการสร้างสมการ (CG) ทำการเปรียบเทียบเวลาเฉลี่ยและจำนวนตัวแปร โดยเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า ระหว่างกรณีที่กำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นแบบที่ 1 กับแบบที่ 2

1.2.2 เปรียบเทียบค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า ระหว่างวิธีการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยการใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรงกับการใช้เทคนิค CG

2. เปรียบเทียบระหว่างวิธีการประมาณค่า

ทำการเปรียบเทียบค่า SSE และ เวลาที่ใช้ในการประมาณค่าระหว่างวิธี RLS กับวิธี RLAD

วิธีการที่ใช้ในการเปรียบเทียบมี 2 แบบ คือ

- การเปรียบเทียบทางสถิติ ด้วยการทดสอบสมมติฐานแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ (Nonparametric Test) ซึ่งในการวิจัยนี้เลือกใช้วิธีการทดสอบของ Wilcoxon Matched Paired Test ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 โดยใช้โปรแกรม R ช่วยในการคำนวณ

- การพิจารณาจากค่าร้อยละความแตกต่าง (percentage difference) ของค่าที่ต้องการเปรียบเทียบ ซึ่งมีสูตรการคำนวณดังนี้

$$\text{ค่าร้อยละความแตกต่าง} = \frac{\text{ค่าที่ใช้ในการอ้างอิง}-\text{ค่าที่ต้องการเปรียบเทียบ}}{\text{ค่าที่ใช้ในการอ้างอิง}} \times 100$$

สำหรับค่าที่ใช้ในการอ้างอิง (reference value) กำหนดดังนี้

- สำหรับการเปรียบเทียบในข้อ 1.1 จะใช้ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ฟังก์ชัน quadprog เป็นค่าอ้างอิง
- สำหรับการเปรียบเทียบในข้อ 1.2.1 จะใช้ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เทคนิค CG โดยการกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นแบบที่ 1 เป็นค่าอ้างอิง
- สำหรับการเปรียบเทียบในข้อ 1.2.2 จะใช้ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ฟังก์ชัน linprog เป็นค่าอ้างอิง
- สำหรับการเปรียบเทียบในข้อ 2 จะใช้ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ฟังก์ชัน quadprog หรือ ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เทคนิค AD เป็นค่าอ้างอิง

ผลของการเปรียบเทียบจะนำเสนอในหัวข้อผลและวิจารณ์

วิเคราะห์และสรุปผลการวิจัย

สำหรับการวิเคราะห์จะนำเสนอในหัวข้อผลและการวิจารณ์ ส่วนสรุปผลการวิจัยจะนำเสนอในหัวข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

ผลและวิจารณ์

ผล

เมื่อนำข้อมูลที่จำลองขึ้นในกรณีต่าง ๆ มาทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS) และวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLAD) ดังรายละเอียดที่แสดงในหัวข้อวิธีการ โดยแต่ละกรณีจะมีการทำซ้ำ 5 รอบ ซึ่งจะนำเสนอผลการศึกษาลำดับต่อไปนี้

1. การประมาณค่าด้วยวิธี RLS นำเสนอผลการศึกษาลำเนกตามวิธีการที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ ดังนี้

1.1 การหาผลลัพธ์โดยใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง ดังแสดงในตารางที่ 6

1.2 การหาผลลัพธ์โดยใช้เทคนิควิธีการแบ่งส่วน (AD) ดังแสดงในตารางที่ 7

2. การประมาณค่าด้วยวิธี RLAD นำเสนอผลการศึกษาลำเนกตามวิธีการที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ ดังนี้

2.1 การหาผลลัพธ์โดยใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรง ดังแสดงในตารางที่ 8

2.2 การหาผลลัพธ์โดยใช้เทคนิควิธีการสร้างสมก้ (CG) เมื่อกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นแบบที่ 1 ดังแสดงในตารางที่ 9

2.3 การหาผลลัพธ์โดยใช้เทคนิควิธี CG เมื่อกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นแบบที่ 2 ดังแสดงในตารางที่ 10

3. การเปรียบเทียบผลลัพธ์ นำเสนอผลการเปรียบเทียบจำแนกดังนี้

3.1 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ระหว่างวิธีการหาผลลัพธ์ด้วยฟังก์ชัน quadprog โดยตรงกับการใช้เทคนิควิธี AD โดยแสดงในตารางที่ 11

3.2 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากวิธี CG ระหว่างการกำหนดคำตอบเบื้องต้นแบบที่ 1 กับแบบที่ 2 โดยแสดงในตารางที่ 12

3.3 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ระหว่างวิธีการหาผลลัพธ์ด้วยฟังก์ชัน linprog โดยตรงกับการใช้เทคนิควิธี CG เมื่อกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นแบบที่ 1 ดังแสดงในตารางที่ 13

3.4 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ระหว่างวิธี RLS กับวิธี RLAD ดังแสดงในตารางที่ 14 และตารางที่ 15

ผลจากการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ
ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS)

ตารางที่ 6 ค่าเฉลี่ยของผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) และเวลาเฉลี่ยที่ใช้ใน
การประมาณค่า ที่ได้จากการใช้ฟังก์ชัน quadprog

จำนวนสถานะ n	จำนวนช่วงเวลา S	ฟังก์ชัน quadprog	
		SSE	เวลาเฉลี่ยในการประมาณ (วินาที)
60	10	0.00004	20.2087
	20	0.00011	20.1708
	30	0.00012	19.8749
80	10	0.00003	125.3827
	20	0.00004	125.4699
	30	0.00010	125.2306
100	10	0.00003	505.9440
	20	0.00005	508.5041
	30	0.00006	502.2330
120	10	0.00004	1772.5
	20	0.00006	1720.2
	30	0.00004	1789.5
140	10	0.00005	4736.6
	20	0.00007	4752.3
	30	0.00008	4816.7

ตารางที่ 6 (ต่อ)

จำนวนสถานะ n	จำนวนช่วงเวลา S	ฟังก์ชัน quadprog	
		SSE	เวลาเฉลี่ยในการประมาณ (วินาที)
160	10	0.00012	10,582
	20	0.00010	10,643
	30	0.00008	10,633
180	10	0.00020	23,091
	20	0.00020	22,939
	30	0.00015	22,140
200	10	0.00001	40,677
	20	0.00005	40,908
	30	0.00021	40,707

จากตารางที่ 6 เมื่อพิจารณาค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) โดยเฉลี่ยพบว่าในทุกกรณีที่ทำการศึกษาคือ ทุกค่าของจำนวนสถานะ n และจำนวนช่วงเวลาเก็บข้อมูล S นั้นค่าของ SSE โดยเฉลี่ยจะมีค่าแตกต่างกันน้อยมาก แต่เมื่อพิจารณาเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าพบว่าในกรณีที่ n เท่ากัน แต่ S ต่างกัน ทุกค่า n ใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าแตกต่างกันน้อยมาก แต่เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าจะเพิ่มขึ้นด้วย โดยพบว่าในกรณีที่ n มีค่าเป็น 200 และ S เป็น 10 จะต้องใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณมากถึง 11 ชั่วโมง 17 นาที 57 วินาที

ตารางที่ 7 ค่าเฉลี่ยของผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) และเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า ที่ได้จากการใช้เทคนิควิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ (AD)

จำนวนสถานะ n	จำนวนช่วงเวลา S	วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ	
		SSE	เวลาเฉลี่ยในการประมาณ (วินาที)
60	10	0.000021	0.6221
	20	0.000062	0.6796
	30	0.000081	0.6647
80	10	0.000015	1.0302
	20	0.000019	1.0146
	30	0.000041	1.0156
100	10	0.000004	1.5290
	20	0.000012	1.6025
	30	0.000029	1.5755
120	10	0.000006	2.4385
	20	0.000019	2.4447
	30	0.000016	2.3920
140	10	0.000005	3.4427
	20	0.000015	3.5055
	30	0.000012	3.5445
160	10	0.000012	4.7269
	20	0.000011	4.6796
	30	0.000011	4.7336

ตารางที่ 7 (ต่อ)

จำนวนสถานะ n	จำนวนช่วงเวลา S	วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ	
		SSE	เวลาเฉลี่ยในการประมาณ (วินาที)
180	10	0.000058	6.7043
	20	0.000091	6.7934
	30	0.000093	6.9149
200	10	0.000008	8.4610
	20	0.000016	8.3299
	30	0.000016	8.5085
250	10	0.000008	16.4065
	20	0.000004	15.0969
	30	0.000005	15.5321
500	10	0.0000003	132.0469
	20	0.0000005	121.5843
	30	0.0000004	138.6656
1000	10	5.8845×10^{-8}	1314.1
	20	4.7418×10^{-8}	1187.7
	30	7.4658×10^{-8}	1141.3

จากตารางที่ 7 เมื่อพิจารณาค่าเฉลี่ยของ SSE พบว่าในทุกกรณีที่ทำการศึกษาคือ ทุกค่า n และ S นั้นของ SSE โดยเฉลี่ยจะมีความแตกต่างกันน้อยมาก แต่เมื่อพิจารณาเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าพบว่าในกรณีที่ n เท่ากัน แต่ S ต่างกัน ทุกค่า n ใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าแตกต่างกันน้อยมาก แต่เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าจะเพิ่มขึ้นด้วย โดยพบว่าเมื่อ n มีค่ามากเป็น 1000 และ S เป็น 10 จะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าเพียง 21 นาที 54 วินาที

ผลจากการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ
ด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด RLAD

ตารางที่ 8 ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) และเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า
ที่ได้จากการใช้ฟังก์ชัน linprog

จำนวนสถานะ n	จำนวนช่วงเวลา S	ฟังก์ชัน linprog	
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยในการประมาณ (วินาที)
60	10	0.0657	11.61806
	20	0.1438	111.7754
	30	0.2184	432.2648
80	10	0.0290	51.29846
	20	0.0951	349.7303
	30	0.1761	1246.2274
100	10	0.0290	74.4539
	20	0.0923	646.6208
	30	0.1411	1534.9
120	10	0.0274	175.6527
	20	0.0750	799.7542
	30	0.0674	2387.9
140	10	0.0237	294.616
	20	0.0930	2195.4
	30	Out of memory	

ตารางที่ 8 (ต่อ)

จำนวนสถานะ n	จำนวนช่วงเวลา S	ฟังก์ชัน linprog	
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยในการประมาณ (วินาที)
160	10	0.0115	392.9262
	20	0.0533	4250.056
	30	Out of memory	
180	10	0.0241	577.6557
	20	0.0369	4737.2
	30	Out of memory	
200	10	0.0205	1175.152
	20	Out of memory	
	30	Out of memory	
250	10	0.0226	2290.85
	20	Out of memory	
	30	Out of memory	
300	10	0.0101	3991.7
	20	Out of memory	
	30	Out of memory	
320	10	0.0026	20856.0
	20	Out of memory	
	30	Out of memory	
330	10	Out of memory	
	20	Out of memory	
	30	Out of memory	

จากตารางที่ 8 เมื่อทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด และหาผลลัพธ์โดยใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรงแล้ว ได้ผลดังนี้

เมื่อพิจารณาค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) พบว่าถ้าจำนวนช่วงเวลาที่เก็บรวบรวมข้อมูล S เท่ากัน ค่า LAD ในทุกจำนวนสถานะ n จะมีค่าแตกต่างกันค่อนข้างน้อย

สำหรับเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า พบว่าจะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าเพิ่มขึ้นเมื่อจำนวนสถานะ n และจำนวนช่วงเวลาที่เก็บรวบรวมข้อมูล S เพิ่มขึ้น

นอกจากนี้พบว่า การหาผลลัพธ์โดยใช้ฟังก์ชัน linprog นั้นสามารถประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟที่มีจำนวนสถานะ n ไม่เกิน 320 180 และ 120 เมื่อมีจำนวนช่วงเวลาที่เก็บข้อมูล S เป็น 10 20 และ 30 ตามลำดับ

ตารางที่ 9 ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) เวลาเฉลี่ยและจำนวนตัวแปรโดยเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า เมื่อหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยเทคนิคการสร้างสมรรถ (CG) ที่กำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นแบบที่ 1

จำนวน สถานะ n	จำนวนช่วงเวลา S	เทคนิค CG		
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยในการ ประมาณ (วินาที)	จำนวนตัวแปร ที่ใช้ในการประมาณ
60	10	0.0657	64.7237	1117
	20	0.1438	344.8695	1721
	30	0.2184	1179.03	2434
80	10	0.0290	221.8648	1520
	20	0.0951	674.604	2247
	30	0.1761	2754.0	3195
100	10	0.0290	275.9748	1822
	20	0.0923	1296.888	2775
	30	0.1411	3997.05	3921
120	10	0.0274	595.0517	2272
	20	0.0750	1656.4	3397
	30	0.0674	3387.6	4475
140	10	0.0237	761.7571	2614
	20	0.0930	2610.2	3925
	30	0.0874	8811.4	5601

ตารางที่ 9 (ต่อ)

จำนวน สถานะ n	จำนวน ช่วงเวลา S	เทคนิค CG		
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยในการ ประมาณ (วินาที)	จำนวนตัวแปร ที่ใช้ในการประมาณ
160	10	0.0115	987.3406	2877
	20	0.0533	3095.6	4444
	30	0.0840	10381.0	6170
180	10	0.0241	1449.24	3250
	20	0.0369	7336.95	5304
	30	-	-	-
200	10	0.0205	1497.78	3435
	20	0.0416	8777.3	5677
	30	-	-	-
300	10	0.0101	8299.9	5207
	20	0.8554	11183.5	6065
	30	-	-	-
400	10	0.0139	50754.0	8382
	20	-	-	-
	30	-	-	-

ตารางที่ 10 ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) เวลาเฉลี่ยและจำนวนตัวแปร โดยเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า เมื่อหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยเทคนิคการสร้างสมการ (CG) ที่กำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นแบบที่ 2

จำนวน สถานะ n	จำนวนช่วงเวลา S	เทคนิค CG		
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยในการ ประมาณ (วินาที)	จำนวนตัวแปร ที่ใช้ในการประมาณ
60	10	0.0657	110.2952	1160
	20	0.1438	455.8695	1717
	30	0.2184	1390.5	2462
80	10	0.0290	168.2282	1431
	20	0.0951	1109.9	2471
	30	0.1761	2878.5	3259
100	10	0.0290	435.0355	1972
	20	0.0923	1721.3	2920
	30	0.1411	3280.0	3843
120	10	0.0274	574.3485	2195
	20	0.0750	1796.6	3387
	30	0.0674	3991.6	4402
140	10	0.0237	871.0589	2493
	20	0.0930	2828.6	3774
	30	0.0874	9665.4	5569
160	10	0.0115	1176.9	2740
	20	0.0533	4441.5	4476
	30	0.0840	11498.0	6156

ตารางที่ 10 (ต่อ)

จำนวน สถานะ n	จำนวนช่วงเวลา S	เทคนิค CG		
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยในการ ประมาณ (วินาที)	จำนวนตัวแปร ที่ใช้ในการประมาณ
180	10	0.0241	1542.1	3520
	20	0.0369	9658.0	5142
	30	-	-	-
200	10	0.0205	2255.5	3841
	20	0.0416	9837.9	5513
	30	-	-	-
300	10	0.0101	7998.0	5305
	20	0.8554	13543.0	6026
	30	-	-	-
400	10	0.0139	40644.0	7293
	20	-	-	-
	30	-	-	-

จากตารางที่ 9 และ 10 ซึ่งเป็นผลจากการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด และหาผลลัพธ์โดยใช้เทคนิคการสร้างสมการซึ่งกำหนดคำตอบเบื้องต้นที่เป็นไปได้แบบที่ 1 และแบบที่ 2 ตามลำดับ พบว่าทั้งสองตารางให้ผลลัพธ์ไปในทิศทางเดียวกัน นั่นคือเมื่อพิจารณาจำนวนสถานะ n ที่เท่ากัน แต่จำนวนช่วงเวลาเก็บข้อมูล S เพิ่มขึ้น เวลาเฉลี่ยและจำนวนตัวแปรเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าจะเพิ่มมากขึ้น ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณา S ที่เท่ากันแต่ n เพิ่มขึ้น เวลาเฉลี่ยและจำนวนตัวแปรเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าจะเพิ่มขึ้นด้วย

ตารางที่ 11 ค่าเฉลี่ยของผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสองและเวลาเฉลี่ย (วินาที) ที่ใช้ในการประมาณค่า จำแนกตามวิธีการที่ใช้ในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด และร้อยละความแตกต่างของค่า SSE กับเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าระหว่างทั้งสองวิธี

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวนสถานะ n	ฟังก์ชัน quadprog		วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ (AD)		ร้อยละ	ร้อยละ
		SSE	เวลาในการ ประมาณ	SSE	เวลาในการ ประมาณ	ความแตกต่าง ของค่า SSE	ความแตกต่าง ของเวลา
10	60	0.00004	20.2087	0.000021	0.6221	47.50	96.92
	80	0.00003	125.3827	0.000015	1.0302	50.00	99.18
	100	0.00003	505.9440	0.000004	1.5290	86.67	99.67
	120	0.00004	1772.5	0.000006	2.4385	85.00	99.86
	140	0.00005	4736.6	0.000005	3.4427	90.00	99.92
	160	0.00012	10,582	0.000012	4.7269	90.00	99.96
	180	0.00020	23,091	0.000058	6.7043	71.00	99.97
	200	0.00001	40,677	0.000008	8.4610	20.00	99.98

ตารางที่ 11 (ต่อ)

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวนสถานะ n	ฟังก์ชัน quadprog		วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ		ร้อยละ	ร้อยละ
		SSE	เวลาในการ ประมาณ	SSE	เวลาในการ ประมาณ	ความแตกต่าง ของค่า SSE	ความแตกต่าง ของเวลา
20	60	0.00011	20.1708	0.000062	0.6796	43.64	96.63
	80	0.00004	125.4699	0.000019	1.0146	52.50	99.19
	100	0.00005	508.5041	0.000012	1.6025	76.00	99.68
	120	0.00006	1720.2	0.000019	2.4447	68.33	99.86
	140	0.00007	4752.3	0.000015	3.5055	78.57	99.93
	160	0.00010	10,643	0.000011	4.6796	89.00	99.96
	180	0.00020	22,939	0.000091	6.7934	54.50	99.97
	200	0.00005	40,908	0.000016	8.3299	68.00	99.98

ตารางที่ 11 (ต่อ)

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวนสถานะ n	ฟังก์ชัน quadprog		วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ		ร้อยละ	ร้อยละ
		SSE	เวลาในการ ประมาณ	SSE	เวลาในการ ประมาณ	ความแตกต่าง ของค่า SSE	ความแตกต่าง ของเวลา
30	60	0.00012	19.8749	0.000081	0.6647	32.5	96.66
	80	0.00010	125.2306	0.000041	1.0156	59.0	99.19
	100	0.00006	502.2330	0.000029	1.5755	51.67	99.69
	120	0.00004	1789.5	0.000016	2.3920	60.00	99.87
	140	0.00008	4816.7	0.000012	3.5445	85.00	99.93
	160	0.00008	10,633	0.000011	4.7336	86.25	99.96
	180	0.00015	22,140	0.000093	6.9149	38.00	99.97
	200	0.00021	40,707	0.000016	8.5085	92.38	99.98

ผลการเปรียบเทียบ

จากตารางที่ 11 เมื่อทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด แล้วหาผลลัพธ์โดยใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง กับการใช้วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณเปรียบเทียบกัน โดยพิจารณาจากผลการทดสอบเปรียบเทียบความแตกต่างของค่า SSE ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ระหว่างวิธีการทั้งสอง และพิจารณาค่าร้อยละความแตกต่างของค่า SSE และเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า ได้ผลดังนี้

ในการทดสอบเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) โดยเฉลี่ย ระหว่างวิธีการหาผลลัพธ์ด้วยการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง กับการใช้วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ ผลการคำนวณค่าความน่าจะเป็นของ Wilcoxon ได้ 0.000019 นั่นคือ ทั้ง 2 วิธีข้างต้นให้ค่า SSE แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ และจากค่าร้อยละความแตกต่าง พบว่าการใช้วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ จะให้ค่า SSE ต่ำกว่าการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง ในทุกกรณีที่ทำการศึกษาซึ่งส่วนใหญ่จะมีค่าร้อยละความแตกต่างเกินร้อยละ 50

สำหรับเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า พบว่าวิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ จะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่าการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง ในทุกกรณีที่ทำการศึกษา โดยมีค่าร้อยละความแตกต่างเกินกว่าร้อยละ 96

ตารางที่ 12 ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์กำลังสองน้อยที่สุดและเวลาเฉลี่ย (วินาที) ที่ใช้ในการประมาณค่า โดยใช้เทคนิคการสร้างสมการ (CG) จำแนกตามแบบการกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้น และร้อยละความแตกต่างของจำนวนตัวแปรที่ใช้ทั้งหมดโดยเฉลี่ยกับเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า ระหว่างทั้งสองแบบ

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	เทคนิค CG (แบบที่ 1)			เทคนิค CG (แบบที่ 2)			ร้อยละ	ร้อยละ
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ความแตกต่าง ของเวลา	ความแตกต่าง ของจำนวน ตัวแปร
10	60	0.0657	64.7237	1117	0.0657	110.2952	1160	-70.41	-3.85
	80	0.0290	221.8648	1520	0.0290	168.2282	1431	24.18	5.86
	100	0.0290	275.9748	1822	0.0290	435.0355	1972	-57.64	-8.23
	120	0.0274	463.3648	2272	0.0274	574.3485	2195	-23.95	3.39
	140	0.0237	761.7571	2614	0.0237	871.0589	2493	-14.35	4.62
	160	0.0115	987.3406	2877	0.0115	1176.9	2740	-19.20	4.76
	180	0.0241	1449.24	3250	0.0241	1542.1	3520	-6.41	-8.31
	200	0.0205	1497.78	3435	0.0205	2255.5	3464	-50.59	-0.84

ตารางที่ 12 (ต่อ)

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	เทคนิค CG (แบบที่ 1)			เทคนิค CG (แบบที่ 2)			ร้อยละ	ร้อยละ
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ความแตกต่าง ของเวลา	ความแตกต่าง ของจำนวน ตัวแปร
20	60	0.1438	344.8695	1721	0.1438	455.8695	1717	-0.32	0.23
	80	0.0951	674.604	2247	0.0951	1109.9	2471	-64.53	-10.10
	100	0.0923	1296.888	2775	0.0923	1721.3	2920	-32.73	-5.23
	120	0.0750	1656.4	3397	0.0750	1796.6	3387	-8.46	0.29
	140	0.0930	2610.2	3925	0.0930	2828.6	3774	-8.37	3.85
	160	0.0533	3095.6	4444	0.0533	4441.5	4476	-43.48	-0.72
	180	0.0369	7336.95	5304	0.0369	9658.0	5142	-31.64	3.05
	200	0.0416	8777.3	5677	0.0416	9837.9	5513	-12.08	2.89

ตารางที่ 12 (ต่อ)

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	เทคนิค CG (แบบที่ 1)			เทคนิค CG (แบบที่ 2)			ร้อยละ	ร้อยละ
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ความแตกต่าง ของเวลา	ความแตกต่าง ของจำนวน ตัวแปร
30	60	0.2184	1179.03	2434	0.2184	1390.5	2462	-17.94	-8.55
	80	0.1761	2754.0	3195	0.1761	2878.5	3259	-4.52	-2.00
	100	0.1411	3997.05	3921	0.1411	3280.0	3843	17.94	1.99
	120	0.0674	3387.6	4475	0.0674	3991.6	4402	-17.83	1.63
	140	0.0874	8811.4	5601	0.0874	9665.4	5569	-9.69	0.57
	160	0.0840	10381.0	6170	0.0840	11498.0	6156	-10.76	0.23

จากตารางที่ 12 เมื่อทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด โดยใช้เทคนิควิธีการสร้างสมการในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ซึ่งกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้น 2 แบบเปรียบเทียบกัน โดยพิจารณาจาก ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) ค่าร้อยละความแตกต่างของเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า และค่าร้อยละของตัวแปรที่ใช้ในการประมาณค่าได้ผลดังนี้

ในส่วน of ค่าเฉลี่ยของ LAD พบว่าการกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นทั้ง 2 แบบ จะให้ค่า LAD เท่ากัน

เมื่อพิจารณาจำนวนตัวแปรที่ใช้ในการประมาณค่า นั้น การใช้เทคนิควิธีการสร้างสมการในการหาผลลัพธ์โดยการกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นทั้ง 2 แบบ จะใช้จำนวนตัวแปรแตกต่างกันไม่มากนัก

ส่วนเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า นั้น การกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นแบบที่ 2 จะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่ามากกว่าแบบที่ 1 ในทุกกรณีที่ทำการศึกษา

ตารางที่ 13 ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์กำลังสองน้อยที่สุด เวลาเฉลี่ย (วินาที) และจำนวนตัวแปร โดยเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า จำแนกตามวิธีการ
หาผลลัพธ์ และแสดงค่าร้อยละความแตกต่างของจำนวนตัวแปรที่ใช้ทั้งหมดโดยเฉลี่ยกับเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าระหว่างทั้งสองวิธี

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	การใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรง			เทคนิคการสร้างสมการ (CG) แบบที่ 1			ร้อยละ ความแตกต่าง ของเวลา	ร้อยละของ จำนวนตัวแปร ที่ถูกใช้ใน วิธี CG
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย		
10	60	0.0657	11.61806	4140	0.0657	64.7237	1117	-457.10	26.97
	80	0.0290	51.29846	7120	0.0290	221.8648	1520	-332.50	21.35
	100	0.0290	74.4539	10900	0.0290	275.9748	1822	-270.67	16.71
	120	0.0274	175.6527	15480	0.0274	595.0517	2272	-238.77	14.67
	140	0.0237	294.616	20860	0.0237	761.7571	2614	-176.30	12.53
	160	0.0115	392.9262	27040	0.0115	987.3406	2877	-151.28	10.64
	180	0.0241	577.6557	34020	0.0241	1449.24	3250	-150.88	9.55
	200	0.0205	1175.152	41800	0.0205	1497.78	3435	-27.45	8.22
	250	0.0226	2290.85	64750	0.0226	4170.2	4301	-82.04	6.64

ตารางที่ 13 (ต่อ)

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	การใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรง			เทคนิค CG (แบบที่ 1)			ร้อยละ	ร้อยละของ
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ความแตกต่าง ของเวลา	จำนวนตัวแปร ที่ถูกใช้ใน วิธี CG
10	300	0.0101	3991.7	92700	0.0101	8299.9	5207	-107.93	5.62
	330	Out of memory		111870	0.0148	10684.23	5596	-	5.00
	400	Out of memory		163600	0.0139	50754.0	8382	-	5.12
20	60	0.1438	111.7754	4740	0.1438	344.8695	1721	-208.54	36.31
	80	0.0951	349.7303	7920	0.0951	674.604	2247	-92.89	28.37
	100	0.0923	646.6208	11900	0.0923	1296.888	2775	-100.56	23.32
	120	0.0750	799.7542	16680	0.0750	1656.4	3397	-107.11	20.37
	140	0.0930	2195.4	22260	0.0930	2729.1	3968	-24.31	17.83
	160	0.0533	4250.056	28640	0.0533	7117.3	4981	-67.46	17.39
	180	Out of memory		35820	0.0369	7336.95	5304	-	14.81

ตารางที่ 13 (ต่อ)

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	การใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรง			เทคนิค CG (แบบที่ 1)			ร้อยละ	ร้อยละของ
		ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ค่าเฉลี่ยของ LAD	เวลาเฉลี่ยใน การประมาณ	จำนวน ตัวแปร ที่ใช้โดยเฉลี่ย	ความแตกต่าง ของเวลา	จำนวนตัวแปร ที่ถูกใช้ใน วิธี CG
30	60	0.2184	432.2648	5340	0.2184	1179.03	2434	-172.76	64.31
	80	0.1761	1246.2274	8720	0.1761	2754.0	3195	-120.99	36.64
	100	0.1411	1534.9	12900	0.1411	3997.05	3921	-160.41	30.40
	120	0.0674	2387.9	17880	0.0674	3387.6	4475	-41.90	25.03
	140	Out of memory		23660	0.0874	8811.4	5601	-	23.67

จากตารางที่ 13 เมื่อทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด แล้วหาผลลัพธ์โดยใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรง กับการใช้เทคนิควิธีการสร้างสมรรถ ซึ่งกำหนดคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้น (แบบที่1) เปรียบเทียบกัน โดยพิจารณาจาก ค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด (LAD) ค่าร้อยละความแตกต่างของเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า และค่าร้อยละของตัวแปรที่ใช้ในการประมาณค่า ได้ผลดังนี้

ในส่วน of ค่าเฉลี่ยของ LAD พบว่าทั้งสองวิธีการหาผลลัพธ์คือ การใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรง กับการใช้เทคนิควิธีการสร้างสมรรถ จะให้ค่า LAD เท่ากัน

เมื่อพิจารณาจำนวนตัวแปรที่ใช้ในการประมาณค่า นั้น การใช้เทคนิควิธีการสร้างสมรรถในการหาผลลัพธ์จะใช้จำนวนตัวแปรน้อยกว่าการหาผลลัพธ์ด้วยฟังก์ชัน linprog โดยตรง คือใช้ตัวแปรน้อยกว่าร้อยละ 30 ในกรณีที่ S เท่ากับ 10 น้อยกว่าร้อยละ 40 และ 65 ในกรณีที่ S เท่ากับ 20 และ 30 ตามลำดับ ในทุกค่า S จำนวนตัวแปรที่ใช้ในการประมาณค่าจะลดลงเมื่อ n เพิ่มขึ้น

ส่วนเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าของเทคนิควิธีการสร้างสมรรถจะมากกว่าการหาผลลัพธ์โดยใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรง ในทุกกรณีที่ทำการศึกษา

นอกจากนี้พบว่า การใช้เทคนิควิธีการสร้างสมรรถในการประมาณค่าสามารถประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟที่มีขนาดใหญ่กว่าการใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรง ซึ่งพิจารณาได้จากค่า n ในแต่ละระดับของค่า S คือที่ระดับ S เท่ากับ 10 20 และ 30 การใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรงจะประมาณค่าเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะที่มีจำนวนสถานะ n ไม่เกิน 330 180 และ 140 ตามลำดับ ในขณะที่การใช้เทคนิคการสร้างสมรรถสามารถประมาณค่าเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะที่มีจำนวนสถานะดังกล่าวได้

ตารางที่ 14 ผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสองโดยเฉลี่ย จำแนกตามวิธีการที่ใช้ในการประมาณค่าและวิธีการหาผลลัพธ์ พร้อมแสดงค่าร้อยละความแตกต่างของค่า SSE ระหว่างวิธีต่างๆ

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	SSE			ร้อยละ	ร้อยละ
		RLS		RLAD	ความแตกต่าง ของ SSE (quadprog กับ RLAD)	ความแตกต่าง ของ SSE (AD กับ RLAD)
		ด้วยฟังก์ชัน quadprog	ด้วยเทคนิค AD			
10	60	0.00004	0.000021	0.00003	25.0	-42.9
	80	0.00003	0.000015	0.00002	33.3	-33.3
	100	0.00003	0.000004	0.00001	66.7	-150.0
	120	0.00004	0.000006	0.000002	95.0	66.7
	140	0.00005	0.000005	0.000003	94.0	40.0
	160	0.00012	0.000012	0.000008	93.3	33.3
	180	0.00002	0.000058	0.000009	55.0	84.5
	200	0.00001	0.000008	0.000002	80.0	75.0

ตารางที่ 14 (ต่อ)

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	SSE			ร้อยละ	ร้อยละ
		RLS		RLAD	ความแตกต่าง ของ SSE (quadprog กับ RLAD)	ความแตกต่าง ของ SSE (AD กับ RLAD)
		ด้วยฟังก์ชัน quadprog	ด้วยเทคนิค AD			
20	60	0.00011	0.000062	0.00007	36.36	-12.9
	80	0.00004	0.000019	0.00003	25.0	-57.9
	100	0.00005	0.000012	0.00002	60.0	-66.7
	120	0.00006	0.000019	0.000003	95.0	84.2
	140	0.00007	0.000015	0.000001	98.57	93.3
	160	0.00010	0.000011	0.000008	92.0	27.3
	180	0.00020	0.000091	0.000001	99.5	98.9
30	60	0.00012	0.000081	0.00012	0.0	-48.1
	80	0.00010	0.000041	0.00006	40.0	-46.3
	100	0.00006	0.000029	0.00003	50.0	-3.4
	120	0.00004	0.000016	0.00002	50.0	-25.0

จากตารางที่ 14 เมื่อทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีการประมาณค่า 2 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS) ซึ่งหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยการใช้ฟังก์ชัน quadprog กับเทคนิควิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ (AD) และประมาณค่าวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLAD) ซึ่งหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยการใช้ฟังก์ชัน linprog กับเทคนิควิธีการสร้างสมการ (CG) โดยพิจารณาจากผลการทดสอบเปรียบเทียบความแตกต่างของค่า SSE ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จำนวน 2 คู่ คือระหว่างการใช้ฟังก์ชัน quadprog กับ RLAD และระหว่างเทคนิค AD กับ RLAD โดยวิธีการประมาณค่า RLAD ไม่ได้แยกเป็น 2 วิธี เนื่องจากทั้ง 2 วิธีของการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดนั้นจะให้ค่า SSE เท่ากัน นอกจากนี้จะพิจารณาค่าร้อยละความแตกต่างของค่า SSE ได้ผลดังนี้

ในการทดสอบเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) โดยเฉลี่ย ระหว่างวิธีการหาผลลัพธ์ด้วยการใช้ฟังก์ชัน quadprog กับ RLAD ผลการคำนวณค่าความน่าจะเป็นของ Wilcoxon ได้ 0.00021 นั่นคือ วิธีการทั้งสอง ให้ค่า SSE แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ และจากค่าร้อยละความแตกต่าง พบว่าการใช้วิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด จะให้ค่า SSE ต่ำกว่าการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด โดยใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง ในทุกกรณีที่ทำการศึกษาซึ่งส่วนใหญ่จะมีค่าร้อยละความแตกต่างเกินร้อยละ 50

สำหรับการทดสอบระหว่างเทคนิควิธี AD กับ RLAD ผลการคำนวณค่าความน่าจะเป็นของ Wilcoxon ได้ 0.8248 นั่นคือ วิธีการทั้งสองให้ค่า SSE ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

ตารางที่ 15 เวลาเฉลี่ย (วินาที) ที่ใช้ในการประมาณค่า จำแนกตามวิธีการที่ใช้ในการประมาณค่าและวิธีการหาผลลัพธ์ พร้อมแสดงค่าร้อยละความแตกต่างของเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าระหว่างวิธีต่าง ๆ

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า				ร้อยละ	ร้อยละ	ร้อยละ	ร้อยละ
		RLS		RLAD		ความแตกต่าง	ความแตกต่าง	ความแตกต่าง	ความแตกต่าง
		ฟังก์ชัน	เทคนิค	ฟังก์ชัน	เทคนิค	ของเวลา	ของเวลา	ของเวลา	ของเวลา
		quadprog	AD	linprog	CG	(quadprog กับ linprog)	(quadprog กับ CG)	(AD กับ linprog)	(AD กับ CG)
10	60	20.2087	0.6221	11.6181	64.7237	42.5	-220.3	-1767.6	-10304.1
	80	125.3724	1.0302	51.2985	221.8648	59.1	-77.0	-4879.5	-24436.1
	100	505.9440	1.5290	74.4539	275.9748	85.3	45.5	-4769.4	-17949.4
	120	1772.5	2.4385	175.6527	595.0517	90.1	66.4	-7103.3	-24302.4
	140	4736.6	3.4427	294.616	761.7571	93.8	83.9	-8457.7	-22026.7
	160	10582.2	4.7269	392.9262	987.3406	96.3	90.7	-8212.6	-20787.7
	180	23091.4	6.7043	577.6557	1449.24	97.5	93.7	-8516.2	-21516.6
	200	40677.1	8.4610	1175.152	1497.78	97.1	96.3	-13789.0	-17602.2

ตารางที่ 15 (ต่อ)

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า				ร้อยละ	ร้อยละ	ร้อยละ	ร้อยละ
		RLS		RLAD		ความแตกต่าง	ความแตกต่าง	ความแตกต่าง	ความแตกต่าง
		ฟังก์ชัน	เทคนิค	ฟังก์ชัน	เทคนิค	ของเวลา	ของเวลา	ของเวลา	ของเวลา
		quadprog	AD	linprog	CG	(quadprog กับ linprog)	(quadprog กับ CG)	(AD กับ linprog)	(AD กับ CG)
20	60	20.1708	0.6796	111.7754	344.8695	-454.1	-1609.7	-16347.2	-50646.0
	80	125.4699	1.0146	349.7303	674.604	-178.7	-437.7	-34369.8	-66389.7
	100	508.5041	1.6025	646.6208	1296.888	-27.2	-145.2	-40250.8	-80829.0
	120	1720.2	2.4447	799.7542	1656.4	53.51	3.71	-32613.8	-67654.7
	140	4752.3	3.5055	2195.4	2610.2	53.80	45.08	-62527.3	-74360.1
	160	10,643	4.6796	4250.056	7117.3	60.07	33.13	-90720.9	-151992.0
	180	22,939	6.7934	4737.2	7336.95	79.35	68.02	-69632.4	-107901.0
30	60	19.8749	0.6647	329.9915	1370.1	-1560.3	-6793.6	-49545.2	-206023.0
	80	125.2306	1.0156	966.5548	3299.2	-671.8	-2534.5	-95070.8	-324752.0
	100	502.2330	1.5755	1534.9	4035.0	-205.6	-703.4	-97323.0	-256009.0
	120	1789.5	2.3920	2387.9	3387.6	-33.44	-89.30	-99728.6	-141522.0

จากตารางที่ 15 เมื่อพิจารณาเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า พบว่าการประมาณค่าโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS) ซึ่งหาผลลัพธ์ด้วยการใช้ฟังก์ชัน quadprog จะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่ามากกว่าวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLAD) ซึ่งหาผลลัพธ์ด้วยการใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรงในทุกจำนวนสถานะ n ของกรณีที่มีจำนวนช่วงเวลาที่เก็บข้อมูล S เท่ากับ 10 และ ในกรณีที่ n มากกว่า 100 เมื่อ S เท่ากับ 20

เมื่อเปรียบเทียบเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าระหว่างวิธี RLS ซึ่งหาผลลัพธ์ด้วยการใช้ฟังก์ชัน quadprog กับ วิธี RLAD ซึ่งหาผลลัพธ์ด้วยเทคนิคการสร้างสมการ (CG) พบว่า วิธี RLS ซึ่งหาผลลัพธ์ด้วยการใช้ฟังก์ชัน quadprog จะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่าวิธี RLAD ซึ่งหาผลลัพธ์ด้วยเทคนิคการสร้างสมการ (CG) ยกเว้นในกรณีที่ n มากกว่า 80 เมื่อ S เท่ากับ 10 และ ในกรณีที่ n มากกว่า 100 เมื่อ S เท่ากับ 20

เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าระหว่างวิธี RLS ซึ่งหาผลลัพธ์ด้วยการใช้เทคนิคการแบ่งส่วนโดยประมาณ (AD) กับ วิธี RLAD ทั้งการหาผลลัพธ์ด้วยการใช้ฟังก์ชัน linprog และการใช้เทคนิค CG นั้นพบว่าเทคนิค AD ใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่าทั้งสองวิธีการหาผลลัพธ์สำหรับการประมาณค่าด้วยวิธี RLAD ค่อนข้างมาก

วิจารณ์

ผลจากการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด

เมื่อทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด ซึ่งก็คือการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของตัวแบบปัญหาคำหนดการกำลังสอง แล้วใช้วิธีการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด 2 วิธีซึ่งสามารถวิเคราะห์ผลที่ได้ในแต่ละวิธีดังนี้

1. การใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง เมื่อพิจารณาเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า พบว่าเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าจะไม่ขึ้นอยู่กับจำนวนช่วงเวลาที่เก็บข้อมูล S แต่จะขึ้นอยู่กับจำนวนสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ n เท่านั้น นั่นคือเมื่อ n เพิ่มขึ้น เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าก็เพิ่มมากขึ้นจนอาจจะต้องใช้เวลามากถึง 11 ชั่วโมงเมื่อ n เป็น 200 ซึ่งสามารถ

วิเคราะห์ถึงสาเหตุได้ดังนี้คือเมื่อพิจารณาตัวแบบ (11) จะพบว่าจำนวนตัวแปรตัดสินใจเท่ากับ n^2 ตัวแปรและจำนวนข้อจำกัดมีเพียง n ข้อ ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับ S เลย

2. การใช้วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ (AD) ในการหาผลลัพธ์ เมื่อพิจารณาเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า พบว่าในแต่ละสถานการณ์ที่ทำการทดลองจะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าค่อนข้างน้อย ซึ่งสามารถวิเคราะห์ถึงสาเหตุได้ดังนี้ คือเนื่องจากวิธีนี้จะทำการแบ่งปัญหาเดิมให้เป็นปัญหาย่อยจำนวน n ปัญหา โดยจะยังไม่คำนึงถึงเงื่อนไข (3) ปัญหาย่อยแต่ละปัญหาก็มีความซับซ้อนน้อยกว่าปัญหาเดิมซึ่งจะง่ายต่อการหาผลลัพธ์ โดยวิเคราะห์แยกเป็นข้อเด่น-ข้อด้อย ได้ดังนี้

2.1 ข้อเด่น คือสามารถประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟที่มีจำนวนสถานะ n เป็น 1000 แต่ใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าเพียง 21 นาที

2.2 ข้อด้อย คือจุดเริ่มต้นของวิธีการจะเริ่มจากการเพิกเฉยต่อความสัมพันธ์ของตัวแปรตัดสินใจโดยพิจารณาว่าตัวแปรทั้งหมดเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งเป็นสิ่งที่ไม่ถูกต้อง

3. การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้ระหว่างการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง กับการใช้เทคนิคการแบ่งส่วนโดยประมาณ (AD) พบว่าเทคนิค AD ใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่าการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง ซึ่งน่าจะเป็นไปตามเหตุผลที่กล่าวไว้ในข้อ 2 และสำหรับค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) โดยเฉลี่ยนั้น เทคนิค AD ก็ให้ค่าที่ต่ำกว่าการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีที่ควรจะเป็นคือเทคนิค AD ที่เป็นวิธีโดยประมาณไม่ควรจะให้ค่า SSE ต่ำกว่าวิธีการหาผลลัพธ์โดยตรงด้วยฟังก์ชัน quadprog ในประเด็นนี้สามารถวิเคราะห์ได้ว่า เนื่องจากข้อมูลที่จำลองขึ้นเป็นข้อมูลที่มีคุณสมบัติใกล้เคียงกับลูกโซ่มาร์คอฟโดยสมบูรณ์ ซึ่งพิจารณาได้จากค่า SSE ที่มีค่าเข้าใกล้ 0 และเพื่อยืนยันความเชื่อนี้ ผู้วิจัยจึงได้ทำการทดลองใช้วิธีการทั้งสองกับข้อมูลที่มีความคลาดเคลื่อนมากๆ เช่น ข้อมูลที่ไม่เป็นไปตามทฤษฎีของมาร์คอฟ แต่นำมาประมาณค่าด้วยตัวแบบมาร์คอฟ พบว่าการใช้เทคนิค AD ให้ค่า SSE สูงกว่าการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง ดังแสดงในตารางผนวกที่ ก1

ผลจากการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ ด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด

เมื่อทำการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด ซึ่งสามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปของปัญหาคำหนดการเชิงเส้นแล้วใช้วิธีการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด 2 วิธีซึ่งสามารถวิเคราะห์ผลที่ได้ในแต่ละวิธีดังนี้

1. การใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรงในการหาผลลัพธ์ พบว่าเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าจะมากหรือน้อย ไม่ได้ขึ้นอยู่กับค่าของจำนวนสถานะ n เท่านั้น แต่จะขึ้นอยู่กับจำนวนช่วงเวลาที่เก็บข้อมูล S ด้วย ซึ่งสอดคล้องกับตัวแบบ (18) ที่มีจำนวนตัวแปรตัดสินใจเท่ากับ $n(S-1)+n^2$ ตัวแปร และมีจำนวนข้อจำกัดเท่ากับ $2n(S-1)+n$ ข้อ โดยจำนวนตัวแปรตัดสินใจและจำนวนข้อจำกัดจะส่งผลต่อขนาดของเมทริกซ์ข้อจำกัดที่มีผลต่อการประมวลผลของเครื่องคอมพิวเตอร์ เนื่องจากอุปกรณ์ (เครื่องคอมพิวเตอร์) ที่ใช้ในการวิจัยนี้มีข้อกำหนดเฉพาะในด้านของขนาดอาร์เรย์ที่เป็นไปได้สูงสุด (The maximum possible array) ที่สามารถประมวลผลได้คือ 640 เมกะไบต์ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากผลคูณของจำนวนตัวแปรตัดสินใจกับจำนวนข้อจำกัด โดยผลคูณดังกล่าวจะต้องไม่เกิน 6.4×10^8 ไบต์ ถ้าเกินก็จะไม่สามารถประมวลผลได้ดังปรากฏในผลการทดลองบางสถานการณ์ที่ไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้เนื่องจากมีหน่วยความจำไม่เพียงพอต่อการหาผลลัพธ์ (out of memory) สำหรับการคำนวณขนาดของเมทริกซ์ข้อจำกัดในแต่ละกรณีที่ทำการศึกษาแสดงในตารางผนวกที่ ก2

2. การใช้เทคนิคการสร้างสดมภ์ (CG) ในการหาผลลัพธ์ พบว่าในสถานการณ์ที่ใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรงไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้นั้น เทคนิค CG สามารถทำได้ เนื่องจากเทคนิค CG จะเริ่มจากการพิจารณาตัวแปรตัดสินใจเพียงบางส่วนแล้วค่อยๆ เพิ่มขึ้นครั้งละ 1 ตัวแปรโดยไม่ต้องพิจารณาตัวแปรทั้งหมด ซึ่งทำให้เมทริกซ์ข้อจำกัดมีขนาดเล็กลงและง่ายต่อการค้นหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด แต่ก็จะต้องทำกระบวนการซ้ำ ๆ กัน หลายรอบส่งผลให้เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าค่อนข้างมากเมื่อเทียบกับการใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรงในสถานการณ์ที่สามารถหาผลลัพธ์ได้ทั้ง 2 วิธี สำหรับเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าของเทคนิค CG นั้นอาจจะขึ้นอยู่กับทางเลือกคำตอบที่เป็นไปได้เบื้องต้นที่ใช้สร้างเป็น RMP ด้วยคือ ถ้าเริ่มต้นด้วยจำนวนตัวแปรที่มากกว่า จะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่า แต่เมื่อเทียบกับวิธี RLS ซึ่งหาผลลัพธ์โดยการ ใช้ฟังก์ชัน quadprog

นั่น วิธี CG จะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่าค่อนข้างมากในกรณีที่ n มีค่ามาก ๆ และ S มีค่าน้อย ๆ ในทางกลับกันถ้า n มีค่าน้อย ๆ และ S มีค่ามาก ๆ จะส่งผลทำให้ตัวแบบ (18) มีจำนวนข้อจำกัด มากกว่าจำนวนตัวแปร ดังนั้นอาจจะพิจารณาการใช้เทคนิค CG กับตัวแบบปัญหาควบคู่ของตัวแบบ (18) ซึ่งแสดงรายละเอียดในภาคผนวก ง

ผลการเปรียบเทียบระหว่างการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดกับวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด

เมื่อพิจารณาค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) โดยเฉลี่ยที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS) และหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยการใช้ฟังก์ชัน quadprog กับวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLAD) ซึ่งจะหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยการใช้ฟังก์ชัน linprog หรือการใช้เทคนิคการสร้างสมการ (CG) ก็จะทำให้ค่า SSE เท่ากัน พบว่าในทุกกรณีที่ทำการศึกษาวิธี RLAD จะให้ค่า SSE ต่ำกว่าวิธี RLS ด้วยการ ใช้ฟังก์ชัน quadprog ซึ่งเป็นเช่นเดียวกับกรณีการเปรียบเทียบระหว่าง 2 วิธีสำหรับการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดในการประมาณค่าด้วยวิธี RLS โดยคาดว่าจะมีเหตุผลเช่นเดียวกันกับที่กล่าวไว้ข้างต้น และผู้วิจัยได้ทำการทดลองวิธีการทั้งสองกับข้อมูลที่มีความคลาดเคลื่อนมาก ๆ ในลักษณะเดียวกัน ซึ่งพบว่าวิธี RLS ให้ค่า SSE ต่ำกว่าวิธี RLAD ดังแสดงในตารางผนวกที่ 2

สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

การศึกษาวิธีและข้อจำกัดของการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดและทำการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรง

การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด ซึ่งก็คือการหาผลลัพธ์ของปัญหาคำหนดการกำลังสองและหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดโดยใช้ฟังก์ชัน quadprog ของโปรแกรม MATLAB โดยตรงนั้นสามารถประมาณค่าได้ไม่ว่าจำนวนช่วงเวลาที่เก็บข้อมูล S จะเป็นเท่าไรก็ตามจะไม่ส่งผลต่อเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่า แต่ถ้าจำนวนสถานะ n ของลูกโซ่มาร์คอฟมีขนาดใหญ่มา ๆ เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าก็จะมากขึ้นจนอาจจะต้องใช้เวลามากกว่า 11 ชั่วโมง ดังแสดงในผลการวิจัยซึ่งเมื่อ n เป็น 200 จะต้องใช้เวลามากถึง 11 ชั่วโมง 17 นาที

การนำเสนอวิธีการประมาณค่าหรือเทคนิคในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด สำหรับการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟที่มีขนาดใหญ่

สำหรับการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟที่มีขนาดใหญ่และการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS) ในการประมาณค่า นั้นจะต้องใช้เวลาในการประมาณค่ามากกว่า 11 ชั่วโมง เมื่อ n มากกว่า 200 ในการวิจัยนี้ได้เสนอเป็น 2 แนวทางคือ

1. การประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดเหมือนเดิม แต่เสนอเทคนิควิธีในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยการใช้วิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ ซึ่งเทคนิควิธีนี้ช่วยให้การประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟที่มีขนาดใหญ่สามารถทำได้ในเวลาไม่ถึง 1 ชั่วโมง และถ้าข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้มีคุณสมบัติเข้าใกล้มาร์คอฟแบบสมบรูณ์ ค่า SSE ที่ได้จะมีค่าต่ำกว่าการใช้ฟังก์ชัน quadprog โดยตรงในทุกกรณี

ทำการศึกษา แต่มีข้อด้อยในส่วนของการเผชิญต่อความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตัดสินใจในตอนเริ่มต้นซึ่งเป็นสิ่งที่ไม่ถูกต้อง

2. การประมาณค่าด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLAD) แทนการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (RLS) ซึ่งถ้าข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้มีคุณสมบัติเข้าใกล้มาร์คอฟแบบสมบรูณ์ วิธี RLAD จะให้ค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) ที่ต่ำกว่าวิธี RLS และถ้าจำนวนช่วงเวลาที่เก็บข้อมูล S ไม่เกิน 10 แล้ววิธี RLAD จะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่าวิธี RLS โดยในการศึกษาวิธี RLAD นั้นจะจัดรูปให้อยู่ในรูปของตัวแบบของปัญหากำหนดการเชิงเส้น แล้วได้ทำการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด 2 วิธี ดังนี้

2.1 การหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยฟังก์ชัน linprog โดยตรง ซึ่งจะต้องใช้จำนวนตัวแปรตัดสินใจทั้งหมดในการพิจารณา โดยจำนวนตัวแปรตัดสินใจและจำนวนข้อจำกัดของปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่ได้จากการแปลงรูปของ RLAD จะขึ้นอยู่กับจำนวนสถานะ n ของลูกโซ่มาร์คอฟ และจำนวนช่วงเวลาที่เก็บข้อมูล S ซึ่งส่งผลต่อขนาดของเมทริกซ์ข้อจำกัด ทำให้ไม่สามารถหาผลลัพธ์ในกรณีที่ n หรือ S หรือทั้ง n และ S มีค่ามาก ๆ ได้

2.2 การหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยการใช้เทคนิควิธีการสร้างสดมภ์ (CG) ซึ่งจะให้ค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดเท่ากับการใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรง แต่เทคนิค CG จะใช้เวลาในการประมาณค่ามากกว่า เนื่องจากจะต้องมีการทำกระบวนการซ้ำ ๆ กันหลายรอบ โดยเทคนิค CG จะมีข้อดีคือไม่ต้องพิจารณาตัวแปรตัดสินใจทั้งหมด จะพิจารณาเพียงตัวแปรบางส่วนเท่านั้น จึงสามารถประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟที่มีขนาดใหญ่และการใช้ฟังก์ชัน linprog โดยตรงไม่สามารถประมาณค่าได้ในกรณีที่ n มีค่าน้อย ๆ และ S มีค่ามาก ๆ นั้น การใช้เทคนิค CG กับตัวแบบปัญหาควบคุมของตัวแบบ (18) เป็นวิธีการที่ไม่ควรใช้เนื่องจากจะพบกับปัญหาในเรื่องข้อจำกัดของหน่วยความจำที่ไม่เพียงพอของคอมพิวเตอร์หรือเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการประมาณค่าที่ค่อนข้างมากเมื่อเทียบกับการใช้วิธี RLS

สรุปการเปรียบเทียบข้อดี และข้อด้อยของแต่ละวิธีที่ทำการศึกษาแสดงในตารางที่ 16

ตารางที่ 16 สรุปการเปรียบเทียบข้อดี และข้อด้อยของวิธีการต่างๆ

วิธีการที่ศึกษา	ข้อดี	ข้อด้อย
1. ประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสอง น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด	มีจำนวนตัวแปร และจำนวนข้อจำกัดไม่มากนัก คือ จำนวนตัวแปร = n^2 ตัวแปร จำนวนข้อจำกัด = n ข้อ	อยู่ในรูปของปัญหาคำหนดการกำลังสอง ซึ่งมีความซับซ้อนมากในการหาผลลัพธ์
1.1 หาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วย การใช้ฟังก์ชัน quadprog	เวลาในการประมาณค่า ขึ้นอยู่กับขนาดของ n แต่ ไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของ S ทำให้สามารถประมาณค่าได้ แม้จำนวนช่วงเวลาในการเก็บข้อมูลจะมากเท่าไรก็ตาม	ใช้เวลาในการประมาณค่ามากเมื่อ n มีค่ามากๆ
1.2 หาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วย การใช้เทคนิคการแบ่งส่วน โดยประมาณ	- ใช้เวลาประมาณค่าน้อยเพราะมีการแบ่งให้เป็นปัญหา เล็ก ๆ ทำให้หาผลลัพธ์ง่าย และเร็ว - ค่า SSE ต่ำกว่าวิธีในข้อ 1.1 เมื่อข้อมูลมีคุณสมบัติ ใกล้เคียงกับมาร์คอฟแบบ สมบูรณ์	เริ่มต้นด้วยการเพิกเฉยต่อสมการข้อจำกัด

ตารางที่ 16 (ต่อ)

วิธีการที่ศึกษา	ข้อดี	ข้อด้อย
2. ประมาณค่าด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบน สัณฐานน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด	อยู่ในรูปของปัญหาคำหนดการเชิงเส้น ซึ่งง่ายต่อการหาผลลัพธ์	มีจำนวนตัวแปร และจำนวนข้อจำกัดค่อนข้างมากคือ จำนวนตัวแปร = $n(S-1)+n^2$ ตัวแปร จำนวนข้อจำกัด = $2n(S-1)+n$ ข้อ
2.1 หาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วย การใช้ฟังก์ชัน linprog	- สำหรับเวลาที่ใช้ประมาณค่าที่เท่ากัน สามารถ ประมาณค่าเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่กว่าวิธีในข้อ 1.1 - ค่า SSE ต่ำกว่าวิธีในข้อ 1.1 เมื่อข้อมูลมีคุณสมบัติ ใกล้เคียงกับมาร์คอฟแบบ สมนวน	ในการหาผลลัพธ์จะพิจารณาตัวแปรทั้งหมด ทำให้เมทริกซ์ข้อจำกัดมีขนาดใหญ่ ส่งผลให้ไม่สามารถ ประมาณค่าในกรณี n หรือ S หรือ ทั้ง n และ S มีค่ามาก ๆ
2.2 หาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วย การใช้เทคนิคการสร้างสมค	ในการหาผลลัพธ์จะพิจารณาตัวแปรเพียงบางส่วน ทำให้ประมาณเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่กว่าที่วิธีใน ข้อ 2.1 ประมาณได้	- ต้องทำกระบวนการซ้ำ ๆ กัน หลายรอบทำให้ใช้ เวลาในการประมาณค่าค่อนข้างมาก - ไม่สามารถประมาณเมทริกซ์ที่มี S มากๆได้

ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยที่ได้ ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะสำหรับการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ ในกรณีที่มีการเก็บรวบรวมข้อมูลไว้แล้วดังนี้

1. ตรวจสอบให้แน่ใจว่าข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้มีคุณสมบัติมาร์คอฟ

2. พิจารณาความถูกต้องตามทฤษฎีที่ต้องการ

2.1 ถ้าไม่ต้องการความถูกต้องตามทฤษฎีมากนัก การประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดและหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยวิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณเป็นวิธีที่น่าสนใจที่สุดเพราะสามารถประมาณค่าเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะที่มีจำนวนสถานะมากถึง 1000 สถานะภายในเวลาน้อยกว่า 1 ชั่วโมง

2.2 ถ้าต้องการความถูกต้องตามทฤษฎี ควรพิจารณารายละเอียดในข้อ 3

3. เลือกใช้วิธีการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ โดยพิจารณาจำนวนช่วงเวลาเก็บข้อมูล ดังแสดงในตารางที่ 17

ตารางที่ 17 การเลือกใช้วิธีการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ
ของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ ในสถานการณ์ต่างๆ สำหรับกรณีที่ต้องการความ
ถูกต้องตามทฤษฎี

จำนวนช่วงเวลาที่เก็บ รวบรวมข้อมูล (S)	วิธีกำลังสองน้อยที่สุด	วิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุด	
	แบบมีข้อจำกัด	แบบมีข้อจำกัด	
	หาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ด้วยฟังก์ชัน quadprog	หาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ด้วยฟังก์ชัน linprog	หาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ด้วยเทคนิคการสร้างสดมภ์
ไม่เกิน 10 ($S \leq 10$)	-	จำนวนสถานะ n น้อยกว่า 330 ($n < 330$)	จำนวนสถานะ n ตั้งแต่ 330 ถึง 400 ($330 \leq n \leq 400$)
มากกว่า 10 แต่ไม่เกิน 20 ($10 < S \leq 20$)	จำนวนสถานะ n ไม่เกิน 100 ($n \leq 100$)	จำนวนสถานะ n มากกว่า 100 ถึง 180 ($100 < n \leq 180$)	จำนวนสถานะ n มากกว่า 180 ถึง 400 ($180 < n \leq 400$)
มากกว่า 20 แต่ไม่เกิน 30 ($20 < S \leq 30$)	จำนวนสถานะ n น้อยกว่า 140 ($n < 140$)	-	จำนวนสถานะ n ตั้งแต่ 140 ถึง 200 ($140 \leq n \leq 200$)

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

วนิดา เลิศพิพัฒน์นันท์ และพีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล. 2556. การเลือกใช้ฟังก์ชันในกล่องเครื่องมือของโปรแกรม MATLAB สำหรับการประมาณค่าสถิติสัดส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ, น. 106-116. ใน รายงานการประชุมวิชาการด้านการวิจัยดำเนินงานแห่งชาติ ประจำปี 2556. มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี, กรีนเนอรี่ รีสอร์ท เขาใหญ่ จ.นครราชสีมา.

Ashar, V.G. and T.D. Wallace. 1963. A Sampling Study for Minimum Absolute Deviation Estimators. **Operations Research**. 11: 747-758.

Bazaraa, M.S., J.J. Jarvis, and H.D. Sherali. 2010. **Linear Programming and Network Flows**. 4th ed. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Craig, B.A. and P.P. Sendi. 2002. Estimation of the transition matrix of a discrete-time Markov Chain. **Health Economics**. 11: 33-42.

Constant, A. F. and K. F. Zimmermann, 2012. The Dynamics of Repeat Migration: A Markov Chain Analysis. **International Migration Review**. 46: 361-387.

Dent, W. and R. Ballintine. 1971. A review of the Estimation of Transition Probabilities in Markov Chain. **The Australian Journal of Agricultural Economics**. 15(2): 69-81.

Goodman, L.A. 1953. A Further Note on Miller's Finite Markov Processes in Psychology. **Psychometrika**. 18: 245-248.

Hillier, F.S. and G.J. Lieberman. 1991. **Introduction to Mathematical Programming**. McGraw-Hill Book Co., Singapore.

- Jones, M.T. 2005. Estimating Markov Transition Matrices Using Proportions Data: An Application to Credit Risk. **IMF Working Paper**. 219.
- Kalbfleisch, J.D. and J.F. Lawless. 1984. Least-Squares Estimation of Transition Probabilities from Aggregate Data. **The Canadian Journal of Statistics**. 12(3): 169-182.
- Lasdon, L.S. 1970. **Optimization Theory for Large Systems**. 1st ed. Courier Dover Publications. New York.
- Lee, T.C., G.G. Judge, and T. Takayama. 1965. On Estimating the Transition Probabilities of a Markov Process. **Journal of Farm Economics**. 47: 742-762.
- _____, _____ and A. Zellner. 1968. Maximum Likelihood and Bayesian Estimation of Transition Probabilities. **Journal of the American Statistical Association**. 63: 1162-1179.
- Lin, C.T. 2011. Establishing an adaptive production-procurement system with Markov Chain approach associated with 3C theory. **Journal of Mathematics and Statistics**. 7: 187-197.
- Madansky, A. 1959. Least Squares Estimation in Finite Markov Processes. **Psychometrika**. 24: 137-144.
- MATLAB Documentation Center. 2013. **About choosing a solver**. Available Source: <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/choosing-a-solver.html>, July, 15, 2013.
- Miller, G.A. 1952. Finite Markov Processes in Psychology. **Psychometrika**. 17: 149-167.
- Nash, S.G. and A. Sofer. 1996. **Linear and Nonlinear Programming**. The McGraw-Hill Companies., New York.

Simister, Z. 2007. Maximum Likelihood Approach to the estimation of Markov Transition Matrices Using Proportions Data: An Application to Credit Risk. **Bank of Jamaica**.

Telser, L.G. 1963. Least Squares Estimates of Transition Probabilities. **Measurement in Economics**. Standford University Press. 270-293.

Theil, H., and G. Rey. 1966. A Quadratic Programming Approach to the Estimation of Transition Probabilities. **Management Science**. 12(9): 714-721.

Thyagarajan, V. and S.M.B. Mohamed. 2005. Retail banking loan portfolio equilibrium mix: A Markov Chain model analysis. **American Journal of Applied Sciences**. 2: 410-419.





ตารางผนวกที่ ก1 ค่าเฉลี่ยของผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง จำแนกตามวิธีการที่ใช้
ในการประมาณค่า เมื่อข้อมูลขาดคุณสมบัติมาร์คอฟ

จำนวน ช่วงเวลา (S)	จำนวน สถานะ (n)	SSE			ร้อยละ	ร้อยละ
		RLS		RLAD	ความแตกต่าง	ความ
		quadprog	AD		(quadprog กับ AD)	แตกต่าง (AD กับ RLAD)
10	60	0.6845	0.8529	0.9577	-24.6	-39.91
	80	0.6986	0.7507	0.9662	-7.5	-38.31
	100	0.7035	0.7163	0.9695	-1.8	-37.81
	120	0.7126	0.7260	0.9775	-1.9	-37.17
	140	0.7022	0.7246	0.9804	-3.2	-39.62
	160	0.7101	0.7379	0.9813	-3.9	-38.19

ตารางผนวกที่ ก2 ขนาดของเมทริกซ์สำหรับตัวแบบ (19) จำแนกตามสถานการณ์ต่าง ๆ

จำนวน ช่วงเวลา S	จำนวน สถานะ n	ตัวแบบ (19)		ขนาดของเมทริกซ์ข้อจำกัด (ไบต์)
		จำนวนข้อจำกัด	จำนวนตัวแปร	
10	60	1,140	4,140	4.7196×10^6
	80	1,520	7,120	1.0822×10^6
	100	1,900	10,900	2.0710×10^7
	120	2,280	15,480	3.5294×10^7
	140	2,660	20,860	5.5488×10^7
	160	3,040	27,040	8.2202×10^7
	180	3,420	34,020	1.1635×10^8
	200	3,800	41,800	1.5884×10^8
	250	4,750	64,750	3.0763×10^8
	300	5,700	92,700	5.2839×10^8
	330	6,270	111,870	7.0142×10^8
	400	7,600	163,600	1.2433×10^9
20	60	2,340	4,740	1.1092×10^7
	80	3,120	7,920	2.4710×10^7
	100	3,900	11,900	4.6410×10^7
	120	4,680	16,680	7.8062×10^7
	140	5,460	22,260	1.2154×10^8
	160	6,240	28,640	1.7871×10^8
	180	7,020	35,820	2.5146×10^8
	200	7,800	43,800	3.4164×10^8
30	60	3,540	5,340	1.8904×10^7
	80	4,720	8,720	4.1158×10^7
	100	5,900	12,900	7.6110×10^7
	120	7,080	17,880	1.2659×10^8
	140	8,260	23,660	1.9543×10^8



ภาคผนวก ข
ส่วนของโปรแกรม MATLAB

ส่วนของโปรแกรมสำหรับการจำลองข้อมูล

```

n=60;
s=10;
ns=n*(s-1);
data=zeros(n,s);

%.....construct matrix p
p=rand(n,n);
rowSums=sum(p,2);
normalizingMatrix= repmat(rowSums,1,n);
p=p./normalizingMatrix;

%.....construct vector of data at t=1
data0=rand(n-1,1);
wg=1/n;
sumdata0=0;
for k=1:n-1
    data0(k,1)=data0(k,1)*wg;
    sumdata0=sumdata0+data0(k,1);
end;
data0(n,1)=1-sumdata0;
if data0(n,1)<0
    data0(n,1)=0;
end;
for i=1:n
    data(i,1)=data0(i,1);
end;

```

```
%.....constuct data at t=2 to s
for t=2:s
    datat=p'*data0;
    chk=rand(1);
    noise=chk*0.1;
    sumnoise=noise*n+1;
    wgl=1/sumnoise;
    data_noise=(datat+noise)*wgl;
    for i=1:n
        data(i,t)=data_noise(i,1);
    end;
    data0=data_noise;
end;
```

ส่วนของโปรแกรมที่ใช้ในการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นของเมริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดและหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยฟังก์ชัน quadprog

```
tic
Aeq_ls=sparse(n,n^2);
for i=1:n
    for j=((i-1)*n)+1:i*n
        Aeq_ls(i,j)=1;
    end;
end;
Beq_ls=ones(n,1);
lb_ls=zeros(n^2,1);
for i=1:n
    for j=1:s-1
        x(i,j)=data(i,j);
        y(i,j)=data(i,j+1);
    end;
```

```

end;
power2=x*x';
power1=y*x';
H=sparse(n^2);
for i=1:n
    for j=((i-1)*n)+1:i*n
        H(j,j)=power2(i,i);
        for k=1:n-i
            H(j,j+(k*n))=power2(i,i+k);
            H(j+(k*n),j)=power2(i,i+k);
        end;
    end;
end;
lin=-2*power1;
f_ls=ones(n^2,1);
for i=1:n
    for j=1:n
        f_ls(((i-1)*n)+j,1)=lin(j,i);
    end;
end;
opts1 = optimset('Algorithm','interior-point-convex','display','off');
H1=2*H;
[p_ls,fval_ls,exitflag_ls,output_ls,lambda_ls]
    =quadprog(H1,f_ls,[],[],Aeq_ls,Beq_ls,lb_ls,[],[],opts1);
z=y*y';
const=0;
for i=1:n
    const=const+z(i,i);
end;
sse_ls=const+fval_ls;
time_ls=toc;

```

ส่วนของโปรแกรมที่ใช้ในการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นของเมริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดและหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยวิธีการแบ่งส่วนโดยประมาณ

```
tic
D=2*power2;
C=zeros(n,1);
lb_dec=zeros(n,1);
ub_dec=ones(n,1);
p_all=zeros(n);
for i=1:n
    for j=1:n
        C(j,1)=-2*power1(i,j);
    end;
    for l=1:n
        C_all(l,i)=C(l,1);
    end;
    [p_est,fval_dec,exitflag_dec,output_dec,lambda_dec]
        =quadprog(D,C,[],[],[],lb_dec,ub_dec,[],opts1);
    for k=1:n
        p_all(k,i)=p_est(k,1);
    end;
end;
rowsums=sum(p_all,2);
normalizing=repmat(rowsums,1,n);
p_asjust=p_all./normalizing;
y_est=p_asjust'*x;
error_dec=(y-y_est);
se_dec=error_dec.*error_dec;
sse_dec=sum(se_dec(:));
time_dec=toc;
```

ส่วนของโปรแกรมที่ใช้ในการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นของเมริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ ด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดและหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยฟังก์ชัน linprog

```
tic
datat=data';
nn=n^2;
f_lad=sparse(ns+nn,1);
for i=1:ns
    f_lad(i,1)=1;
end;
ns2=2*ns;
s2=2*(s-1);
A_lad=sparse(ns2,(ns+nn));
B_lad=zeros(ns2,1);
for i=1:ns
    A_lad(i+(i-1),i)=-1;
    A_lad(i+i,i)=-1;
end;
for k=1:s-1
    for i=1:n
        for j=1:n
            A_lad((2*(k-1)*n)+i+(i-1),ns+((i-1)*n)+j)=(-1)*datat(k,j);
            A_lad((2*(k-1)*n)+i+i,ns+((i-1)*n)+j)=datat(k,j);
        end;
        B_lad((2*(k-1)*n)+i+(i-1),1)=(-1)*datat(k+1,i);
        B_lad((2*(k-1)*n)+i+i,1)=datat(k+1,i);
    end;
end;
Aeq_lad=sparse(n,(ns+nn));
for i=1:n
    for j=1:n
```

```

    Aeq_lad(j,(ns+j+(i-1)*n))=1;
end;
end;
Beq_lad=ones(n,1);
lb_lad=zeros(ns+nn,1);
f_lad=ones((ns+nn),1);
for i=1:nn
    f_lad(ns+i,1)=0;
end;
options = optimset('MaxIter',(ns+nn));
[p_lad,fval_lad,exitflag_lad,output_lad,lambda_lad] =
linprog(f_lad,A_lad,B_lad,Aeq_lad,Beq_lad,lb_lad,[],[],options);
time_lad=toc;

```

ส่วนของโปรแกรมที่ใช้ในการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นของเมริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ ด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดและหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดด้วยเทคนิคการสร้าง สดมภ์

```

tic
sum_f_cg=0;
A_all=cat(1,A_lad,Aeq_lad);
B_all=cat(1,B_lad,Beq_lad);

%.....define BFS of CG1
x_bs=zeros(ns+n,1);
for i=1:ns
    x_bs(i)=1;
end;
for i=1:n
    x_bs(ns+((i-1)*n)+i)=1;
end;

```

```

%.....define BFS of CG2

%x_bs=zeros(ns+n,1);

%for i=1:n

%   x_bs(ns+((i-1)*n)+i)=1;

%end;

a_all=A_all;
c =f_lad;
no_remove=0;
for i=1:ns+nn
    if x_bs(i,1) < 0.00001
        no_remove=no_remove+1;
        index_remove(1,no_remove)=i;
    else
        index_notremove(1,i)=i;
    end;
end;
nvar=ns+nn-no_remove;
index_notremove(index_remove)=[];
a_all(:,index_remove)=[];
c(index_remove)=[];
a=a_all(1:ns2,1:end);
aeq=a_all(ns2+1:end,1:end);
% .....Generate new columns
count = 0;
max_improv = 1;
zim = 0;
keep_min(1,1)=0;
while max_improv-zim > 0;
    if count > 0;
        a = cat(2,a,newa);
    end;
end;

```

```

    aeq=cat(2,aeq,newaeq);
    c = cat(1,c,cnew);
    index_notremove = cat(2,index_notremove,jsl);
    nvar = nvar + 1;
end;
lb_cg = zeros(nvar,1);
[x,fval_cg,exitflag_cg,output_cg,lambda_cg] = linprog(c,a,B_lad,aeq,Beq_lad,lb_cg,[]);
y=zeros(ns2+n,1);
for i=1:ns2
    y(i,1)=lambda_cg.ineqlin(i);
end;
for i=1:n
    y(ns2+i,1)=lambda_cg.eqlin(i);
end;
f1=A_all*y;
rc=f_lad+f1;
newa = sparse(ns2,1);
newaeq = sparse(n,1);
minrc = 0;
for i = 1:ns+nn
    if rc(i) < 0
        if rc(i) < minrc
            minrc=rc(i);
            jsl=i;
        end;
    end;
end;
for i=1:ns2
    newa(i,1)=A_all(i,jsl);
end;
for i=1:n

```

```

newaeq(i,1)=A_all(ns2+i,jsl);
end;
cnew = f_lad(jsl);
count = count +1;
keep_min(count+1,1)=minrc;
if abs(keep_min(count+1)-keep_min(count)) <= 0;
    zim = 1;
end;
end;
xp=zeros(nn+ns,1);
for i=1:nvar-1
    if i==nvar-1
        xp(index_notremove(i),1)=x(i)*2;
    else
        xp(index_notremove(i),1)=x(i);
    end;
end;
time_cg=toc;
sum_f_cg=sum_f_cg+fval_cg;

```

ส่วนของโปรแกรมที่ใช้ในการประมาณค่าสถิติความน่าจะเป็นของเมริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ ด้วยวิธีค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์น้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัดในรูปแบบปัญหาควมคู่และหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ด้วยเทคนิคการสร้างสมรรถ

```

tic
nn=n^2;
f_lad=sparse(ns+nn,1);
for i=1:ns
    f_lad(i,1)=1;
end;
ns2=2*ns;

```

```

s2=2*(s-1);
A_lad=sparse(ns2,(ns+nn));
B_lad=zeros(ns2,1);
for i=1:ns
    A_lad(i+(i-1),i)=-1;
    A_lad(i+i,i)=-1;
end;
for k=1:s-1
    for i=1:n
        for j=1:n
            A_lad((2*(k-1)*n)+i+(i-1),ns+((i-1)*n)+j)=(-1)*datat(k,j);
            A_lad((2*(k-1)*n)+i+i,ns+((i-1)*n)+j)=datat(k,j);
        end;
        B_lad((2*(k-1)*n)+i+(i-1),1)=(-1)*datat(k+1,i);
        B_lad((2*(k-1)*n)+i+i,1)=datat(k+1,i);
    end;
end;
Aeq_lad=sparse(n,(ns+nn));
for i=1:n
    for j=1:n
        Aeq_lad(j+(j-1),(ns+j+(i-1)*n))=1;
        Aeq_lad(j+j,(ns+j+(i-1)*n))=-1;
    end;
    Beq_lad(i+(i-1),1)=1;
    Beq_lad(i+i,1)=-1;
end;
A_all=cat(1,A_lad,Aeq_lad);
B_all=cat(1,B_lad,Beq_lad);

```

```
%..... set dual problem
```

```
Ad_all=(-1*A_all)';
```

```
fd=B_all';
```

```
Bd_all=f;
```

```
%.....define BFS
```

```
x_bs=zeros(ns2+(2*n),1);
```

```
for i=1:ns2
```

```
    x_bs(i*2)=1;
```

```
end;
```

```
a_all=Ad_all;
```

```
c=fd;
```

```
no_remove=0;
```

```
for i=1:ns2+n
```

```
    if x_bs(i,1) < 0.00001
```

```
        no_remove=no_remove+1;
```

```
        index_remove(1,no_remove)=i;
```

```
    else
```

```
        index_notremove(1,i)=i;
```

```
    end;
```

```
end;
```

```
nvar=ns2+n-no_remove;
```

```
a_all(:,index_remove)=[];
```

```
c(index_remove)=[];
```

```
%.....Generate new columns
```

```
count = 0;
```

```
max_improv = 1;
```

```
zim = 0;
```

```
keep_min(1,1)=0;
```

```
jst=0;
```

```

while max_improv-zim > 0;
    if count > 0;
        a_all = cat(2,a_all,newa);
        c = cat(2,c,cnew);
        index_notremove = cat(2,index_notremove,jsl);
        nvar = nvar + 1;
    end;
    lb = zeros(nvar,1);
    [x_d,fval_d,exitflag_d,output_d,lambda_d] = linprog(c,a_all,Bd_all,[],[],lb,[]);
    y=zeros(ns+nn,1);
    for i=1:ns+nn
        y(i,1)=lambda_d.ineqlin(i);
    end;
    fl=Ad_all'*y;
    rc=fd'+fl;
    newa = zeros(ns+nn,1);
    minrc = 0;
    for i = 1:ns2+n
        if rc(i) < 0
            if rc(i) < minrc
                minrc=rc(i);
                jsl=i;
            end;
        end;
    end;
    newa(i,1)=Ad_all(i,jsl);
end;
cnew = fd(jsl);
count = count +1;
keep_min(count+1,1)=minrc;

```

```
if abs(keep_min(count+1)-keep_min(count)) <= 0;  
    zim = 1;  
end;  
end;  
time_cg=t
```





การกำหนดตัวแปรเริ่มต้นสำหรับใช้ในปัญหาหลัก (RMP) ของเทคนิควิธีการสร้างสมรรถ์ที่ใช้ในการวิจัยนี้ กำหนดไว้ 2 แบบ คือ

1. แบบที่ 1 กำหนดให้ตัวแปรเริ่มต้นประกอบด้วย ตัวแปร $U_{j(k)}$ ทุกค่า j, k และ p_{ij} ทุกค่า $i=j$ นั่นคือ ตัวแบบ RMP จะเริ่มต้นพิจารณาตัวแปรเพียง $n(S-1)+n$ ตัวแปร

2. แบบที่ 2 กำหนดให้ตัวแปรเริ่มต้นประกอบด้วย ตัวแปร p_{ij} ทุกค่า $i=j$ นั่นคือ ตัวแบบ RMP จะเริ่มต้นพิจารณาตัวแปรเพียง n ตัวแปรเท่านั้น

การกำหนดตัวแปรเริ่มต้นทั้ง 2 แบบ มีการกำหนดในส่วนของตัวแปร p_{ij} ทุกค่า $i=j$ ซึ่งเมื่อพิจารณาตัวแบบ (15) ค่าของ p_{ij} ทุกค่า $i=j$ ที่สอดคล้องกับสมการข้อจำกัดจะมีค่าเป็น 1 ส่งผลให้อสมการ (16) ลดรูปเป็น

$$u_{j(k)} \geq |\pi_j(k+1) - \pi_j(k)|, \quad \forall_{j,k} \quad (20)$$

นั่นคือ เมื่อ $u_{j(k)} \geq 0$ อสมการ (20) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$-u_{j(k)} \leq \pi_j(k+1) - \pi_j(k) \leq u_{j(k)} \quad (21)$$

จากอสมการ (21) แยกเป็น 2 อสมการดังนี้

$$\pi_j(k+1) - \pi_j(k) \leq u_{j(k)}, \quad \forall_{j,k} \quad (22)$$

$$\pi_j(k) - \pi_j(k+1) \leq u_{j(k)}, \quad \forall_{j,k} \quad (23)$$

จากอสมการ (22) และ (23) จะได้เซตคำตอบของ $u_{j(k)}$ เป็น $[\pi_j(k+1) - \pi_j(k), \infty)$ และ $[-(\pi_j(k+1) - \pi_j(k)), \infty)$ ตามลำดับ นั่นคือ $u_{j(k)}$ จะมีคำตอบอยู่ในช่วง $[\pi_j(k+1) - \pi_j(k), \infty)$ ทั้งกรณีที่ค่า $\pi_j(k+1)$ มากกว่า $\pi_j(k)$ หรือกรณีที่ค่า $\pi_j(k+1)$ น้อยกว่า $\pi_j(k)$ เนื่องจาก $[\pi_j(k+1) - \pi_j(k), \infty) \cap [-(\pi_j(k+1) - \pi_j(k)), \infty) = [\pi_j(k+1) - \pi_j(k), \infty)$ ดังนั้นการกำหนดตัวแปรเริ่มต้นทั้ง 2 แบบที่ใช้ในการวิจัยนี้ จะให้คำตอบที่เป็นไปได้อย่างแน่นอน



ภาคผนวก ง
การใช้เทคนิควิธีการสร้างสดมภ์กับปัญหาควมรู้

การใช้เทคนิควิธีการสร้างสมการกับปัญหาควบคู่

จากตัวแบบ (19) สามารถแสดงในรูปเมทริกซ์ ดังนี้

$$\text{Minimize } c^T x \quad (24)$$

$$\text{subject to } Ax \leq b$$

$$A_{eq}x = b_{eq}$$

$$x \geq 0$$

$$\text{เมื่อ } x = \begin{bmatrix} U_{(1)} \\ U_{(2)} \\ \vdots \\ U_{(S-1)} \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } U_{(k)} = \begin{bmatrix} u_{1(k)} \\ u_{2(k)} \\ \vdots \\ u_{n(k)} \end{bmatrix}; k=1,2,\dots,S-1 \quad \text{และ } P_i = \begin{bmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{in} \end{bmatrix}; i=1,2,\dots,n$$

$$c^T = [[1]_{1 \times n(S-1)} \quad [0]_{1 \times n^2}]$$

$$b = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_{S-1} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } h_k = \begin{bmatrix} -\pi_1(k+1) \\ \pi_1(k+1) \\ \vdots \\ -\pi_n(k+1) \\ \pi_n(k+1) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{(1)} & [0]_{2n \times n} & \cdots & [0]_{2n \times n} & d^{(1)} \\ [0]_{2n \times n} & a_{(2)} & \cdots & [0]_{2n \times n} & d^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{2n \times n} & [0]_{2n \times n} & \cdots & a_{(S-1)} & d^{(S-1)} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } a_{(k)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix},$$

$$d^{(k)} = \begin{bmatrix} \pi(k) & [0]_{2 \times n} & \cdots & [0]_{2 \times n} \\ [0]_{2 \times n} & \pi(k) & \cdots & [0]_{2 \times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{2 \times n} & [0]_{2 \times n} & \cdots & \pi(k) \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } \pi(k) = \begin{bmatrix} -\pi_1(k) & -\pi_2(k) & \cdots & -\pi_n(k) \\ +\pi_1(k) & +\pi_2(k) & \cdots & +\pi_n(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n(S-1)} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } \mathbf{I} = [I_n | I_n | \dots | I_n] \quad \text{และ } \mathbf{b}_{eq} = [1]_{n \times 1}$$

ตัวแบบปัญหาควบคู่ของตัวแบบ (24) แสดงดังนี้

$$\text{Maximize } \tilde{\mathbf{b}}^T \tilde{\mathbf{x}}$$

$$\text{subject to } \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{x}} \leq \tilde{\mathbf{c}}^T$$

$$\tilde{\mathbf{x}} \geq 0$$

เมื่อ $\tilde{\mathbf{x}}$ เป็นเวกเตอร์แนวตั้งของตัวแปรควบคู่ของ $\mathbf{x}$ มีขนาด $(2nS) \times 1$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -a_{(1)} & [0]_{2n \times n} & \dots & [0]_{2n \times n} & -\mathbf{d}^{(1)} \\ [0]_{2n \times n} & -a_{(2)} & \dots & [0]_{2n \times n} & -\mathbf{d}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{2n \times n} & [0]_{2n \times n} & \dots & -a_{(S-1)} & -\mathbf{d}^{(S-1)} \\ & [0]_{n \times n(S-1)} & & & \mathbf{I} \\ & [0]_{n \times n(S-1)} & & & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -h_1 \\ -h_2 \\ \vdots \\ -h_{S-1} \\ [1]_{n \times 1} \\ [-1]_{n \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} [1]_{1 \times n(S-1)} & [0]_{1 \times n^2} \end{bmatrix}$$

ดำเนินการตามขั้นตอนของเทคนิค CG ดังแสดงในภาพที่ 1 โดยเริ่มต้นจากการกำหนดให้ $\tilde{x}_q = 1$ เมื่อ $q=2,4,6,\dots,2n(S-1)$ เป็นคำตอบเบื้องต้นที่เป็นไปได้ โดยมีส่วนของโปรแกรม MATLAB ดังแสดงในภาคผนวก ข ในส่วนของการหาผลลัพธ์ตัวแบบปัญหาควบคู่ด้วยเทคนิค CG

ประวัติการศึกษาและการทำงาน

ชื่อ นางสาวนิตา เลิศพิพัฒนานนท์

เกิดวันที่ 19 พฤษภาคม 2513

สถานที่เกิด กรุงเทพมหานคร

ประวัติการศึกษา 1) วท.บ.(สถิติประยุกต์) เกียรตินิยมอันดับ 1
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

2) สต.ม.(สถิติ) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตำแหน่งปัจจุบัน อาจารย์

สถานที่ทำงานปัจจุบัน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม

ทุนการศึกษาที่ได้รับ ทุนพัฒนาบุคลากรมหาวิทยาลัยสยาม