# บทที่ 2

# ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

## 2.1 วิทยาการที่เกี่ยวข้อง

เทคนิคการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดที่ ได้มีการรู้จักกันแพร่หลายและถูกนำมาเป็นส่วนหนึ่งของการวิจัยดำเนินงาน (Operations Research) ในช่วงแรก ๆ ในหลาย ๆ ด้าน ไม่ว่าจะเป็นนักบริหาร วิศวกรหรือนักวิทยาศาสตร์ในหลายหน่วยงานได้ประยุกต์ใช้วิธีการทางโปรแกรมเชิงเส้นในการแก้ปัญหาทางการจัดสรรปัจจัยหรือทรัพยากร (Allocating Resource) โดยที่ปัจจัยหรือทรัพยากรมีความหมายรวมถึงวัตถุดิบ กำลังคน เวลา สถานที่ เงินตรา หรือความรู้ความสามารถต่าง ๆ ปัญหาการจัดสรรปัจจัย และทรัพยากรเกิดขึ้นเมื่อเราต้องการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่จำกัดทั้งขนาด ทั้งปริมาณ และขอบเขตของการใช้งานเพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดซึ่งในยุคแรก ๆ ของการแก้ไขปัญหานั้น วิธีของโปรแกรมเชิงเส้นเป็นเทคนิคที่ใช้ในการแก้ไขปัญหาทางการจัดสรรปัจจัยและทรัพยากรที่มีลักษณะความสัมพันธ์ของปัจจัยต่าง ๆ ที่เป็นแบบเชิงเส้น โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อแก้ปัญหาและตัดสินใจให้เกิดผลตามแนวทางการดำเนินงานที่ดีที่สุด (Optimum) เช่นกำไรสูงสุด ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด หรือแนวทางการดำเนินงานอื่นที่ให้ผลประโยชน์มากที่สุดต่อระบบนั้น ๆ โดยที่พิจารณาเงื่อนไขหรือข้อจำกัดที่กำหนด โปรแกรมเชิงเส้นประกอบไปด้วย 2 ส่วน ดังนี้

1. มีสมการกำหนดเป้าหมาย (Objective Function) คือสมการแสดงความสัมพันธ์ของต้นทุน กำไร เพื่อให้กำหนดเป้าหมายสูงสุดหรือต่ำสุด

2. มีสมการแสดงขอบข่าย (Constraints) ซึ่งแสดงข้อจำกัดต่าง ๆ ของปัจจัยหรือทรัพยากรในรูปสมการหรืออสมการ

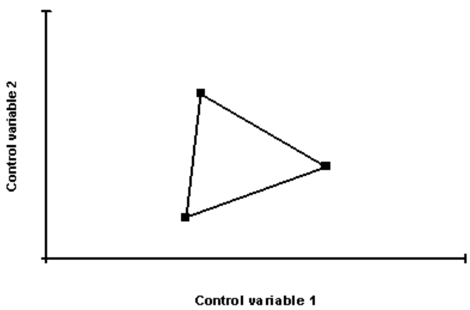
โดยที่สมการต่าง ๆ ทั้งหมดเป็นสมการเชิงเส้นเมื่อเทียบกับปัจจัย สำหรับการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นสามารถทำได้หลายวิธี ในที่นี้จะกล่าวถึง วิธีกราฟ และวิธีการของซิมเพล็กซ์ (Simplex) โดยทั่วไปแล้วระบบของปัญหาทางการโปรแกรมเชิงเส้น จะมีปัจจัยซึ่งเป็นองค์ประกอบของระบบจำนวนมากและมีซับซ้อนสูง ดังนั้นการหาผลลัพธ์จึงมักจะใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวน อย่างไรก็ตามเราจำเป็นต้องเรียนรู้ถึงลักษณะของปัญหาให้เข้าใจเป็นขั้นตอน เพื่อความเข้าใจในการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนต่อไป สำหรับปัญหาที่มีเพียง 2 ปัจจัย วิธีกราฟเป็นวิธีง่าย ๆ ซึ่งสามารถจะหาคำตอบได้ ส่วนของปัญหาที่มีมากกว่า 2 ปัจจัย วิธีการแก้ปัญหาทางโปรแกรมเชิงเส้นมีหลายวิธีแต่ที่นิยมใช้กันมากคือ วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex Method)

วิธีซิมเพล็กซ์นี้มีการพัฒนามาจากวิธีทางพีชคณิตที่อาศัยทฤษฎีของเมทริกซ์เข้าร่วมในการจัดรูปแบบปัญหาให้มีระบบยิ่งขึ้น ช่วยให้สังเกตความเปลี่ยนแปลงปัจจัยได้ง่ายและสามารถเข้าใจแนวทางที่ปัจจัยแต่ละตัวจะเปลี่ยนไปอย่างมีเหตุมีผล วิธีดังกล่าวจะเริ่มต้นการเปลี่ยนปัจจัยต่าง ๆ ให้มีผลต่อสมการกำหนดเป้าหมายโดยมีผลแนวโน้มสู่เป้าหมายในทางที่เร็วที่สุด โดยการการจัดรูปสมการเข้าเป็นตารางแล้วดำเนินการตามขั้นตอนที่ถูกต้องจะต้องทำให้ได้ผลลัพธ์ตามเป้าหมายผลลัพธ์ที่ดีที่สุดซึ่งอาจจะมีได้หลาย ๆ คำตอบ

อย่างไรก็ตามการแก้ปัญหาด้วยวิธีการทางโปรแกรมเชิงเส้นที่เป็นแบบซิมเพล็กซ์ก็ยังมีความยุ่งยากและซับซ้อนอยู่ เนื่องจากต้องอาศัยทฤษฎีของเมทริกซ์เข้าร่วมในการจัดรูปแบบปัญหา จากเหตุผลและข้อดีของวิธีการแบบซิมเพล็กซ์ ดังนั้นจึงได้มีการพัฒนาปรับปรุงวิธีการของซิมเพล็กซ์มาเป็นลักษณะแบบซีเควนเชียล (Sequential Simplex) ซึ่งรูปแบบขั้นตอนของวิธีการก็ยังคงเป็นไปในลักษณะเดียวกัน โดย Spendley และคณะ (1962) ได้มีการเสนอวิธีการซิมเพล็กซ์มาใช้แทนวิธีการแฟคทอเรียล สำหรับหลักการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง (Evolutionary Operation) ซึ่งพบว่าวิธีการซิมเพล็กซ์มีข้อดีกว่าวิธีการแฟคทอเรียลแบบดั้งเดิม 2 ประการใหญ่ ๆ คือ

1. จำนวนการทดลองสำหรับวิธีการซิมเพล็กซ์คือ $k+1$ ซึ่งมีจำนวนน้อยกว่าวิธีการแฟคทอเรียล ซึ่งมีจำนวนการทดลองเท่ากับ $2^k$ โดยที่ k คือจำนวนปัจจัยในกระบวนการผลิต

2. วิธีการซิมเพล็กซ์ใช้เพียงแค่ 1 การทดลองใหม่สำหรับการเคลื่อนที่ไปสู่พื้นผิว (Surface) ใหม่ แต่สำหรับวิธีการแฟคทอเรียลจะต้องการอย่างน้อยสุด ครึ่งหนึ่งของจำนวนการทดลองแฟคทอเรียล ซึ่งวิธีการหาเงื่อนไขที่เหมาะสม (Optimum Condition) โดยวิธีซิมเพล็กซ์ จะเริ่มต้นจากรูปทรงเรขาคณิต (Geometric) และจำนวนการทดลองเท่ากับ $k+1$ โดย k จะเท่ากับจำนวนปัจจัยในกระบวนการ




ภาพที่ 2.1

รูปทรงของซิมเพล็กซ์ กรณี 2 ปัจจัย

จากภาพที่ 2.1 แสดงรูปทรงของซิมเพล็กซ์ ในกรณีที่มี 2 ปัจจัย จะประกอบด้วยจุด 3 จุดดังนั้น การออกแบบซิมเพล็กซ์ จะเริ่มจากการทดลองด้วย 3 วิธีปฏิบัติ (Treatment) โดยในแต่ละวิธีปฏิบัติ จะได้ค่าของผลลัพธ์ของการทดลองในแต่ละครั้ง จากนั้นจะเริ่มการทดลองเป็นลำดับอย่างต่อเนื่อง โดยจะมีการเพิ่มการทดลองใหม่ทีละหนึ่งครั้ง จากนั้นจะทำการค้นหาเงื่อนไขที่เหมาะสม (Optimum Condition) ของปัจจัย โดยจะสิ้นสุดเมื่อ สามารถหาเงื่อนไขที่เหมาะสมของกระบวนการหรือไม่สามารถที่จะปรับปรุงค่าผลตอบสนองได้อีก ซึ่งวิธีการของซิมเพล็กซ์จากรูปทรงเรขาคณิต (Geometric) จะนี้เองจะนำมาเป็นต้นแบบในการทำวิจัยในครั้งนี้

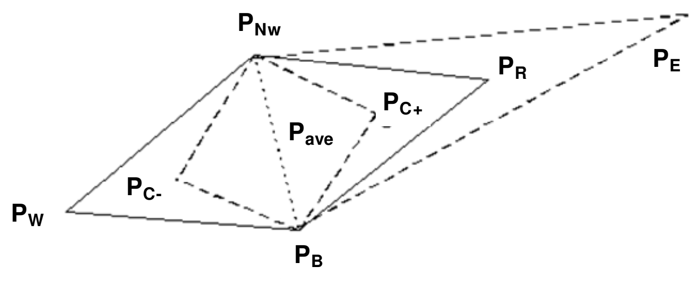
### 2.1.1 **วิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาด** (Modified Simplex Method)

วิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาด (Modified Simplex Method, MSM) โดย Nelder และ Mead (1965) เป็นวิธีการที่ใช้พื้นฐานเดียวกันกับวิธีการซิมเพล็กซ์ แต่จะมีการปรับรูปร่างและขนาดซึ่งขึ้นอยู่กับผลตอบสนองในแต่ละขั้นตอน ซึ่งวิธีการนี้สามารถเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า “Variable Size Simplex Method” โดยขั้นตอนที่เพิ่มเติมจากวิธีการเดิม คือ

1. สามารถขยายขนาดทิศทางขึ้น กรณีที่ทดลองไปตามเส้นทางที่ใกล้จุดที่ดีที่สุด

2. สามารถลดขนาดทิศทางลงกรณีที่ทดลองไปตามเส้นทางที่ห่างจากจุดที่ดีที่สุด ซึ่งข้อดีทั้งสองนี้จะทำให้วิธีการค้นหาถึงจุดที่เหมาะสมเร็วและหาค่าที่เหมาะสมใกล้กับจุดที่ดีที่สุดมากกว่าวิธีปกติ

ระดับของการหดตัวของวิธีซิมเพล็กซแบบปรับขนาดจะขึ้นอยู่กับความไม่เป็นไปตามความคาดหมายของผลตอบสนองที่เกิดขึ้น ซึ่งลักษณะการเปลี่ยนแปลงของจุดในแต่ละกรณีแสดงดังภาพที่ 2.2




ภาพที่ 2.2

วิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาด (Modified Simplex Method, MSM)

โดยรูปแบบของสมการที่ใช้ในการคำนวณหาค่าผลตอบสนองในแต่ละจุดแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$P_R = P_{ave} + \alpha(P_{ave} - P_w)$$
$$P_E = P_{ave} + \gamma(P_{ave} - P_w)$$
$$P_{C+} = P_{ave} + \beta^{+}(P_{ave} - P_w)$$
$$P_{C-} = P_{ave} - \beta^{-}(P_{ave} - P_w)$$

โดยที่

$P_W$ คือ ค่าที่แย่สุดที่ถูกกำจัด (Rejected Trial)

$P_E$ คือ ค่าที่เกิดจากการขยาย (Expansion Point)

$P_R$ คือ ค่าที่เกิดจากการสะท้อน (Reflection Point)

$P_{C+}$ คือ ค่าการหดตัวทางด้านบวก (Positive Contraction Point)

$P_{C-}$ คือ ค่าการหดตัวทางด้านลบ (Negative Contraction Point)

$P_{ave}$ คือ ค่ากึ่งกลางของพื้นผิว (Centroid of the Remaining Face/Hyperface)

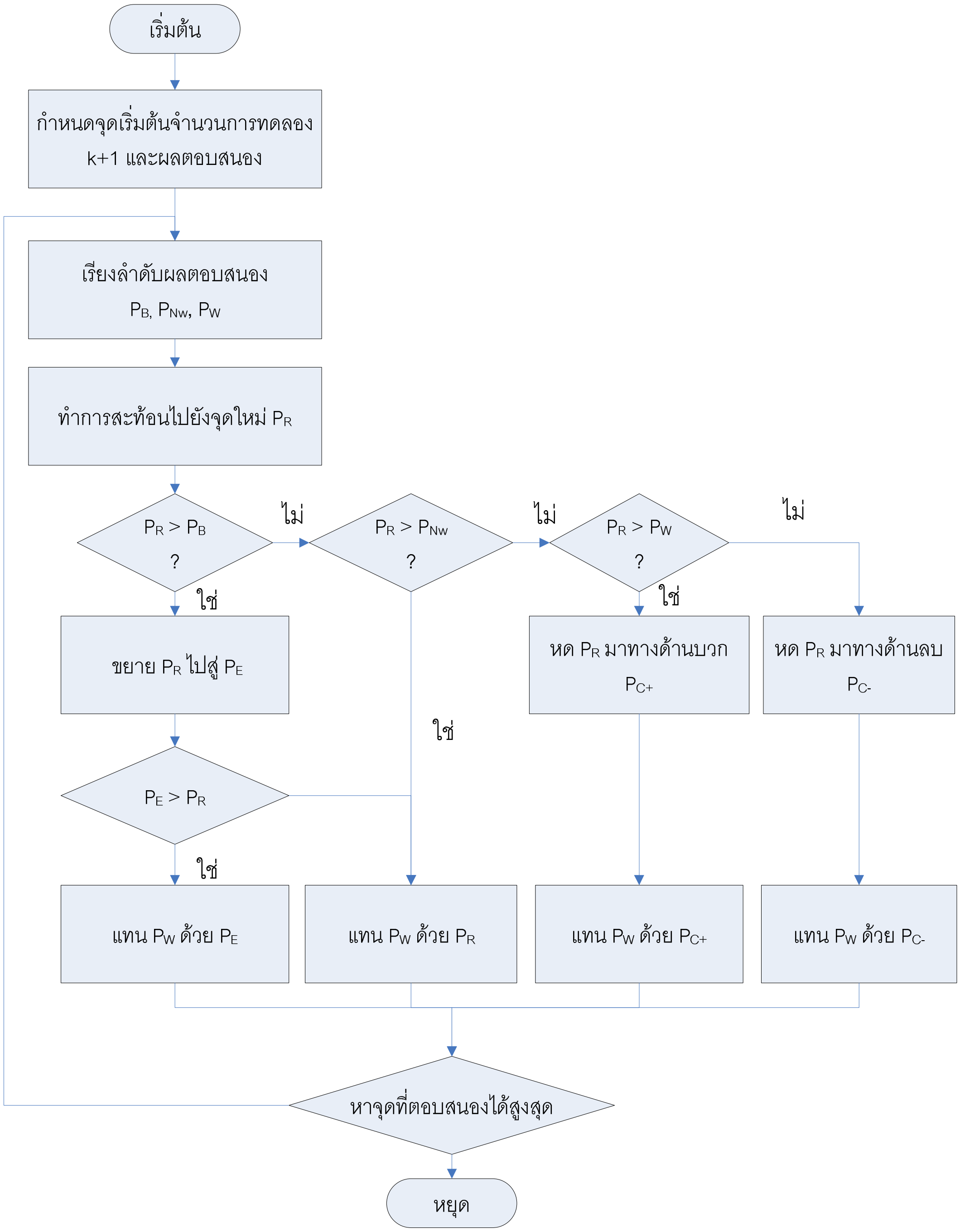
$\alpha$ คือ ค่าค่าสัมประสิทธิของการสะท้อน (Reflection Coefficient)

$\gamma$ คือ ค่าสัมประสิทธิของการขยายตัว (Expansion Coefficient)

$\beta^{+}$ คือ ค่าสัมประสิทธิการหดตัวทางด้านบวก (Positive Contraction Coefficient)

$\beta$ คือ ค่าสัมประสิทธิการหดตัวทางด้านลบ (Negative Contraction Coefficient)

จากรูปแบบการเคลื่อนที่และสมการของวิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาดในข้างต้นสามารถเขียนเป็นแผนผังการไหลการหาค่าที่เหมาะสมได้ดังภาพที่ 2.3

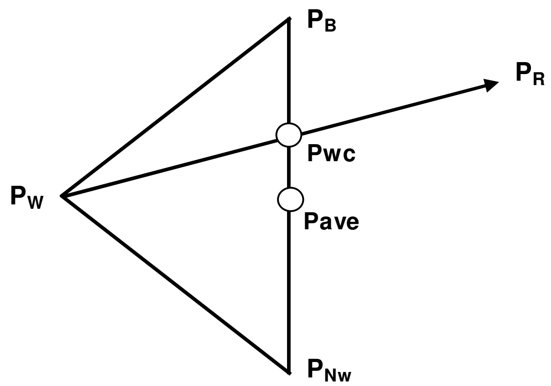



ภาพที่ 2.3

กระบวนการทำงานของวิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาด

**2.1.2 วิธีซิมเพล็กซ์ถ่วงน้ำหนักที่จุดศูนย์กลาง** (Weighted Centroid Simplex Method)

Ryan และคณะ (1980) ได้นำเสนอวิธีซิมเพล็กซ์แบบถ่วงน้ำหนักที่จุดศูนย์กลาง (Weighted Centroid Simplex Method, WSM) โดยใช้วิธีหาจุดกึ่งกลางจากค่าของผลตอบสนองในแต่ละจุด จากภาพที่ 2.4 จุดสมมาตรของจุดที่ให้ค่าผลตอบสนองที่น้อยที่สุดจะลากผ่านจุดที่มีเหลี่ยมและด้านตรงกันและลากจุดตัดจากด้านตรงข้างทำให้เกิดเส้นตัดจุดศูนย์กลาง โดยที่ค่าของผลตอบสนองที่ดีที่สุดที่เกิดขึ้นนั้นเป็นจุดยอดของวิธีซิมเพล็กซ์ ซึ่งหลักเกณฑ์ของวิธีซิมเพล็กซ์ถ่วงน้ำหนักที่จุดศูนย์กลางนั้น จะเป็นลักษณะเดียวกันกับวิธีการของซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาด (Modified Simplex Method, MSM) โดยที่จะมีส่วนที่แตกต่างกันตรงการคำนวณของจุดสะท้อน (Reflection Point)




ภาพที่ 2.4
วิธีซิมเพล็กซ์แบบถ่วงน้ำหนักที่จุดศูนย์กลาง (Weighted Centroid Simplex Method, WSM)

นิยามของจุดถ่วงน้ำหนัก ($P_{wc}$) สามารถแสดงการคำนวณได้ดังต่อไปนี้

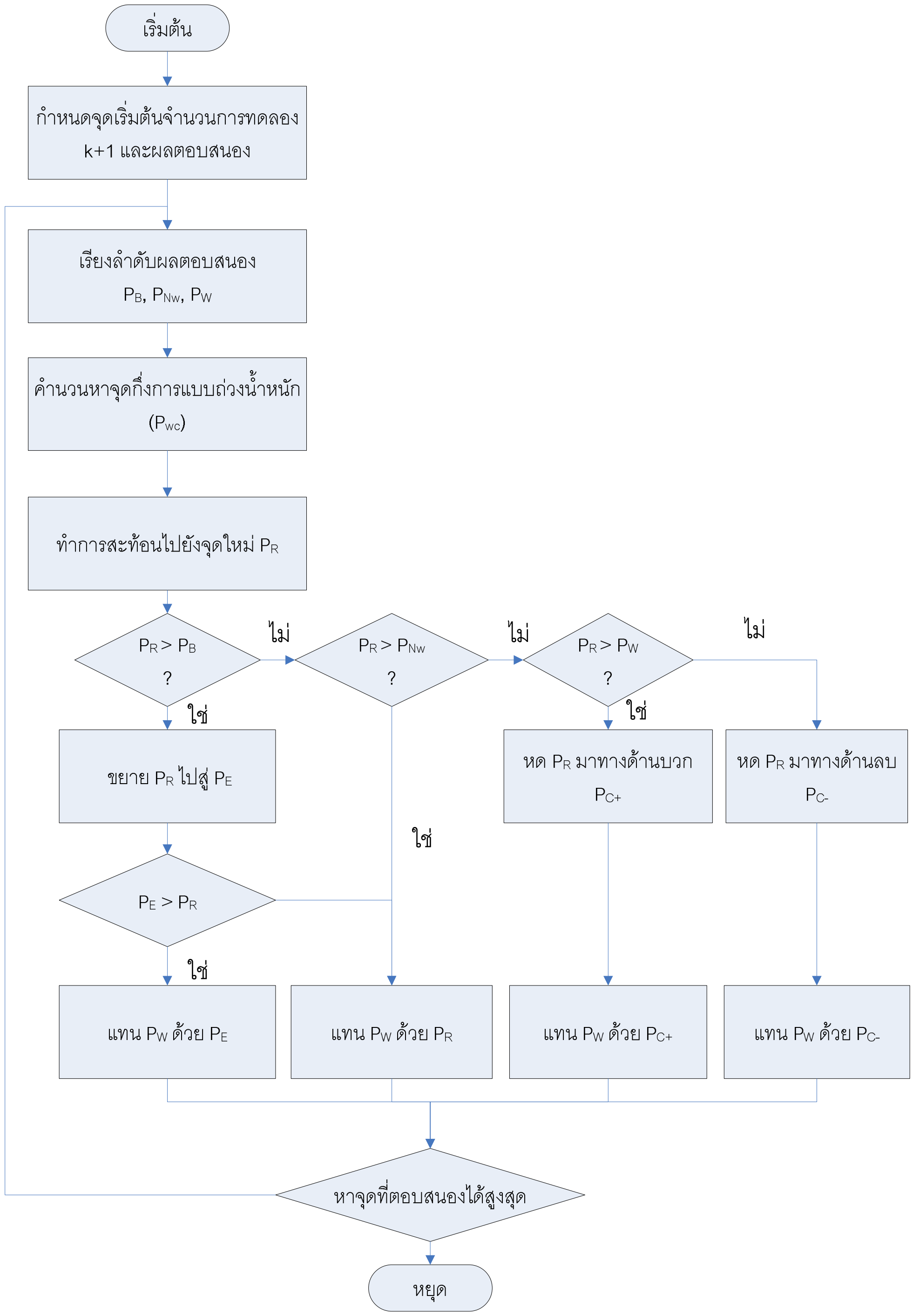
$$P_{wc} = \frac{\sum \left| Y(P_i) - Y(P_w) \right| P_i}{\sum \left| Y(P_i) - Y(P_w) \right|}$$

โดยที่

$Y(P_i)$ คือค่าผลตอบสนองทุกจุดของ $P_i$ โดยที่ i คือจุด B, Nw และ W ของซิมเพล็กซ์ และ $Y(P_w)$ คือค่าผลตอบสนองของจุดที่แย่ที่สุดของ $P_w$ ซึ่งค่าของ $P_{wc}$ จะถูกนำไปใช้ในการแทนที่ของค่า $P_{ave}$ ในรูปแบบของวิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาด (MSM) ในสมการดังต่อไปนี้

$$P_R = P_{wc} + \alpha(P_{wc} - P_w)$$

จากรูปแบบการเคลื่อนที่และสมการของวิธีซิมเพล็กซ์แบบถ่วงน้ำหนักที่จุดศูนย์กลางสามารถเขียนเป็นแผนผังการไหลการหาค่าที่เหมาะสมได้ดังภาพที่ 2.5




ภาพที่ 2.5

กระบวนการทำงานของวิธีซิมแบบเพล็กซ์ถ่วงน้ำหนักที่จุดศูนย์กลาง

**2.1.3 วิธีซิมเพล็กซ์ปรับขนาดแบบพิเศษ** (Super Modified Simplex Method)

เป็นวิธีการที่เป็นลำดับขั้นในการค้นหาคำตอบ ที่พัฒนาขึ้นมาเรียกว่า วิธีการหาค่าที่ดีที่สุดแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Non-linear Optimization Method) ใช้ในการแก้ปัญหาสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น เมื่อปัจจัยต่าง ๆ ได้ถูกปรับปรุงเพื่อหาคำตอบ จากนั้นก็จะสร้างความเหมาะสมที่จะเลือกทิศทางของคำตอบที่เหมาะสมที่จะให้ค่าที่ดีที่สุดเกิดขึ้น นักวิชาการหลายคนได้ปรับปรุงวิธีการของซิมเพล็กซ์ ของ Nelder และ Mead (1965) ที่ได้ทำการแทนที่จุดที่ค่าผลตอบสนองน้อยที่สุดนั้นด้วยสัดส่วนของระยะทางที่มากขึ้นในทิศทางเดิมเพื่อเพิ่มความเหมาะสมในการทดลองว่าระยะของทิศทางที่เพิ่มขึ้นนั้นมีผลต่อผลตอบสนองที่ออกมาหรือไม่ โดยวิธีการนี้ถูกเรียกว่า วิธีซิมเพล็กซ์ปรับขนาด (Modified Simplex Method, MSM) และจากจุดเริ่มต้นนี้เอง วิธีซิมเพล็กซ์ปรับขนาด (MSM) ก็ถูกปรับปรุงอีกครั้งโดย Routh และคณะ (1977) ซึ่งถูกเรียกใหม่ว่า วิธีซิมเพล็กซ์ปรับขนาดแบบพิเศษ (Super Modified Simplex Method , SMS) โดยวิธีการนี้เกิดจากการคำนวณค่าที่ดีที่สุดโดยใช้สมการทำลังสอง (Second – Order Polynomial Function) มาคำนวณผ่านจุดที่แย่ที่สุด ซึ่งความแตกต่างที่เกิดจากการศึกษาเพิ่มเติมในส่วนของตัวแปรอัลฟา ($\alpha$) ที่เป็นค่าสัมประสิทธิของการสะท้อน (Reflection Coefficient) ของซิมเพล็กซ์ จากสมการของการหาจุดผลตอบสนองที่เกิดขึ้นที่ดีที่สุดต่อไป

$$P_R = P_{ave} + \alpha(P_{ave} - P_w)$$

เนื่องตัวแปรค่าสัมประสิทธินี้จะเป็นตัวกำหนดตำแหน่งที่จะเกิดจุดถัดไป ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจจึงได้มีการแทนค่าของตัวแปรอัลฟา($\alpha$) ใหม่ด้วย $1-\beta$ ทำให้ได้สมการของการสะท้อนในรูปแบบใหม่คือ

$$P_R = \beta P_{ave} + (1-\beta)P_w)$$

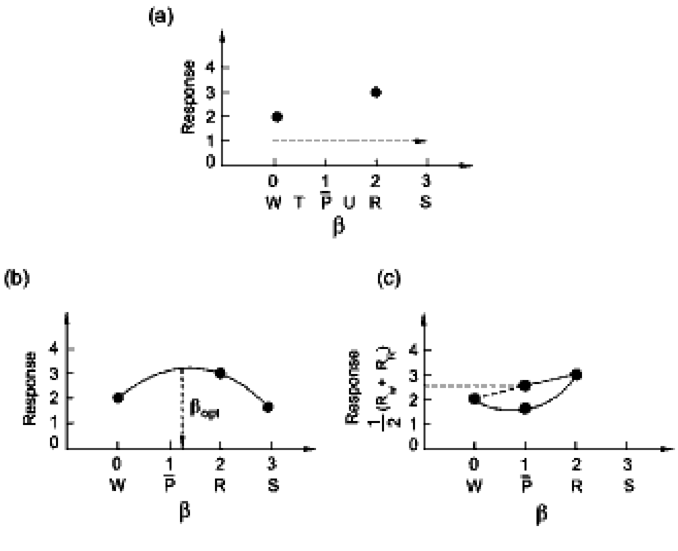
และเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจจึงได้จัดรูปสมการการพยากรณ์พิกัดของจุดผลตอบสนองใหม่เป็น

$$Z = \beta_{opt} P_{ave} + (1-\beta_{opt})P_w)$$

โดยที่ค่า $\beta$ เป็นค่าที่ได้มาจากการคำนวณผ่านสมการกำลังสอง (Second – Order Polynomial) ของผลตอบสนองในแต่ละจุด ซึ่งในรูปแบบปัจจัย $\beta$ สามารถหาได้จากการสมการ การพยากรณ์แบบ Polynomial ดังต่อสมการไปนี้

$$\beta_{opt} = \frac{Y(P_R) - 4 \cdot Y(P_{ave}) + 3 \cdot Y(P_W)}{2 \cdot Y(P_R) - 4 \cdot Y(P_{ave}) + 2 \cdot Y(P_W)}$$

เนื่องการวิเคราะห์การพยากรณ์จุดของวิธีซิมเพล็กซ์ปรับขนาดแบบพิเศษ (SMS) ได้มาจากสมการกำลังสองที่เป็นสมการพื้นผิวโค้ง ดังนั้นในกรณีที่ $\beta_{opt}$ ตกอยู่ในช่วงของ Min และ Max ของผลตอบสนอง ที่จุด $P_W$ และจุด $P_R$ ต้องทำการวิเคราะห์เพิ่มเติมดังอธิบายในภาพที่ 2.6 โดยเมื่อดูลักษณะความโค้งของรูปร่างพบว่าลักษณะของรูปร่างนั้นแบ่งออกได้เป็น 2 รูปแบบ




ภาพที่ 2.6

ตัวอย่างภาพประกอบการคำนวณวิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาดแบบพิเศษ

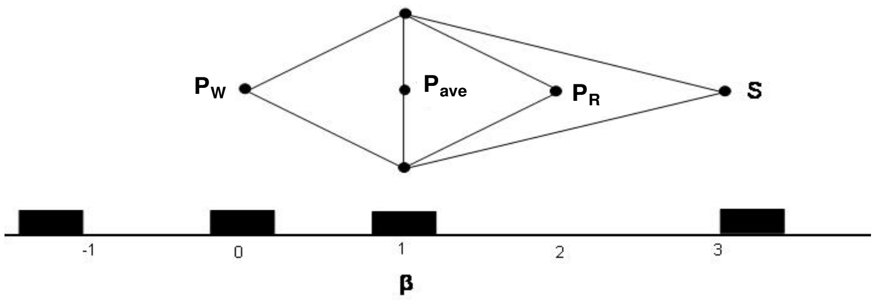
ที่มา : Statistical Design Chemometrics

แบบแรก เว้าเข้าข้างใน (Concave) และแบบที่สองคือ นูนออกด้านนอก (Convex) ในทฤษฎีของวิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาดแบบพิเศษ (SMS) ได้ใช้สมการในการวิเคราะห์จากค่าผลตอบสนองของ $P_{ave}$ โดย

$$P_{ave} < \frac{1}{2}(P_R + P_W) \qquad \text{และ} \qquad P_{ave} > \frac{1}{2}(P_R + P_W)$$

ถ้า $P_{ave}$ มีค่าน้อยกว่าพื้นผิวที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะเว้าเข้ามาด้านใน แต่ถ้า $P_{ave}$ ที่เกิดขึ้นมีค่ามากกว่า หรือเท่ากับ ลักษณะพื้นผิวที่เกิดขึ้นจะเป็นในลักษณะที่นูนออกด้านนอกดังภาพที่ 2.6 และในอีกกรณีหนึ่งการวิเคราะห์ความเหมาะสมของค่า $\beta_{opt}$ สามารถแบ่งเป็นกรณีต่าง ๆ ได้ดังนี้

โดยในกรณีที่ค่าของ $\beta_{opt}$ มีค่าเป็นอนันต์ (Infinite) คือไม่สามารถหาคำตอบได้โดยค่าที่ออกมาทำให้ไม่สามารถปรับเปลี่ยนได้ ดังนั้นในกรณีค่าของ $\beta_{opt}$ ที่ตกอยู่ในบางช่วงที่แสดงดังภาพที่ 2.7 จะถูกจัดการด้วยกฎต่อไปนี้




ภาพที่ 2.7

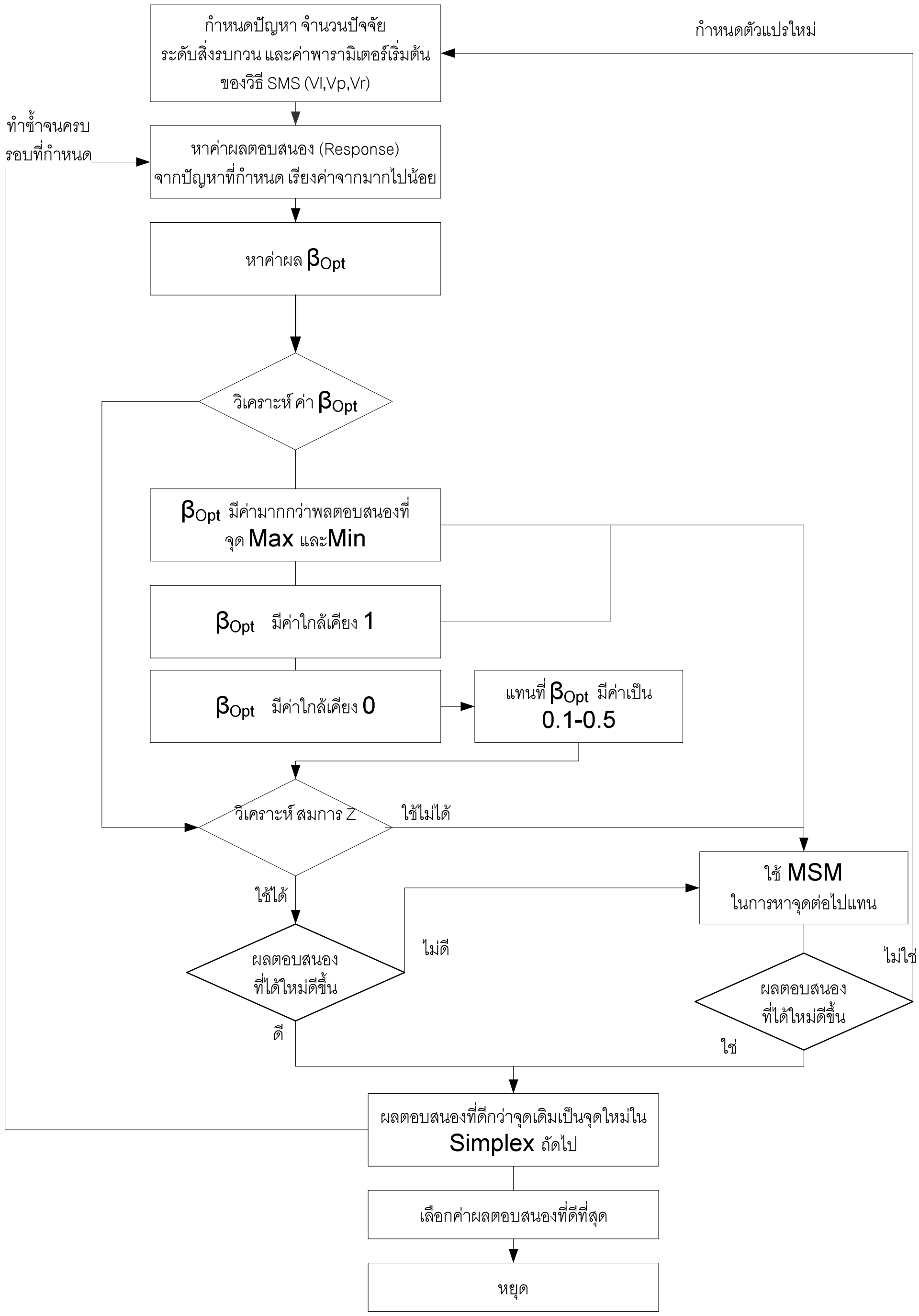
ข้อจำกัดของช่วง Interval value ของค่า $\beta$

1. ถ้า $\beta_{opt}$ มีค่าน้อยกว่า -1 (จุดที่ผลตอบสนองน้อยที่สุด) หรือมีค่ามากกว่า 3 (จุดที่ผลตอบสนองมากที่สุด) ทำให้ไม่สามารถสร้างสมการกำลังสองได้จึงให้กลับไปใช้วิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาด ในการยืด (Expansion) หรือการหดลง (Contraction) แทน

2. ถ้า $\beta_{opt}$ มีค่าใกล้เคียง 0 ควรหลีกเลี่ยงเพราะว่าซิมเพล็กซ์ใหม่ที่เกิดขึ้นจะมีค่าใกล้เคียงเดิมมาก จึงมีการกำหนดค่าระยะปลอดภัยของ $\beta$ (Safety Margin, Sp) ในกรณีถ้าค่า $\beta_{opt}$ ตกอยู่ใกล้ช่วง (-Sp, Sp) ซึ่งทฤษฎีของ SMS จะใช้ค่าคงที่แทน Sp หรือ - Sp โดยปกติมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 0.5

3. ถ้าค่า $\beta_{opt}$ มีค่าเท่ากับ 1 ระบบซิมเพล็กซ์จะไม่มีทิศทางสมการ Z ที่เกิดขึ้นจะทับกันสนิทกับจุด $P_{ave}$ และจะไม่เกิดการสะท้อนเกิดขึ้น $\beta_{opt}$ มีค่าใกล้เคียง 1 ก็ควรหลีกเลี่ยงเช่นกัน

เพราะถ้า $(1-\delta\beta) < \beta_{opt} < (1+\delta\beta)$ ค่า $\beta_{opt}$ = 1 หากนำไปแทนค่าพบว่า จะทำให้ขอบเขตแคบลงจนใกล้ถึงระดับที่ไม่สามารถปรับปรุงค่าผลตอบสนองได้




ภาพที่ 2.8

กระบวนการทำงานของวิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาดแบบพิเศษ

### 2.1.4 **วิธีซิมเพล็กซ์แบบผสม** (Complex Simplex Method)

วิธีซิมเพล็กซ์แบบผสม (Complex Simplex Method, CSM) โดย Box (1965) เป็นวิธีการค้นหาแบบต่อเนื่องซึ่งผ่านการทดสอบและได้ผลดีในการแก้ปัญหาในรูปแบบของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยได้นำเอาวิธีการของซิมเพล็กซ์แบบอื่น ๆ มาพัฒนาต่อซึ่งวิธีซิมเพล็กซ์แบบผสมจะสนใจที่จะพัฒนาวิธีการหาค่าที่ดีที่สุดจากวิธีซิมเพล็กซ์ในเงื่อนไขที่จุดเริ่มต้นที่ใช้ต้องเป็นจุดที่สุ่มขึ้น ณ บริเวณจุดที่ถูกเลือกขึ้นมา เพราะฉะนั้นรูปแบบของกราฟที่เกิดขึ้นนี้ไม่ได้อยู่ในรูปแบบทางเรขาคณิต โดยจุดที่ผลตอบสนองน้อยที่สุดจะถูกแทนที่ด้วยจุดที่มีเหลี่ยมและด้านตรงกัน

วิธีซิมเพล็กซ์แบบผสม จะเริ่มต้นจากการสร้างจุดที่เหมาะสมจากการสุ่ม ในกรณีที่การสุ่มเป็นจุดที่ไม่เหมาะสม จุดใหม่จะถูกสร้างขึ้นมาแทนโดยใช้จุดก่อนหน้านี้เป็นตัวกำหนดจุดที่เหมาะสม โดยปกติจุดที่ไม่เหมาะสมจะถูกเคลื่อนไปที่ไปข้างหน้าของจุดกึ่งกลางก่อนหน้านี้ที่สุ่มมาแล้วและเหมาะสม ในกรณีที่จุดที่เหมาะสมครบแล้วจุดที่แย่ที่สุดคือ จุดที่จะทำการสะท้อนออกไปโดยผ่านจุดกึ่งกลางเพื่อที่จะหาจุดใหม่ถัดไป ซึ่งทั้งนี้ทั้งนั้นก็ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับจำนวนที่ขึ้นอยู่กับจำนวนอื่น ๆ ของจุดที่จะเกิดขึ้นใหม่ด้วย ในการที่จะยอมรับหรือแก้ไขจุดใด ๆ จะมีข้อกำหนดอยู่ว่า ถ้าจุดนั้นตกอยู่นอกขอบเขตของข้อจำกัดจุดนั้นต้องแก้ไขให้อยู่ภายใต้ขอบเขตของข้อจำกัด หรือถ้าเป็นจุดที่ไม่เหมาะสมก็ให้ทำการสะท้อนไปข้างหน้าของจุดที่เหมาะสม โดยชุดของคำสั่งและขั้นตอนวิธีของซิมเพล็กซ์แบบผสมมีดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1. สมมุติขอบเขตของ $x(x^{(L)}, x^{(U)})$ โดยที่ $x^{(L)}$ คือค่าขอบเขตทางด้านต่ำ (Lower limit) และ $x^{(U)}$ คือ ค่าขอบเขตทางด้านสูง (Upper Limit) ค่าสะท้อนกลับ (Reflection Parameter, $\alpha$ ) และค่ากำหนดในการหยุด (Termination Parameter, $\varepsilon, \delta$ )

ขั้นตอนที่ 2. สร้างเซตเริ่มต้นของ P (โดยทั่วไปเท่ากับ 2N) ซึ่งเป็นจุดที่เหมาะและเป็นไปได้ของแต่ละจุด

1. หาจุด $x_i^{(P)}$ ในภายใต้ขอบเขตโดยการสุ่ม N ครั้ง โดยที่ P คือ จุดใด ๆ ที่เกิดขึ้น
2. ถ้า $x^{(P)}$ คือจุดที่เป็นไม่ไปได้ (Infeasible point) ให้คำนวนค่า $\bar{x}$ (Centroid) ของเซตปัจจุบันและทำการตั้งค่าใหม่(Reset) $x^{(P)} = x^{(P)} + \frac{1}{2}(\bar{x} - x^{(P)})$ จนกระทั้ง $x^{(P)}$ เป็นค่าที่เป็นไปได้และเหมาะสม ถ้ากรณีที่ $x^{(P)}$ เป็นไปได้อยู่แล้วก็ให้ดำเนินการต่อไปตามข้อ 2.1 จนได้ครบทุกจุดของ P เซต
3. ทำการทดสอบ $f(x^{(P)})$ แทน P =0, 1, 2, 3,…,(P-1)

ขั้นตอนที่ 3. ทำสะท้อนจุดให้สมบูรณ์ โดย $x^R$ คือจุดที่เกิดจากการสะท้อน

1. เลือกค่า $x^R$ ดังนี้ $f(x^R) = \max f(x^{(P)}) = F\max$

2. คำนวนจุดกึ่งกลาง $\bar{x}$ (Centroid) (ยกเว้นจุด $x^R$) และจุดที่เกิดขึ้นใหม่ $x^m$ จะได้จาก $x^m = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x^R)$

3. ถ้า $x^m$ คือจุดที่เป็นไปได้แล้ว และ $f(x^m) \geq F\max$ ให้ทำการสะท้อนกลับครึ่งหนึ่งของจุดกึ่งกลางของ $\bar{x}$ (Centroid) จนกระทั่ง $f(x^m) < F\max$

กรณี ถ้า $x^m$ คือจุดที่เป็นไปได้ และ $f(x^m) < F\max$ ให้ข้ามไปขั้นตอนที่ 5

กรณี ถ้า $x^m$ ยังเป็นจุดที่ยังเป็นไปไม่ได้ก็ให้ทำขั้นตอนที่ 4

ขั้นตอนที่ 4. การตรวจสอบความเป็นไปได้ (Feasibility check)

1. สำหรับทุก ๆ ค่าของ i ที่มีการตั้งค่าขอบเขตใหม่

ถ้า $x_i{}^m < x_i{}^{(L)}$ กำหนดให้ $x_i{}^m = x_i{}^{(L)}$

ถ้า $x_i{}^m < x_i{}^{(U)}$ กำหนดให้ $x_i{}^m = x_i{}^{(U)}$

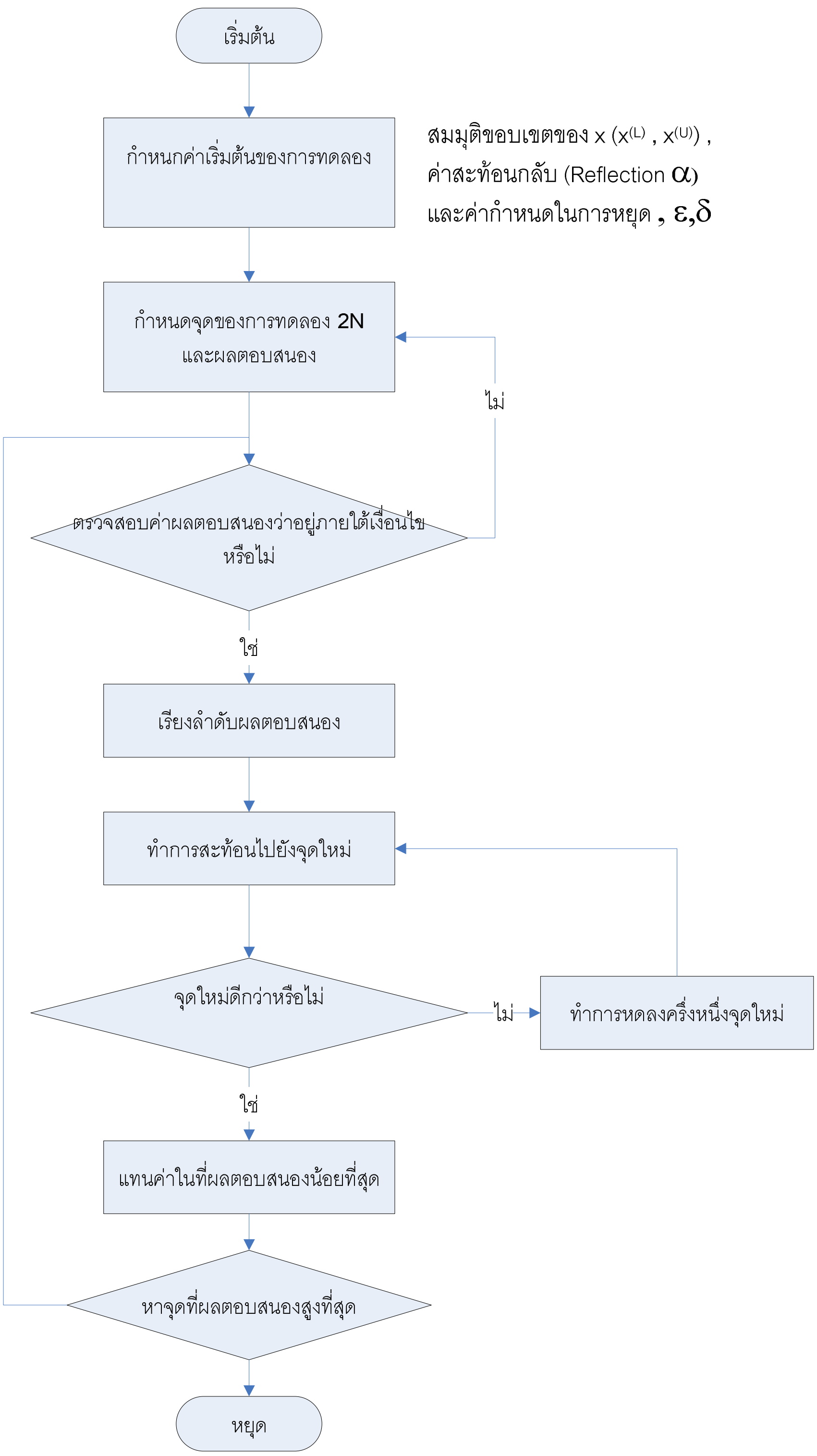
2. ถ้าผลลัพท์ของ $x_i{}^m$ ยังเป็นไปไม่ได้ให้ทำการสะท้อนจุดครึ่งหนึ่งของระยะห่างจากจุดกึ่งกลาง และทำไปจนกระทั่ง $x^m$ มีค่าที่เป็นไปได้ ตามขั้นตอนที่ 3

ขั้นตอนที่ 5. แทนที่ค่า $x^R$ ด้วย $x^m$ และตรวจสอบจุดสิ้นสุดของการทำงาน

1) คำนวน $\bar{f} = \frac{1}{P}\sum_p f(x^{(p)})$ และ $\bar{x} = \frac{1}{P}\sum_p x^{(p)}$

2) ถ้า $\sqrt{\sum_p (f(x^{(p)}) - \bar{f})^2} \leq \varepsilon$ และ $\sqrt{\sum_p \left\| x^{(p)} - \bar{x} \right\|^2} \leq \delta$

จากรูปแบบการเคลื่อนที่และสมการของวิธีซิมเพล็กซ์แบบผสม สามารถเขียนเป็นแผนผังการไหลการหาค่าที่เหมาะสมได้ดังภาพที่ 2.9




ภาพที่ 2.9

กระบวนการทำงานของวิธีซิมเพล็กซ์แบบผสม

**2.1.5 วิธีล็อกการิทึมฮาร์โมนีเซิร์ช** (Logarithm Harmony Search Algorithm)

เมตาฮิวริสติก (Meta - Heuristic Algorithm) เป็นการหาคำตอบโดยการเลียนแบบพฤติกรรมตามธรรมชาติของสัตว์หรือลักษณะเฉพาะของสิ่งที่สนใจศึกษาซึ่งวิธีฮาร์โมนีเซิร์ช (Harmony Search Algorithm, HSA) โดย Kim และคณะ (2002) ก็เป็นอีกวิธีหนึ่งที่เป็นหาคำตอบเป็นแบบเมตาฮิวริสติก โดยใช้แนวทางการแก้ปัญหาของนักดนตรีเพื่อค้นหาลักษณะของการประสานเสียงของเครื่องคนตรีที่เหมาะสมที่สุด (Perfect State of Harmony) ในทางการประยุกต์ใช้แก้ปัญหาเพื่อหากระบวนการค้นหาคำตอบของปัญหาที่ดีที่เหมาะสมที่สุด (Global Solution) ภายใต้เป้าหมายของสมการวัตถุประสงค์ (Objective Function) ซึ่งการกำหนดระดับของเครื่องดนตรีเปรียบเสมือนการกำหนดระดับของปัจจัยในการหาคำตอบ เพื่อคุณภาพของเสียงที่ดีที่สุดเสมือนกับการหาคำตอบของปัจจัยออกมา โดยค่าของผลลัพธ์ของสมการวัตถุประสงค์ (Objective function) ที่ได้มานั้นเป็นผลคำตอบที่เกิดจากเงื่อนไขที่ได้รับจากปัจจัยตัดสินใจ (Decisions Variable) ดังนั้นลำดับขั้นตอนที่ใช้ในการแก้ปัญหาของวิธีฮาร์โมนีเซิร์ช (Harmony Search Algorithm, HSA) จึงใช้หลักการบนพื้นฐานธรรมชาติของนักดนตรีที่มีการปรับปรุงและแก้ไขตัวโน๊ต เมื่อนักดนตรีสามารถที่จะหาตัวโน๊ตหรือปรับปรุงการประสานเสียงของเครื่องดนตรีให้ดีขึ้นก็จะกลายเป็นการประสานเสียงแบบใหม่ที่ดีกว่า

ในทางวิศวกรรม การประมาณค่าของคำตอบที่เกิดขึ้นนั้นได้รับผลมาจากการใส่ค่าของปัจจัยที่ใช้ในการตัดสินใจ (Decision variable) ในสมการวัตถุประสงค์ (Objective function) หรือสมการที่เหมาะสม (Fitness function) การประเมินค่าที่ได้นั้นมีหลายมุมมองอันได้แก่ ต้นทุน (Cost) ประสิทธิภาพ (Efficiency) และข้อผิดพลาดต่าง ๆ ที่สามารถเกิดขึ้นได้ (Error) ซึ่งในการนำไปประยุกต์ใช้งานนั้นมีความสำเร็จสูงมากในรูปแบบที่หลากหลายของตัวปัญหา อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าจะมีประสิทธิภาพในการปัญหาที่ดีแต่ก็ยังมีข้อบกพร่องอยู่ ดังนั้นเพื่อปรับข้อด้อยหรือที่บกพร่องอยู่ Mahdavi และคณะ (2007) ได้ทำการพัฒนาอีกครั้งโดยได้นำเอาสมการทางคณิตศาสตร์เข้ามาประยุกต์ในการปรับปรุงค่าความน่าจะเป็นในการเลือกปรับระดับตัวโน๊ต (Pitch Adjusting Rate, PAR) และ ช่วงกว้างของระยะทางในการปรับระดับ (Distance Band Width, Bw) จึงเรียกชื่อใหม่ว่าล็อกการิทึมวิธีฮาร์โมนีเซิร์ช (Logarithm Harmony Search Algorithm, HSA) โดยที่การทำงานจะมี 5 ขั้นตอนหลัก ซึ่งประกอบด้วย

ขั้นตอนที่ 1 วิเคราะห์ปัญหาที่ใช้ พร้อมทั้งระบุปัจจัยและขอบเขตของปัจจัย ระบุปัญหาที่ต้องการ โดยวัตถุประสงค์ของเป้าหมายคือ อะไร ที่ใช้ในการดำเนินกิจกรรมของการค้นหาแก้ไขตัวสมการของปัญหา เช่น

f(x) : สมการวัตถุประสงค์ (Objective Function)

xi : ตัวแปรตัดสินใจ (Decision Variable)

N : จำนวนของตัวแปรตัดสินใจ (Number of Decision Variables)

HMS : จำนวนของชุดของตัวโน๊ตในการจัดเก็บ (Number of Solution Vectors in HM)

HMCR : ความน่าจะเป็นในการเลือกตัวโน๊ตที่มีในระบบ (HM Considering Rate)

PAR : ความน่าจะเป็นในการเลือกปรับระดับตัวโน๊ต (Pitch Adjusting Rate)

Bw : ช่วงกว้างของระยะทางในการปรับระดับ (Distance Band Width)

NI : จำนวนครั้งของการค้นหา (Number of Solution Vector Generations)

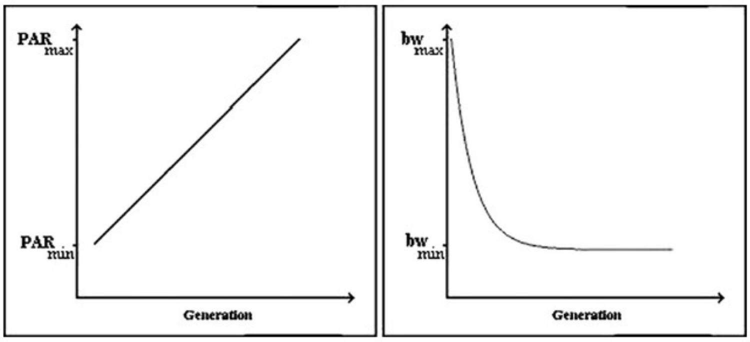
ขั้นตอนที่ 2 ระบุขนาด HM (Harmony Memory) และคำตอบเริ่มต้นโดย HM ก็คือจำนวนของผลตอบสนองที่ต้องการจัดเก็บ (HM = Y1, Y2…Yi) และคำตอบเริ่มต้นเกิดจากการสร้างเลขสุ่มที่มีลักษณะเป็นการแจกแจงชนิดยูนิฟอร์ม (Uniform Random Number)

ขั้นตอนที่ 3 พัฒนาสร้าง New Harmony จาก HM (Harmony Memory)

ขั้นตอนที่ 4 วิเคราะห์ ปรับปรุง New Harmony ที่เกิดขึ้น

ขั้นตอนที่ 5 กระทำซ้ำขั้นตอนที่ 3 และ ขั้นตอนที่ 4 ภายใต้ขอบเขตที่กำหนดไว้และผลที่ได้จากการคำนวณจะสิ้นสุดเมื่อเกณฑ์ที่ใช้ในการณ์ตัดสินใจได้ผลคำตอบที่น่าพอใจโดยสามารถแสดงขั้นตอนกระบวนการหาค่าที่ดีที่สุดได้ดังภาพที่ 2.11

สำหรับในแก้ปัญหาของวิธีฮาร์โมนีเซิร์ช ค่าปัจจัยของ Bw และ PAR จะเป็นปัจจัยสำคัญที่ช่วยการค้าหาค่าที่เหมาะสมของคำตอบ ซึ่งสำหรับวิธีฮาร์โมนีเซิร์ชทั่ว ๆ ไปจะเป็นค่าคงที่กำหนดขึ้นมา โดยความสัมพันธ์ค่าปัจจัยของ Bw และ PAR จะเป็นไปในรูปแบบดังนี้ ถ้าค่าของ PAR มีค่าน้อย ๆ และ Bw มีค่ากว้าง ๆ จะทำให้คุณสมบัติของระบบมีประสิทธิภาพแย่ลง และนำไปสู่การพิจารณาการเพิ่มรอบของการทำซ้ำเพื่อให้ได้ค่าที่เหมาะสมที่สุด และในตรงกันข้ามถ้าค่าของ PAR มีค่ามาก ๆ และ Bw มีค่าแคบ ๆ จะทำให้การแก้ปัญหาได้ดีในตอนท้าย ๆ ของการหาค่าที่เหมาะสมที่ดีที่สุด ดังนั้นวิธีการซึ่งเปลี่ยนแปลงได้ของค่า PAR และ Bw จึงเป็นวิธีการที่นำไปสู่การพัฒนาเพื่อให้ได้ค่าที่ดีที่สุด ซึ่งสัมพันธ์ของค่า PAR และ Bw กับ Generation Number สามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2.10




ภาพที่ 2.10

ความสัมพันธ์ของค่า PAR และ Bw กับ Generation Number

ที่มา : Mahdavi และคณะ (2007) Applied Mathematics and Computation

ซึ่งค่า PAR และ Bw ที่มีการเปลี่ยนแปลงในแต่ละรุ่นของการพัฒนา (Generation Number) แสดงไว้ดังต่อไปนี้

$$PAR(gn) = PAR_{min} + \frac{(PAR_{max} - PAR_{min})}{NI} \times gn$$

เมื่อ

PAR: อัตราการปรับระดับเสียงสำหรับแต่ละรุ่น (Pitch Adjusting Rate for each Generation)

$PAR_{min}$: อัตราการปรับระดับเสียงต่ำสุด (Minimum Pitch Adjusting Rate)

$PAR_{max}$: อัตราการปรับระดับเสียงสูงสุด (Maximum Pitch Adjusting Rate)

NI: จำนวนการสร้างเวกเตอร์โซลูชั่น (Number of Solution Vector Generation)

gn : จำนวนหมายเลขรุ่น (Generation Number)

และ

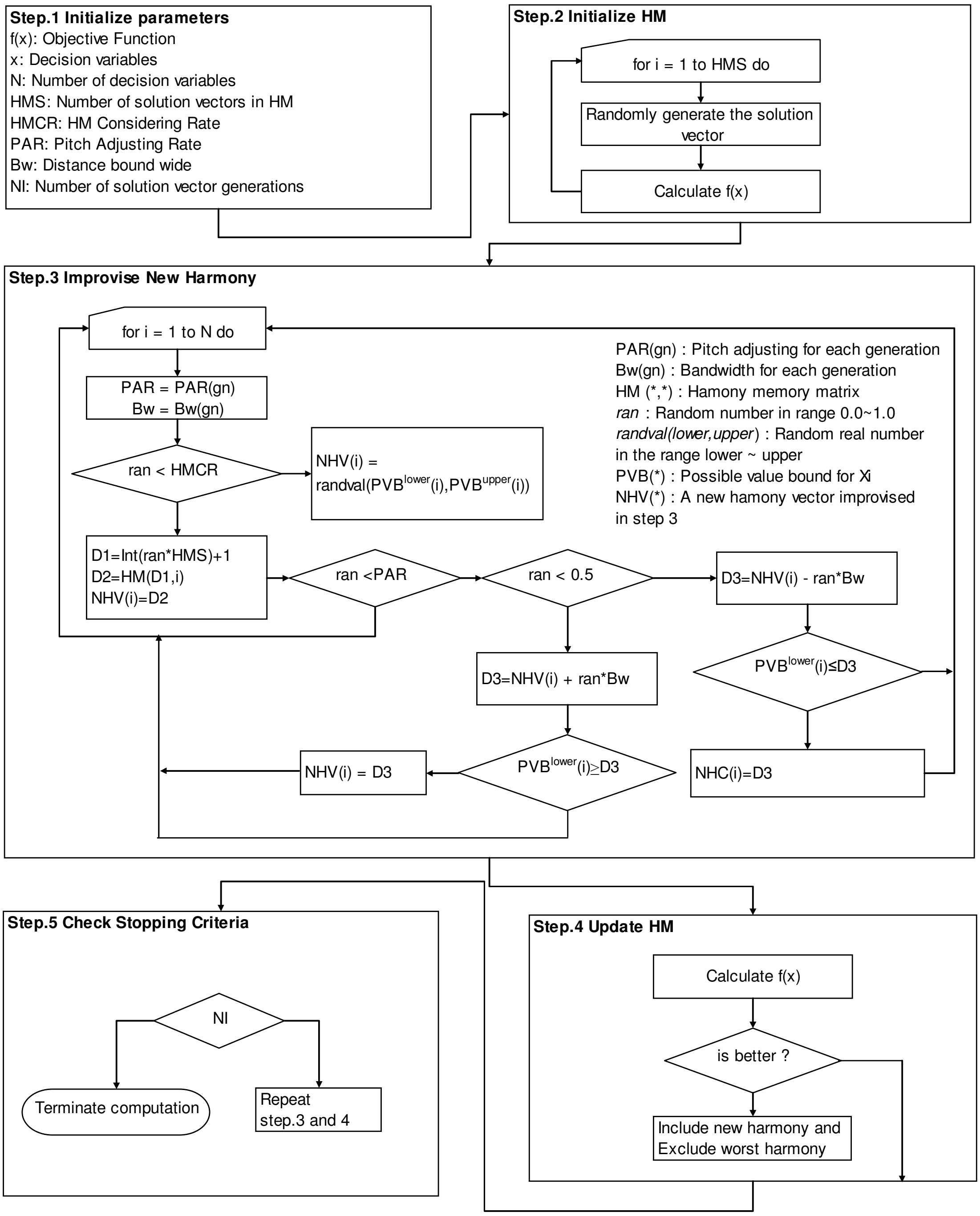
$$Bw(gn) = Bw_{max} \exp(c \cdot gn) \quad \text{โดย} \quad c = \frac{Ln(\frac{Bw_{min}}{Bw_{max}})}{NI}$$

เมื่อ

Bw (gn) : แบนด์วิธสำหรับแต่ละรุ่น (Bandwidth for each Generation)

$Bw_{min}$ : แบนด์วิดธ์ต่ำสุด (Minimum Bandwidth)

$Bw_{max}$ : แบนด์วิดธ์สูงสุด (Maximum Bandwidth)




ภาพที่ 2.11

กระบวนการทำงานของวิธีล็อกการิทึมฮาร์โมนีเซิร์ช

ที่มา : Mahdavi และคณะ (2007) Applied Mathematics and Computation

**2.1.6 วิธีบีส์อัลกอริทึม** (The Bees Algorithm)

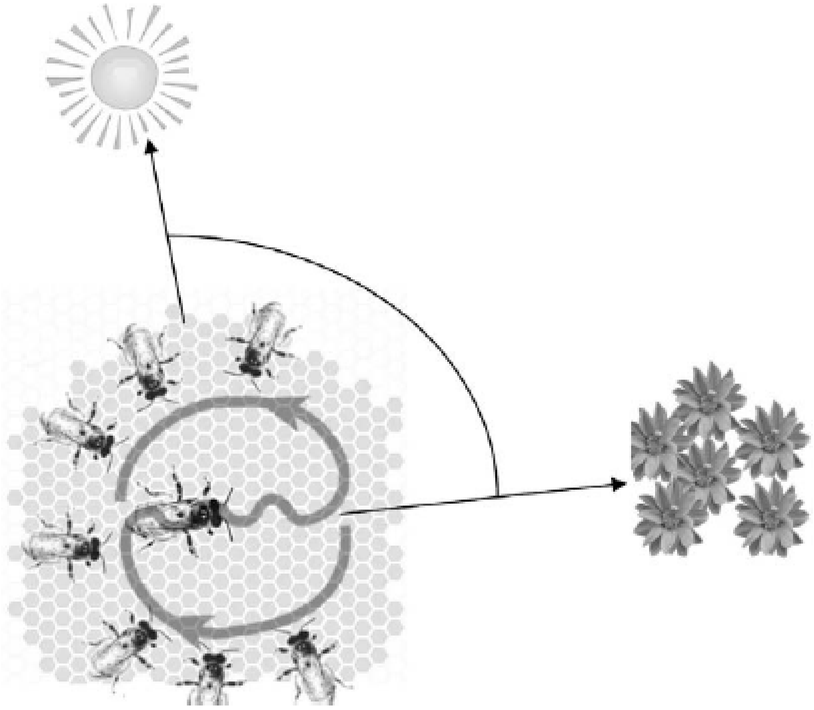
วิธีบีส์อัลกอริทึม (Bees Algorithm) ได้ถูกนำเสนอโดย Pham และคณะ (2006) โดยวิธีบีส์อัลกอริทึมเป็นขบวนการในการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดที่เลียนแบบมาจากพฤติกรรมในการหาอาหารของฝูงผึ้ง และเป็นอัลกอริทึมชนิดหนึ่งที่อยู่ในกลุ่มของอัลกอรึทึมที่มีแนวคิดมาจากการเลียนแบบพฤติกรรมของฝูงแมลง (Swarm Based Optimization Algorithm) โดยลักษณะเด่นของอัลกอริทึมในกลุ่มนี้ จะใช้หลักการในการสุ่มค่าตัวแปรด้วยจำนวนประชากรจำนวนหนึ่งเข้าไป แล้วนำผลลัพธ์มาทำการคำนวณ คัดเลือกและปรับค่า แล้วคำนวณวนรอบซ้ำไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ค่าที่เหมาะสมในที่สุด

ลักษณะของฝูงผึ้งในธรรมชาติ ผึ้งในธรรมชาติจะบินออกไปหาอาหารในระยะทางไกลมากกว่า 14 กิโลเมตรในหลาย ๆ ทิศทางพร้อม ๆ กันเพื่อที่จะสำรวจหาแหล่งอาหาร เพื่อให้ได้อาหารจำนวนมากฝูงผึ้งจะถูกส่งให้ไปสำรวจหาแหล่งอาหารที่มีอาหารอุดมสมบูรณ์ ตามทฤษฎีแหล่งที่มีดอกไม้ซึ่งให้ปริมาณน้ำหวานจากเกสรสูงและมีคุณภาพดี ก็จะมีผึ้งจำนวนมากกว่าที่บริเวณอื่น เช่นเดียวกันกับบริเวณที่มีแหล่งอาหารน้อยกว่าและคุณภาพต่ำกว่า ก็จะมีผึ้งจำนวนที่น้อยกว่าในบริเวณนั้น

ขบวนการในการหาอาหารของผึ้งเริ่มต้นจากการส่งผึ้งสังเกตการณ์ (Scout Bees) ไปสำรวจหาแหล่งดอกไม้ ผึ้งสังเกตการณ์จะบินสุ่มไปยังที่หนึ่งและสุ่มย้ายไปยังที่อื่น ๆ ในช่วงฤดูเก็บเกี่ยวอาหาร ฝูงผึ้งจะสุ่มสำรวจหาแหล่งอาหารไปเรื่อย ๆ เมื่อผึ้งสังเกตการณ์บินกลับมาที่รัง ผึ้งตัวที่พบแหล่งอาหารที่มีคุณภาพสูงกว่ามาตรฐาน เช่น มีส่วนประกอบของน้ำตาลสูง จะนำน้ำหวานมาเก็บแล้วไปยังลานเต้น (Dance Floor) เพื่อทำการเต้นที่เรียกว่า “เต้นแกว่ง’” (Waggle Dance)

การเต้นนั้นมีความสำคัญสำหรับการสื่อสารของฝูงผึ้งเป็นอย่างมาก เนื่องจากผึ้งจะใช้การช่วงระหว่างการเต้นสื่อสารข้อมูลสามชุดที่เกี่ยวกับแหล่งของดอกไม้นั่นคือ ทิศทางของดอกไม้ระยะทางที่ห่างจากรังและระดับคุณภาพของน้ำหวาน ซึ่งข้อมูลเหล่านี้ จะทำให้ผึ้งตัวอื่นบินออกไปหาแหล่งดอกไม้ได้อย่างแม่นยำโดยไม่ต้องมีแผนที่ ฝูงผึ้งจะนำข้อมูลที่ได้จากการสำรวจภายนอกแต่ละชุดมาสื่อสารระหว่างกันในช่วงที่ทำการเต้นแกว่ง แล้วเปรียบเทียบทั้งในด้านของคุณภาพของอาหารและพลังงานที่จะต้องใช้ในการออกไปหาอาหาร หลังจากการเต้นแกว่งในลานเต้น ผึ้งสังเกตการณ์ก็จะกลับไปยังแหล่งดอกไม้ ร่วมกับผึ้งตัวอื่น ๆ ซึ่งอยู่ในรัง ผึ้งจำนวนมากกว่าจะถูกส่งไปยังบริเวณที่เชื่อว่าจะมีอาหารที่มีคุณภาพสูงกว่า และเช่นเดียวกัน ผึ้งจำนวนน้อยกว่าก็จะถูกส่งไปยังพื้นที่ ๆ เชื่อว่ามีอาหารคุณภาพต่ำกว่า ซึ่งจากวิธีการนี้ จะทำให้ฝูงผึ้งหาอาหารได้อย่าง

รวดเร็วและมีประสิทธิภาพ ซึ่งการเต้นแกว่งเพื่อสื่อสารข้อมูลของแหล่งอาหารของผึ้งแสดงได้ดังภาพที่ 2.12

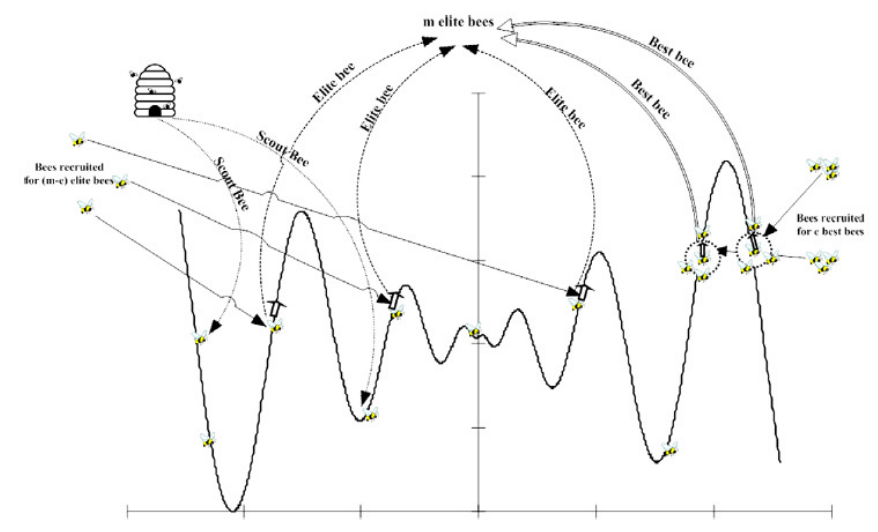


ภาพที่ 2.12
การเต้นแกว่งของผึ้งเพื่อสื่อสารข้อมูลของแหล่งอาหาร
ที่มา : Guney และ Onay / Expert Systems with Applications

หลังจากที่หาอาหารกลับมา ผึ้งก็จะดูระดับปริมาณอาหารของแหล่งดอกไม้ ซึ่งสำคัญสำหรับการตัดสินใจในการเต้นแกว่งครั้งต่อไปเมื่อกลับมาที่รัง ถ้าแหล่งดอกไม้ยังดีพอที่จะใช้เป็นแหล่งอาหาร ผึ้งก็จะยังเข้าไปสื่อสารข้อมูลของแหล่งนี้ในช่วงเต้นแกว่ง และก็จะมีผึ้งจำนวนมากขึ้นถูกส่งไปยังแหล่งอาหารนี้อีก วิธีบีส์อัลกอริทึมเป็นอัลกอริทึมที่ใช้ในการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด โดยได้แรงบันดาลใจมาจากพฤติกรรมในการหาอาหารตามธรรมชาติของฝูงผึ้งนั้น อัลกอริทึมจะประกอบไปด้วยกลุ่มของพารามิเตอร์ ที่ต้องการซึ่งกำหนดชื่อเพื่อใช้ในการคำนวณนั่นคือ

1. จำนวนของผึ้งสังเกตการณ์ (Number of Scout Bees, n)
2. จำนวนพื้นที่ ๆ เลือกจาก n พื้นที่ ๆ ผึ้งสำรวจ (Number of Sites Selected out of n Visited Sites, m)

3. จำนวนพื้นที่ ๆ ดีที่สุดจาก m พื้นที่ ๆ เลือก (Number of Best Sites out of m Selected Sites, e)
4. จำนวนผึ้งที่ส่งไปที่พื้นที่ e พื้นซึ่งดีที่สุด (Number of Bees Recruited for Best e Sites, nep)
5. จำนวนผึ้งที่ส่งไปที่พื้นที่ m-e ที่เหลือจากกลุ่มที่ดีที่สุด (Number of Bees Recruited for the other m-e Selected Sites, nsp)
6. ขนาดตั้งต้นของแหล่งอาหารซึ่งประกอบด้วยแหล่งอาหารและพื้นที่ใกล้เคียง (Initial Size of Patches, ngh)
7. เกณฑ์ในการหยุด (Stopping Criteria)




ภาพที่ 2.13

ตัวอย่างการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดโดยบีส์อัลกอริทึม (n=10, m=5, e=2, nep=3, nsp=1)

ที่มา: Ozbakir และคณะ (2010)

**2.1.7 วิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียง (Variable Neighborhood Search)**

Mladenovic และ Hansen (1997) ได้นำเสนอวิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียง (Variable Neighborhood Search, VNS) ซึ่งเป็นวิธีการแก้ปัญหาและการออกแบบรวมถึงการประยุกต์ ใช้วิธีการทาง Heuristic สำหรับปัญหาที่มีความหลากหลายทางด้านปัจจัย ข้อกำหนดปัญหาต่าง ๆ ที่ซับซ้อน และปัญหาที่ไม่มีทิศทางในการหาค่าที่ดีที่สุดได้ด้วยวิธีทาง Heuristic หรือ Meta Heuristic ทั่วไป เช่น Simulated Annealing, Tabu Search, Genetic Search และอื่น ๆ โดยจะพัฒนาปัญหาจากค่าเริ่มต้นที่ดีที่สุด (Local Optimum) และพัฒนาปรับปรุงจนกระทั่งได้ค่าที่ใกล้เคียงค่าที่ดีที่สุดและมากที่สุด แต่อย่างไรก็ตามการอ้างเหตุผลที่ใช้จากค่าปัจจัยสุ่มเริ่มต้นนั้นเป็นการยากที่จะหาจุดเด่นที่ได้ผล ที่จะนำไปสู่การหาค่าที่แท้จริงได้ ดังนั้นจึงได้คิดค้นวิธีสร้างความสัมพันธ์ที่ยังไม่มีเหตุผลขึ้นมา คือการเปลี่ยนค่าในระหว่างตัวใกล้ ๆ กันในการค้นหาคำตอบ ซึ่งเป็นปัจจัยเริ่มต้นในการคิดค้นวิธีนี้

การหาค่าเริ่มต้นของสมการหลายปัจจัยในการหาค่าที่ดีที่สุดนั้นการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นอย่างแรกก็คือ การเปลี่ยนลำดับของค่าปัจจัยในผลคำตอบเริ่มต้นการปรับปรุงในแต่ละครั้งต่อไปโดยดูจากค่าผลลัพธ์ของสมการเป้าหมาย ซึ่งได้จากค่าที่ดีที่สุดเริ่มต้น นั่นคือในกฎและครั้งที่ทำการปรับปรุงคำตอบของ X ในกลุ่มของเครือญาติ Ncx ที่ค่า X นั้นอยู่ ถ้าไม่มีการค้นพบวิธีการปรับปรุงที่ดีขึ้น ในปีต่อ ๆ มา วิธีการ ฮิวริสติก (Heuristics) แบบต่าง ๆ หรือวิธีเมตาฮิวริสติก (Meta-Heuristic) ได้พยายามแก้ไขลักษณะ และทิศทางของคำตอบให้มีทางเลือกมากขึ้นในการหาคำตอบ และการสร้างโอกาสในการเลือกคำตอบมากขึ้น

ในที่นี้ได้นำเสนอวิธีการพื้นฐานและเป็นวิธีเมตาฮิวริสติก (Meta Heuristic) ที่มีประสิทธิผลโดยนำเสนอระบบจัดการเปลี่ยนแปลงค่าปัจจัยข้างเคียง ในขั้นตอนของการหาค่าเริ่มต้นโดยวิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียง ไม่ได้เปลี่ยนแปลงไปในทิศทางที่เป็นวิธีหรือเป็นวงโคจรแต่เป็นการกระจายระยะทางที่เพิ่มขึ้นในการหาค่าปัจจัยในระบบเครือญาติของคำตอบ และมีการกระโดยจากจุดเดิมไปจุดใหม่ ซึ่งจะมีการปรับปรุงคำตอบให้ดีขึ้น ในทิศทางของคำตอบและลักษณะของคำตอบที่เกิดขึ้น ยกตัวอย่างเช่น จำนวนปัจจัยทั้งหมดในคำตอบของค่าที่ดีที่สุดจะถูกจัดเก็บและถูกใช้ในคำตอบของระบบการสับเปลี่ยนในระบบข้างเคียง แต่อย่างไรก็ตามคำตอบที่ออกมาในแต่ละรอบจะถูกประยุกต์ และทำซ้ำจากระบบข้างเคียงเพื่อให้ได้คำตอบที่ดีขึ้น

ปี 2001 Mladenovic และ Hansen ได้ทำการสรุปทฤษฎีของวิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียงมาทำการประยุกต์ในรูปแบบต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหาในรูปแบบที่แตกต่างกันอันได้แก่ Variable Neighborhood Decomposition Search (VNWS), Skew Variable Neighborhood Search

(SVNS), Reduce Variable Neighborhood Search (RVNS) และ Fast Interchange Algorithm (FIA) ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาแบบดั้งเดิมในการแก้ปัญหาที่มีขนาดใหญ่ นำมาประยุกต์กับวิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียงในขั้นตอนการหา Local Search เพื่อใช้ในการแก้ปัญหา 5 รูปแบบอันได้แก่

1. Traveling Salesman Problem (TSP)
2. The P-median Problem (PM)
3. The Multi – source Weber Problem (MW)
4. The Minimum sum – of – squares Clustering Co partitioning Problem (MSSC)
5. The Bilinear Programming Problem with Bilinear Constraints (BBLP)

จากการทดลองในรูปแบบของปัญหาต่าง ๆ ดังที่กล่าวมา สามารถแสดงเห็นถึงสมรรถนะและประสิทธิภาพของวิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียงและการประยุกต์ในรูปแบบอื่นเปรียบเทียบกัน ทฤษฎีของวิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียงที่เป็นการค้นหาโดยการเปลี่ยนปัจจัยข้างเคียงอย่างเป็นระบบ จะพบว่าวิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียงเป็นระบบที่เข้าใจได้ง่าย และมีกระบวนการที่แตกต่างจากหลายวิธีการอื่น ๆ ทางฮิวริสติก (Heuristics) หรือมีความแตกต่างกันบ้างในตัวของหลักการณ์การค้นหาคำตอบที่มีความหลากหลาย และบางครั้งที่มีใช้ปัจจัยข้างเคียงซึ่งกระบวนการเหล่านั้นเป็นส่วนหนึ่งของทฤษฎีพื้นฐาน ยกตัวอย่างเช่น การผสมผสานวิธีการหาคำตอบกับวิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียง ในการทดลองกับปัญหา PM และ WM พบว่า มีสมรรถภาพที่จะแก้ปัญหาที่มีปัจจัยจำนวนมาก และให้ผลของคำตอบใกล้เคียงกับค่าที่ดีที่สุด ดังนั้นนักวิชาการจำนวนมากจึงได้นำวิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียง ไปพัฒนาเพื่อแก้ปัญหาในระบบอื่น ๆ อีกมากมาย ซึ่งพบว่า มีประสิทธิภาพในการหาคำตอบในระบบโดยใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ

วิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียงและการประยุกต์ มีวิธีการหาคำตอบโดยใช้หลักการพื้นฐานซึ่งเข้าใจได้ง่าย และมีรูปแบบที่ไม่จำเป็นต้องใช้ปัจจัยทำให้ทฤษฎีมีความยืดหยุ่นสูงที่จะประยุกต์ใช้ในคำตอบหรือรูปแบบของปัญหาต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา PM, MW, MSSC และปัญหาอื่น ๆ โดยสามารถสร้างระบบการหาค่า และมีเสถียรภาพในการจัดการกับปัญหาเหล่านั้นได้ดีและยังสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาในด้าน Graph Theory ได้ด้วย

การพัฒนาของวิธีสำรวจตัวแปรข้างเคียงจากนิยามพื้นฐานทำให้เกิดการผสมและปรับปรุงให้วิธีการต่าง ๆ หาคำตอบได้ดียิ่งขึ้น และใกล้เคียงคำตอบที่ดีที่สุดเพื่อสร้างความรวดเร็วในการแก้ปัญหา

## 2.2 วรรณกรรมปริทัศน์ที่เกี่ยวข้อง

Matsumoto, Du และ Lindsey (2002) ได้ศึกษาและนำซิมเพล็กซ์แบบวิธีการอนุกรมมาการเพิ่มประสิทธิภาพความสามารถในการใช้เพื่อการค้นหาเงื่อนไขปรับปรุงสำหรับปฏิกิริยาทางเคมี และได้พัฒนารูปแบบของซิมเพล็กซ์เป็นแบบอัตโนมัติที่ใช้กับเวิร์กสเตชันอุปกรณ์การทางทดลองทางเคมีเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพ โดยได้ได้พัฒนาเป็นการทดสอบเป็นโมดูลสำหรับการค้นหาของซิมเพล็กซ์ในรูปแบบขนาน (Parallel Simplex Search) โดยซิมเพล็กซ์ค้นหาแบบขนาน (PSS) จะมีโมดูลของซิมเพล็กซ์ที่ประกอบด้วยหลายหลาย ๆ ส่วน และการค้นหาจะดำเนินการในลักษณะที่ทำงานร่วมกัน จากคุณลักษณะที่รวมเข้าด้วยกันได้ของ สองโปรแกรมทำให้ซิมเพล็กซ์สามารถทำหลายรายการของการค้นหาในพื้นที่หนึ่ง ๆ ดังนั้นจึงทำให้การค้นหาแบบขนานมีเพิ่มประสิทธิภาพสำหรับการทดลอง การใช้ซิมเพล็กซ์ค้นหาเริ่มจากหลายจุดในพื้นที่ค้นหาจะลดความเป็นไปได้ของค่าที่ไม่ใช่คำตอบที่ดีและยังทดลองเกี่ยวกับเทมเพลทที่ใช้ในการค้นหาพื่อที่จะนำมาเป็นตัวเลือกโมดูลของวิธีการแบบขนาน (PSS) สำหรับใช้กำหนดเงื่อนไขของวิธีการซิมเพล็กซ์ในการเคลื่อนย้ายและตลอดจนระบุจุดเริ่มต้นในการค้นหาพื้นที่และเกณฑ์การสิ้นสุดของแต่ละซิมเพล็กซ์

Fan และ Zahara (2007) ได้ทำการศึกษาการนำไปใช้งานของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex) ที่นำเสนอโดยนิลเดอร์ (Nelder) และมีท (Mead) มาผสมกับวิธีการของ Particle Swarm Optimization, PSO สำหรับการค้นหาที่ไม่มีเงื่อนไขของข้อจำกัด ซึ่งการผสมกันสามารถทำได้ง่ายในทางปฏิบัติและเพิ่มประสิทธิภาพความรวดเร็วและแม่นยำยิ่งขึ้นในที่การจะลู่เข้าสู่ค่าที่ดีที่สุด โดยผลลัพท์ที่ได้จากการทดลองผ่านคอมพิวเตอร์วิธีแบบผสมของ NM – PSO ให้ผลลัพท์ที่ดีกว่าวิธีของซิมเพล็กซ์ และ PSO ต้นฉบับในด้านโซลูชั่นที่มีคุณภาพและอัตราการลู่ การเปรียบเทียบผลรายงานส่วนใหญ่ยังคงเป็นที่ยอมรับว่า NM-PSO มีประสิทธิภาพในการหาค่าดีที่สุดเหมาะสมที่สุดของโซลูชั่นและเพิ่มประสิทธิภาพสำหรับการค่าปัญหาแบบไม่มีข้อจำกัดทรัพยากร (Unconstrained) อีกด้วย

Zi-Wu และคณะ (2007) ได้นำเสนออีกรูปหนึ่งของนำเอาวิธีของซิมเพล็กซ์ (Simplex) มาผสมกับวิธีของการปรับปรุงกลไกพันธุกรรม (Genetic Algorithm, GA) ที่เรียกว่า Hybrid Simplex-improved Genetic Algorithm, HSIGA เพื่อการเพิ่มประสิทธิภาพในแก้ปัญหาของ Global Numerical โดยทำการทดลองหาคำตอบที่เป็นค่าดีที่สุดเหมาะสมที่สุดจาก 10 สมการของปัญหาและเจอว่าวิธีของการผสมสามารถหาค่าเหมาะสมหรือได้ค่าที่ใกล้เคียงกับค่าที่ดีที่สุดของ

ทุก ๆ สมการที่นำมาทดสอบ ทั้งนี้การผสมยังทำให้กลไกขอการทำงานเป็นไปในลักษณะที่มั่งคงไม่มีความแปรปรวน และผลจากการเปรียบเทียบกับวิธีการค้นหาแบบอื่น ๆ วิธีของ HSIGA ยังได้ผลที่กว่าอีกหลาย ๆ วิธีที่นำมาศึกษาก่อนหน้านี้

Olsson และคณะ (1975) ได้ทำการศึกษาการนำไปใช้งานของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex) ที่นำเสนอโดยนิลเดอร์ (Nelder) และมีท (Mead) เพื่อจะแสดงให้เห็นถึงตัวอย่างการนำไปใช้งานสำหรับการหาคำตอบแบบค่าที่น้อยที่สุดที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในรูปแบบของสมการ 6 รูปแบบที่แตกต่างกัน ได้แก่ สมการลอการิทึมที่มากที่สุดของฟังก์ชันไลค์ลิฮูด (Maximization of Logarithm of a Likelihood Function) สมการที่ไม่เป็นเส้นตรง (Non-Linear simultaneous equation) สมการที่มากที่สุดที่ขึ้นอยู่กับข้อจำกัด (Maximization subject to constrain) สมการเส้นตรงกำลังสองน้อยสุดด้วยความผิดพลาดภายในปัจจัยคู่ (Linear Least-Square with error in both variable) สมการเส้นตรงกำลังสองน้อยสุด (Non-Linear Least Square) และข้อมูลฟิตติงทาบูลา (Fitting Tabular Data) โดยจุดหลักของการนำไปใช้งานนี้ คือ วิธีของวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex) ที่นำเสนอโดยนิลเดอร์ (Nelder) และมีท (Mead) มีความแม่นยำ และง่ายกับการป้อนข้อมูลสำหรับประยุกต์ใช้ในคอมพิวเตอร์ อีกทั้งวิธีการนี้มีความสามารถที่จะนำไปใช้ในแก้ปัญหาการหาค่าคำตอบที่เหมาะสมที่สุด (Optimization problem) ที่หลากหลายโดยไม่ต้องนำไปปรับเปลี่ยนเมื่อจะใช้กับปัญหานั้น ๆ แต่อย่างไรก็ตามการป้อนค่าที่มากเกินไปในสมการจุดมุ่งหมายสามารถทำให้เกิดการเคลื่อนที่ ๆ ไม่ถูกต้องและนำไปสู่การหยุดที่ไม่เหมาะสมในการเคลื่อนที่ครั้งต่อไปได้ ทั้งนี้ผู้เขียนยังได้แนะนำว่าวิธีการนี้ไม่เหมาะสำหรับปัญหาที่มีขอบเขตมาก โดยถ้ามีปัจจัยในการทดลองสำหรับปัญหาน้อยกว่า 18 ปัจจัย วิธีการนี้สามารถใช้งานได้ดี

Hedlund และ Gustavsson (1999) กล่าวถึง การหาค่าที่ดีที่สุดของการขยายตัว (Expansion) การสะท้อน (Reflection) การหดตัว (Contraction) และ พารามิเตอร์ A min / Amax ต้องใช้วิธีซิมเพล็กซ์ 2 วิธีในการทดสอบประกอบด้วยวิธีแบบนอก (Outer Method) และวิธีแบบใน (Inner Method) โดยจุดยอดของวิธีซิมเพล็กซ์แบบนอกจะถูกใช้เพื่อกำหนดเป็นค่าพารามิเตอร์ของวิธีแบบใน โดยค่าปกติที่ใช้กำหนดค่าการขยายตัวการสะท้อนและการขยายตัวจะถูกกำหนดไว้ที่ (2, 1 และ 0.5) ตามลำดับ ส่วนพารามิเตอร์ Amin / Amax ที่แตกต่างกันหลายค่าจะถูกนำไปใช้เป็นตัวกำหนดจุดศูนย์กลาง (Center of Gravity) ในตอนเริ่มต้นของการทำงานของวิธีซิมเพล็กซ์แบบนอก พารามิเตอร์จะถูกทำให้ดีที่สุดด้วยวิธีวิธีซิมเพล็กซ์แบบในที่แตกต่าง2 วิธีคือแบบ A ที่ความถดถอยได้ถูกควบคุม และแบบ B ที่แปลงแล้ว (B / Translation) ที่ความถดถอยได้ถูกควบคุมเช่นกันเกณฑ์ที่ใช้ในการพิจารณาเพื่อเปรียบเทียบจะประกอบไปด้วย 4 หัวข้อหลักคือ การ

ประเมินจากการขยายตัว-หดตัวที่แตกต่าง การประเมินจากการวัดค่าความถดถอยที่แตกต่างทางศักยภาพของซิมเพล็กซ์เมื่อเกณฑ์ Amin / Amax เสมือนเป็นข้อจำกัดในการวัดความถดถอย การประเมินพารามิเตอร์สำหรับการหาคำตอบที่ดีที่สุด และการหาค่าที่ดีที่สุดจะเสร็จสิ้นก็ต่อเมื่อค่าพารามิเตอร์แต่ละตัวในวิธีซิมเพล็กซ์แบบนอกมีค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานสัมพันธ์ (Relative Standard Deviation) น้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้ที่ 0.1% จากการทดลองจะพบว่าไม่สามารถใช้การขยายซ้ำในการพัฒนาความสามารถและทิศทางการหาคำตอบของวิธีซิมเพล็กซ์ได้ ยกเว้นการขยายซ้ำที่ถูกรวมกับวิธีซิมเพล็กซ์แบบ B ที่แปลงแล้วนั้นสามารถนำไปใช้กับสมการพื้นผิวตอบสนองที่มีรูปแบบอย่างง่าย ๆ เช่น สมการพื้นผิวพาราโบลิคได้ส่วนข้อจำกัดด้านความถดถอยอาจจะใช้ในการปรับปรุงทิศทางการหาคำตอบได้ส่วนพารามิเตอร์ Amin / Amax เสมือนว่าเป็นตัวเลือกที่ดีที่สุดสำหรับการเป็นข้อจำกัดในด้านความถดถอยถ้ากำหนดค่าไว้ต่ำมาก ๆ และสามารถนำไปใช้เป็นข้อจำกัดสำหรับสมการทั้ง 4 แบบได้และเมื่อทำการเปรียบเทียบวิธีแบบ A และแบบ B ที่แปลงแล้วแสดงให้เห็นว่าวิธีแบบ A มีความเสถียรและมีความน่าเชื่อถือในการหาพื้นที่ที่ดีที่สุดได้ ส่วนวิธีแบบ B ที่แปลงแล้ว เสมือนว่าเป็นวิธีปกติที่สามารถให้ค่าการขยายตัว ค่าการหดตัว และคา การสะท้อนที่ใกล้เคียงกับค่าปกติที่ได้ตั้งไว้ในตอนแรก

Pulgarin และคณะ (2002) ได้นำวิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาด (Modified Simplex Method, MSM) ซึ่งเป็นนวัตกรรมในการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับงานที่เกี่ยวข้องกับเคมีภัณฑ์ด้านเทคนิคการส่องสว่าง (Luminescence Technique) งวิธีการจะดำเนินอยู่บนพื้นฐานของการหาคำตอบที่ดีที่สุดทางงานเคมีวิจัยและค่าความผันแปรของเครื่องมือวัดที่จะส่งผลกระทบต่อการวัดค่าสัญญาณแสงฟอฟอรัส Phosphorescence) ซึ่งวิธีซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาดนั้นเป็นวิธีที่วิเคราะห์ได้ง่ายและรวดเร็วต่อการแก้ไขปัญหาในงานด้านนี้มากที่สุด โดยในการทดลองจะใช้วิธีซมเพล็กซ์แบบรูปทรงเรขาคณิต (Geometric Simplex) ในสองและสามทิศทางของพื้นที่เพื่อใช้ค้นหาคำตอบและได้กำหนดสารที่ใช้ในการทดลองเป็นตัวยาแอนติไฮเปอร์เทนซีฟ (Novel Antihypertensive Drug) ความเข้มข้นของนาฟโทพิดิล (Naftopidil Concentration) และยูรีนและเซรุ่ม (Urine and Serum) โดยจะเริ่มกระตุ้นระบบสัญญาณแสงฟอสฟอรัสในห้องที่มีการควบคุมอุณหภูมิซึ่งการกระตุ้นระบบดังกล่าวนี้จะทำให้สามารถวิเคราะห์ถึงเมตริกซ์ซึ่งเป็นโครงสร้างที่ซับซ้อนภายในระบบของไหลชีววิทยาได้ โดยที่วิธีการไม่แตกต่างจากกระบวนการวิเคราะห์แบบดังเดิม ส่วนการทดสอบจะกระทำโดยตรงกับนาฟโทพิดิล (Naftopidil) ในของไหลชีววิทยาซึ่งจะแสดงผลในรูปของค่าความหนาแน่นของสัญญาณแสงฟอฟอรัส (Phosphorescence Intensity) ที่ค่าการกระจายของคลื่นความยาว (Emission Wavelength) อยู่

ในช่วงความยาวของคลื่นที่กำหนดไว้ที่ 287 และ 525 นาโนเมตรและด้วยวิธีการทดลองที่กล่าวมาส่งผลให้ค่าสัญญาณ (Signal) หรือความยาวคลื่นของสัญญาณแสงฟอฟอรัสแสดงค่ามากที่สุด ท้ายสุดในงานวิจัยนี้ได้นำวิธีการหาค่าถดถอยกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square Regression) มาใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาเส้นตรง (Straight Line) และ กำหนดข้อมูลของการทดลอง (Fitted the Experimental Data) ส่วนค่าการวัดซ้ำ (Repeatability) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานสำหรับการวัดซ้ำได้ถูกนำมาใช้พิจารณาประกอบการทดลองด้วยเช่นกัน ซึ่งผลของเส้นค่าถดถอย (Regression) ที่ได้แสดงให้เห็นถึงความเป็นโฮโมซิดาสทิคซิตี้ (Homocedasticity) ซึ่งบ่งบอกเป็นนัยว่าความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของนาฟโทพิดิล และค่าความหนาแน่นของสัญญาณแสงฟอฟอรัส มีความสัมพันธ์กันเป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ได้ตั้งไว้

Tomas Oberg (1998) ได้กล่าวถึง วิธีซิมเพล็กซ์แบบต่อเนื่อง (Sequential Simplex Method) เป็นเทคนิคการหาคำตอบมีประสิทธิภาพ และเป็นวิธีที่นิยมนำไปใช้ในการแก้ปัญหาทางด้านเคมีและวิศวกรรมเคมี โดยวิธีการของซิมเพล็กซ์จะถูกนำไปใช้เพื่อการทดลองหาสภาพที่ดีที่สุด (Optimum Condition) เพื่อปรับปรุงประสิทธิภาพของกระบวนการเคมี (Improve Process Efficiency) คุณภาพของตัวผลิตภัณฑ์ (Product Quality) และสำหรับงานวิจัยนี้จะแสวงหาถึงอิทธิพลของรูปแบบเมตริกส์ลำดับที่หนึ่ง (First Design Matrix) ภายใต้สภาพการทดลองจำลอง (Simulated Experimental Condition) โดยรวมไปถึงสิ่งรบกวน (Noise) และผลกระทบร่วมระหว่างปัจจัย (Interaction Effects) ในการทดลองจะเริ่มจากการเลือกสมการพื้นผิวตอบสนอง 2 สมการซึ่งเป็นสมการแบบโพลิโนเมียล (Polynomials Response) โดยทั้งสองแบบประกอบด้วยสมการที่มีปัจจัยที่ต้องควบคุม 4 ตัวและแบบที่มีปัจจัยควบคุม 7 ตัว โดยแต่ละสมการจะป้อนค่าสิ่งรบกวนรูปแบบการกระจายแบบปกติที่ 1% และ 5% และเพื่อเป็นการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้งานวิจัยจะนำวิธีการทดลอง 2 วิธีคือ วิธีเฟล็ทเชอร์ แอนด์ พาเรล เฮลิคอล วัลเลย์ แบบมาตรฐาน (Fletcher and Parallel’s Helical Valley Standard Test) และวิธีเม็คคานิสติคแบบไม่เป็นเส้นตรงสำหรับการจำลองการกวนสารเคมีอย่างต่อเนื่องในถังผสม (Mechanistic Nonlinear Model Simulating a Continuous Stirred Tank Reactor) โดยทั้งสองวิธีดังกล่าวจะมีการใส่ค่าสิ่งรบกวนและมีปัจจัยควบคุม 3 ตัว คือ อัตราการไหล (Flow Rate) ความเข้มข้นของตัวเร่งและอุณหภูมิ (Catalyst Concentration & Temperature) และ ปัจจัยตอบสนอง (Response Variable) ส่วนการประเมินผลจะพิจารณาจากรูปร่างของรูปแบบเมตริกส์ลำดับที่หนึ่งใน 3 ลักษณะที่เกิดจากการตั้งค่าที่แตกต่างกันคือแบบคอร์นเนอร์ (Cornered) แบบไทเทิล (Title) และแบบอ๊อพติมอล (Optimal) โดยจากผลการทดลองพบว่ารูปแบบที่สร้างเมตริกส์ลำดับที่หนึ่งนั้น (ทั้งแบบคอร์นเนอร์

ไทเทิล และอ๊อพติมอล) ไม่มีอิทธิพลต่อการทำงานของวิธีเฟล็ทเชอร์ แอนด์ พาเรล เลยซึ่งอาจจะเกิดจากจำนวนการทดลองที่น้อยเกินไป แต่กลับสร้างอิทธิพลที่คล้ายคลึงกันมากสำหรับวิธีซิมเพล็กซแบบต่อเนื่อง และวิธีเม็คคานิสติคแบบไม่เป็นเส้นตรงในทิศทางที่พัฒนาคำตอบได้ดีขึ้น ท้ายที่สุดงานวิจัยได้แนะนำว่าผลการทดลองทั้งหมดจะขึ้นอยู่กับการเลือกใช้สมการพื้นผิวตอบสนองหลาย ๆ แบบในการทดสอบเพื่อความแตกต่างรวมถึงการนำสิ่งรบกวนเข้าไปรวมและจำนวนรอบในการทดสอบก็เป็นปัจจัยที่สำคัญ

อนิสา ชลายนเดชะ (2003) ได้ศึกษาการจำลองวิธีการแก้ไขปัญหาด้วย วิธีการซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาด (Modified Simplex Algorithm) และวิธีการสตีพเพสแอสเซนท์ (Steepest Ascent Method) ด้วยคอมพิวเตอร์ โดยใช้แบบจำลองปัญหาแบบกลวิธีพื้นผิวตอบสนอง เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ เช่น สมการพาราโบลิค สมการเช็คเกล และสมการโรเซ็นบรอค ซึ่งสมการที่ใช้ประกอบด้วยปัจจัย 2 ถึง 4 ปัจจัย นอกจากนั้นยังประกอบด้วยค่าความผิดพลาด หรือสิ่งรบกวน ที่มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตั้งแต่ 0 ถึง 3 ผลการศึกษาพบว่าวิธีการซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาด และวิธีการสตีพเพสแอสเซนท์ สามารถหาคำตอบของผลตอบสนองที่เหมาะสมที่สุดภายใต้ระบบที่ไม่มีสิ่งรบกวน ในกรณีระบบที่มีสิ่งรบกวน 1 ถึง 3 วิธีการซิมเพล็กซ์แบบปรับขนาดสามารถหาคำตอบ ที่ค่าเฉลี่ยของคำตอบไม่แตกต่างกันมาก แสดงให้เห็นถึงความสามารถในการทนต่อสิ่งรบกวนได้ค่อนข้างดี แต่ต้องเพิ่มจำนวนครั้งในการทดลองขึ้นเมื่อสิ่งรบกวนสูงขึ้น ส่งผลเสียในแง่ของเวลาที่ใช้ โดยที่ไม่ทำให้ผลตอบสนองที่ได้มีค่าสูงขึ้น ส่วนวิธีการสตีพเพสแอสเซนท์ กลับพบปัญหาจากการหยุดการทดสอบ เนื่องจากผลกระทบจากพื้นผิวของสมการกำลังสอง (Quadratic Effect)

Phamและคณะ (2006) ได้นำเสนออัลกอริทึมชนิดที่ใช้ประชากรสุ่มค้นหาที่เรียกว่าบีส์อัลกอริทึม (The Bees Algorithm) ซึ่งอัลกอริทึมชนิดนี้ได้แนวคิดมาจากพฤติกรรมการหาอาหารตามธรรมชาติของผึ้ง ซึ่งอัลกอริทึมมีลักษณะเด่นในด้านการค้นหาพื้นที่ข้างเคียง (Neighborhood Search) ที่ให้ความสำคัญสูงในพื้นที่ ๆ มีโอกาสพบคำตอบที่ดีที่สุดสูง และต่ำในพื้นที่ ๆ มีโอกาสน้อยกว่าและยังมีการใช้การสุ่มค้นหาร่วมด้วยเพื่อโอกาสในการพบความน่าจะเป็นในที่อื่น ๆ

Phamและคณะ (2009) ได้ทำการใช้บีส์อัลกอริทึมในการปรับค่าพารามิเตอร์ของชุดควบคุมฟัซซี่ลอจิกชุดควบคุมถูกพัฒนาให้การควบคุมหุ่นยนต์อะโครเบติก ให้มีความเสถียรภาพและสมดุลในในตำแหน่งที่ถูกต้อง ผลการจำลองแสดงให้เห็นว่าการใช้บีส์อัลกอริทึมปรับปรุงฟังก์ชั่นของฟัซซี่ลอจิกทำให้ชุดควบคุมมีคุณสมบัติดีขึ้นโดยมีประสิทธิภาพคงที่และมีค่าความแปรปรวนที่ค่อนข้างน้อยมากในการปรับแต่งค่าของชุดควบคุม

Horng (2010) ได้ทำการศึกษาการนำเอาบีส์อัลกอริทึมมาใช้ในการหาค่าที่ดีที่สุดสำหรับกระบวนการคำนวนการปรับระดับค่า Threshold ของภาพ ซึ่งเป็นกระบวนการที่สำคัญมากในหน่วยของการประมวลผลของภาพ โดยการศึกษานี้ได้นำเอาวิธีการอื่น ๆ มาเป็นตัวเปรียบเทียบถึงผลที่ได้จากการทดลองด้วย ได้แก่ วิธี Particle Swarm Optimization (PSO) และ Fast Otsu's method ซึ่งผลที่ได้จากศึกษาพบว่า วิธีของบีส์อัลกอริทึมสามารถหาค่าระดับของ Threshold ที่เหมาะสมเข้าใกล้ค่าที่ดีที่สุดดีว่าแบบอื่น ๆ และเวลาที่ใช้ในการประมวลผลก็ต่ำกว่า

Guney และ Onay (2010) ได้นำเอาบีส์อัลกอริทึมมาศึกษาในการใช้สำหรับเพื่อการป้องกันการรบกวนของแผงเสาอากาศเชิงเส้นโดยการควบคุมเฟส (Phase) อย่างเดียวและควบคุมทั้งความกว้าง (Amplitude) และเฟส (Phase) สำหรับผลการจำลองรูปแบบ Chebyshev ให้ผลที่ดีโดยพบว่าสัญญาณที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับสัญญาณตั้งต้นลดการรบกวน Noise ได้

Sumrat และคณะ (2009) ได้นำเสนอการประยุกต์ใช้เทคนิคของบีส์อัลกอริทึม สำหรับการแก้ปัญหาในอุตสาหกรรมการผลิตอุปกรณ์เซมิคอนดักเตอร์ (MESFET) ในการลดทอนสัญญาณเล็ก ๆ ในวงจรเสมือนของอุปกรณ์ MESFET โดยศึกษาครั้งนี้ได้นำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับวิธีการของ PSO โดยเปรียบเทียบเกี่ยวกับการคำนวณเวลาและคุณภาพของโซลูชั่น ซึ่งผลที่ได้พบว่าการลดทอนสัญญาณโดยบีส์อัลกอริทึมให้ผลที่ดีกว่า ระบบมีความเสถียรและค่าความผิดพลาดที่น้อยกว่า รวมถึงเวลาที่ในกระบวนการด้วยเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับวิธีของ PSO

Qinghua และคณะ (2006) ได้นำเสนอวิธีการรวมวิธีฮาร์โมนีเซิร์ช วิธีการผสมผสานเจเนติก (Hybrid Genetic Algorithm, HGA) วิธีซิมเพล็กซ์และวิธีทาบู โดยการนำเอาวิธีการผสมผสานเจเนติกมาเป็นวิธีเริ่มต้นในการแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไข (Constrained Function) และใช้วิธีฮาร์โมนีเซิร์ชมาเป็นส่วนประกอบในการเลือกขนาดของกลุ่มคำตอบ และการสุ่มหาค่าคำตอบโดยใช้ ตัวแปรตัดสินใจ (HMCR) เป็นความน่าจะเป็นในการเลือกคำตอบจากขนาดของความจำและจากนั้นก็นำค่าที่ได้มาทำการมูเตชัน (Mutation) และการครอสโอเวอร์ (Crossover) เพื่อทำการสลับตำแหน่งเพื่อหาคำตอบโดยทำการสร้างตัวแปรปรับระดับ (PAR) เพื่อสร้างโอกาสในการพัฒนาคำตอบให้มีค่าที่ดียิ่งขึ้น หลังจากการพัฒนาโครโมโซมเสร็จสิ้นก็ได้เลือกค่าของโครโมโซมที่ดีที่สุดมาทำการหาค่าผลตอบสนองโดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในการปรับปรุงคำตอบให้ดียิ่งขึ้นและใช้วิธีทาบู มาผสมผสานเพื่อสร้างความหลากหลายในการทำซ้ำที่จุดเพื่อสร้างคำตอบที่ดีที่สุด โดยการทดลองในสมการที่เป็นเงื่อนไข พบว่าในการรวมจุดแข็งของแต่ละวิธีสร้างวิธีที่ผสมผสานขึ้นมาทำให้การหาค่าที่ดีที่สุดทั้งคำตอบเริ่มต้น (Local Search) และคำตอบที่ดีที่สุด (Global Search) ดีมากขึ้น และสามารถแก้ปัญหาตัวอย่างที่นำมาทดลองได้ทั้งประสิทธิภาพและประสิทธิผล

Lee และ Geem (2004) ได้ทำการประยุกต์วิธีฮาร์โมนีเซิร์ชมาทำการวิเคราะห์ปัญหาสมการเกี่ยวกับโครงสร้างที่ตัวแปรมาก ๆ เพื่อต้องการหาค่าที่ดีที่สุดในการออกแบบ โดยการหาภาระงานที่น้อยที่สุดในจุดที่รับแรงมากที่สุดในโครงสร้าง เพื่อที่จะให้การออกแบบตรงตามความต้องการ และประหยัดที่สุดโดยมีปัจจัยอันประกอบด้วยค่าความดัน (Stress) การสลับแทนที่ (Model Display Cement) จำนวนส่วนประกอบต่าง ๆ เป็นต้นโดยทำการเปรียบเทียบ วิธีฮาร์โมนีเซิร์ช กับวิธีเกรเดียน (Gradient – Based Mathematical Optimization Algorithm) โดยพบว่าวิธีฮาร์โมนีเซิร์ชนั้น สามารถแก้ปัญหาได้มีประสิทธิภาพคำตอบที่ออกมาให้ค่าที่ดีกว่าวิธีเกรเดียน หลังจากนั้นได้นำวิธีฮาร์โมนีเซิร์ชเปรียบเทียบกับวิธีเจเนติกพบว่า การที่วิธีฮาร์โมนีเซิร์ชมีลักษณะโครงสร้างที่เป็นปัจจัยหลักคือ ตัวแปรตัดสินใจ (HMCR) และตัวแปรปรับระดับ ( PAR ) มีความได้เปรียบกว่าวิธีเจเนติกที่มีการสลับกันแค่สองกลุ่มในหมู่เครือญาติเท่านั้น จึงได้นำทั้ง 2 วิธีมาวิเคราะห์ในสมการโครงสร้างที่มีเงื่อนไขห้ามเปลี่ยนรูปร่างของโครงสร้างนั้น ๆ (Fixed Geometry) โดยวิธีพื้นฐานของทั้งวิธีฮาร์โมนีเซิร์ช และวิธีเจเนติกพบว่า วิธีฮาร์โมนีเซิร์ชสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพและสามารถหาค่าที่ดีที่สุดของสมการวัตถุประสงค์ได้ดีกว่า วิธีเจเนติก

Mahdavi และคณะ (2007) ได้ทำการปรับปรุงพื้นฐานของวิธีฮาร์โมนีเซิร์ชโดยการวิเคราะห์หาจุดอ่อนของวิธีฮาร์โมนีเซิร์ชนั่นคือ การกำหนดค่าความน่าจะเป็นที่เป็นตัวแปรหลักของทฤษฎีที่เป็นค่าคงที่นั่นคือ ตัวแปรตัดสินใจ (HMCR) และตัวแปรปรับระดับ (PAR) รวมถึง ช่วงการปรับระดับ (Distance Band Width) ที่มีค่าอยู่ระหว่าง [ -1,1 ] โดยทำการสร้างทฤษฎีในการปรับค่าของตัวแปรปรับระดับและช่วงของการปรับระดับ เพราะเป็นค่าตัวแปรที่เป็นค่าคงที่ในการปรับเปลี่ยนสถานะของการปรับปรุงฮาร์โมนีใหม่ (New Harmony) เป็นสมการที่มีการปรับเป็นเปลี่ยนแบบพลวัตร (Dynamic) ตามรอบของการค้นหาคำตอบ โดยทำการทดสอบวิธีกับสมการที่มีข้อจำกัดทางทรัพยากรและไม่มีข้อจำกัดทางทรัพยากรพบว่า การปรับเปลี่ยนนี้ทำให้การค้นหาคำตอบสามารถทำได้กว้างขึ้นและสามารถค้นหาคำตอบได้ละเอียดมากขึ้น และยังสามารถค้นหาคำตอบในสมการได้อย่างมีประสิทธิภาพและมีความหลากหลายสามารถแก้ไขสมการตัวอย่างได้ทุกรูปแบบ

Chenga และคณะ (2008) ได้นำวิธีฮาร์โมนีเซิร์ชแก้ปัญหาพื้นผิว โดยใช้การวิเคราะห์ความลาดชัน (Slip Surface Generation Methods For Slope Stability Analysis ) โดยทำการปรับปรุงจากวิธีฮาร์โมนีเซิร์ช โดยความคาดหวัง 2 ประการ อย่างแรกคือ ความแตกต่างของความน่าจะเป็นในแต่ละฮาร์โมนี (Harmony) กล่าวคือ ค่าผลตอบสนองจากสมการวัตถุประสงค์ถ้าความน่าจะเป็นที่สุ่มขึ้นมามีค่าสูงกว่าค่าที่ตั้งไว้ก็จะทำการสร้างฮาร์โมนีใหม่ต่อไป โดยฮาร์โมนี

ในขนาดของความจำจะถูกจัดลำดับจากมากไปน้อยหรือจากน้อยไปมากโดยมาจากสมการวัตถุประสงค์ว่าต้องการค่าสูงที่สุด (Maximization) หรือค่าต่ำที่สุด (Minimization) และความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นก็จะเป็นตัวเลือกในการสร้างฮาร์โมนีใหม่ต่อไป อย่างที่สองมีการปรับปรุงในการค้นหาฮาร์โมนีใหม่ทุก ๆ ครั้งที่มีการทำซ้ำ โดยจะมีความแตกต่างจากวิธีฮาร์โมนีเซิร์ช ที่จะทำซ้ำถ้าเลขสุ่มที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยกว่า ตัวแปรตัดสินใจ (HMCR) จากการทดลองกับปัญหาข้างต้นพบว่าวิธีฮาร์โมนีเซิร์ชเป็นวิธีที่หาคำตอบได้รวดเร็วสำหรับปัญหาขนาดไม่ใหญ่มากด้วยจำนวนตัวแปรไม่เกิน 25 ตัวแปร แต่วิธีฮาร์โมนีเซิร์ชชนิดปรับปรุง (MHS) สามารถหาคำตอบสำหรับปัญหาที่มีขนาดใหญ่มากได้อย่างมีประสิทธิภาพ และมีความน่าเชื่อถือสูงพร้อมทั้งยังใช้จำนวนตัวอย่างในการทดลองน้อยกว่า

Mahamed และคณะ (2008) ได้นำวิธีฮาร์โมนีเซิร์ชมาปรับปรุงให้เป็นชนิดโกลบอล (Global – Best Harmony Search, GHS ) โดยใช้แนวคิดของ ความสามารถของแมลง (Swarm Intelligence) มาทำการปรับปรุงประสิทธิภาพของวิธีฮาร์โมนีเซิร์ช โดยการนำเอาลักษณะเฉพาะของระบบอนุภาค (PSO System) คือ ลักษณะเฉพาะของการบินของฝูงแมลงในพื้นที่ ๆ ต้องการค้นหา (Particles) ในแต่ละครั้งก็จะได้คำตอบขึ้นมาหนึ่งคำตอบ จุดนั้น ๆ ก็จะมีผลต่อจุดอื่น ๆ ว่าเป็นจุดที่ดีที่สุดหรือเปล่า ดังนั้นวิธีฮาร์โมนีเซิร์ชชนิดโกลบอลจะทำการปรับปรุงการปรับระดับของตัวแปร (PAR) ของวิธีฮาร์โมนีเซิร์ช เมื่อฮาร์โมนีใหม่มีค่าผลตอบสนองที่ดีที่สุดใน ฮาร์โมนีของขนาดความจำ โดยแทนค่าตัวแปรช่วงการปรับระดับ (Bw) ทั้ง 2 ค่า และเพิ่มขนาดจำนวนที่จัดเก็บลงในฮาร์โมนี โดยการปรับปรุงนี้ทำให้วิธีฮาร์โมนีเซิร์ชชนิดโกลบอลสามารถหาคำตอบที่มีประสิทธิภาพได้มากขึ้น ทั้งในสมการที่มีข้อจำกัดและไม่มีข้อจำกัดของทรัพยากรรวมถึงสมการเชิงเส้นด้วย ได้ทำการทดลองกับสมการพื้นผิวพบว่าสามารถหาค่าได้ทุกสมการ แต่ก็มีผลกระทบจากค่าตัวแปร 2 ตัวคือ ตัวแปรตัดสินใจ (HMCR) และขนาดของความจำ (HMS) ถ้าตัวแปรตัดสินใจ (HMCR) มีค่ามาก ๆ ทำให้ขนาดของความจำ (HMS) ไม่ค่อยเปลี่ยนแปลง แต่ถ้าตัวแปรตัดสินใจ (HMCR) มีค่าน้อยสามารถที่จะสร้างฮาร์โมนีใหม่ได้ดีกว่าและขนาดของความจำ (HMS) มีขนาดเล็กเป็นทางเลือกที่ดีกว่า ในกรณีของตัวแปรปรับระดับ (PAR) ควรจะมีค่าน้อย ๆ เพื่อทำให้การปรับปรุง ของวิธีฮาร์โมนีเซิร์ชชนิดโกลบอลดีขึ้น