บทคัดย่อ

228046

เป็นที่ประจักษ์ชัดแล้วว่า ผลการแปลงเวฟเลตทั้งแบบต่อเนื่องและแบบไม่ต่อเนื่องเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับความไม่ราบเรียบรายจุด อย่างไรก็ตาม ลักษณะที่เหมือนกันของฟังก์ชันเวฟเลตที่สเกลต่างๆ กันทำให้ผลการแปลงเวฟเลตไม่ใช่เครื่องมือที่เหมาะสมในการตรวจจับความไม่ราบเรียบบนเส้นตรง หรือเส้นโค้ง ไม่นานมานี้ผลการแปลงที่คล้ายเวฟเลตและใช้สเกลเชิงพาราโบลา เช่น ผลการแปลงของฮาร์ทสมิธ และผลการแปลงเคิร์ฟเลต ได้ถูกคิดค้นขึ้นและประสบความสำเร็จในการนำมาใช้ตรวจจับขอบในภาพถ่าย ดังนั้นเราจึงต้องการศึกษาหาวิธีในการใช้ผลการแปลงเหล่านี้ในการตรวจจับความไม่ราบเรียบบนเส้นตรงหรือเส้นโค้ง ในโครงการนี้เราได้ค้นพบเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่พอเพียงที่จะทำให้ฟังก์ชันใน $L^2(R^2)$ มีความราบเรียบแบบโฮลเดอร์ที่กำหนดให้ทั้งแบบรายจุดและแบบสม่ำเสมอ ผลที่ได้มีความคล้ายคลึงกับการตรวจจับความราบเรียบด้วยผลการแปลงเวฟเลตต่อเนื่อง นั่นคือเงื่อนไขที่ได้เป็นเงื่อนไขในรูปขอบเขตของผลการแปลงทั้งสอง ณ สเกลต่าง โดยเฉพาะอย่างยิ่งสเกลละเอียด อย่างไรก็ตามการสเกลเชิงพาราโบลาของผลการแปลงทั้งสองทำให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่พอเพียงมีความแตกต่างกัน ทั้งในกรณีของความราบเรียบรายจุดและแบบสม่ำเสมอ และมีความแตกต่างกันมากกว่าในกรณีรายจุด เรายังได้ศึกษาฟังก์ชันซึ่งมีความราบเรียบค่อนข้างสูงในทิศทางหนึ่งๆ และมีความราบเรียบต่ำในทิศทางตั้งฉาก ผลที่ได้คือเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่พอเพียงในรูปของขอบเขตของผลการแปลงทั้งสอง เงื่อนไขทั้งสองมีความคล้ายคลึงกันมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรวยที่ส่งผล (cones of influence) ปัญหาที่น่าสนใจในการศึกษาวิจัยต่อไปมีมากมายเช่น 1) สำหรับผลการแปลงที่ใช้สเกลเชิงพาราโบลาอื่นๆ ทฤษฎีที่ได้จะมีความคล้ายคลึงหรือแตกต่างกันอย่างไร 2) สำหรับฟังก์ชันที่มีความราบเรียบต่ำในทิศทางตั้งฉากกับเส้นโค้งหนึ่ง และมีความราบเรียบค่อนข้างสูงในทิศทางของเส้นโค้งนั้น เงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่พอเพียงในรูปของขอบเขตของผลการแปลงทั้งสองจะเป็นเช่นไร 3) ทฤษฎีที่ได้นี้จะสามารถนำไปพัฒนาเป็นเทคนิคการตรวจจับขอบได้หรือไม่ อย่างไร

Abstract

228046

Wavelet transforms, both continuous and discrete, have proved to be a very efficient tool in detecting point singularities. However, due to its isotropic scaling, wavelet transforms are not ideal tools in detecting one-dimensional singularities like singularity lines or curves. Recently, wavelet-like transforms with parabolic scaling, such as Hart Smith's and curvelet transforms, were introduced and applied successfully in edge detection. Our goal is then to investigate how these transforms can be used in detecting point, line, and curve singularities. New necessary and new sufficient conditions for an $L^2(R^2)$ function to possess Hölder regularity, uniform and pointwise, with exponent $\alpha > 0$ are given. Similar to the characterization of Hölder regularity by the continuous wavelet transform, the conditions here are in terms of bounds of the Smith and curvelet transforms across fine scales. However, due to the parabolic scaling, the sufficient and necessary conditions differ in both the uniform and pointwise cases, with larger gap in pointwise regularities. Naturally, global conditions for pointwise singularities can be weakened. We then investigate functions with sufficiently smooth background in one direction and potential singularity in the perpendicular direction. Specifically, sufficient and necessary conditions, which include the special case with one-dimensional singularity line, are derived for pointwise Hölder exponent. Inside their "cones" of influence, these conditions are practically the same, giving near-characterization of direction of singularity. There are many interesting research problems worth investigating in the future such as 1) For other transforms with parabolic scaling, do similar theorems hold? 2) For functions with low regularity in the direction perpendicular to a given curve and sufficiently smooth background in the direction of the curve, what are sufficient and necessary conditions in terms of upper bounds of its transform. 3) Can and, if yes, how these theorems be developed into an edge detection algorithm?